Biodiversity Heritage Library

http://www.biodiversitylibrary.org/

Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.
Bruxelles.
http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550

ser.3:t.16 (1888): http://www.biodiversitylibrary.org/item/109996

Article/Chapter Title: Rapport de Mémoire sur quelques formules de calcul intégral par M. Beaupain
Author(s): Eugène Catalan
Page(s): Page 15, Page 16, Page 17, Page 18, Page 19

Contributed by: Missouri Botanical Garden, Peter H. Raven Library
Sponsored by: Missouri Botanical Garden

Generated 26 November 2015 2:13 AM
http://www.biodiversitylibrary.org/pdf4/045745300109996

This page intentionally left blank.

employé, sur le *facies* de la raie jaune sodique et de la raie brune lithique. J'engage M. Fievez à soumettre d'autres raies, et spécialement la raie verte thallique, aux mêmes épreuves, pour s'assurer s'il est permis de tirer une conclusion générale des observations.

Je me joins à mon savant confrère, M. Spring, pour proposer à la Classe d'ordonner l'insertion du travail de M. Fievez dans le *Bulletin* de la séance, et j'ai l'honneur de proposer en outre de voter des remerciements à l'auteur pour sa communication. »

M. J. C. Houzeau, troisième commissaire, adopte les conclusions des rapports de ses deux savants confrères.

Elles sont mises aux voix et adoptées aussi par la Classe.

Mémoire sur quelques formules de calcul intégral, par J. Beaupain, Docteur ès sciences, Ingénieur au corps des Mines.

Rapport de M. Catalan.

I.

« Dans le Mémoire qu'il a présenté à l'Académie, M. Beaupain s'occupe, en premier lieu, des intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos qx dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \sin qx dx,$$

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \cos qx dx, \quad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^p x \sin qx dx,$$

considérées par divers Géomètres, parmi lesquels il faut citer Serret. La méthode adoptée par M. Beaupain n'est peut-être pas nouvelle, mais il en fait d'heureuses applications. Ainsi, pour déterminer la première intégrale, le jeune Docteur observe que l'on a, en série convergente,

$$2^p \cos^p x \cos qx = \sum_{k=0}^{k=\infty} C_{p,k} \cos(q-p+2k)x;$$

et, par conséquent,

$$2^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos qx dx = \sum_{k=0}^{k=\infty} C_{p,k} \frac{\left[\sin(q-p+2k)x\right]_0^{\frac{\pi}{2}}}{q-p+2k},$$

ou

$$2^p \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos qx dx = \sin\left[(q-p)\frac{\pi}{2}\right] \sum_0^{\infty} (-1)^k \frac{C_{p,k}}{q-p+2k}.$$

Et comme la somme de cette série auxiliaire est

$$\frac{1}{2}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1-x)^p dx;$$

on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \cos qx dx = \frac{\sin(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} B\left(\frac{q-p}{2}, p+1\right) (*). \quad (1)$$

(*) Bien entendu, M. Beaupain détermine les conditions de convergence de toutes les séries qu'il emploie.

De même,

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \sin qx\,dx = &-\frac{\cos(q-p)\frac{\pi}{2}}{2^{p+1}} B\left(\frac{q-p}{2}, p+1\right)\\ &+\frac{1}{2^{p+1}}\int_0^1 x^{\frac{q-p}{2}-1}(1+x)^p\,dx;\end{aligned}\right\}(2)$$

etc.

II.

La formule (2) donne lieu à un rapprochement assez curieux. D'après Serret (*) :

$$\left.\begin{aligned}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^p x \sin qx\,dx = &\frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma\left(\frac{p+q}{2}+1\right)\Gamma\left(\frac{p-q}{2}+1\right)}\\ &\times\int_0^1 \frac{t^{\frac{p-q}{2}}-t^{\frac{p+q}{2}}}{(1+t)^{p+1}(1-t)}\,dt\ (^{**}).\end{aligned}\right\}(3)$$

La formule (2) suppose $q-p>0$; la formule (3), $q-p<2$. Si donc cet argument est *entier*, il ne peut

---

(*) *Journal de Liouville*, tome VIII, p. 7.

(**) A l'endroit cité, le second membre contient deux fautes signalées par M. Beaupain. D'ailleurs, nous remplaçons, dans la formule de Serret, m par p, n par q, afin de faciliter la comparaison.

différer de 1. Dans ce cas, on trouve, par un simple changement de variables,

$$\int_0^1 \frac{1-\beta^{2p}}{(1+\beta^2)^p(1-\beta^2)}d\beta = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2^p\,\Gamma(p)}\int_0^1 (1+\alpha^2)^{p-1}d\alpha; \quad (4)$$

et, si p est un *nombre entier*,

$$\int_0^1 \frac{1+\beta^2+\beta^4+\cdots+\beta^{2p-2}}{(1+\beta^2)^p}d\beta = \frac{\Gamma(p+\frac{1}{2})\sqrt{\pi}}{2^p\,\Gamma(p)}\int_0^1 (1+\alpha^2)^{p-1}d\alpha \text{ (*)} \quad (5)$$

III.

Après ces études sur des résultats connus en partie, M. Beaupain cherche les valeurs des intégrales

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r x \cos^s x \cos qx\,dx, \qquad \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^r x \cos^s x \sin qx\,dx;$$

intégrales que je crois *nouvelles* (**). Il la fait dépendre,

---

(*) Dans les *Mélanges mathématiques*, nous développerons ce sujet.

(**) Dans *Bierens de Haan* (T. LXII), on trouve ces *deux seuls* cas particuliers :

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x \sin(p+q)x\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\sin\frac{p\pi}{2},$$

$$\int_0^{1} \sin^{p-1} x \cos^{q-1} x \cos(p+q)x\,dx = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)}\cos\frac{p\pi}{2}.$$

très simplement, des intégrales à *différentielles algébriques* :

$$\int_0^1 x^{\frac{q-r-s}{2}-1}(1-x)^r(1+x)^s dx, \quad \int_0^1 x^{\frac{q-r-s}{2}-1}(1+x)^r(1-x)^s dx, \text{ etc.};$$

intégrales que l'on pourrait appeler *ultra eulériennes,* et dont il fait connaître quelques propriétés. Chemin faisant, le jeune Géomètre rencontre la transcendante

$$\int_0^1 \frac{(1+x)^r(1-x)^s-(1-x)^r(1+2)^s}{x}dx,$$

sur laquelle il se propose de revenir.

IV.

Cette analyse, très incomplète, du Mémoire de M. Beaupain, suffira, je l'espère, à montrer qu'il est fort intéressant. En conséquence, j'ai l'honneur d'en proposer l'impression dans le Recueil *in-quarto.* En outre, je prie la Classe de vouloir bien adresser des remerciements à l'auteur, afin de l'encourager à suivre la voie qu'il s'est ouverte. »

M. Mansion fait savoir qu'il se rallie, comme M. Le Paige, deuxième Commissaire, aux conclusions du rapport de M. Catalan ; « mais il engage vivement, ajoute-t-il, M. Beaupain à s'assurer directement, pour les séries qu'il soumet à une intégration, si elles sont *uniformément* convergentes; pour celles qu'il soumet à une dérivation, il y a lieu de prendre des précautions analogues. »

Les conclusions précitées sont mises aux voix et adoptées.

—