This page intentionally left blank.

— M. E. Catalan communique une *Seconde note sur les fonctions* X_n. — Commissaires : MM. De Tilly et Mansion.

CONCOURS ANNUEL (1886).

Aux termes du programme, le délai pour la remise des manuscrits expirait le 1er août courant.

Il a été reçu un seul mémoire répondant à la deuxième question des sciences naturelles : *Faire l'étude de quelques-unes des principales fonctions d'un animal invertébré.*

Ce travail porte pour titre : *Contributions à l'histoire physiologique de l'escargot,* et a pour devise une citation de Lavoisier, extraite de son premier mémoire sur la destruction du diamant, 1772. — Commissaires : MM. Plateau, Van Bambeke et Éd. Van Beneden.

RAPPORTS.

Théorèmes de mécanique céleste, indépendants de la loi de l'attraction; par M. Ch. Lagrange, astronome à l'Observatoire royal de Bruxelles.

Rapport de M. J. De Tilly, premier commissaire.

« Supposons qu'un point matériel M décrive une trajectoire peu différente d'une courbe plane. (J'introduis cette hypothèse, pour rester dans le cas le plus ordinaire de la mécanique céleste, bien que le mode de représentation adopté soit général.)

Considérons le plan qui contient la tangente MT et un pôle fixe P, assez voisin du plan osculateur moyen de la trajectoire. On peut assujettir ce plan PMT à suivre le mouvement de MT, en tournant constamment, autour des positions successives de PM, comme axes instantanés.

En même temps que le point M décrira sa trajectoire à double courbure dans l'espace, il décrira une trajectoire plane, et cependant peu différente de la première, dans le plan mobile PMT, ou plan de l'orbite.

Cette trajectoire peut être rapportée à une ligne fixe PF, dans le plan de l'orbite.

Ce plan lui-même est déterminé à chaque instant par l'angle que son intersection avec un plan fixe (ligne des nœuds) fait avec une droite fixe de ce dernier plan, puis par l'angle des deux plans.

Le mode de représentation que je viens de définir est particulièrement avantageux dans le *problème des trois corps*, où l'on recherche les mouvements relatifs de trois points matériels de masses données, soumis à leurs attractions réciproques. Chacun des trois est pris successivement pour pôle dans l'étude du mouvement des autres.

L'auteur du mémoire soumis à l'examen de la Classe s'est proposé de rechercher s'il existe, entre les éléments précédemment indiqués comme déterminant en chaque instant les situations des trois corps dans l'espace, quelques relations générales, indépendantes de la loi d'attraction et présidant aux mouvements relatifs de ces trois corps, relations qui reproduiraient, à l'état de cas particuliers, des théorèmes déjà connus pour l'attraction inversement proportionnelle au carré de la distance.

Il arrive à des résultats qui, en général, seraient difficiles à exprimer brièvement en langage ordinaire.

Je ferai exception pour les deux suivants :

A. Le mouvement, soit dans le plan fixe, soit dans le plan de l'orbite, de l'intersection de ces deux plans, par rapport aux deux droites fixes qui y servent respectivement de repères, se poursuit toujours dans le même sens; au contraire, l'angle des deux plans contient, dans son expression, des termes périodiques prépondérants, et subit des augmentations et des diminutions alternatives.

En remplaçant, dans la formule générale qui, pour une loi d'attraction arbitraire, exprime le mouvement du nœud, cette loi arbitraire par la loi de la nature, l'auteur retrouve, pour la vitesse de rétrogradation des nœuds de la Lune, le nombre expérimental connu.

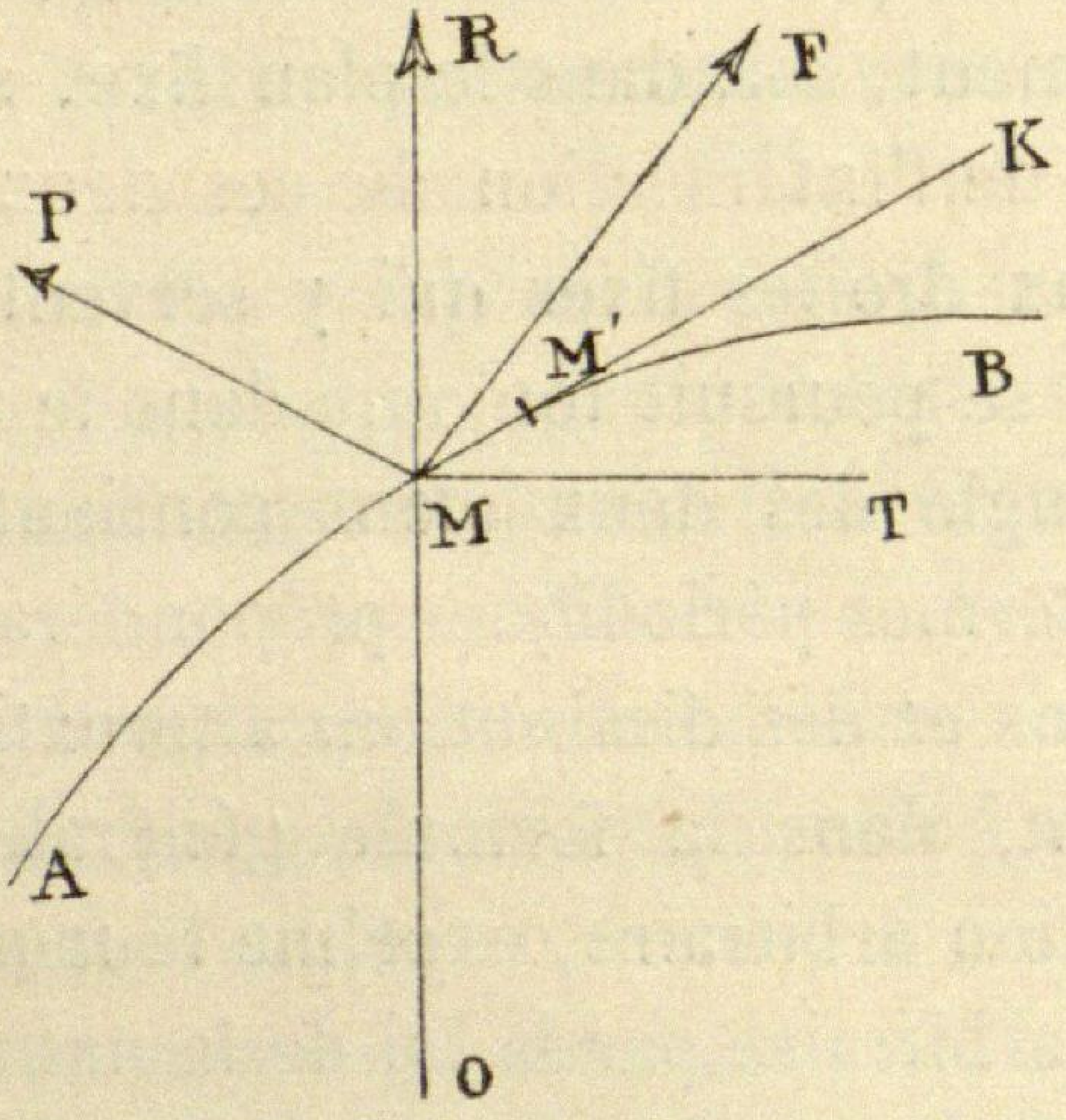
B. Parmi toutes les lois d'attraction en raison inverse d'une puissance entière de la distance, la loi de la nature était la seule qui pût rendre sensible pour nous la révolution des nœuds de notre satellite.

Ces propriétés sont des résultats de calcul, et je tiens à déclarer, à cette occasion, que je n'ai pu vérifier qu'une faible partie des calculs contenus dans le mémoire.

Mais, l'impression générale que son étude m'a laissée étant favorable, je crois pouvoir, sous la réserve qui précède, proposer à l'Académie de donner son approbation au nouveau travail de M. Lagrange, et d'adresser des remerciements à l'auteur. »

Rapport de M. E. Catalan, second commissaire.

« En désaccord avec M. De Tilly, notre savant vice-directeur, et obligé de critiquer la nouvelle œuvre d'un honorable Géomètre, déjà célèbre, je crois devoir commencer ce Rapport par quelques citations, accompagnées de remarques.



1. Soient : AMB la trajectoire (à double courbure) d'un point matériel M; MK la tangente à cette courbe; O un *pôle* fixe. L'Auteur considère (page 1) le plan OMK, tangent au cône C engendré par le rayon vecteur OM, et il le nomme : *plan de l'orbite*. Cette dénomination me semble très mal choisie (*). Pour abréger, je désignerai ce plan par la lettre Π.

2. Soit F la force qui sollicite le point M (**). On peut la décomposer en trois forces R, T, P : la première dirigée suivant OM; la deuxième, située dans le plan Π, et perpendiculaire à R; la troisième, normale au plan Π.

Au sujet de cette troisième composante, M. Lagrange s'exprime ainsi (page 2) :

« P,... dirigée de telle sorte que son action instantanée

(*) S'il arrivait que la trajectoire fût plane, il y aurait donc *deux plans de l'orbite !*

(**) L'Auteur dit : « *les forces* ». Mais, appliquées en un même point, elles ont une résultante.

» pour faire tourner le plan de l'orbite autour de la ligne » des nœuds » (*).

Cette phrase n'est ni claire ni correcte (**). Le plan Π ne tourne pas autour de la ligne des nœuds : il *roule* sur le cône C. Par conséquent, s'il tourne autour de quelque chose, c'est autour de la génératrice OM. En outre, le point O étant fixe, la composante P, si elle agissait seule, ferait tourner le plan Π autour d'une parallèle à MT, menée par le pôle.

3. « Les deux forces R et P déterminent, en chaque » instant, le mouvement du point dans le plan de l'orbite, » et la force P, le mouvement de ce plan lui-même, dans » l'espace » (page 3).

Qu'est-ce que *le mouvement du point* M, *dans le plan* Π ?

A chaque instant, la trajectoire AMB a un élément, MM′, situé dans la position *actuelle* du plan Π. Faisons rouler ce plan autour du cône C, et amenons-le dans une position *finale* Q. Comme il a entraîné, dans son mouvement, tous les éléments tels que MM′, la figure formée par ceux-ci sera, tout simplement, la *transformée de* AMB, *dans le développement du cône* C.

Ou je me trompe fort, ou voilà ce que M. Lagrange appelle *mouvement du point* M, *dans* Π.

Comment la composante P peut-elle *déterminer le mouvement du plan* Π, *dans l'espace ?* Encore une fois, *le plan* Π *roule sur le cône,* et ce mouvement n'est pas celui d'un plan contenant un point fixe, et sollicité par une force normale à ce plan.

(*) La *ligne des nœuds* est l'intersection OD du plan Π avec un *plan invariable,* passant au pôle.

(**) M. De Tilly a fait une remarque semblable.

4. « La position du point, dans le plan de l'orbite, » sera déterminée, en chaque instant, par la distance du » point au pôle, et par l'angle de ce rayon vecteur et » d'une *droite fixe* menée par le pôle, dans le plan de l'orbite » (page 2).

Pourquoi donner, à une *droite mobile,* le nom de *droite fixe?* Je dirai que la droite OX est un *axe.*

La courbe considérée par l'Auteur est encore la *transformée* de la trajectoire AMB; cette transformée est rapportée au pôle O et à *l'axe polaire* OX (*).

5. « Les trois éléments restants... dépendent essentiellement de la troisième composante P : on conçoit en » effet que, si cette composante était nulle, ces trois » éléments resteraient constants » (page 5).

De ce que la trajectoire est plane si P est nulle, s'ensuit-il que le mouvement de Π est dû uniquement à P? Comme le premier Commissaire, je crois pouvoir répondre : *non!*

6. « On voit aussi... que les différentielles ...... résul- » tent uniquement du déplacement angulaire que la force » P fait subir... au plan de l'orbite, autour du rayon » vecteur » (page 5).

Cette proposition, admissible, paraît contradictoire avec celle que l'Auteur a énoncée dans la page 2, et que nous avons contestée (n° 2).

7. Après ces préliminaires, M. Lagrange aborde le *problème des trois corps.* Comment, à part Villarceau, ne cite-t-il aucun de ses devanciers? Cependant, bon nombre d'illustres Géomètres ont étudié ce célèbre pro-

---

(*) Remarquons, en passant, que si le plan Π s'enroule sur le cône, OX se transforme en une *hélice conique.*

blème. N'ayant pas sous la main leurs ouvrages, je me borne à rappeler : 1° le premier volume de Legendre; 2° le mémoire de Liouville (tome IV du *Journal de mathématiques*), chef-d'œuvre d'analyse élégante; 3° le mémoire capital de Jacobi, intitulé : *Sur l'élimination des nœuds* (tome IX du même journal). Ces œuvres classiques ne contiennent-elles rien qui soit analogue aux recherches de M. Lagrange? Je dois me borner à lui poser cette question.

8. Dans les pages 8, 9, 10, l'honorable Auteur cherche l'expression de la composante P. Il ajoute, en note : « Il » ne paraît pas possible d'établir plus simplement que » par la marche précédente, l'expression de P. On peut » comparer... le procédé trigonométrique... aux développe» ments analytiques du mémoire de Villarceau. »

Sans faire tort à la mémoire de Villarceau, dont j'ai été l'ami pendant plus de trente ans, je puis dire qu'il n'avait pas le don de la *simplicité*. Ainsi, l'exemple choisi par M. Lagrange n'est peut-être pas probant.

D'ailleurs, sans recourir aux considérations de trigonométrie sphérique (très compliquées) dont il a fait usage, on voit, tout de suite, que les cosinus *directifs* de P sont donnés par les proportions

$$\frac{\cos\lambda}{y\,dz - z\,dx} = \frac{\cos\mu}{z\,dx - x\,dz} = \frac{\cos\nu}{x\,dy - y\,dx} = \pm\frac{1}{u\sqrt{ds^2 - du^2}}.$$

Si donc a, b, c sont les cosinus directifs de F :

$$\mathrm{P} = \pm\frac{1}{u\sqrt{ds^2 - du^2}}\sum a\,(y\,dz - z\,dx).$$

9 L'un des principaux théorèmes de M. Lagrange,

déjà signalé par le premier Commissaire, peut être énoncé ainsi :

L'inclinaison du plan Π, *sur le plan invariable, est une quantité périodique.*

D'après ce que l'on sait sur la trajectoire du centre de gravité de la Lune, ce théorème était probable *a priori*. En effet, cette trajectoire est, très sensiblement, une *épicycloïde à double courbure*. Si le pôle O est le centre du Soleil et que le plan invariable soit l'écliptique, le cône C présente une infinité d'*enroulements ;* donc l'inclinaison, qui a une infinité de maximums et de minimums, repasse, périodiquement, par les mêmes valeurs ; etc.

II.

Le résultat que je viens de citer, et les autres conclusions formulées par M. Lagrange, sont-ils assez considérables pour avoir *nécessité* trente-cinq pages de démonstrations et de calculs ? Il me semble que non. En conséquence, j'ai l'honneur de proposer que le Mémoire de M. Lagrange soit renvoyé à l'Auteur, afin qu'il y introduise de nombreuses améliorations, tant pour le fond que pour la forme : celle-ci laisse beaucoup à désirer. »

Spa, 31 juillet 1886.

La Classe adopte les conclusions de ces rapports.

—