RAPPORTS.

La Classe entend la lecture des rapports de MM. P.-J. Van Beneden, Briart et Dewalque sur le *Catalogue illustré des coquilles de l'éocène parisien*, par M. Maurice Cossmann, au sujet duquel une demande de subside avait été faite au Gouvernement par la Société royale malacologique de Belgique en vue de publier ce travail. — Les rapports seront envoyés à M. le Ministre de l'Agriculture, etc.

Détermination du reste, dans la formule de quadrature de Gauss; par M. Mansion, Correspondant de l'Académie.

Rapport de M. Catalan.

I.

En France, tous les professeurs de Mathématiques connaissent la *formule d'interpolation*, due à Newton :

$$y = y_0 + \frac{x - x_0}{h} \Delta y_0 + \frac{\frac{x - x_0}{h}\left(\frac{x - x_0}{h} - 1\right)}{1.2} \Delta^2 y_0 + \cdots \quad (1),$$

laquelle suppose que les valeurs *connues*, de la fonction y, répondent à

$$x = x_0,\ x = x_0 + h,\ x = x_0 - 2h, \ldots$$

Mais l'immortel créateur de la Mécanique céleste a considéré, en outre, le cas où les valeurs attribuées à x sont arbitraires (*). La formule (1) est alors remplacée par

$$f(x)=f(a)+(x-a)f(a,b)+(x-a)(x-b)f(a,b,c)+\cdots\ (2);$$

au moins quand $f(x)$ est un polynôme entier (**). Les coefficients $f(a,b)$, $f(a,b,c)$, ... appelés, par Ampère, *fonctions interpolaires*, sont des fractions rationnelles; savoir :

$$f(a,b)=\frac{f(a)}{a-b}+\frac{f(b)}{b-a},$$

$$f(a,b,c)=\frac{f(a)}{(a-b)(a-c)}+\frac{f(b)}{(b-a)(b-c)}+\frac{f(c)}{(c-a)(c-b)}+\text{etc.},(^{***})$$

Quand $f(x)$ n'est plus un polynôme entier, la formule (2) doit être complétée par un *reste*, dont Cauchy a trouvé une expression, analogue à la forme ordinaire du reste, dans la série de Taylor (IV).

II.

La formule (2) ne diffère pas, au fond, de la formule de Lagrange :

$$f(x)=f(a)\frac{(x-b)(x-c)\ldots}{(a-b)(a-c)\ldots}+f(b)\frac{(x-a)(x-c)\ldots}{(b-a)(b-c)\ldots}+\cdots\ (3);$$

et l'*identification* des deux se fait *à vue*. D'un autre côté,

---

(*) *Principes de la Philosophie naturelle*, traduction de Mme du Chastellet, t. II, p. 120. Je dois ce renseignement bibliographique à M. Mansion, ainsi que la plupart de ceux qui vont suivre.

(**) Cauchy, *Comptes rendus*, t. XI, pp. 783 et suivantes.

(***) *Annales de Gergonne*, t. XVI, pp. 329-349; Lacroix, *Calcul des différences*, t. III, p. 31. Ce savant Géomètre, ordinairement si exact, ne cite ni Newton ni Ampère.

(IV) *Loc. cit.*

depuis Cauchy, la formule (3) se démontre en quelques instants (*).

Au lieu de faire servir la formule de Newton à l'exposition de la formule de Gauss, ne serait-il pas plus court de conclure celle-ci de la formule de Lagrange? Je soumets la question à mon savant et honorable Confrère.

III.

Supposant

$$\psi(x) = \frac{f(X) - f(x)}{X - x},$$

M. Mansion donne, sous forme d'intégrale définie, l'expression, simple et remarquable, de $\psi^p(x)$. Partant de là, il met, sous une forme semblable à la précédente, la dérivée $p^{\text{ième}}$ d'une *fonction interpolaire* quelconque. Dans l'une des deux méthodes employées, un point m'a paru contestable. A propos d'une intégrale *imaginaire* A, M. Mansion dit, à peu près : « elle diffère, *aussi peu qu'on le veut,* de l'intégrale *imaginaire* B ». A proprement parler, *la différence entre deux imaginaires n'est ni grande ni petite;* mais, dans le cas particulier dont il s'agit, la phrase critiquée a une *définition :* elle est donc admissible.

IV.

La formule de Gauss, étudiée et perfectionnée par notre Confrère, donne la quadrature (exacte ou approchée) des *courbes paraboliques,* représentées par

$$y = \Delta_0 x^n + \Delta_1 x^{n-1} + \cdots + \Delta_n.$$

Le Géomètre de Gœttingen s'est proposé, surtout, cette

(*) *Manuel des Candidats à l'École polytechnique,* t. I, p. 205.

question : « *Comment doit-on prendre les abscisses* a, b, c, ... k, *pour que l'erreur, provenant de la formule approximative, soit un minimum?* (*) »

M. Mansion fait, pour la formule de Gauss, ce qu'ont fait Laplace et Liouville pour la série de Taylor; c'est-à-dire qu'au moyen des résultats trouvés ou rappelés au commencement de son Mémoire, notre Confrère *complète,* par une intégrale définie, cette formule de quadrature, laquelle devient applicable, ainsi, aux courbes non paraboliques.

V.

Il y a bien des années, Malmestein a publié, dans le *Journal de Crelle,* une démonstration de la *formule sommatoire d'Euler,* avec une expression du *reste,* sous forme d'*intégrale définie.* N'y aurait-il pas lieu de comparer la formule d'Euler, perfectionnée par Malmestein, avec la formule de Gauss, perfectionnée par M. Mansion? Voilà une question qui me paraît intéressante. Notre Confrère est fort en état de la résoudre.

VI.

En résumé, le nouveau travail de M. Mansion est, à mon avis, très digne d'être approuvé par l'Académie et imprimé dans l'un de ses recueils.

La Classe adopte ces conclusions, auxquelles MM. de Tilly et Le Paige se sont ralliés.

(*) Voir, par exemple, la Note intitulée : *Sur la quadrature des courbes paraboliques* (*Académie de Belgique,* Mémoires in-4°, t. XLIII); et, dans la *Nouvelle Correspondance mathématique* (t. VI), l'analyse d'une communication faite au Congrès de Reims. Je crois pouvoir rappeler que *ma* formule (?) est plus simple que celle de Gauss.