This page intentionally left blank.

COMMUNICATIONS ET LECTURES.

Questions d'Analyse indéterminée; par E. Catalan, Associé de l'Académie.

I.

De l'équation

$$u^2 = x^2 + y^2 + z^2.$$

1. L'identité connue

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2 + (2ac)^2 + (2bc)^2 \ (*) \qquad (1)$$

ne donne pas *toutes* les solutions de la proposée. Par exemple,

$$27^2 = 23^2 + 14^2 + 2^2.$$

Or, si l'on suppose

$$a^2 + b^2 + c^2 = 27, \quad a^2 + b^2 - c^2 = 23,$$

on trouve $c^2 = 2$ (**).

2. Si $c = \alpha^2 + \beta^2$, l'identité (1) peut être remplacée par

$$(a^2 + b^2 + c^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2)^2$$
$$+ [2a(\alpha^2 - \beta^2) \pm 4b\alpha\beta]^2 + [2b(\alpha^2 - \beta^2) \mp 4a\alpha\beta]^2. \qquad (2)$$

Il en résulte, en particulier :

$$(1^2 + 1^2 + 5^2)^2 = (1^2 + 1^2 - 5^2)^2 + (6 + 8)^2 + (6 - 8)^2,$$

(*) Le Besgue, Chabanel et Catalan, *Nouvelles Annales*, 1874, pp. 111 et 521; Neuberg, *Nouvelle Correspondance*, p. 195.

(**) Évidemment, on ne peut essayer $a^2 + b^2 - c^2 = 14$, ni $a^2 + b^2 - c^2 = 2$.

ou

$$27^2 = 23^2 + 14^2 + 2^2;$$

comme ci-dessus.

3. Considérons les solutions *primitives*, c'est-à-dire les solutions dans lesquelles *les nombres entiers* x, y, z, u *sont premiers entre eux*. Quand il en est ainsi, *deux*, au moins, *des nombres* x, y, z *sont premiers entre eux*. Cela posé, *toutes les solutions primitives* (*) *résultent de l'identité*

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2)^2 + \left[2(ac \pm bd)\right]^2 + \left[2(ad \mp bc)\right]^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

4. D'après l'identité (3) : *Si* u² *est la somme de trois carrés*, u *est*, ORDINAIREMENT, *la somme de quatre carrés*.

5. De l'identité (3) on déduit, par une permutation tournante :

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (c^2 + b^2 - a^2 - d^2)^2 + \left[2(ac \pm bd)\right]^2 + \left[2(cd \mp ab)\right]^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

$$(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)^2 = (b^2 + d^2 - a^2 - c^2)^2 + \left[2(cd \pm ab)\right]^2 + \left[2ad \mp bc)\right] \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

En conséquence :

Dans une infinité de cas, un carré est décomposable, en trois carrés, de six manières différentes (**).

(*) Abstraction faite, peut-être, du facteur 2. Pour que l'on n'ait pas à le supprimer, il suffit que $a^2 + b^2$, $c^2 + d^2$ soient de *parités contraires*.

(**) Pour que ce nombre 6 ne soit pas réduit, *les nombres* a, b, c, d *doivent être inégaux; ils ne doivent pas appartenir à une progression par quotient;* etc. Les valeurs les plus simples, satisfaisant à ces conditions, sont

$$a = 5, \quad b = 3, \quad c = 2, \quad d = 1;$$

d'où résulte $u = 39$.

Exemple :

$$63^2 = 53^2 + 34^2 + 2^2,$$
$$63^2 = 53^2 + 22^2 + 26^2,$$
$$63^2 = 37^2 + 34^2 + 38^2,$$
$$63^2 = 37^2 + 22^2 + 46^2,$$
$$63^2 = 43^2 + 46^2 + 2^2,$$
$$63^2 = 43^2 + 38^2 + 26^2.$$

6. 1° ***Des trois nombres*** x, y, z, ***un seul est impair;*** 2° ***un, au moins, des quatre nombres*** u, x, y, z, ***est divisible par*** 3; 3° ***si*** u ***est multiple*** de 3, ***aucun des nombres*** x, y, z ***n'est divisible par*** 3.

II.

De l'équation

$$(x^2 + y^2 + z^2)^2 = X^2 + Y^2 + Z^2.$$

7. Des solutions se déduisent, comme on l'a vu, des identités (1), (2). Voici un autre système de formules qui donnent, également, une *infinité* de solutions, mais non *toutes* les solutions :

$$\left.\begin{aligned} x = p(a+b),\quad y = q(a-b),\quad z &= a^2 + b^2, \\ X &= [(a+b)^2 - q^2]\,[(a-b)^2 - p^2], \\ Y &= 2(a+b)q\,[(a-b)^2 + p^2], \\ Z &= 2(a-b)p\,[(a+b)^2 - q^2]. \end{aligned}\right\} \quad (6)$$

Les nombres entiers a, b, p, q sont assujétis à *la seule* condition

$$pq = 2ab\,(*) \quad \ldots\ldots\ldots \quad (7)$$

(*) Les formules (6) résultent de l'identité

$$[(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2)]^2 =$$
$$[(\alpha_1^2 - \beta_1^2)(\alpha_2^2 - \beta_2^2)]^2 + [2\alpha_1\beta_1(\alpha_2^2 + \beta_2^2)]^2 + [2\alpha_2\beta_2(\alpha_1^2 - \beta_1^2)]^2.$$

Mémoire sur certaines décompositions en carrés (*Atti dell' Accademia pontificia*., 1884, p. 58).

8. Si cette condition est remplie, on a donc, *identiquement* :

$$\left.\begin{aligned}&[(a+b)^2p^2+(a-b)^2q^2+(a^2+b^2)]^2\\&=[(a+b)^2-q^2]^2[(a-b)^2-p^2]^2\\&+4(a+b)^2q^2[(a-b)^2+p^2]^2\\&+4(a-b)^2p^2[(a+b)^2-q^2]^2\end{aligned}\right\}\quad (8)\ (*)$$

9. *Application.* a = 3, b = 2, p = 3, q = 4. On trouve :

$$x=15,\ y=4,\ z=15,\ X=-72,\ Y=400,\ Z=54;$$

puis

$$(15^2+4^2+15^2)^2=72^2+400^2+54^2,$$

ou

$$410^2=168\,100=5\,184+160\,000+2\,916\ (**).$$

Une récréation arithmétique (***) ; par E. Catalan, Associé de l'Académie.

Soient p, q *deux nombres premiers : supposons* q *supérieur à* p. *Soit* δ *un diviseur de* q — p, *et* a *un nombre entier donné. Si l'on considère la progression*

$$a,\ a+\delta,\ a+2\delta,\ a+3\delta,\ \ldots;$$

(*) Si l'on cherche à *simplifier* cette égalité, on trouve qu'elle devient

$$(p^2q^2-4a^2b^2)\left[p^2q^2+2a^4+2b^4+2(a+b)^2p^2+2(a-b)^2q^2\right]=0.$$

a, b, p, q étant *des nombres*, la condition (7) est donc *nécessaire et suffisante*.

(**) Encore une solution qui ne résulte pas de l'identité (1).

(***) Suggérée par l'un de ces jeux de cartes appelés *patiences*.