Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.

Bruxelles.
http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550

ser.3:t.4 (1882): http://www.biodiversitylibrary.org/item/90110

Article/Chapter Title: Rapport sur la division d'un angle ou d'un arc quelconque en trois parties progressives et proportionnelles par M. Boblin
Author(s): Eugène Catalan
Page(s): Page 296, Page 297, Page 298, Page 299, Page 300, Page 301

This page intentionally left blank.

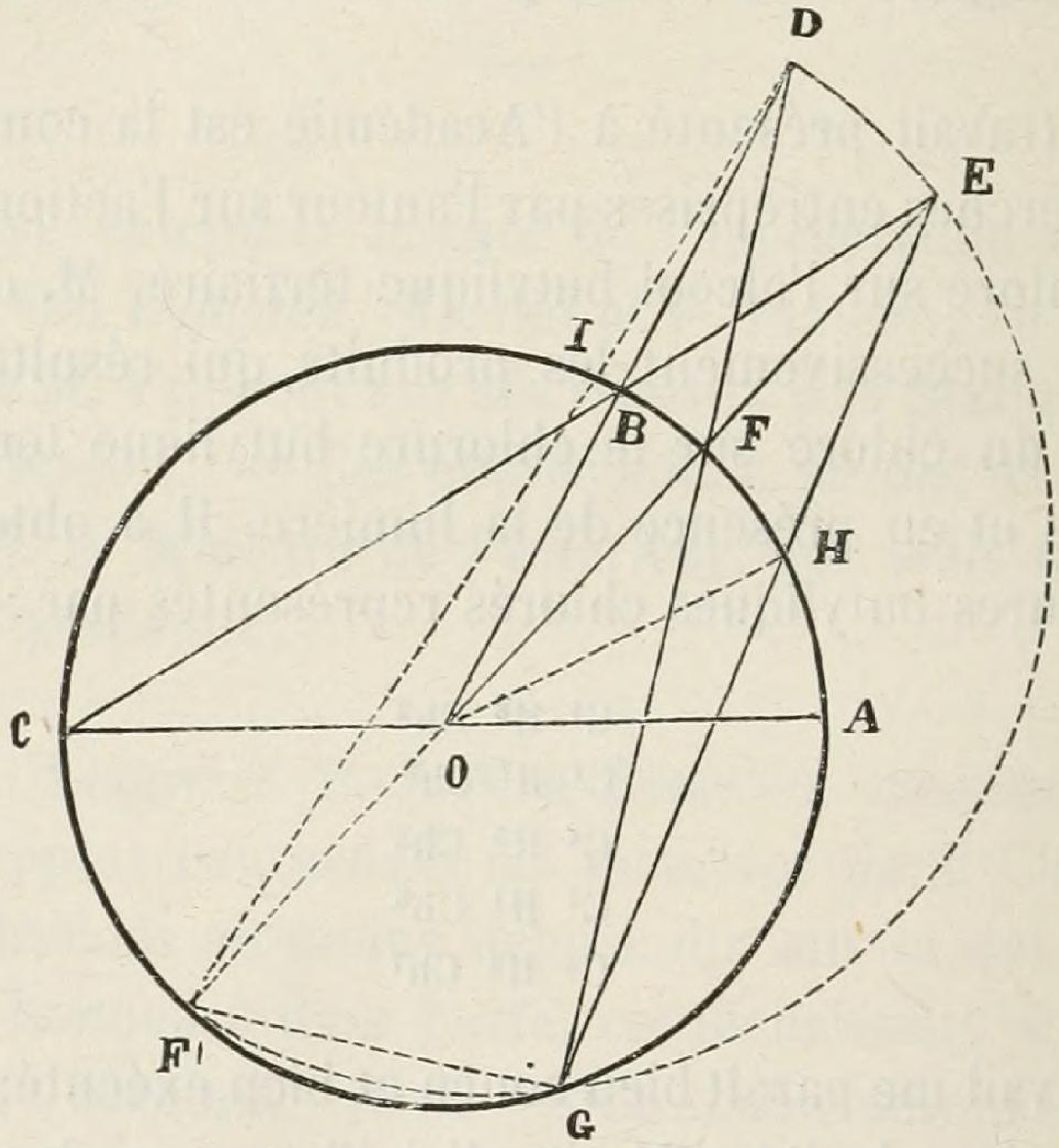
Sur une note de M. Athanase Boblin.

Rapport de M. Catalan.

I.

« Je reproduis d'abord le commencement de la Note.

« *Diviser un angle* AOB *ou arc quelconque* AB *en* » *trois parties progressives et proportionnelles aux nom-* » *bres* 3, 4, 5.



» *Construction.* Achevez le cercle, tirez le diamètre AOC, » ainsi que CBE et OBD, de manière que BD et BE soient » égaux au rayon en décrivant de B l'arc DE. *Joignez* EO » coupant le cercle en F ; tirez et prolongez DF en G et joi- » gnez ce point G du cercle avec le point E *coupant* alors

» le cercle en H, enfin *joignez* OH. La construction se » trouve faite : BF, FH, HA sont successivement pro- » portionnels aux nombres 3, 4, 5. »

La somme de ces nombres est 12, et 4 en est le tiers. Le problème que M. Boblin croit avoir résolu est donc celui de la *trisection de l'angle.*

Tous les élèves qui ont vu quelque peu d'Algèbre et de Géométrie analytique connaissent cette proposition, surabondamment démontrée : « *au moyen de la règle et du compas on ne peut diviser, en trois parties égales, un angle quelconque.* » Néanmoins, de même qu'il y a des *quadrateurs,* il y a des *trisecteurs* qui, ordinairement, ignorent les premières notions de la Géométrie. L'auteur de la Note n'appartient pas à cette classe : circonstance aggravante, il est, paraît-il, ancien *Professeur de Mathématiques!*

Aussitôt après avoir reçu sa communication, dans laquelle il ne prouve rien, je lui ai écrit : « *a priori*, votre construction me paraît fausse. » M. Boblin m'a répondu : « je vais vous envoyer la démonstration. » Depuis trois mois, elle n'est pas venue, probablement parce qu'elle ne peut pas venir!

Au lieu de m'en tenir à cette simple fin de non-recevoir, j'ai voulu (ne fût-ce que pour essayer de convaincre l'Auteur); j'ai voulu, dis-je, examiner la construction indiquée. On va voir qu'elle donne lieu à une intéressante discussion.

II.

Le rayon OA étant pris pour unité, représentons, par 4α, l'arc AB. De là résulte

$$OCB = OBC = DBE = 2\alpha.$$

Par construction, BD = BE = OB; donc le triangle OED est rectangle en E; et, dans le triangle isoscèle OBE, chacun des angles BOE, BEO égale α (*).

Dès lors,

$$BF = \alpha = \tfrac{1}{4}\,AB.$$

Soit

$$FOH = \beta. \qquad (^{**}).$$

Prolongeons EO jusqu'à sa rencontre, en F', avec la circonférence; et traçons la corde F'G.

L'angle F'GF, inscrit à un demi-cercle, est droit. Et comme OED l'est également, la circonférence, décrite sur DF' comme diamètre, contient les points E, G.

Par conséquent,

$$DGE = DF'E.$$

Mais DGE, ou FGH, est la moitié de β. Donc aussi

$$DF'E = \tfrac{1}{2}\,\beta.$$

Dans le triangle rectangle DEF',

$$\cos FD'E = \cos\frac{1}{2}\beta = \frac{EF'}{DF'}.$$

Le triangle isoscèle OBE donne OE $= 2\cos\alpha$; donc

$$EF = 2\cos\alpha - 1, \qquad EF' = 2\cos\alpha + 1.$$

De plus, DE $= 2\sin\alpha$. Par suite,

$$DF' = \sqrt{(2\cos\alpha + 1)^2 + 4(1 - \cos^2\alpha)} = \sqrt{5 + 4\cos\alpha};$$

(*) Il faudrait dire : *a pour mesure* α; mais il est permis d'abréger.

(**) Suivant M. Boblin, $\beta = \frac{4}{3}\,\alpha$.

et, finalement,

$$\cos\frac{1}{2}\beta = \frac{2\cos\alpha + 1}{\sqrt{5 + 4\cos\alpha}} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1).$$

Si cette valeur satisfaisait à la condition $\beta = \frac{4}{3}\alpha$, ou $\frac{1}{2}\beta = \frac{2}{3}\alpha$, on aurait, *identiquement*,

$$\cos\tfrac{3}{2}\beta = \cos 2\alpha;$$

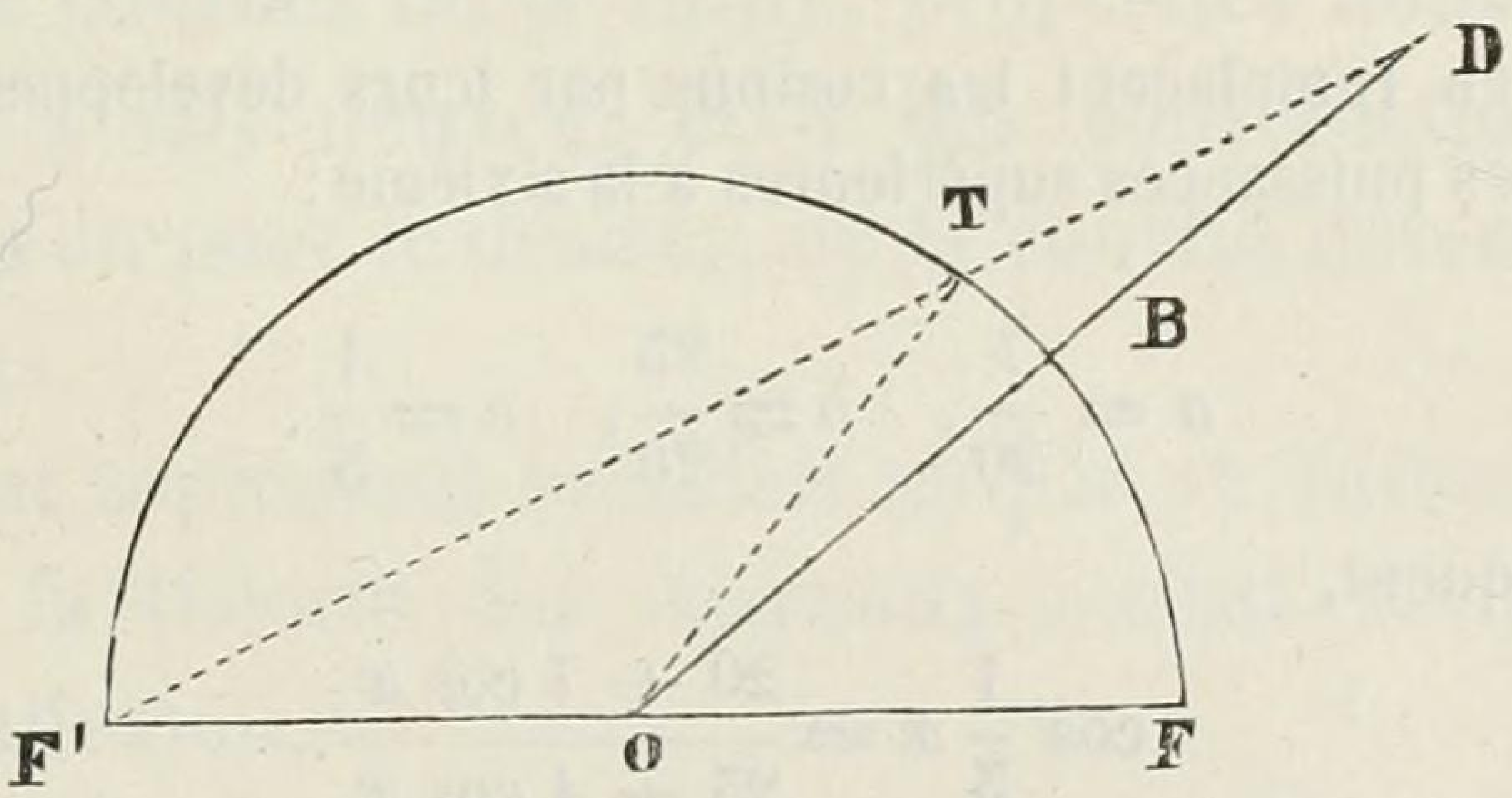
ou, en faisant $\cos\alpha = c$:

$$4\left(\frac{2c+1}{\sqrt{5+4c}}\right)^3 - 3\left(\frac{2c+1}{\sqrt{5+4c}}\right) = 2c^2 - 1. \quad (2).$$

Or cette équation, vérifiée par $c = 1$, est loin d'être identique.

III.

Soit I le point où DF′ coupe la circonférence. L'égalité des angles F′,G entraîne celle des arcs IF, FH. On a vu que BF $= \alpha$. Si donc FH, ou β, était égal à $\frac{4}{3}\alpha$, on aurait IB $= \frac{1}{3}$ BF. Ainsi, la construction proposée peut être réduite à ce qui suit.



Soit FB *l'arc donné. On trace la circonférence* FBF′; *on prend* OBD = FF′; *on trace la droite* DIF′. I *étant le* *point où elle coupe la circonférence, on doit avoir* $BI = \frac{1}{3}FB$.

Or, c'est ce qui n'a pas lieu. Soient, en effet, y et x les deux arcs. On a :

$$\overline{DF'}^2 = 1 + 4 + 4\cos x = 5 + 4\cos x,$$

$$\overline{DI}^2 = \frac{9}{5 + 4\cos x} = 5 - 4\cos y;$$

puis

$$\cos y = \frac{4 + 5\cos x}{5 + 4\cos x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2).$$

Le second membre n'est pas égal à $\cos\frac{1}{3}x$; mais, *si l'arc* x *est suffisamment petit,* on peut adopter la *formule approximative :*

$$\cos\frac{1}{3}x = \frac{4 + 5\cos x}{5 + 4\cos x} \quad (3). \qquad (*)$$

(*) Si l'on suppose

$$\cos\frac{1}{3}x = \frac{1 + a\cos x}{b + c\cos x},$$

on trouve, en remplaçant les cosinus par leurs développements, et en négligeant les puissances supérieures à la sixième :

$$a = \frac{7}{20}, \quad b = \frac{23}{20}, \quad c = \frac{1}{5}.$$

Par conséquent,

$$\cos\frac{1}{3}x = \frac{20 + 7\cos x}{23 + 4\cos x}.$$

Cette formule, moins simple que la formule (3), est beaucoup plus *approximative.*

IV. — Conclusions.

J'ai l'honneur de proposer, à l'Académie, la résolution suivante :

« La Note de M. Boblin sera déposée aux Archives de l'Académie. »

La Classe adopte les conclusions de ce Rapport.

Sur les courbes du troisième ordre; par M. C. Le Paige, professeur à l'Université de Liége.

Rapport de M. Folie, premier commissaire.

« Dans le Mémoire que, M. Le Paige et moi, nous avons publié en commun, sur les courbes du 3e ordre (1), la théorie de ces courbes est fondée sur la méthode des faisceaux homographiques, dont nous avons les premiers, pensons-nous, énoncé le principe général, sous le nom de *Principe de la théorie des faisceaux.*

Cette méthode nous a conduits à la plupart des propriétés des courbes du 3e ordre, propriétés dont beaucoup sont tout à fait neuves, et à des constructions, aussi simples qu'on peut le désirer, de la courbe déterminée par neuf points.

Un point seulement semblait ne pas se rattacher directement à la théorie des faisceaux : c'est la notion des points d'inflexion.

M. Le Paige a, fort heureusement, comblé cette lacune, au moyen de ce beau théorème :

---

(1) *Mémoires des membres*, coll. in-4°, t. XLIII, 2de partie.