This page intentionally left blank.

RAPPORTS.

Conformément aux conclusions favorables d'un rapport de M. Folie, auxquelles a souscrit M. De Tilly, la Classe vote l'impression dans le recueil des *Mémoires*, d'un travail de M. Catalan *Sur une suite de polynômes entiers, et sur quelques intégrales définies.*

— La Classe vote la communication à M. le Ministre de l'Intérieur du rapport de M. Éd. Van Beneden, auquel a adhéré M. Félix Plateau, et du rapport de M. Morren sur les résultats de la mission scientifique de M. Fœttinger au laboratoire de physiologie du Dr Dohrn, à Naples.

JUGEMENT DU CONCOURS ANNUEL DE 1880.

Un Mémoire portant pour devise : *L'union fait la force*, $\sqrt{-1}$, a été reçu en réponse à la deuxième question : *Trouver et discuter les équations de quelques surfaces algébriques, à courbure moyenne nulle.*

Rapport de M. E. Catalan.

I.

Ce Mémoire, portant une devise assez originale, est une œuvre considérable : il se compose de *cent soixante-neuf pages in-folio. L'avant-propos*, que je crois devoir reproduire presque en entier (en l'accompagnant de quelques remarques), montre très-clairement le point de vue où l'auteur s'est placé.

» ,... La question proposée par l'Académie de Belgique, » malgré sa limitation et son caractère particulier, présente, » à un certain degré, l'intérêt éloquemment défini par » Laplace. En effet, depuis qu'entre les mains d'un illustre » Physicien belge « *la nature se fait géomètre* » ; depuis que » chacun a pu réaliser *les lames minces, à courbure* » *moyenne nulle*, les plus variées; tous ceux que l'exacti- » tude et la perfection enchantent, ne se lassent de vé- » rifier, jusque dans ses conséquences les plus délicates ou » les plus imprévues, une des lois dérobées au monde » moléculaire.

» D'un autre côté, il n'est peut-être pas, dans l'étude » des surfaces, de chapitre plus attachant, dans sa sim- » plicité, que celui où l'on traite des *surfaces à çourbure* » *moyenne nulle.* »

Ici, l'auteur commence l'historique du sujet; après quoi il continue en ces termes :

« Les premières surfaces, à étendue *minima*, étudiées, » le furent par Meusnier, qui fit connaître celle qui est de » révolution, appelée, depuis, *Allysséïde* par Bour, et la » surface de *vis à filet quarré.* La considération des lignes » asymptotiques, introduite par Ch. Dupin, vint donner » un attrait nouveau aux surfaces qui nous occupent, car » leurs lignes asymptotiques sont rectangulaires.

» M. Catalan fit voir que, seule, la surface de vis à filet » quarré est à la fois, gauche et à étendue *minima.*

» M. O. Bonnet démontra, dans une série d'études » importantes : 1° qu'on peut faire la carte d'une surface » à étendue *minima* sur la sphère, les angles étant con- » servés; ....

» Il faut ajouter que M. Bonnet... a indiqué comment on
» pourrait former des *surfaces*, de la famille, *algébriques*(*);
» enfin il a montré comment on pouvait éliminer les
» imaginaires de l'intégrale, et donné des exemples parti-
» culiers.

» M. Catalan se proposait, au même moment, de former
» des exemples simples de surfaces *minima*. Il indiqua
» plusieurs surfaces algébriques : l'une d'entre elles est
» définie par une *biquadratique tracée sur un parabo-*
» *loïde* (**). C'est le premier exemple des surfaces algé-
» briques *minima*, dégagées des généralités dont la parti-
» cularisation seule constitue l'intérêt. Mais il faut signaler
» surtout, parmi les surfaces construites élégamment par
» M. Catalan, celle qui présente une double génération,
» par des paraboles et des cycloïdes. On verra, par la suite,
» comment le rapprochement de cette surface remarqua-
» ble, de l'Alisséïde,... nous a amené à trouver une singu-
» lière propriété, tout à fait générale, d'ailleurs, des sur-
» faces à l'étude ».....

» Nous ne pouvons passer sous silence une remarque de
» M. Serret, fort importante malgré son apparence de simple
» curiosité : ce Géomètre fit voir que certaines *dévelop-*
» *pables imaginaires* peuvent être considérées comme des
» surfaces à étendue *minima*...... »

Après avoir continué son exposé, l'auteur énonce cette proposition : « *Par un contour donné, on peut faire passer* » *une infinité de surfaces* MINIMA (***). »

Cet historique, intéressant et complet, se termine ainsi :

(*) Voir la note (A).
(**) Note (B).
(***) Note (C).

« Depuis que l'Académie de Belgique a posé le problème » qui fait l'objet de notre étude, un Géomètre du plus » grand mérite a successivement publié un grand nom- » bre de beaux résultats sur les surfaces *minima* : M. So- » phus Lie a donné la véritable solution du problème de » Monge; il a montré que les surfaces à courbure moyenne » nulle sont, de deux façons, des *surfaces-moulures* (*); il » a en outre donné, du problème de Björling, une solution » s'appliquant à des cas particuliers intéressants. Enfin, il » a discuté quelles sont les surfaces d'ordre et de classe » déterminés.

» Les résultats de M. Sophus Lie viennent ôter le plus » grand intérêt à nos recherches. S'il nous a été pénible, » après avoir cherché et trouvé la solution du problème de » Monge et de bien d'autres, de recevoir les communica- » tions du très savant Géomètre de Christiania, nous » n'avons pas moins résolu de transmettre, à l'Académie de » Belgique, nos recherches, en développant surtout ce qui » s'écarte des propriétés publiées.

» C'est ce qui doit justifier les écarts du Mémoire, en » dehors de la question posée par l'Académie. »

II.

Le Chapitre premier contient, indépendamment de quelques formules préliminaires: 1° un *vocabulaire;* 2° une *table des matières.* Le vocabulaire, que je reproduis en partie, donne lieu à quelques observations.

« La plupart des Géomètres appellent *congruence* de » droites, une famille de droites. »

(*) Note (D).

Une congruence est donc un *faisceau* (*)?

« Les *focales* de la congruence sont deux surfaces, réelles » ou imaginaires, qui sont touchées par chacune des » droites de la famille. »

Si l'on s'en tient aux surfaces réelles, on peut rappeler que *les droites d'un faisceau ne sont pas, nécessairement, tangentes à une surface* (**).

» Les droites d'une congruence, qui rencontrent une » courbe donnée, forment une *surface élémentaire.* »

Des droites peuvent très-bien rencontrer une courbe, sans être les génératrices d'une surface.

« *L'ombilicale* est le cercle imaginaire commun à toutes » les sphères et situé dans le plan de l'infini.

» Une *droite isotrope* se dira de toute droite rencontrant » l'ombilicale.

» Un *plan isotrope* se dira de tout plan tangent à l'om- » bilicale.

» Une *développable isotrope* se dira de toute dévelop- » pable qui contient l'ombilicale.

» Une *ligne isotrope*, ou ligne de *longueur nulle*, sera » une courbe, arête de rebroussement d'une développable » isotrope, dont par conséquent toutes les tangentes » seront des droites isotropes..... »

On le voit : l'auteur du Mémoire se lance dans l'infini et dans l'imaginaire!

Par le motif déjà indiqué, il m'a fallu de grands efforts pour essayer de comprendre ces notions étranges, qui choquent toutes les idées généralement adoptées. Afin d'épargner, à mes honorables Collègues, un travail assez

---

(*) Note (E).

(**) Note (F).

fastidieux, j'ai rassemblé, dans la note (G) des *explications* (*) empruntées à MM. Darboux et Painvin. Ne pourrait-on arriver aux résultats donnés par cette *nouvelle* géométrie, sans employer des instruments que le bon sens est disposé à rejeter, et qui obligent à *travailler sans voir clair?*

III.

CHAPITRES II, III et suivants.

Si nous voulions essayer d'analyser le Mémoire proprement dit, ce Rapport deviendrait interminable. Contentons-nous de citer les principales propositions de l'auteur, en les faisant suivre, à l'occasion, de quelques remarques.

(Page 17.) Théorème. *Lorsqu'un élassoïde coupe un cône, sous un angle constant, et que la partie de surface comprise dans le contour d'intersection est fermée....., l'aire de cette partie de surface est proportionnelle à celle de la surface du cône.....*

Dans le cas où le cône est tangent à l'élassoïde, les deux surfaces sont équivalentes.

(Page 19.) « *Toute développable isotrope doit être considérée comme un élassoïde* (**). »

(Page 21.) Théorème. « *Soient* A, B *les arêtes de*
» *rebroussement de deux développables isotropes arbi-*
» *traires; si l'on joint, de deux en deux, les points de* A
» *et de* B, *et que l'on divise, en parties proportionnelles,*
» *les segments ainsi obtenus, le lieu des points de division*
» *est un élassoïde.* »

Il ne faut pas oublier que A, B sont des *lignes imagi-*

(*) Puissent-elles leur être inutiles!

(**) Note (H).

naires, de longueur nulle. Avec ce correctif, que devient la construction ?

(Page 21.) « *Les élassoïdes sont donc, de deux manières,* » *des surfaces moulures.* »

Nous avons déjà cité ce théorème de Lie (*).

(Page 25.) L'auteur énonce un théorème de M. Laguerre, sans indiquer où il l'a trouvé. Toujours des citations vagues !

(Page 31.) THÉORÈME. « *L'enveloppée moyenne, d'une* » *congruence isotrope, est un élassoïde.* »

Cet énoncé signifie que tout élassoïde est tangent à une série de plans, déduits du faisceau donné.

(Page 41.) LEMME. « *La recherche des élassoïdes algé-* » *briques est ramenée à celle d'autant de surfaces réglées,* » *algébriques.* »

Cette manière de résoudre la question proposée par l'Académie est certainement ingénieuse et remarquable; mais le procédé que j'ai indiqué autrefois (*Journal de l'École polytechnique*, 37e Cah., p. 163), n'est-il pas plus direct ? Si j'en juge par les calculs développés dans le Chapitre VI, la réponse semble devoir être affirmative.

(Page 50.) THÉORÈME. « *Tout élassoïde qui admet, pour* » *géodésique, une courbe plane* (D), *sera algébrique si* (D) » *est la développée d'une courbe algébrique.* »

Ce beau théorème est attribué, par l'auteur, à Henneberg.

(Page 53.) THÉORÈME. « *Si deux points d'un corps solide* » *décrivent deux surfaces applicables l'une sur l'autre :* » 1° *la droite qui les joint engendre une congruence iso-*

(*) Note (I).

» *trope;* 2° *le plan mené à égale distance des deux points*
» *enveloppe un élassoïde, s'il est perpendiculaire à la corde*
» *qui les joint* » (*).

(Page 66.) Théorème. « *Si l'on fait correspondre un*
» *élassoïde et une sphère, par paralléllisme des plans tan-*
» *gents,.... les angles se conservent.* »

L'auteur ajoute : « *l'élassoïde est la seule surface qui cor-*
» *responde de la sorte à la sphère.* » (Théorème dû à M. Ossian Bonnet.)

Où ce dernier théorème a-t-il été publié? Encore une fois, ces citations vagues sont regrettables (**).

(Page 77.) Théorème. « *On peut toujours associer deux*
» *élassoïdes, dont l'un est donné, de façon qu'ils se cor-*
» *respondent :* 1° *par le parallélisme des plans tangents;*
» 2° *par égalité des éléments;* 3° *par orthogonalité de ces*
» *mêmes éléments.* »

(Page 88.) Théorème. « *Tout élassoïde, admettant pour*
» *ligne de courbure une courbe plane, sera algébrique si*
» *cette courbe est la développée d'une courbe algébrique.* »

(Page 90.) Théorème. « *Deux élassoïdes conjugués,*
» *inscrits à une même développable, seront algébriques,*
» *si cette développable est l'enveloppe des plans normaux à*
» *une courbe algébrique.* »

Ces théorèmes, et d'autres encore, nous semblent très-beaux. Pourquoi l'auteur ne les a-t-il pas appliqués à des exemples simples? Peut-être le temps lui a-t-il manqué.

Je m'arrêterai, un instant, sur le Chapitre XII, qui a pour titre : « *Congruences isotropes déduites du plan.* »

(*) Note (K).
(**) Note (L).

A la page 101, l'auteur donne, comme *équations de l'élassoïde moyen* :

$$\left.\begin{aligned} x &= -\tfrac{1}{2}\left[F'\sin\varphi + F''\cos\varphi\right] - \tfrac{1}{2}\left[f'\sin\psi + f''\cos\psi\right],\\ y &= \tfrac{1}{2}\left[F'\cos\varphi - F''\sin\varphi\right] + \tfrac{1}{2}\left[f'\cos\psi - f''\sin\psi\right],\\ z &= -\tfrac{1}{2}\sqrt{-1}\left[(F + F'') \quad -(f + f'')\right]. \end{aligned}\right\}\ (66)$$

Ces valeurs, dans lesquelles $F(\varphi)$, $f(\psi)$ sont des *fonctions arbitraires*, satisfont à l'équation

$$(1 + p^2)\,t - 2\,pqs + (1 + q^2)\,r = 0\ (^*). \quad . \quad . \ (A)$$

Conséquemment, le système (66) constitue *l'intégrale générale* de cette équation (A). Autrement dit : *les formules* (66), *qui ne renferment aucun signe d'intégration, peuvent tenir lieu des formules de Monge, de celles de M. Serret et des miennes.*

J'appelle, sur ce point important, l'attention de l'auteur. Il semble qu'il peut tirer de ces formules (66), si simples, un parti considérable (**).

A la page 107, l'auteur donne l'équation des lignes de courbure des élassoïdes considérés; savoir :

$$d\varphi\sqrt{F' + F'''} = \pm\, d\psi\sqrt{f' + f'''}.$$

Cette équation, qui est également *générale*, ne diffère pas de celle que j'ai trouvée autrefois (*Journal de l'École polytechnique*, p. 167 (***)).

Dans la note (Q), je signale de légères inexactitudes, que contiennent les pages 109 et suivantes.

(Pages 119 et suivantes.) L'auteur considère les courbes

(*) Note (M).
(**) Note (N).
(***) Note (P).

O, O′ pour lesquelles :

$$R_0 = n\rho, \qquad R_1 = -n\rho;$$

R_0, R_1 désignant les rayons de courbure; et ρ la normale, limitée à l'axe des abscisses. Soient C_0, C_1 les courbes qui, en roulant sur cet axe, engendrent O, O′ (*).

On a les théorèmes suivants, fort remarquables :

1° *L'élassoïde qui admet* O *pour géodésique en admet une seconde*, O′.

2° *Les polaires des courbes* C_0, C_1 *sont réciproques l'une de l'autre.*

A la page 149, se trouvent les équations des *polaires réciproques* de divers élassoïdes *algébriques*. L'auteur ne dit pas comment il les a formées. Il est regrettable qu'il n'ait pas cherché (je le suppose) à *discuter* ces élassoïdes. L'élimination d'un des deux paramètres paraît cependant facile.

Le Chapitre XXII est surtout intéressant : il contient l'indication de *propriétés diverses*, *relatives aux élassoïdes*, et qui ne se rapportent pas, directement, à la question de Concours. L'auteur annonce, comme il l'a déjà fait, des travaux futurs, relatifs aux *élassoïdes*, aux *surfaces applicables les unes sur les autres*, *etc.* Ce *programme* est continué dans le dernier Chapitre, qui se termine ainsi :

« Le temps, et la longueur considérable du Mémoire, » nous interdisent d'aller plus loin. Les réflexions qui » précèdent inspireront peut-être, à d'autres investigateurs, » le désir d'éclaircir un certain nombre des *desiderata*. » Nous aurions atteint doublement notre but si l'Académie

(*) Note (R).

» de Belgique, approuvant notre Mémoire, donnait une
» consécration officielle aux essais de Géométrie nouvelle
» dont nous avons fait usage, en appréciant les résultats
» trouvés et l'emploi de la *Périmorphie*, qui les a mis en
» relief. » (*).

IV.

CONCLUSIONS.

Malgré certaines critiques, certaines réserves contenues dans la longue et *incomplète* analyse dont elle vient d'entendre la lecture, l'Académie a pu reconnaître (je l'espère du moins) que le Mémoire dont j'avais à lui rendre compte est, de tous points, fort remarquable : il est certainement l'œuvre d'un *inventeur* en Géométrie, et d'un savant en Calcul intégral. En conséquence, je propose que cet important travail soit publié dans le recueil des ***Mémoires couronnés***, et que l'auteur reçoive la *médaille d'or* (**).

NOTES.

(**A**) Cette proposition me paraît contestable. Voici l'extrait d'une lettre adressée, le 22 décembre 1855, au Secrétaire perpétuel de l'Académie des sciences (Elie de Beaumont), et non insérée aux *Comptes rendus*. Je dois faire observer que cette lettre répondait à une Note, assez insolite, *publiée* dans le même Recueil.

(*) Note (S).
(**) Note (T).

« La partie qui me concerne, dans les ***Observations sur les surfaces***, se termine ainsi : [M. C dit dans sa troisième Note qu'on n'a pas encore donné d'exemple de surface minima algébrique. Or, j'ai indiqué formellement, à la page 532, le moyen d'obtenir un nombre infini de ces surfaces.]

» Cela est vrai, mais, si je ne me trompe, le *moyen indiqué* » ne réussit pas. Supposons, en effet, dans l'équation de la » page 532, $n = 0$, $A_0 = 0$, $A_1 = 0$, $B_1 = 1$, $B_0 = 0$; et » nous aurons, en adoptant les notations de l'auteur :

» $$F(x + iy) = \sin(x + iy), \quad F_1(x - iy) = \sin(x - iy),$$

» $$\zeta = 2\sin x \cos iy = \sin x\,(e^y + e^{-y}), \quad . \quad . \quad (1)$$

» $$z = \tfrac{1}{2}\int \sin x\,(e^y + e^{-y})^2\,dy = \tfrac{1}{4}\sin x\,(e^{2y} - e^{-2y} + 4x);$$

» puis

» $$\xi \sin x - \eta \cos x = \tfrac{1}{4}\cos x\,(e^{2y} - e^{-2y} + 4y) \qquad (2)$$

» $$\xi \cos x + \eta \sin x = -\, itg\,\tfrac{1}{2}i \sin x\,(e^y + e^{-y})^2 \qquad (3)$$

» Sans qu'il soit nécessaire d'aller plus loin, on voit que » l'élimination de x et de y, entre les équations (1), (2), (3), » conduirait à une équation *transcendante*. »

(**B**) J'ai eu beaucoup de peine à retrouver cet exemple : d'ailleurs, la citation renferme, probablement, une inexactitude.

Dans le *Journal de l'École polytechnique* (37[e] Cah., p. 163), on rencontre les équations

$$3\,\frac{x\cos m + y\sin m}{\sin 4m} = A, \quad \frac{y\sin 3m - x\cos 3m}{\sin 4m} = B, \quad (1)$$

$$B^4 \sin^2 2m - 4B^2 \sin^2 2m - z^2 = 0\,(^*), \quad . \quad . \quad (2)$$

$$A = B^3 - 3B \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

(*) A l'endroit cité, le deuxième terme est remplacé par $-\,4B^2 \sin 2m$.

L'équation (3) peut être écrite ainsi :

$$\frac{3}{\sin 4m}\left[x(\cos m - \cos 3m) + y(\sin m + \sin 3m)\right]$$
$$= \frac{1}{\sin^3 4m}(y \sin 3m - x\cos 3m)^3,$$

ou

$$6 \sin^2 4m \sin 2m (x \sin m + y \cos m) = (y \sin 4m - x \cos 3m)^3. \quad (4)$$

Celle-ci représente un *cylindre du troisième degré.*

D'un autre côté, l'équation (2), simplifiée au moyen de la formule (3), devient

$$B(A - B)\sin^2 2m = z^2;$$

ou, par une réduction facile :

$$\frac{4}{\sin^2 4m}(x\cos^3 m + y \sin^3 m)(y \sin 3m - x \cos 3m) = z^2. \quad (5)$$

Or, cette équation (5) représente un cône du second degré, rapporté à son centre.

Si le calcul actuel est exact (*), il y aurait peut-être quelque intérêt à *discuter la surface.*

(**C**) Il serait peut-être plus exact de dire : *Surface à courbure moyenne nulle.* Du reste, cette propriété a été signalée par M. Plateau : « l'expérience permet de constater qu'il y a » une infinité d'autres surfaces à courbure moyenne nulle qui » peuvent s'appuyer sur le même contour » (*Statique expérimentale...*, tome I, p. 239).

(**D**) J'ai toujours *soupçonné*, sans pouvoir le démontrer, que les *élassoïdes* sont des *surfaces à génératrice constante.*

(*) L'ancien renferme des fautes.

Quant au théorème de M. Lie, il résulte assez simplement, si je le comprends bien, des formules connues :

$$x = \int \varpi'(a) \sin a da + \int \pi'(b) \sin b db,$$
$$y = \int \varpi'(a) \cos a da + \int \pi'(b) \cos b db,$$
$$z = \sqrt{-1}\left[\varpi(a) + \pi(b)\right].$$

Soient :

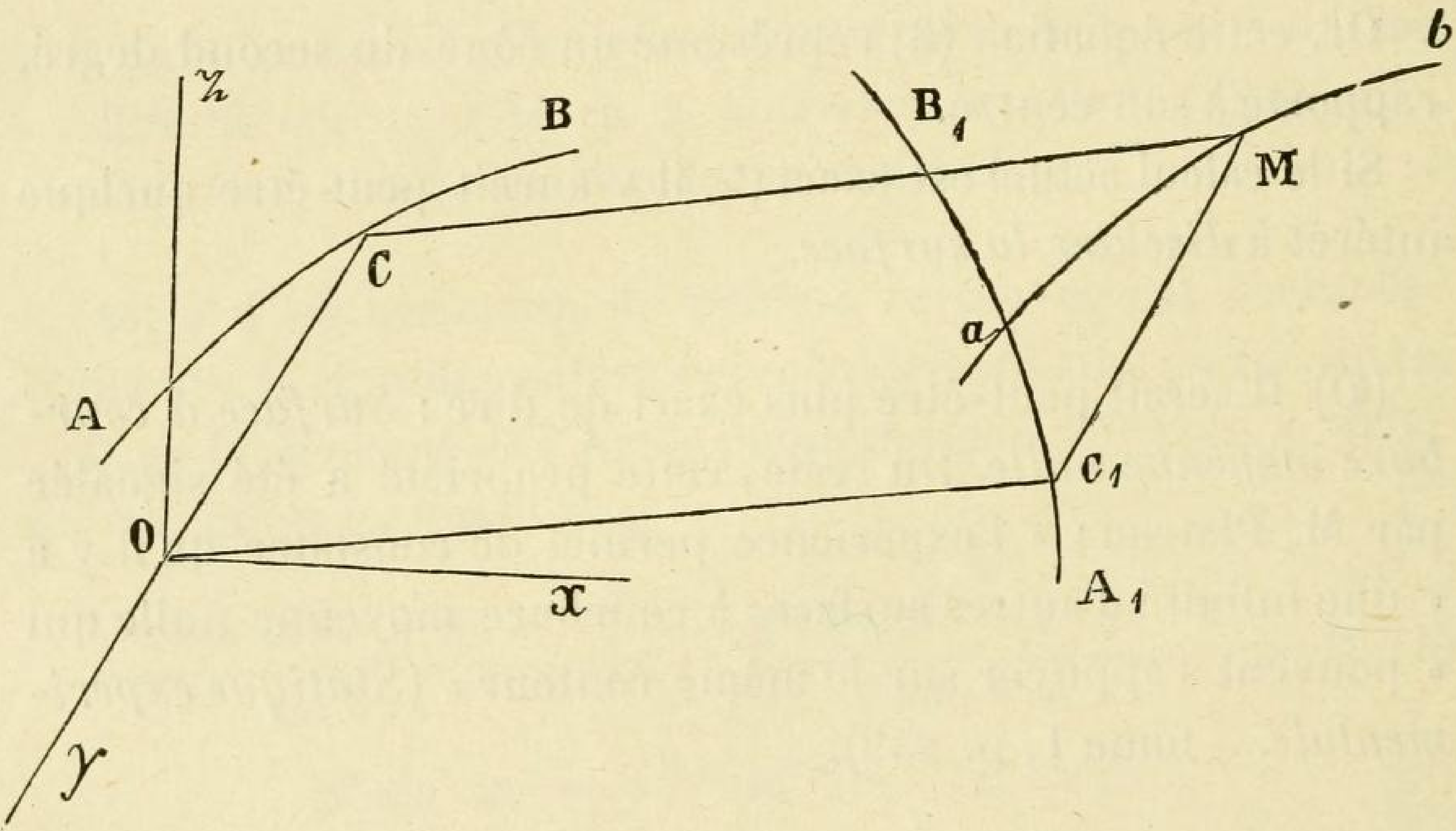
$$\int \varpi'(a) \sin a da = \mathrm{X}, \qquad \int \pi'(a) \sin b db = \mathrm{X}_1,$$
$$\int \varpi'(a) \cos a da = \mathrm{Y}, \qquad \int \pi'(b) \cos b db = \mathrm{Y}_1,$$
$$\sqrt{-1}\, \varpi(a) = \mathrm{Z}, \qquad \sqrt{-1}\, \pi(b) = \mathrm{Z}_1;$$

de manière que

$$x = \mathrm{X} + \mathrm{X}_1, \qquad y = \mathrm{Y} + \mathrm{Y}_1, \qquad z = \mathrm{Z} + \mathrm{Z}_1.$$

Il est clair que l'on a

$$\mathrm{X} = f(\mathrm{Z}), \quad \mathrm{Y} = \varphi(\mathrm{Z}), \quad \mathrm{Y}_1 = f_1(\mathrm{Z}_1), \quad \mathrm{Y}_1 = \varphi'(\mathrm{Z}_1).$$



Construisons les courbes A, B, A_1, B_1 représentées par ces équations; prenons un point C sur la première, et un point C_1 sur la seconde. Il est visible que, O étant l'origine, le sommet M, du parallélogramme construit sur OC et OC_1, appartient à la surface. De plus si le point C_1 est fixe, M décrit une courbe *égale et parallèle* à ACB, etc.

Dans le cas actuel, *les* PROFILS A, B, A_1, B_1 *sont imaginaires*. Cette observation est consignée dans le Mémoire.

(**E**) Legendre, qui jugeait *incongrues* certaines dénominations proposées par Gauss, appliquerait certainement ce qualificatif aux *congruences de droites*. Ne m'étant jamais occupé de Géométrie *ultra-imaginaire*, c'est la première fois que je rencontre cette locution, employée par la *plupart des Géomètres*.

(**F**) M. Darboux, dont l'auteur du Mémoire semble, en général, adopter les idées, définit ainsi les *focales*:

« Circonscrivons à une surface quelconque et au cercle (C) (*)
» une surface développable. Cette surface aura des lignes
» doubles qui suffiront à la déterminer, et qu'on appellera les
» *focales de la surface*... » (*Sur une classe remarquable de courbes et de surfaces algébriques*, p. 9).

Les deux définitions sont-elles concordantes? Sont-elles contradictoires? C'est une question que je ne résoudrai pas.

(**G**) Dans les *Nouvelles Annales* (1864), le regretté Painvin(**) s'énonce à peu près ainsi :

Droites à l'infini (***). Si, dans l'équation $Ax+By+C=0$, on fait tendre A et B vers zéro, la droite s'éloigne indéfiniment de l'origine, dans une direction qui est généralement *indéterminée* (IV).

(*) Voir plus loin.

(**) Il a été mon élève.

(***) Et non *droite de l'infini* : l'infini n'est pas propriétaire!

(IV) Donc, il y a des *droites à l'infini*, et non une *seule* droite. De même, on devrait dire : *plans à l'infini*.

Points circulaires à l'infini. Soient, en coordonnées homogènes,

$$x^2 + y^2 + 2axz + 2byz + cz^2 = 0, \qquad Ax + By + Cz = 0$$

les équations d'un cercle et d'une droite. Les intersections (*imaginaires*) de la circonférence avec les droites à l'infini sont données par

$$x^2 + y^2 = 0, \qquad z = 0.$$

Ces intersections sont appelées : *points circulaires à l'infini* (*).

Cercle à l'infini. Par extension de ce qui précède, les équations

$$x^2 + y^2 + z^2 + 2aux + 2buy + 2cuz + du^2 = 0,$$
$$Ax + By + Cz + Du = 0$$

d'une sphère et d'un plan, se réduisent, si $u = 0$, à

$$x^2 + y^2 + z^2 = 0, \qquad u = 0.$$

Celles-ci représentent donc l'*intersection* (imaginaire) *de toutes les sphères avec les plans à l'infini.* Cette intersection, nommée *ombilicale* par l'auteur du Mémoire, est le cercle (C) de M. Darboux.

Dans l'ouvrage déjà cité, ce Géomètre s'énonce ainsi :

« Une sphère contenant toujours le cercle (C), on voit que *toutes les génératrices rectilignes des sphères* (**) seront assujetties à rencontrer le cercle.... » (Page 7.)

» En particulier, *toute droite rencontrant le cercle* (C)

(*) Painvin ajoute : « *Je ne discute pas l'expression.* » Des points sont-ils *circulaires* plutôt que *triangulaires*? Toute cette phraséologie est bien près d'être ridicule !

(**) Ainsi, *une sphère a des génératrices rectilignes!* Je sais bien que c'est là une façon d'énoncer un *fait algébrique* ; mais n'aurait-on pu imaginer mieux ?

» *pourra être placée sur une sphère de rayon nul....*, ayant
» son centre en un quelconque de ses points (*), et par consé-
» quent *tous les points situés à distance finie sur cette droite*
» *seront à une distance nulle de l'un d'eux* » (**).

Ligne isotrope. On lit encore, dans le Traité de M. Darboux :

» ... *un plan devient parallèle à sa perpendiculaire* dès qu'il
» passe par une tangente au cercle (C). »

» *Les normales à nos surfaces développables coïncideront*
» *avec les génératrices rectilignes de ces surfaces.* »

» ... l'arête de rebroussement de la surface étant telle que la
» tangente va toujours rencontrer le cercle de l'infini, en tout
» point de cette courbe, on aura

$$ds^2 = 0,$$

» et, par conséquent, *un arc quelconque de cette arête de*
» *rebroussement sera nul.* » (Page 10.)

D'après cela, la *développable isotrope* est la *développable focale*, de M. Darboux ; la *ligne isotrope* est l'arête de rebroussement de ces développables (***).

(**H**) L'auteur ajoute : « Ainsi se trouve, au début de cette
» étude, le résultat mis en lumière, pour la première fois, par
» M. J. Serret (*Journal de Liouville*, t. XI, 1846. »

(*) Il semble que *la sphère considérée est un seul point.*

(**) A mesure que l'on avance dans cette singulière théorie, les énoncés (pris à la lettre) deviennent de plus en plus choquants. N'est-ce point là l'indice d'une langue mal faite?

(***) La théorie des *lignes de longueur nulle* (ou plutôt *constante*) a été présentée, par M. Darboux, de la manière suivante (*loc. cit.*, p. 16) :

Pour intégrer l'équation traitée par Euler :

$$dx^2 + dy^2 = ds^2,$$

changeons s en $z\sqrt{-1}$, elle devient

$$dx^2 + dy^2 + dz^2 = 0;$$

etc.

A la fin de la Note citée (page 457), on lit :

« Quant aux surfaces développables,.... il est aisé de voir » que *toutes celles que représente notre équation...., sont* » *imaginaires.* »

Est-ce là le résultat dont parle l'auteur? Il est fâcheux qu'il n'ait pas été plus précis dans ses citations.

(I) A la même page, l'auteur mentionne les travaux de M. Lie, résumés dans le *Bulletin des sciences* (novemb. 1879).

D'après ce résumé, le célèbre Géomètre de Christiania écrit ainsi les équations des *surfaces-moulures* :

$$x = A(t) + A_1(\tau), \quad y = B(t) + B_1(\tau), \quad z = C(t) + C_1(\tau);$$

ce qui ne diffère, que par la notation, des formules rapportées ci-dessus (Note D).

M. Lie ajoute : « Si l'on suppose, en particulier,

$$dA^2 + dB^2 + dC^2 = 0 = dA_1^2 + dB_1^2 + dC_1^2;$$

» la surface sera, d'après Monge, une *surface minimum.* »

A ce propos, il convient d'observer que, d'après les formules dont il vient d'être question :

$$\left[\left(\frac{dx}{da}\right)^2 + \left(\frac{dy}{da}\right)^2 + \left(\frac{dz}{da}\right)^2\right] da^2 = \varpi'^2\left[\sin^2 a + \cos^2 a - 1\right] da^2 = 0,$$

$$\left[\left(\frac{dx}{db}\right)^2 + \left(\frac{dy}{db}\right)^2 + \left(\frac{dz}{db}\right)^2\right] db^2 = 0.$$

Ainsi, *sur tout élassoïde, les lignes* (imaginaires) *représentées par* a = *const.*, b = *const.*, *ont des longueurs constantes.*

(K) Comment un point peut-il *décrire* une surface? A quoi sert le *corps solide*? Un plan *également distant* des deux points coupe la droite en son milieu. Est-ce que le véritable énoncé ne serait pas celui-ci :

« *Une droite s'appuie, par ses extrémités, sur deux surfaces,*
» *applicables l'une sur l'autre, en entraînant un plan, per-*
» *pendiculaire en son milieu. Cela posé :* 1° *la droite engendre*
» *une congruence isotrope* ; 2° *le plan enveloppe un élassoïde ?* »

(**L**) Dans le Mémoire *principal* du Géomètre dont il s'agit, on lit :

» .... *on peut dire que deux séries de lignes tracées sur la*
» *surface* (*) *qui ont pour transformées sphériques deux séries*
» *de lignes sphériques orthogonales et isothermes, sont des*
» *lignes isométriques de la surface.* »

Ce théorème, dont je transcris fidèlement l'énoncé, paraît différer de celui qui est cité dans le Mémoire de Concours.

(**M**) Je n'ai pas fait le calcul, mais il est tout semblable à celui qui est développé, quatre fois, dans mon Mémoire (pages 156 et suivantes).

(**N**) Au fond, la simplification est, peut-être, plus apparente que réelle. Car si l'on pose

$$F(a) + F''(a) = \varpi(a),$$

on trouve, comme intégrale de cette équation,

$$F(a) = -\cos a \int \varpi(a) \sin a\,da + \sin a \int \varpi(a) \cos a\,da\,;$$

puis

$$F'(a) = \sin a \int \varpi(a) \sin a\,da + \cos a \int \varpi(a) \cos a\,da,$$

$$F''(a) = \varpi(a) + \cos a \int \varpi(a) \sin a\,da - \sin a \int \varpi(a) \cos a\,da\,;$$

et, par conséquent,

$$F'(a) \sin a + F''(a) \cos a = \varpi(a) \cos a + \int \varpi(a) \sin a\,da$$
$$= \int \varpi'(a) \cos a\,da\,;$$

etc.

(*) A courbure moyenne nulle.

Quoi qu'il en soit, les formules (66), au lieu de se rapporter à un cas *particulier*, comme l'auteur semble l'avoir pensé, sont *générales*.

(**P**) En effet,

$$F'(a) + F'''(a) = \varpi'(a).$$

(**Q**) Soit

$$u = \int d\omega \sqrt{1 - 2\sin^2\omega}.$$

Si l'on emploie la transformation connue :

$$\sin\omega = \sqrt{\tfrac{1}{2}}.\sin\varphi,$$

on a

$$\cos\omega = \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi}, \qquad \sqrt{1 - 2\sin^2\omega} = \cos\varphi,$$

$$d\omega = \sqrt{\tfrac{1}{2}}\,\frac{\cos\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi}}\,;$$

puis

$$u = \sqrt{\tfrac{1}{2}} \int \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi}}$$

$$= -\sqrt{\tfrac{1}{2}} \int \frac{d\varphi}{\sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi}} + \sqrt{2}\int d\varphi \sqrt{1 - \tfrac{1}{2}\sin^2\varphi}.$$

Ainsi, l'intégrale u dépend des fonctions F et E.

A la page 110, l'auteur dit que l'équation

$$tg\frac{\varphi}{2} \pm tg\frac{\psi}{2} = \text{const.}$$

est *algébrique*. Cela serait vrai si les paramètres étaient $tg\frac{\varphi}{2}$ et $tg\frac{\psi}{2}$.

(**R**) Il y a, dans le Mémoire, une confusion de termes : l'auteur nomme *roulettes* les courbes C_0, C_1, tandis que ce sont les courbes O, O_1. La cycloïde, on le sait, a d'abord été appelée *roulette.*

(**S**) Relativement à la *Périmorphie*, dont je ne connaissais pas le nom avant d'avoir reçu le Mémoire, il m'a été impossible de me procurer le moindre renseignement.

(**T**) Le Mémoire a, sans aucun doute, été écrit avec précipitation. Aussi, les négligences de style s'y rencontrent très-fréquemment. Ce n'est pas tout : l'auteur a introduit, dans son œuvre, un certain nombre d'expressions *imagées,* qui ne sont pas toujours heureuses. J'en citerai quelques unes :

Abouts; surfaces d'abouts; tabler (page 54); *grande aisance* (*idem*); *dans l'espèce; le* Z *du point; le* p *des élassoïdes*, etc. Tout cela pourra disparaître pendant l'impression.

Rapport de M. De Tilly.

« J'ai pris connaissance, après M. Catalan, du volumineux travail soumis à l'examen des Commissaires de la Classe.

Notre savant confrère a fait connaître, dans son Rapport, les énoncés des propositions principales auxquelles l'auteur du Mémoire a été conduit. Je n'ai donc pas à refaire cette analyse; mais je m'étais proposé d'abord de la compléter, en donnant un aperçu de la *méthode* suivie par l'auteur pour arriver à ses déductions.

A cet effet, j'avais choisi l'une des propositions les plus simples, et selon moi l'une des plus remarquables, que le Mémoire contienne. Elle peut s'énoncer ainsi :