This page intentionally left blank.

nous voulons le croire sur parole; mais, pour ceux qui affirment avoir *énoncé* depuis dix ans ce principe, et qui n'ont pas cru qu'il valût les honneurs de l'impression, il me font songer, malgré moi, au coq de la fable: ils ont trouvé une perle; je la crois fine, se seront-ils dit, et ils n'auront pas pris la peine de la ramasser. »

—

Réplique de M. Catalan à M. Folie.

I.

« Vers la fin de sa *Réponse*, notre honorable Confrère s'énonce ainsi :

« L'un d'entre eux va jusqu'à dire que notre principe a » la même nouveauté que l'égalité

$$38\ 743 + 17\ 499 = 56\ 242. »$$

Ceci n'est pas tout à fait exact. Au paragraphe III de mon Rapport, après avoir rappelé ces deux lignes de M. Folie : « *Qu'on veuille bien nous indiquer un texte, imprimé ou* » *autographié avant 1878, dans lequel le principe soit* » *formellement ou implicitement énoncé* », j'ajoutais :

« Qu'il (M. Folie) me permette une comparaison : elle » fera comprendre, à ceux de nos Confrères qui ne sont » pas Géomètres, la nature de la discussion.

» Très-probablement, dans aucun ouvrage *imprimé ou* » *autographié,* on ne trouve l'égalité

$$38\ 743 + 17\ 499 = 56\ 242.$$

» Si j'en réclamais la *priorité*, que penserait-on de » moi ? »

Mais laissons ces vétilles, et arrivons au fond du débat, puisque, paraît-il, il y a un *débat* (*).

II.

La partie principale de la *Réponse* est l'objection suivante, posée par l'*ami* de M. Le Paige :

« Soit $\alpha\beta\gamma$ un triangle de référence (**).

» Prenons les sommets pour centres de trois faisceaux
» de rayons ; λ, μ, ν désignant des paramètres arbitraires,
» il est clair que les rayons de chacun de ces faisceaux
» pourront se représenter par les équations

$$\alpha + \lambda\beta = 0, \quad \beta + \mu\gamma = 0, \quad \gamma + \nu\alpha = 0, \qquad \text{(R)}$$

» et que la condition du concours de ces trois rayons sera
» $\lambda\mu\nu = -1$.

» Qu'arrivera-t-il si l'on se donne, entre les paramètres
» variables, la relation

$$\lambda\mu\nu = u, \qquad \text{(C)}$$

» dans laquelle a est différent de -1 ? »

Cette question de l'ami *** rappelle la légende, racontée dans les cours de Géométrie descriptive, du *point lumineux qui serait dans l'ombre.* Mais continuons à citer :

« Si le *principe est vrai*, cette relation, combinée avec
» les équations (R), doit conduire à l'équation du *lieu en-*
» *gendré* par les rayons homologues.

(*) Pour abréger, je laisse de côté, également, les allégations de M. Folie touchant les inexactitudes que j'aurais commises dans certaines citations. Mon honorable contradicteur est certainement persuadé que, si ces inexactitudes sont réelles, elles sont involontaires.

(**) Il eût été plus exact de dire :

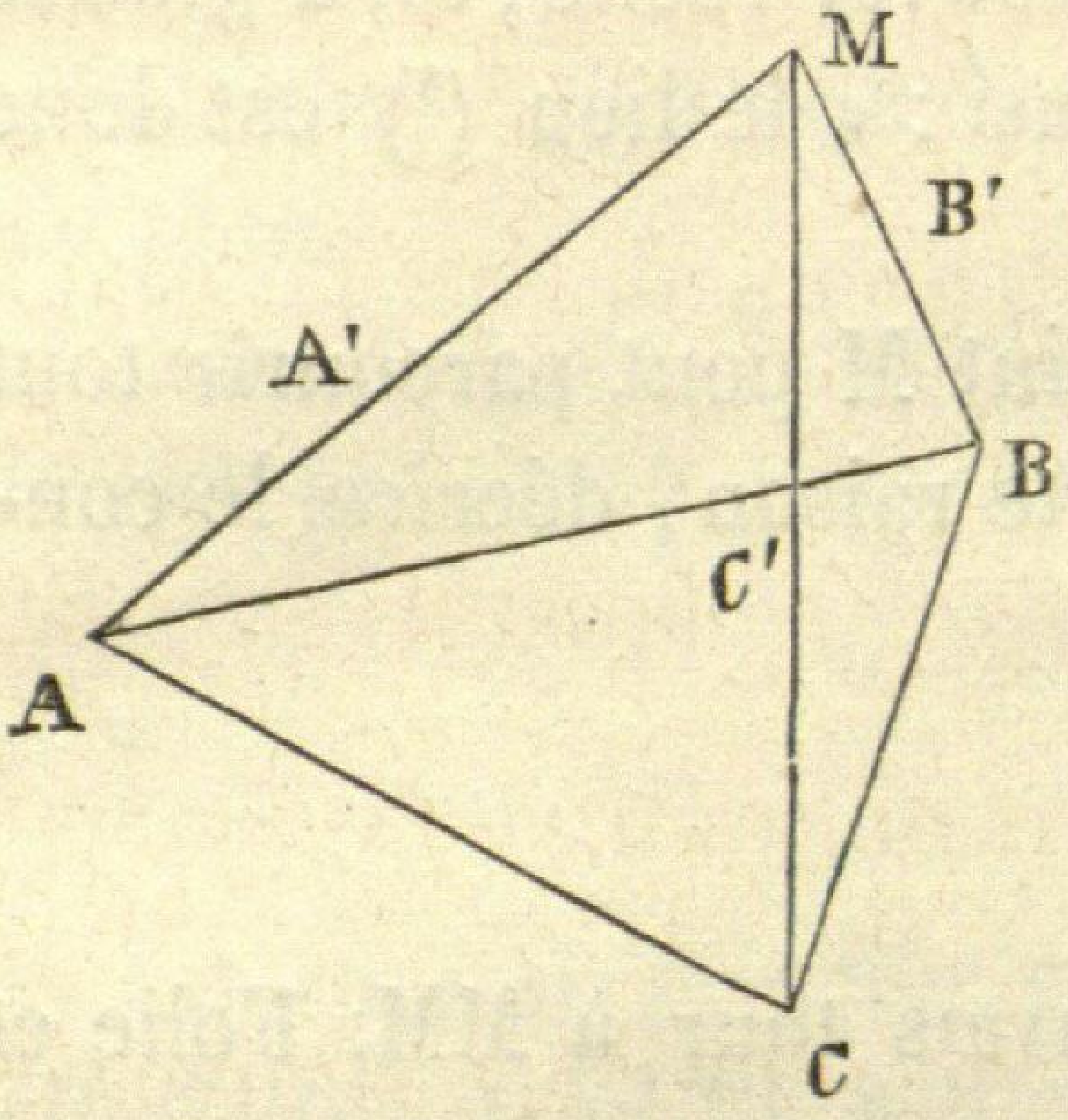
Soient $\alpha = 0, \beta = 0, \gamma = 0$ *les équations des trois côtés d'un triangle.*

» Or, l'élimination de λ, μ, ν, entre les équations (R)
» et (C), donne

$$\alpha\beta\gamma\,(1+a)=0;$$

» d'où $\alpha\beta\gamma=0$, c'est-à-dire que le lieu est le triangle de
» référence lui-même. »

Arrêtons-nous un instant :



1° En traduisant, en langage ordinaire, l'énoncé de M.***, on voit que le *problème à résoudre* est celui-ci : « *Par deux des sommets d'un triangle donné, on* » *mène des droites quelconques* » AA′, BB′, *lesquelles, généra-* » *lement, se coupent en un* » *point* M (*). *Quel est le lieu* » *de* M? »

Réponse : le plan de la figure (**).

2° « Qu'arrivera-t-il si l'on se donne, etc.? « En d'au-
» tres termes : *si, après avoir supposé que les droites* AA′,
» BB′, CC′ *concourent en un même point* M, *on suppose*
» *le contraire, qu'arrivera-t-il?* »

(*) Il est bien inutile de tracer CM.

(**) Si l'on veut que le point M décrive une ligne, on doit se donner, entre les paramètres λ, μ, une *équation de condition.*

On peut encore prendre les relations (R), et établir, entre λ, μ, ν, une équation *non contradictoire* avec $\lambda\mu\nu=-1$.

Soit, par exemple, $\lambda+\mu+\nu=0$. L'équation du lieu décrit par le point M est

$$\frac{\alpha}{\beta}+\frac{\beta}{\gamma}+\frac{\gamma}{\alpha}=0.$$

Tout cela est élémentaire.

Je pourrais me contenter de renvoyer à l'anecdote rappelée plus haut, mais il vaut mieux, peut-être, essayer de répondre sérieusement à MM. Folie, Le Paige et ***.

On trouve la condition $\lambda\mu\nu = -1$, en admettant que, dans les équations (R), aucun des paramètres n'est nul ou infini : la même hypothèse subsiste, à coup sûr, quand on s'impose la relation $\lambda\mu\nu \gtrless -1$. Dès lors, que signifie l'objection? M. Folie s'évertue à la trouver réelle; et, à grands renforts de calculs, il conclut ainsi : « le lieu (*) est donc le triangle de référence (**). »

On a vu, ci-dessus, que le point M peut parcourir tout le plan : il peut donc, à plus forte raison, décrire le contour ABC (***).

III.

L'ami *** a joué un bien mauvais tour à MM. Folie et Le Paige. Pour le prouver, j'observe que :

1° les équations (R), dans lesquelles $\lambda\mu\nu = -1$, peuvent être réduites à

$$\alpha + \lambda\beta = 0, \qquad \beta + \mu\nu = 0,$$

λ et μ étant arbitraires;

2° Ces deux équations sont des cas particuliers de

$$\varphi(x, y, \lambda) = 0, \qquad \psi(x, y, \mu) = 0. \quad . \quad . \quad . \quad (A)$$

(*) Le *lieu* de quoi?

(**) Dans $\lambda\mu\nu$, M. Folie fait $\mu = \infty$, $\nu = 0$; puis, dit-il : « rien n'empêche » $\infty . 0$ d'être égale, à la fois, à -1 et à a. » Que mon honorable Confrère me permette de ne pas répondre à des arguments de cette nature.

(***) Si les rayons AA', BB' sont *confondus* avec AB, *un point quelconque de* A B *peut être regardé comme point de concours.* Mais en voilà trop sur ce sujet!

Or, dans l'*exposition du principe* (*Bulletins*, t. XLVI, p. 197), M. Folie dit, expressément :

« *Soit le système d'équations*

$$\varphi(x, y, \lambda, \mu)=0, \quad \psi(x, y, \lambda, \mu)=0, \quad \chi(x, y, \lambda, \mu)=0. \text{ (*) (B) »}$$

Ainsi : 1° *les trois équations* (B) *contiennent un seul paramètre arbitraire : elles représentent une ligne ;*

2e *Les deux équations* (A) *contiennent deux paramètres arbitraires : elles représentent* (en général) *tous les points du plan.*

Comment mes honorables contradicteurs ont-ils pu se laisser prendre à une amorce aussi grossière?

IV.

Arrivons au principe en litige. M. Folie l'énonce ainsi (*Bulletins*, t. XLVI, p. 197) :

Théorème. — « *Soit le système d'équations*

$$\text{« } \varphi(x,y,\alpha,\beta)=0, \quad \psi(x,y,\alpha,\beta)=0, \quad \chi(x,y,\alpha,\beta)=0. \text{ (**) (C)}$$

» *Si l'on élimine* α *et* β *entre ces trois équations, on* » *obtient l'équation d'un lieu passant par les points com-* » *muns à la fois aux trois courbes représentées par ces* » *équations.* »

Au commencement du Mémoire (*Bull.*, p. 194), notre savant Confrère disait : « Jusqu'aujourd'hui, la recherche » d'un lieu plan pouvait se réduire à ce problème général :

(*) Pour rendre la comparaison plus facile, j'écris λ et μ, au lieu de α et β.

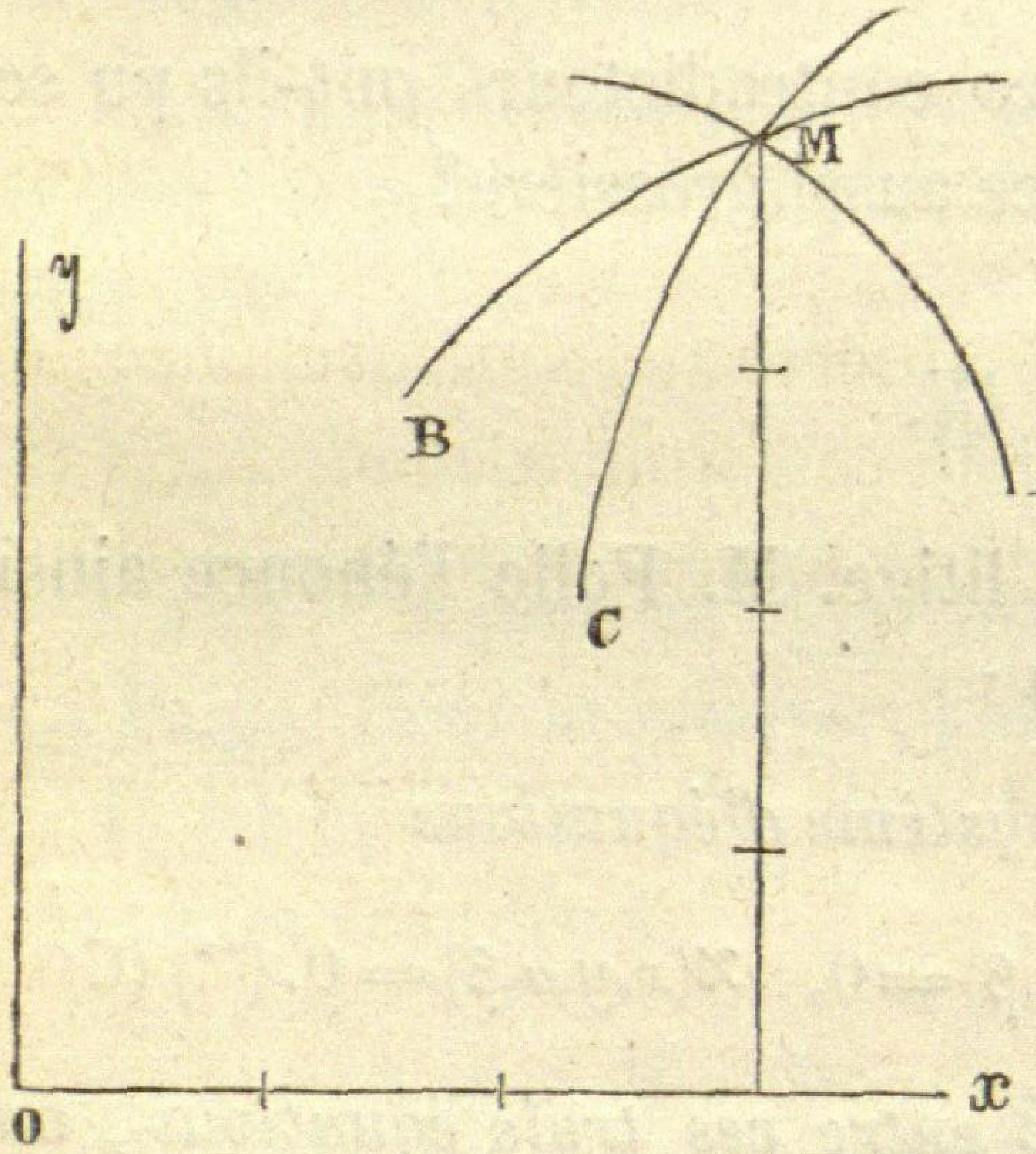
(**) Je passe une ligne (en *romain*) qui ne peut entrer dans l'énoncé d'un théorème.

» *Étant donnés deux lieux variables en vertu du para-*
» *mètre* α,

$$f(x, y, \alpha) = 0, \quad F(x, y, \alpha) = 0 \text{ (*)}, \quad . \quad . \quad . \quad \text{(D)}$$

» *trouver un lieu* (**) *qui passe par les intersections des*
» *lieux homologues* f *et* F. »

En quoi le nouveau problème est-il plus général que l'ancien? Si, entre les équations (C), on élimine β, on trouve les équations (D) : rien de plus, rien de moins!



Il y a donc parité complète entre les deux questions. M. Folie veut-il une autre démonstration? En voici une qui, je le crois bien, traîne partout:

Dans les équations (C), donnons une valeur particulière au paramètre α: par exemple, $\alpha = 2$; puis résolvons ces équations. Soient, pour fixer les idées,

$$\beta = 1, \quad x = 3, \quad y = 4$$

les valeurs trouvées.

Lorsque $\alpha = 2$ et $\beta = 1$, les équations (C) représentent trois lignes A, B, C, qui se coupent au point M. Que faut-il faire pour *trouver l'équation du lieu des points analogues*

(*) Je fais encore un changement de lettres, pour éviter toute ambiguïté.

(**) Ou plutôt : *trouver l'équation du lieu des points d'intersection....*

à M? Éliminer ce qui particularise ce point; c'est-à-dire α et β.

En terminant cette trop longue réplique, je me crois obligé de répéter ce que je disais dans mon Rapport :

« On peut regretter que M. Folie, auteur de travaux » importants et remarquables, réclame la priorité d'un » théorème évident pour tout le monde. »

Réplique de M. De Tilly à la réponse de M. Folie.

« Je ne ferai qu'une seule observation sur laréponse de M. Folie et sur le calcul qui en constitue le fond.

M. Folie dit : « La condition de concours de ces trois rayons sera $\lambda\mu\nu = -1$ ».

C'est une erreur. La condition de concours des trois rayons est :

$$(\lambda\mu\nu + 1)\,\alpha\beta\gamma = 0.$$

Elle ne devient $\lambda\mu\nu = -1$ que si le produit $\alpha\beta\gamma$ est différent de zéro.

Or, c'est ce qui n'arrive pas, puisque M. Folie lui-même trouve plus loin :

$$\alpha\beta\gamma = 0.$$

Du moment que l'une des quantités α, β, γ est nulle, l'équation

$$\lambda\mu\nu = a$$

n'est plus du tout incompatible avec les équations données.