



<http://www.biodiversitylibrary.org/>

**Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et
des beaux-arts de Belgique.**

Bruxelles.

<http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550>

ser.2:t.44 (1877): <http://www.biodiversitylibrary.org/item/28492>

Article/Chapter Title: Un nouveau principe de probabilités

Author(s): Eugène Catalan

Page(s): Page 463, Page 464, Page 465, Page 466, Page 467, Page 468

Contributed by: Harvard University, Museum of Comparative Zoology,
Ernst Mayr Library

Sponsored by: Harvard University, Museum of Comparative Zoology,
Ernst Mayr Library

Generated 19 November 2015 1:51 AM

<http://www.biodiversitylibrary.org/pdf4/045504900028492>

This page intentionally left blank.

*Un nouveau principe de probabilités; par M. E. Catalan ,
Associé de l'Académie.*

I.

THÉORÈME. *La probabilité d'un événement futur ne change pas lorsque les causes dont il dépend subissent des modifications inconnues (*)*.

J'ai appliqué ce théorème, et j'en ai même donné une démonstration, dans une Note insérée au *Journal de M. Liouville* (tome VI). Antérieurement, dans le célèbre *Mémoire sur l'avantage du Banquier, au jeu de trente-et-quarante*, Poisson avait recours, afin d'éviter de longs calculs, à une considération ingénieuse qui ne diffère pas, au fond, de celle qui constitue le *principe* énoncé (**);

(*) Il s'agit ici, bien entendu, de ce que certains Géomètres appellent *probabilité subjective*, et que l'on désignerait plus clairement, me semble-t-il, sous la dénomination de *probabilité extrinsèque*, par opposition à la *probabilité intrinsèque*. Si une urne contient 99 boules blanches et 1 boule noire, la probabilité *intrinsèque* de l'extraction d'une boule blanche est à peu près 1 : il est presque certain que la boule attendue sera blanche. Mais, pour une personne qui saurait, *seulement*, que l'urne renferme des boules blanches et des boules noires, la probabilité, *extrinsèque* cette fois, serait $\frac{1}{2}$.

(**) Cette assertion, émise par M. ÉMILE MONDÉSIR (*Journal de Liouville*, tome II, p. 10), est peut-être trop absolue. En effet, Poisson dit d'abord : « ... lorsque ces cartes ont été mêlées, s'il existe une chance » quelconque pour qu'un événement A arrive au premier coup et un » événement B à un autre coup, au dixième, par exemple, il y a exacte- » ment la même chance pour que l'événement B arrive au premier coup » et l'événement A au dixième; car on peut former un autre arrange- » ment de toutes les cartes, qui ne diffère de celui que le hasard a » donné, qu'en ce que les cartes qui sortent au premier coup sont rem-

mais l'illustre Géomètre n'a pas cherché, paraît-il, à généraliser cette notion (*).

Depuis quarante ans, personne, à ma connaissance, n'a démontré ni même formulé le principe qui fait l'objet de la présente Note : c'est pourquoi je le qualifie de *nouveau*.

Avant d'en faire des applications, avant de le vérifier sur un exemple, essayons d'en donner une démonstration générale.

Comme on le fait ordinairement, assimilons l'événement attendu, à la sortie d'une boule blanche, d'une urne A qui contient b boules de cette couleur, et $n - b$ boules noires, rouges, bleues, etc. Si l'on tire p boule (**), qu'on

» placées par celles qui sortent au dixième, *et vice versâ*; il en résulte
 » qu'avant que le jeu commence, la probabilité d'un *refait* de 51 est la
 » même pour le premier coup, pour le dixième, ou pour tout autre
 » coup. » (*Annales de Gergonne*, tome XVI, p. 191.) Ce raisonnement
 semble établir, seulement, que *la probabilité de l'arrivée de A au pre-*
mier coup, et de l'arrivée de B au dixième, égale la probabilité de l'ar-
rivée de B au premier coup, et de l'arrivée de A au dixième; proposi-
 tion incontestable.

Il est vrai que le célèbre auteur complète ainsi sa pensée : « Elle (la
 » probabilité dont il s'agit) ne varie pendant la durée du jeu, que pour
 » les joueurs qui ont la connaissance des cartes sorties; mais un joueur
 » qui ne les connaîtrait pas devrait parier la même somme à tous les
 » coups, pour l'arrivée d'un *refait* de 51. »

Autrement dit : « *la sortie d'un certain nombre de cartes INCONNUES,*
 » *ne change pas la probabilité de l'événement attendu* » Et cette con-
 clusion est d'accord, non-seulement avec notre principe, mais encore avec
 les premières notions de la théorie des probabilités.

(*) Il y a plus : dans les *Recherches sur la probabilité des jugements*, Poisson énonce une conséquence du même principe, et il renvoie, pour la démonstration, au Mémoire de M. Mondésir.

(**) Le nombre p est connu ou inconnu, suivant que l'on a compté les boules, ou qu'on ne les a pas comptées. Dans les deux cas, comme on

les introduise, *sans les regarder*, dans une urne B; les probabilités d'extraire une boule blanche, soit de cette urne B, soit de l'urne A, dont la composition a été modifiée, sont égales à b .

Supposons, en effet, que l'on n'ait rien changé à la composition primitive de A. La boule qui va sortir peut être considérée comme faisant partie d'un groupe de p boules, isolés parmi les n boules de A. On peut faire, sur la composition de ce groupe, les mêmes hypothèses que l'on ferait sur celle de B : ce groupe inconnu peut donc remplacer B (*). Semblablement, un groupe de $n - p$ boules, complémentaire du premier, peut tenir lieu de l'urne A, modifiée. Le théorème est donc démontré.

II.

Il y a dix ans, un Géomètre, à qui nous avons communiqué la démonstration précédente, nous répondit :

« J'ai lu, avec plaisir, votre lettre concernant une
» question de probabilités : j'avoue, pourtant, que votre
» principe, même dans sa nouvelle rédaction, me laisse
» un peu sceptique. Cela ne doit pas vous étonner; car
» toute cette partie de la théorie des probabilités a excité
» le doute chez de grands Géomètres. Il me souvient qu'à
» son cours, à la Sorbonne, Lamé nous a signalé des

ignore les couleurs qu'elles peuvent avoir, les causes de l'événement attendu ont subi des *modifications inconnues*. Cela suffit pour que le théorème soit applicable.

(*) Nous reproduisons les expressions même de la Note citée (*Journal de Liouville*, tome VI, p. 78).

» conséquences tout à fait paradoxales et absurdes (*) des
 » principes admis en cette matière. Voici, par exemple ,
 » une chose que je n'ai jamais pu *accepter* (**) : une urne
 » renferme des boules blanches et des boules noires, en
 » nombre égal; la probabilité de tirer une boule blanche
 » est $\frac{1}{2}$. Une autre urne renferme des boules blanches et
 » des boules noires, en proportion inconnue : la probabi-
 » lité d'extraire une boule blanche est encore $\frac{1}{2}$. Or, je
 » demande si la probabilité a réellement la même valeur
 » dans les deux cas. »

Il n'y a là rien de paradoxal : dans le second cas, la composition de l'urne étant inconnue (on sait seulement que les boules sont blanches et noires), on ne doit pas plus s'attendre à l'arrivée d'une boule blanche, qu'à l'arrivée d'une boule noire.

On peut aller plus loin, et supposer que le nombre total des boules, n , est inconnu. Si l'on admet que n peut, indifféremment, évaluer A , $A + 1$, $A + 2$, ..., B ; la probabilité de l'extraction d'une boule blanche est toujours $\frac{1}{2}$. Cette proposition, admissible *a priori*, se vérifie bien simplement.

Soit h le nombre des hypothèses que l'on peut faire sur la composition de l'urne, et que l'on suppose également

(*) Par suite de *calculs inexacts*, l'auteur d'un Mémoire sur une intéressante question de probabilités était arrivé à une proposition *paradoxale* même *absurde*. On a prétendu qu'un illustre Géomètre aurait dit à cette occasion : « *Le calcul des probabilités peut conduire à des résultats contraires au bon sens.* » Nous ne pensons pas qu'un pareil propos ait jamais été tenu : si une théorie est en désaccord avec la raison, elle est fausse.

(**) Le mot véritable, que nous traduisons par *accepter*, n'est peut-être pas académique.

probables :

$$h = (A + 1) + (A + 2) + \dots + (B + 1).$$

En effet, si le nombre des boules est A , celui des compositions possibles est $A + 1$ (*); si le nombre des boules égale $A + 1$, celui des compositions devient $A + 2$; etc.

La probabilité de chaque hypothèse est $\frac{1}{h}$. Par suite, la probabilité cherchée a pour expression

$$\frac{1}{h} \left[\frac{A + (A - 1) + \dots + 1}{A} + \frac{(A + 1) + A + \dots + 1}{A + 1} + \dots + \frac{B + (B + 1) + \dots + 1}{B} \right] = \frac{1}{2h} [(A + 1) + (A + 2) + \dots + (B + 1)] = \frac{1}{2}.$$

III.

Afin de montrer l'utilité de notre théorème, nous allons résoudre, par les méthodes ordinaires, le problème suivant, cas particulier de celui que nous avons traité ci-dessus.

Une urne A contient 4 boules blanches et 3 boules noires. On en tire, sans les compter ni les regarder, un certain nombre de boules. Quelle est la probabilité d'extraire une boule blanche, de l'urne A modifiée?

On peut faire dix-huit hypothèses sur le nombre et la nature des boules tirées (**). Chacune donne lieu à une probabilité de l'événement supposé; d'où l'on déduit, par le théorème de Bayes, la probabilité de cette hypothèse, etc. Voici le tableau des calculs.

(*) A blanches; $(A - 1)$ blanches, 1 noire; $(A - 2)$ blanches, 2 noires; ...; A noires.

(**) Nous faisons abstraction d'une dix-neuvième hypothèse, celle de l'extraction totale, parce que la probabilité correspondante serait nulle.

Hypothèses.	PROBABILITÉS RELATIVES.	Nombres proportion- nels.	Compositions modifiées.	Probabilité de la sortie d'une blanche.
1^b	$\frac{4}{7}$	20	$5^b + 3^n$	$\frac{1}{2}$
1^n	$\frac{3}{7}$	15	$4^b + 2^n$	$\frac{2}{3}$
2^b	$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{2}{7}$	10	$2^b + 3^n$	$\frac{2}{5}$
$1^b + 1^n$	$2 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} = \frac{4}{7}$	20	$3^b + 2^n$	$\frac{3}{5}$
2^n	$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} = \frac{1}{7}$	5	$4^b + 1^n$	$\frac{4}{5}$
3^b	$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{4}{35}$	4	$1^b + 3^n$	$\frac{1}{4}$
$2^b + 1^n$	$5 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{18}{35}$	18	$2^b + 2^n$	$\frac{1}{2}$
$1^b + 2^n$	$3 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} = \frac{12}{35}$	12	$3^b + 1^n$	$\frac{3}{4}$
3^n	$\frac{3}{7} \cdot \frac{2}{6} \cdot \frac{1}{5} = \frac{1}{35}$	1	4^b	1
4^b	$\frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{35}$	1	3^n	0
$3^b + 1^n$	$4 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} = \frac{12}{35}$	12	$1^b + 2^n$	$\frac{1}{3}$
$2^b + 2^n$	$6 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{3}{5} \cdot \frac{2}{4} = \frac{18}{35}$	18	$2^b + 1^n$	$\frac{2}{3}$
$1^b + 3^n$	$4 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{4}{35}$	4	3^b	1
$4^b + 3^n$	$5 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{1}{7}$	5	2^n	0
$3^b + 2^n$	$10 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{4}{7}$	20	$1^b + 1^n$	$\frac{1}{2}$
$2^b + 3^n$	$10 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{2}{4} \cdot \frac{1}{3} = \frac{2}{7}$	10	2^b	1
$4^b + 2^n$	$15 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{4} = \frac{3}{7}$	15	1^n	0
$3^b + 3^n$	$20 \cdot \frac{4}{7} \cdot \frac{3}{6} \cdot \frac{2}{5} \cdot \frac{3}{4} \cdot \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{4}{7}$	20	1^b	1
SOMME :		210		

Ainsi

$$\begin{aligned}
 P &= \frac{1}{210} \left[20 \times \frac{1}{2} + 15 \times \frac{2}{3} + 10 \times \frac{2}{5} + 20 \times \frac{3}{5} + 5 \times \frac{4}{5} + 4 \times \frac{1}{4} + 18 \times \frac{1}{2} \right. \\
 &\quad + 12 \times \frac{3}{4} + 1 \times 1 + 1 \times 0 + 12 \times \frac{1}{3} + 18 \times \frac{2}{3} + 4 \times 1 \\
 &\quad + 5 \times 0 + 20 \times \frac{1}{2} + 10 \times 1 + 15 \times 0 + 20 \times 1 \left. \right] \\
 &= \frac{1}{210} [10 + 10 + 4 + 18 + 4 + 1 + 9 + 9 + 1 + 4 + 12 \\
 &\quad + 4 + 10 + 10 + 20] \\
 &= \frac{120}{210} = \frac{4}{7};
 \end{aligned}$$

conformément au théorème.