Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.

Bruxelles.
http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550

ser.2:t.44 (1877): http://www.biodiversitylibrary.org/item/28492

Article/Chapter Title: Rapport sur l'influence de la forme des corps sur l'attraction qu'ils exercent par M. C. Lagrange
Author(s): Eugène Catalan
Page(s): Page 5, Page 6, Page 7, Page 8, Page 9, Page 10, Page 11

This page intentionally left blank.

RAPPORTS.

De l'influence de la forme des corps sur l'attraction qu'ils exercent; par M. C. Lagrange, ancien élève de l'École militaire de Bruxelles.

Rapport de M. G. Van der Mensbrugghe.

« On démontre en statique qu'un corps sphérique homogène ou composé de couches concentriques homogènes attire un point matériel extérieur, comme si toute la masse du corps était réunie à son centre d'inertie ; pour un corps de forme quelconque, ce théorème n'est vrai que d'une manière approchée, et encore faut-il que le point matériel soit à une distance suffisamment grande du corps attirant. D'après cela, il semblait naturel de rechercher les variations qu'éprouve l'attraction exercée par un corps, quand on fait varier non-seulement la quantité de matière attirante, mais encore la façon dont cette matière est distribuée dans l'espace, c'est-à-dire la *forme* du corps. Feu le major Brück avait entrevu la solution de ce problème, mais ses idées, d'ailleurs fort incomplètes et demeurées inédites, attendaient toujours un travailleur qui pût les développer et surtout en montrer toute la fécondité.

Ce travailleur apparaît aujourd'hui; dans le Mémoire qu'il a soumis au jugement de l'Académie, M. Lagrange, ancien élève de l'École militaire, présente une esquisse très-remarquable, selon moi, des lois suivant lesquelles varie l'attraction avec la forme du corps.

Le Mémoire se compose de deux parties, l'une purement théorique et rigoureuse, l'autre, plus ou moins hypothétique, où l'auteur cherche à appliquer les résultats de ses calculs; comme il a manifesté le désir de revoir et de compléter la seconde partie, je ne m'occuperai ici que de la première.

M. Lagrange débute par la remarque suivante: si une masse quelconque se trouve à l'intérieur d'une surface fermée, l'attraction exercée par la masse en question sur un point matériel situé sur cette surface, n'est pas la même quelle que soit la position du point; car l'attraction est une fonction du potentiel du corps considéré par rapport au point pris sur la surface, et devient ainsi susceptible de passer par un maximum et par un minimum.

Si le point matériel est pris sur l'une des surfaces représentées par l'équation

$$\varphi(x, y, z, a) = 0,$$

dans laquelle a est un paramètre variable, et qu'on cherche sur chacune d'elles les points où l'attraction atteint des valeurs extrêmes, le lieu géométrique de ces points se composera d'un certain nombre de lignes que l'auteur nomme, en général, *lignes d'attraction maximum* et lignes d'attraction *minimum* relativement à la famille de surfaces considérée, et d'une façon absolue, *lignes d'attraction maximum* ou *minimum*, si elles se rapportent à une série de sphères concentriques ayant pour centre le centre d'inertie du corps.

L'auteur se pose ensuite le problème suivant: étant donnée une quantité de matière de forme quelconque, chercher l'attraction qu'elle exerce sur un point matériel situé à une distance δ du centre d'inertie du corps.

Dans l'hypothèse où l'on peut négliger $\frac{1}{\delta^5}$, il arrive aux conclusions suivantes :

1° Pour un point quelconque de la surface sphérique de rayon δ, l'attraction est dirigée suivant une droite qui ne coïncide pas avec le rayon de la sphère.

2° La force d'attraction passe, au contraire, par le centre d'inertie, quand la droite qui joint celui-ci au point matériel coïncide avec l'un des axes principaux d'inertie du corps.

3° A égalité de distance du centre d'inertie, l'attraction est un maximum sur l'axe d'inertie minimum, et un minimum sur l'axe d'inertie maximum.

4° Enfin quand l'attraction passe par son maximum, elle est plus grande que si toute la masse était concentrée au centre d'inertie ; au contraire, elle est plus petite que si toute la masse était réunie au centre d'inertie, quand s'opère le passage par le minimum.

M. Lagrange examine ensuite le cas où les axes d'inertie principaux du corps sont en même temps des axes de symétrie, et signale un exemple à l'appui de ce fait curieux que l'inertie minimum ne répond pas toujours à l'attraction maximum, à quelque distance que ce soit du centre d'inertie.

Après avoir obtenu ces résultats fort intéressants, l'auteur démontre qu'à égalité de distance du centre d'inertie, le potentiel est respectivement maximum ou minimum sur les axes d'inertie minimum et maximum du corps; il trouve, en outre, que, dans l'hypothèse où il s'est placé, les surfaces d'égal potentiel ont la forme de sphéroïdes dont les grands axes, les axes moyens et les petits axes coïncident respectivement avec les axes d'inertie minimum, moyen et maximum du corps attirant; de plus, ces sphéroïdes admettent des sections circulaires passant par l'axe moyen d'inertie.

Restait à faire voir l'importance de la propriété concernant la direction de la force attractive exercée sur un point matériel appartenant à une sphère du rayon δ ; dans ce but, M. Lagrange fait passer par le point attiré une surface d'égal potentiel, et prouve, d'une manière bien simple, que le point en question non-seulement tend à se rapprocher du centre d'inertie, mais possède encore un mouvement angulaire autour de ce centre.

Il suit de là, d'après l'auteur, que 1° si le point attiré se meut sur la sphère, il sera, en général, sollicité vers le point d'intersection le plus voisin de la sphère avec l'axe d'inertie minimum ; les deux points d'intersection de cet axe sont donc des positions d'équilibre stable.

2° Si le point est situé dans le plan des axes d'inertie maximum et moyen, il sera sollicité vers l'intersection la plus voisine de la sphère avec l'axe moyen ; les deux points d'intersection de ce dernier sont des positions d'équilibre *stable*, dans le plan dont il s'agit, d'équilibre *instable*, dans le plan des axes maximum et minimum, et d'équilibre *indifférent*, dans les plans des sections circulaires des surfaces d'égal potentiel.

3° Si le point attiré est libre, il y a à la fois mouvement direct vers le centre d'inertie, mouvement angulaire du rayon vecteur vers l'axe d'attraction maximum, et mouvement angulaire du plan de cet axe et du rayon vecteur vers le plan des axes d'inertie moyen et minimum.

L'auteur termine l'exposé de ces diverses déductions en démontrant que, si l'on peut négliger $\frac{1}{\delta^5}$, une masse quelconque agit comme si elle était symétrique par rapport aux trois plans déterminés par les trois axes principaux d'inertie, et imagine une distribution fort simple de matière pouvant tenir lieu de la masse donnée.

M. Lagrange aborde alors le cas général de l'attraction réciproque de deux masses quelconques.

Il cherche d'abord comment, étant donnée la distance des centres d'inertie des deux masses, celles-ci doivent être placées l'une par rapport à l'autre, pour que l'action réciproque soit un maximum ou un minimum ; il trouve que l'attraction mutuelle est respectivement maximum ou minimum, quand les axes d'inertie minimum ou maximum des deux masses coïncident, les autres axes d'inertie étant parallèles deux à deux.

Comme on pouvait le prévoir d'après les résultats exposés précédemment, quand l'action atteint son maximum, elle est plus grande que si les masses étaient condensées en leurs centres d'inertie; elle est moindre dans le cas du minimum.

L'auteur établit ensuite les moments de rotation de l'une des masses qu'il suppose douée d'un point fixe ; il fait remarquer que ces moments de rotation ne dépendent pas de la forme des deux masses considérées, mais uniquement de celle de la masse douée d'un point fixe.

Il passe enfin au cas où le mouvement de chacune des deux masses est libre, et arrive à conclure qu'elles tournent sur elles-mêmes, avec une tendance constante à amener en coïncidence leurs axes d'inertie minimum.

Je n'insisterai pas sur les applications que l'auteur se propose de faire à la mécanique céleste et à la mécanique moléculaire ; j'estime toutefois qu'il faut attendre avec quelque impatience le moment où il aura mis la dernière main au travail qu'il nous promet à cet égard.

On voit, d'après l'analyse succincte qui précède, que le Mémoire de M. Lagrange présente un puissant intérêt en lui-même ; j'ajouterai que les applications auxquelles il donnera lieu, ne pourront manquer d'en augmenter encore la valeur.

C'est assez dire que, de même que mon savant confrère M. Folie (1), je regarde le Mémoire de M. Lagrange comme pouvant occuper une place très-honorable dans l'un des Recueils de l'Académie; en conséquence, j'ai l'honneur de proposer à la classe d'ordonner l'impression de la partie théorique (la seule dont je me suis occupé) au Bulletin de la séance, et d'adresser des remercîments à l'auteur pour son importante communication. »

Rapport de M. Catalan.

« Après le lumineux rapport que l'on vient de lire, je n'ai rien de mieux à faire qu'à me rallier aux conclusions de notre honorable confrère, M. Van der Mensbrugghe. Cependant, je poserai une objection, ou plutôt une simple question, à l'intelligent auteur du Mémoire.

Après avoir mis la valeur de u sous la forme

$$\sqrt{\delta^2 + \rho^2 - 2(\alpha x + \beta y + \gamma z)},$$

M. Lagrange pose

$$\alpha x + \beta y + \gamma z = \varphi;$$

puis il développe, par la formule du binôme,

$$\left[1 - \frac{\varphi - \frac{1}{2}\rho^2}{\frac{1}{2}\delta^2}\right]^{-\frac{1}{2}}.$$

(1) Voir *Bulletins de l'Acad.*, 2^{me} série, t. XLIII, p. 472.

La série ainsi formée est-elle convergente ?

Ce n'est pas tout : au lieu d'introduire cette quantité φ, qui représente $\delta\rho$ cos θ, et qui détruit l'homogénéité des formules, pourquoi l'honorable auteur n'a-t-il pas fait usage des développements imaginés depuis près d'un siècle? Pourquoi n'a-t-il pas eu recours aux fonctions X_n de Legendre ? Si, comme je le suppose, il a eu de bonnes raisons pour employer la série du binôme, il aurait dû, peut-être, les indiquer.

Encore un mot. M. Lagrange connaît-il le *Principe général de la Philosophie naturelle*, par Boucheporn, (1853). Cet ouvrage, tombé dans l'oubli, est certainement, comme le Mémoire actuel, l'œuvre d'un Géomètre doublé d'un Philosophe. »

Rapport de M. De Tilly.

« Je me rallie aux conclusions de mes honorables confrères.

Comme votre premier commissaire, j'engage M. Lagrange à poursuivre ses recherches et j'exprime le vœu que le travail intelligent et persévérant de ce jeune géomètre, mon ancien élève à l'École militaire, ait pour résultat de mettre en pleine lumière le génie encore méconnu d'un autre ancien élève de la même École, enlevé prématurément à la science.

L'auteur pourrait faire droit à l'observation de M. Catalan en démontrant la convergence de la série employée dans le Mémoire, ce qui est facile, eu égard à l'hypothèse faite sur la valeur de δ. »

Conformément aux conclusions favorables de ces trois