This page intentionally left blank.

Notes sur les équations différentielles homogènes, etc.; par M. Paul Mansion.

Rapport de M. Catalan.

I.

« Le petit Mémoire présenté à l'Académie, par M. Mansion, se compose de deux parties.

La première, consacrée aux équations différentielles homogènes, ne contient guère, nous semble-t-il, que la généralisation de propriétés et de démonstrations connues. Par exemple, l'honorable auteur établit, pour un nombre quelconque de variables, le théorème suivant, déjà connu dans le cas de deux variables :

Toute équation $Mdx + Ndy + Pdz + \ldots\ldots = 0$, *qui a pour facteur d'intégrabilité* $1 : Mx + Ny + Pz + \ldots$, *est homogène, ou réductible à la forme homogène.*

Nous n'avons donc presque rien à dire sur cette première partie (*).

II.

Dans la seconde, M. Mansion s'occupe de l'*équation de Clairaut.* Il commence par établir ce théorème curieux, sur lequel nous reviendrons :

L'équation différentielle du premier ordre,

$$y = xy' + f(y'),$$

(*) La rédaction primitive renfermait quelques inexactitudes, que M. Mansion a fait disparaître. Notre jeune et savant collègue de Gand ne pourrait-il, lorsque l'on imprimera son Mémoire, remplacer les δ par des ∂? Aujourd'hui, la plupart des Géomètres réservent les δ au calcul des variations, et représentent, par $\frac{\partial F}{\partial x}$, la dérivée de F, *relative à la lettre* x.

est la seule dont l'intégrale s'obtienne en remplaçant y' *par une constante arbitraire* c.

Au lieu de recourir à la démonstration purement analytique, mais un peu longue (*), employée par M. Mansion, ne pourrait-on regarder le théorème comme une conséquence de cette proposition évidente :

Si le coefficient angulaire de la tangente à une ligne est constant, cette ligne est droite?

Nous soumettons la question à notre jeune collègue, qui est très-capable d'y répondre.

III.

Le Mémoire se termine par un théorème fort simple, et, néanmoins, aussi curieux qu'important. L'auteur l'énonce ainsi :

Toute équation différentielle du premier ordre, dont on connaît l'intégrale générale, peut se ramener à une équation de Clairaut.

On sait que *toute équation différentielle a une intégrale générale.* Dès lors, à quoi bon la restriction contenue dans l'énoncé ? Il est possible que, pour *effectuer* la transformation dont il s'agit, on ait besoin de *connaître* l'intégrale générale; mais le théorème de M. Mansion doit être considéré d'une manière abstraite, et non au point de vue pratique (**). En conséquence, nous proposons de le formuler ainsi :

(*) Elle le serait encore plus, si l'auteur n'admettait un lemme préliminaire.

(**) On démontre, dans tous les traités d'Analyse, qu'*il existe toujours un facteur* λ *tel que* $\lambda\,(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy) = du$. Or, le plus souvent, il est impossible de trouver ce facteur λ. Est-ce que le théorème resterait aussi général, aussi élégant, si on l'énonçait ainsi : *On peut, quelquefois, trouver un facteur* λ *tel, que* $\lambda\,(\mathrm{M}dx + \mathrm{N}dy) = du$?

Toute équation du premier ordre est réductible à l'équation de Clairaut.

IV.

On peut chercher la *raison géométrique* ou l'*interprétation géométrique* du théorème de M. Mansion. Or, si l'on observe que les équations

$$F(x, y, c) = 0, \quad Y = cX + f(c)$$

représentent, respectivement, une série de courbes et une série de lignes droites, on est conduit à admettre, comme corollaire de ce théorème, la proposition suivante, sur laquelle nous appelons l'attention de l'honorable auteur :

Étant donnée l'équation F (x, y, c) = 0 (1), *il existe toujours deux fonctions* φ, ψ, *telles que, si l'on emploie les formules de transformation :*

$$x = \varphi(X, Y), \quad y = \psi(X, Y),$$

l'équation (1), *qui représente une série de courbes, est remplacée par l'équation*

$$Y = cX + f(c), \quad \ldots \ldots \quad (2)$$

qui représente une série de droites (*)

(*) Soit, par exemple, l'équation

$$(1 + c)^2 y = c(x + c)(x - c^2) \ldots \ldots \quad (1)$$

Si l'on fait

$$x = X + Y, \quad y = XY,$$

on trouve

$$Y = cX + c^2 \ldots \ldots \ldots \quad (2)$$

Ajoutons que, le paramètre c étant le même dans les deux équations, à chaque courbe correspond, sinon *une seule droite*, au moins *un certain nombre* de droites.

V.

Précédemment, nous avons cité ce théorème de M. Mansion :

L'équation de Clairaut est la seule dont on forme l'intégrale en remplaçant y′ *par une constante arbitraire* c.

D'un autre côté, comme on vient de le voir :

Toute équation du premier ordre est réductible à l'équation de Clairaut.

Il y a là une sorte de contradiction ; mais il y a là aussi, nous semble-t-il, la preuve d'un théorème remarquable, que l'on peut énoncer ainsi :

L'intégrale de toute équation du premier ordre est réductible à la forme

$$f(x, y) = c\,\varphi(x, y) + F(c); \text{ (*)} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

et, par conséquent :

Toute équation du premier ordre peut être mise sous la forme :

$$\varphi^2 \frac{d\left(\frac{f}{\varphi}\right)}{d\varphi} + F\left(\frac{df}{d\varphi}\right) = 0, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

f *et* φ *désignant des fonctions de* x, y.

VI.

En résumé, le petit Mémoire de M. Mansion nous paraît très-digne d'être approuvé par l'Académie, et imprimé dans le *Bulletin* de la séance. »

(*) Cette proposition résulte aussi de la comparaison des équations (1), (2) : celle-ci ne diffère pas, au fond, de l'égalité (3).