



<http://www.biodiversitylibrary.org/>

Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.

Bruxelles.

<http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550>

ser.2:t.42 (1876): <http://www.biodiversitylibrary.org/item/107938>

Article/Chapter Title: Rapport sur un Mémoire de concours répondant à la question : Perfectionner en quelque point important, soit dans ses principes, soit dans ses applications, la théorie des fonctions de variables imaginaires

Author(s): Eugène Catalan

Page(s): Page 921, Page 922, Page 923, Page 924, Page 925, Page 926, Page 927, Page 928, Page 929, Page 930, Page 931, Page 932, Page 933, Page 934

Contributed by: Missouri Botanical Garden, Peter H. Raven Library

Sponsored by: Missouri Botanical Garden

Generated 11 January 2016 8:18 AM

<http://www.biodiversitylibrary.org/pdf4/047188900107938>

This page intentionally left blank.

lettres et des arts, la Société royale danoise des sciences à Copenhague, l'Académie impériale de médecine de Saint-Pétersbourg accusent réception du dernier envoi annuel des publications.

JUGEMENT DU CONCOURS POUR 1876.

La Classe a reçu un Mémoire portant pour devise : *Le progrès est lent et pénible*, en réponse à la première question :

Perfectionner en quelque point important, soit dans ses principes, soit dans ses applications, la théorie des fonctions de variables imaginaires.

Rapport de M. Catalan, premier Commissaire.

I

« Ce travail est divisé en dix chapitres constituant, jusqu'à un certain point, autant de petits Mémoires séparés. Je les ai numérotés : I, II, X.

Les six premiers chapitres sont relatifs, surtout, aux *fonctions elliptiques* et aux *courbes quarrables algébriquement*. Je n'ai donc pas à m'en occuper. Mentionnons, cependant, une contradiction, au moins apparente, au commencement du chapitre VII (p. 75). L'auteur dit :

« Les règles données jusqu'ici, pour reconnaître les

» courbes quarrables algébriquement, sont sujettes à de
 » nombreuses exceptions.

» Il en résulte que *le problème..... de reconnaître la na-*
 » *ture de la quadratrice (*) d'une courbe..... n'est pas encore*
 » *résolu.*

» Toutefois..... *la solution donnée jusqu'ici du problème*
 » *en est la solution la plus générale..... »*

Ainsi, *le problème n'est pas résolu; et, néanmoins, la*
solution qu'on en a donnée est la plus générale possible.
 Comment cela se peut-il ?

II

Le Mémoire roule : « *Sur les solutions particulières et*
 » *singulières du problème des courbes quarrables algébri-*
 » *quement, par les fonctions circulaires et par les fonctions*
 » *elliptiques.* » Ce titre ne répond guère, nous semble-t-il,
 au programme proposé par l'Académie. Il y a plus : même
 dans les premiers chapitres, certaines parties traitent,
 exclusivement, des *fonctions elliptiques*. Exemples :

1° (page 32) — « Non-seulement l'intégrale d'une frac-
 » tion rationnelle de x (**) et de la racine quatrième d'un
 » polynôme du quatrième degré se ramène aux intégrales
 » elliptiques, mais, ce qui aurait paru paradoxal, elles se
 » ramènent aux intégrales elliptiques les plus simples,
 » celles qui ont leurs périodes égales au signe $\sqrt{-1}$ près
 » (sic). »

2° (page 35) — « Il existe donc une infinité de courbes

(*) La *quadratrice* est l'intégrale qui représente l'aire de la courbe.

(**) Qu'est-ce qu'une *fraction rationnelle de x* ?

» quarrables par les intégrales elliptiques *et qui* ne présen-
 » tent pas le nombre maximum moins un de points de
 » doubles. Il est clair au reste *que* l'explication *que* nous
 » avons donnée du fait, en ce *qui* concerne les *deux*
 » courbes

$$y = \sqrt[4]{a^4 - x^4} \quad \text{et} \quad y = \sqrt[4]{(a^2 - x^2)(a^2 - k^4 x^2)}$$

» conviendrait à toutes les autres. Les recherches *que* je
 » faisais pour arriver à cette explication m'amènèrent à
 » porter mon attention sur un passage important du Cours
 » d'Analyse de l'École polytechnique (*sic*) de M. Hermite. »

Suit une longue citation; après quoi l'auteur ajoute :

« Il est probable *que* ce passage ne doit pas être inter-
 » prêté littéralement *puisque*, pris dans son sens naturel,
 » il serait en contradiction avec les faits. Mais j'y vis une
 » sorte d'avertissement *que* les transformations *que* j'ai
 » indiquées dans ce *qui* précède, etc. »

III

Le chapitre I est intitulé : « *Des relations qui existent*
 » *entre les périodes de la quadratrice de la courbe la*
 » *plus générale d'un degré assez élevé (*) et, à plus forte*
 » *raison, d'une courbe particulière dans son degré (sic).* »

IV

Dès la première page, et jusqu'à la fin du Mémoire, l'auteur cite, presque continuellement, les travaux de M. Maximilien Marie. Il prouve (ou il cherche à prouver) que

(*) Que veut dire : *degré assez élevé*?

MM. Puiseux , Briot , Bouquet , Clebsch , Hermite se sont trompés, et que les principes adoptés par M. Marie sont les seuls vrais. Sans aucun doute, l'auteur anonyme a d'excellents motifs pour croire à la supériorité des théories de M. Marie, sur celles des Géomètres que nous venons de citer.

V

Il y a deux ans , M. Marie était concurrent ; et à propos de la décision adoptée par la Classe , M. le Secrétaire perpétuel, M. De Tilly et moi nous avons eu, avec l'honorable auteur, une polémique assez vive. En outre, contrairement à tous les usages, M. Marie a fait paraître, dans le troisième volume de sa *Théorie des fonctions de variables imaginaires*, des lettres qui n'étaient pas destinées à la publicité (*).

VI

Le Mémoire est une véritable *glorification* de M. Marie (**), et *un complément à tous les travaux de ce Géomètre*. Ce dernier fait résulte, en particulier, des passages suivants :

1° (p. 72) « Mais on peut tirer de la théorie de M. Marie » cette conséquence autrement importante *que* la solution » *que* ce géomètre a donnée, après M. Clebsch, du problème des courbes algébriques quarrables par les fonctions circulaires ou elliptiques est la solution la plus » générale *que* comporte ce problème, c'est-à-dire *que*

(*) Je reviendrai sur ce point.

(**) Aux pages 8 et 9, on lit *deux fois* : comme M. Marie l'a démontré ; et encore : Or, M. Marie a démontré.

» les classes de courbes *qui* ont $\frac{1}{2} (m - 1) (m - 2)$ ou
 » $\frac{1}{2} m (m - 3)$ points doubles, sont les plus étendues
 » parmi celles des courbes quarrables par les fonctions
 » circulaires ou elliptiques; *que* les équations de ces classes
 » de courbes présentent le plus grand nombre possible
 » de paramètres (*). »

2° pp. 76, 77) — « Les équations des courbes quarra-
 » bles par les fonctions circulaires, *qui* n'auraient pas
 » $\frac{m(m-3)}{2}$ ou $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, présenteront
 » moins de paramètres arbitraires *que* celles des courbes
 » les plus générales du degré m *qui* auront ces nombres
 » de points doubles.... il est aisé de fournir une explica-
 » tion générale du fait.

» Cette explication résulte immédiatement de ce *que*,
 » comme l'a établi M. Marie, la condition unique *qui* amène
 » la formation d'un point double..... »

3° (pp. 109, 110) — « Enfin on pourrait examiner les
 » cas où il manquerait trois, quatre points doubles.

» On arriverait ainsi à un complément utile du théo-
 » rème de M. Marie, puisqu'on saurait dès lors ce qu'il y
 » aurait à faire..... »

(*) Cette phrase, bien fatigante à lire, et dont la ponctuation est remarquable, rentre tout à fait dans la *manière* de M. Marie. A ce propos, je reproduirai deux fragments de la *théorie des fonctions*..... (T. III, p. 332, 333): « Les reproches de M. Catalan n'étaient nullement fondés : le
 » Mémoire avait été rédigé avec le soin que j'apporte à tous mes tra-
 » vaux. »

« Vous trouvez ma rédaction mauvaise, obscure, etc. J'ai relu mon Mé-
 » moire et je l'ai trouvé semblable à tout ce que j'écris. » Ceci est vrai ;
 mais combien, paraît-il, le précepte de Socrate est difficile à pratiquer !
 (T. II, p. 271). — « Les termes du premier degré en x et en y s'en allant
 d'eux-mêmes. » (!)

4° (p. 50) — « Il peut arriver *que* toutes les périodes
 » étant *liées* par des *relations* en nombre suffisant, les
 » périodes d'origines ultracycliques, se réduisent aux pé-
 » riodes cycliques, de sorte *que* ces dernières restent
 » seules et *que*, par suite, la quadrature ne dépende *que*
 » des fonctions circulaires. »

5° (p. 69) — M. Marie suppose *que*, partant de l'équa-
 » tion la plus générale du degré m , on n'introduise, entre
 » les paramètres, ou les coefficients, *que* des relations
 » devant amener la formation de points doubles, et il
 » démontre *que*, dans cette hypothèse, on ne parviendra
 » à une courbe quarrable par les fonctions elliptiques
 » qu'après avoir fait acquérir à la courbe $\frac{1}{2}m(m-3)$ points
 » doubles, et qu'on ne parviendra à une courbe quarrable
 » par les fonctions circulaires qu'après avoir fait acquérir
 » à la courbe $\frac{1}{2}(m-1)(m-2)$ points doubles. »

D'après ces extraits, ne sommes-nous pas en droit de
 dire: « Si l'auteur anonyme n'est pas M. Marie, il possède
 » tous les théorèmes de M. Marie; et il écrit comme écrit
 » cet honorable Géomètre? »

VII.

Dans le Mémoire de 1874, le théorème suivant avait
 attiré l'attention des Commissaires: « pour que le volume
 » d'un corps soit exprimable algébriquement, il suffit que
 » les aires de toutes les sections planes le soient (*). »

Si cette proposition avait été accompagnée d'une démon-
 stration claire, complète, le Mémoire aurait certainement

(*) *Théorie des fonctions* ... (T. III, p. 332). (Lettre de M. Catalan à M. Marie.)

eu le prix. Aujourd'hui, rien de semblable : comme je l'ai dit en commençant, le manuscrit envoyé au Concours se compose de dix petits Mémoires, dans lesquels nous avons cherché, en vain, quelque théorème véritablement important. L'un de ceux auxquels l'auteur semble tenir le plus, est celui-ci : (p. 50) — « *Les courbes unicursales ne sont pas les seules courbes algébriques quarrables par les fonctions circulaires (*)*. »

Quand bien même, comme paraît le croire l'auteur anonyme, M. Hermite se serait trompé, en essayant d'établir le théorème contraire ; quand bien même des courbes, non unicursales, seraient quarrables algébriquement ; est-ce là ce qu'on peut appeler un théorème remarquable ? Nous ne le pensons pas. D'ailleurs, il n'approche pas du beau théorème de M. Marie, rappelé tout à l'heure. Enfin, cette propriété des courbes quarrables algébriquement ne se rattache, que d'une manière bien indirecte, à la question proposée par l'Académie.

VIII

Le Mémoire renferme, non-seulement de nombreuses fautes, dues à la précipitation avec laquelle il semble avoir été rédigé, ou commises par le copiste ; mais encore des formules, des expressions inacceptables. Ainsi, p. 9, le coefficient a , entrant dans la dernière équation de la p. 8, a été omis. En outre, l'auteur dit : « *Ce qui donne, pour l'équation en coordonnées réelles de l'enveloppe imaginaire* » $(x^2 + y^2)^2 = -x^2 + y^2$. »

(*) L'auteur prend, comme exemple, l'équation $y^m (a^m - x^m) = a^{2m}$.

Il s'agit de l'enveloppe des conjuguées à la lemniscate.
L'équation de la lemniscate étant

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (x^2 - y^2),$$

les conjuguées de cette courbe doivent être représentées par

$$(x^2 + y^2)^2 = a^2 (y^2 - x^2),$$

a étant variable (*). Or, l'enveloppe de ces lignes se réduit à l'origine. Comment l'auteur parvient-il à l'équation citée? Je l'ignore.

Enfin, à la p. 14, on lit :

« Considérons, par exemple, la courbe $y^4 + x^4 = a^4$.

» Les trois périodes cycliques de la quadratrice de cette
» courbe sont nulles, car chacune des quatre asymptotes
» $y = \pm \sqrt{\pm \sqrt{-1}} x$ coupe la courbe en quatre points à
» l'infini. »

En laissant de côté la forme, assurément très-mauvaise (**), je me demande *comment une courbe fermée peut être coupée, à l'infini, par des asymptotes imaginaires.*

(*) Forcé d'interpréter les paroles de l'auteur, je leur attribue le sens qui me paraît le plus naturel.

(**) A la p. 42, se trouve une ellipse encore plus forte que les précédentes : « Les deux branches »

$$y = \frac{a^2 \sqrt{2}}{\pm (1 + \sqrt{-1}) \sqrt{x^4 - a^4}} . »$$

Une équation qui est deux branches!

IX

Parfois, l'auteur abuse des imaginaires. Je lis, à la p. 46:

« La fraction $\frac{a^8}{a^8 + z^4}$ (*) se décompose en

$$\frac{1}{2} \frac{a^4 \sqrt{-1}}{a^4 \sqrt{-1} + z^2} + \frac{1}{4} \frac{a^2 \sqrt{\sqrt{-1}}}{z + a^2 \sqrt{\sqrt{-1}}} - \frac{1}{4} \frac{a^2 \sqrt{\sqrt{-1}}}{z - a^2 \sqrt{\sqrt{-1}}}. »$$

A quoi bon tous ces radicaux? $a^2 = b$ donne, immédiatement,

$$\frac{a^8}{a^8 + z^4} + \frac{b^4}{(z^2 + b^2)^2 - 2b^2 z^2};$$

etc.

Si, dans cette même page 46, on fait $z = at$, on obtient, au lieu d'une formule beaucoup trop compliquée,

$$ds = a^5 \frac{dt}{a^4 + t^4} = a^5 \left[\frac{Mt + N}{t^2 + a \sqrt{2t} + a^2} + \frac{M_1 t + N_1}{t^2 - a \sqrt{2t} + a^2} \right] dt.$$

Encore une fois, à quoi servent toutes ces imaginaires?

X

Une proposition, que M. Marie regarde, certainement, comme une grande découverte (**), est celle-ci : « les courbes

(*) Si l'auteur avait pris $z = \frac{xy}{a}$, il eût trouvé, au lieu de cette expression hétérogène, $\frac{a^4}{a^4 + z^4}$.

(**) « M. Hermite se donnait un mal infini pour exprimer leur évanouissement, lorsque je suis venu dire : Pour que les périodes logarithmiques disparaissent et que la courbe soit, par suite, quarrable algébriquement, il suffit que chacune des asymptotes de cette courbe la

de degré m quarrables algébriquement sont celles qui ont
 » $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles et que leurs asymptotes cou-
 » pent (*) toutes en trois points situés à l'infini (**). »
 Cette dernière hypothèse, faute de quoi le théorème énoncé
 pourrait bien s'en aller de lui-même, cette dernière hypo-
 thèse exige un examen assez long, pour lequel nous solli-
 citons la patience de nos confrères.

1° A la p. 8 du Mémoire, on lit : « les asymptotes $x=2a$
 » des deux premières les coupent respectivement en trois
 » points situés à l'infini ». Il s'agit des courbes représen-
 » tées par

$$y = \sqrt{\frac{x^5}{2a-x}}, \quad y = \sqrt{\frac{x^5}{x-2a}}.$$

Considérons, par exemple, la première, c'est-à-dire la
 cissoïde. L'auteur prétend, comme M. Marie, que cette
 ligne est coupée, par son asymptote, en trois points situés
 à l'infini.

Soit $x = 2a - \varepsilon$; alors $y = \pm \sqrt{\frac{(2a - \varepsilon)^5}{\varepsilon}}$; et, sensiblement,

$$y = \pm 2a \sqrt{\frac{2a}{\varepsilon}}.$$

» coupe en trois points situés à l'origine, c'est-à-dire que son équation
 » rentre dans le type

» $(y - a_1 x - b_1)(y - a_2 x - b_2) \dots (y - a_m x - b_m) + \Phi_{m-3}(x, y) = 0$,

» Φ_{m-3} désignant un polynôme complet du degré $m - 3$. »

(*) Pour couper, il faut traverser; ce qui n'a pas lieu, en général, pour
 les asymptotes aux courbes algébriques. Dans les travaux de M. Marie, et
 dans le Mémoire de son disciple, les mots reçoivent souvent, on le voit,
 des acceptions contraires à celles que tout le monde connaît.

(**) Nous respectons, scrupuleusement, la non-ponctuation de l'auteur.

Où les mots ont perdu leur signification, ou cette formule montre, *clairement*, que la cissoïde et l'asymptote ont *deux* points situés à l'infini; et non *trois*.

2° Ma lettre du 20 février 1875, reproduite (sans autorisation) dans la *Théorie des fonctions* (t. III, p. 332), contient le passage suivant :

« Vous parlez, je crois, d'*asymptotes ayant avec la*
 » *courbe* (algébrique), *trois points communs à l'infini*. Je
 » crois (*) avoir démontré que ce nombre de points est
 » nécessairement *pair*. Mais, probablement, il n'y a là que
 » des différences de points de vue. »

On voit combien mon langage était modéré, et avec quel soin j'évitais les affirmations tranchantes. Au lieu de suivre mon exemple, M. Marie répond ainsi à la question que je lui adressais amicalement :

« Si l'on rapporte une courbe du degré m à une de ses
 » asymptotes prise pour axe des y , l'équation de cette
 » courbe prend la forme

$$xy^{m-1} + (ax^2 + bx + c)y^{m-2} + (dx^3 + ex^2 + (x+g)y^{m-3} + \dots = 0;$$

» Si c est nul et que g ne le soit pas, l'axe des y coupe (**)
 » la courbe en trois points situés à l'infini et en trois seu-
 » lement. »

« Donc vous n'avez pas pu démontrer que le nombre
 » des points de rencontre à l'infini d'une courbe avec

(*) La répétition des mots *je crois* suffirait à prouver que cette lettre tout intime, n'était pas destinée à la publicité.

(**) Il y tient !

» une de ses asymptotes est nécessairement pair (*). »

A cette assertion, dont je ne veux pas qualifier la forme, je répondis, en substance :

« Ma démonstration va paraître dans la *Nouvelle Correspondance Mathématique*; il vous sera donc facile de la discuter. » C'est ce que M. Marie n'a pas fait.

3° Pour juger si la proposition énoncée ci-dessus est exacte, il suffit de prendre l'équation

$$xy^2 + x^2y - 1 = 0,$$

qui satisfait aux conditions indiquées.

On en tire

$$y_1 = \frac{-x^2 + \sqrt{(x^5 + 4)x}}{2x}, \quad y_2 = \frac{-x^2 - \sqrt{(x^5 + 4)x}}{2x}.$$

Quant x est suffisamment petit, le produit $(x^5 + 4)x$ a le signe de cette variable. Donc les points qui s'approchent indéfiniment de l'axe des ordonnées, en s'éloignant indéfiniment de l'origine, sont situés du côté des abscisses positives.

Cela posé, soit $x = \varepsilon^2$, ε désignant une quantité positive, convergeant vers zéro. La valeur de y_2 est, sensiblement,

$$\frac{-\varepsilon^4 - 2\varepsilon}{2\varepsilon^2} = -\frac{\varepsilon^2}{2} - \frac{1}{\varepsilon} = -\infty.$$

Ainsi, la partie Oy' , de l'axe des ordonnées, est asymptotique à une première branche de la courbe.

(*) Toujours la même absence de ponctuation!

En second lieu,

$$y_1 = \frac{-\varepsilon^4 + \varepsilon \sqrt{\varepsilon^6 + 4}}{2\varepsilon^2} = \frac{2}{\varepsilon^2 (\varepsilon^5 + \sqrt{\varepsilon^6 + 4})} = +\infty :$$

la partie Oy, de l'axe des ordonnées, est asymptotique à une seconde branche (ou bras) de la cissoïde.

Le nombre des points de la courbe, que l'on regarde comme situés sur l'asymptote, à une distance infinie de l'origine, est donc PAIR.

Je sais bien qu'en vertu de nouvelles idées, on peut faire autrement la supputation. Par exemple (nous l'avons déjà dit), l'auteur du Mémoire prétend qu'une courbe fermée, convexe, a des asymptotes (imaginaires, il est vrai), et que ces asymptotes, qui n'existent pas, coupent la courbe en quatre points, situés à l'origine. J'ignore si, quelque jour, j'attacherai un sens raisonnable à ces expressions *symboliques* et *paraboliques*. En attendant, lorsqu'un théorème est en opposition avec les règles du bon sens, je n'y crois pas!

XI

Nous croyons avoir établi :

1° Que le Mémoire envoyé au Concours ne contient aucun résultat important, *relatif à la théorie des fonctions de variables imaginaires*;

2° Que, si l'auteur du Mémoire n'est pas M. Marie lui-même, c'est un des plus fervents disciples de l'honorable Géomètre.

Dans cette situation, quel parti l'Académie peut-elle adopter?

Après avoir longtemps réfléchi à cette question délicate, je pense qu'une seule solution est possible, si, toutefois, les

règlements et les précédents de l'Académie ne s'opposent pas à ce que cette solution soit acceptée par mes honorables confrères. Voici comment on pourrait, peut-être, la formuler :

Considérant :

1° Que le Mémoire portant pour devise *Le Progrès est lent et pénible*, ne répond pas, directement, à la question proposée ;

2° Que ce Mémoire, *probablement* rédigé par M. Maximilien Marie, peut être considéré comme un complément aux travaux de ce Géomètre ;

3° Qu'au précédent concours, M. Marie a obtenu une mention honorable ;

4° Que, depuis vingt ans, M. Marie s'est constamment appliqué à perfectionner la théorie des imaginaires ;

5° Que ses travaux, publiés dans le *Journal de Mathématiques*, dans le *Journal de l'École polytechnique*, etc., ont fait progresser la science ;

La Classe décide que

1° Le Mémoire cité n'a pas mérité le prix ;

2° La médaille destinée à récompenser l'auteur du meilleur travail en réponse à la question proposée, sera décernée à M. Maximilien Marie, *si ce Géomètre est l'auteur du Mémoire cité.* »

Rapport de M. De Tilly, deuxième commissaire.

« Le premier commissaire ayant longuement discuté la forme et le style du Mémoire présenté, je ne m'y arrêterai pas. Je ne reviendrai que sur les objections relatives au fond.

1. Le Mémoire ne traiterait des imaginaires que fort incidemment. J'admettrais cette observation si la question