This page intentionally left blank.

Relation nouvelle entre les Nombres de Bernoulli;
par C. Le Paige.

1. De l'égalité

$$\frac{1}{e^x-1}+\frac{1}{2}=\frac{1}{x}+\frac{B_1}{1.2}x+\frac{B_3}{1.2.3.4}x^3+\cdots+\frac{B_{2q-1}}{1.2.3\ldots 2q}x^{2q-1}+\cdots,\quad (1)$$

on conclut, en prenant les dérivées,

$$-\frac{e^x}{(e^x-1)^2}=-\frac{1}{x^2}+\frac{1}{12}+3\frac{B_3}{1.2.3.4}x^2+\cdots+(2q-1)\frac{B_{2q-1}}{1.2\ldots 2q}x^{2q-2}+\cdots$$

Le premier membre égale $-\frac{1}{e^x-1}-\frac{1}{(e^x-1)^2}$. Ainsi

$$\left.\begin{aligned}\frac{1}{(e^x-1)^2}+\frac{1}{e^x-1}&=\frac{1}{x^2}-\frac{1}{12}-3\frac{B_3}{1.2.3.4}x^2-\cdots\\&-(2q-1)\frac{B_{2q-1}}{1.2\ldots 2q}x^{2q-2}-\cdots\quad\ldots\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad (2)$$

2. Si l'on élève au carré les deux membres de l'égalité (1), puis que l'on retranche, on a donc l'identité

$$\left.\begin{aligned}&1+\frac{1}{6}x^2-3\frac{B_3}{1.2.3.4}x^4-\cdots-(2q-1)\frac{B_{2q-1}}{1.2\ldots 2q}x^{2q}-\cdots\\&=\left[1+\frac{B_1}{1.2}x^2+\frac{B_3}{1.2.3.4}x^4+\cdots+\frac{B_{2q-1}}{1.2\ldots 2q}x^{2q}+\cdots\right]^2;\end{aligned}\right\}.\quad (3)$$

d'où l'on déduit

$$\left.\begin{aligned}&(2q+1)B_{2q-1}+\frac{2q(2q-1)}{1.2}B_{2q-3}B_1\\&+\frac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-3)}{1.2.3.4}B_{2q-5}B_3+\cdots\\&+\frac{2q(2q-1)}{1.2}B_1B_{2q-3}=0.\end{aligned}\right\}\quad\ldots\quad (A)$$

Telle est la relation qu'il s'agissait d'établir.

Note sur la communication précédente; par E. Catalan.

3. Si l'on fait

$$A_{2n} = \frac{B_{2n-1}}{1.2\ldots 2n},$$

on trouve aisément les deux formules :

$$\frac{1}{2}x\frac{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}} = 1 + A_2x^2 + A_4x^4 + \cdots + A_{2n}x^{2n} + \cdots,$$

$$\frac{1}{2}x\frac{e^{\frac{x}{2}}-e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}}+e^{-\frac{x}{2}}} = (4-1)A_2x^2 + (4^2-1)A_4x^4 + \cdots + (4^n-1)A_{2n}x^{2n} + \cdots;$$

puis, par la multiplication,

$$\frac{1}{4}x^2 = \left[1 + A_2x^2 + \cdots + A_{2q}x^{2q} + \cdots\right] \times \left[(4-1)A_2x^2 + \cdots + (4^2-1)A_{2q}x^{2q} + \cdots\right].$$

Donc, pour $q > 1$:

$$(4^q-1)A_{2q} + (4^{q-1}-1)A_{2q-2}A_2 + (4^{q-2}-1)A_{2q-4}A_4 + \cdots + (4-1)A_2A_{2q-2} = 0;$$

ou, en changeant de notation,

$$\left.\begin{aligned}&(4^q-1)B_{2q-1} + (4^{q-1}-1)\frac{2q(2q-1)}{1.2}B_{2q-3}B_1\\ &+(4^{q-2}-1)\frac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-3)}{1.2.3.4}B_{2q-5}B_3 + \cdots\\ &+(4-1)\frac{2q(2q-1)}{1.2}B_1B_{2q-3} = 0;\end{aligned}\right\} \quad . \; . \quad (B)$$

relation que nous croyons nouvelle.

4. En la combinant avec (A), on obtient celle-ci :

$$\left.\begin{array}{l}(4^q+2q)B_{2q-1}+4^{q-1}\dfrac{2q(2q-1)}{1.2}B_{2q-3}B_1\\ +4^{q-2}\dfrac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-3)}{1.2.3.4}B_{2q-5}B_3+\cdots\\ +4\dfrac{2q(2q-1)}{1.2}B_1B_{2q-3}=0;\end{array}\right\}\ldots\ (C)$$

un peu plus simple que (B).

Au sujet d'une relation qui existerait entre la température de fusion des métaux et leur coefficient de dilatation; par M. P. De Heen, ingénieur, à Louvain.

On sait qu'en général les métaux les plus fusibles sont aussi les plus dilatables; je dis en général, car cette propriété offre de fréquentes anomalies : l'antimoine, par exemple, a un coefficient de dilatation sensiblement égal à celui du palladium quoique les températures de fusion de ces métaux soient fort différentes. Cette remarque me frappa néanmoins et je m'efforçai de trouver une relation entre ces deux chiffres de telle sorte que la connaissance de l'un d'eux permît d'en déduire l'autre. La première chose à faire consistait à compter les températures non pas à partir d'un zéro arbitraire tel que celui qui nous est donné par la fusion de la glace, mais bien à partir du zéro absolu, c'est-à-dire du point où les vibrations calorifiques sont nulles : on sait que ce point a été fixé par la thermodynamique à —273° centigrades.