



<http://www.biodiversitylibrary.org/>

Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.

Bruxelles.

<http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550>

ser.2:t.41 (1876): <http://www.biodiversitylibrary.org/item/28491>

Article/Chapter Title: Note sur les Nombres de Bernoulli

Author(s): Eugène Catalan

Page(s): Page 1017, Page 1018, Page 1019

Contributed by: Harvard University, Museum of Comparative Zoology,
Ernst Mayr Library

Sponsored by: Harvard University, Museum of Comparative Zoology,
Ernst Mayr Library

Generated 18 November 2015 3:12 AM

<http://www.biodiversitylibrary.org/pdf4/045455800028491>

This page intentionally left blank.

Relation nouvelle entre les Nombres de Bernoulli;
par C. Le Paige.

1. De l'égalité

$$\frac{1}{e^x - 1} + \frac{1}{2} = \frac{1}{x} + \frac{B_1}{1.2} x + \frac{B_3}{1.2.5.4} x^3 + \dots + \frac{B_{2q-1}}{1.2.5\dots 2q} x^{2q-1} + \dots, (1)$$

on conclut, en prenant les dérivées,

$$-\frac{e^x}{(e^x - 1)^2} = -\frac{1}{x^2} + \frac{1}{12} + 3 \frac{B_3}{1.2.5.4} x^2 + \dots + (2q-1) \frac{B_{2q-1}}{1.2\dots 2q} x^{2q-2} + \dots$$

Le premier membre égale $-\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{(e^x - 1)^2}$. Ainsi

$$\left. \begin{aligned} \frac{1}{(e^x - 1)^2} + \frac{1}{e^x - 1} &= \frac{1}{x^2} - \frac{1}{12} - 3 \frac{B_3}{1.2.5.4} x^2 - \dots \\ &- (2q-1) \frac{B_{2q-1}}{1.2\dots 2q} x^{2q-2} - \dots \end{aligned} \right\} \dots (2)$$

2. Si l'on élève au carré les deux membres de l'égalité (1), puis que l'on retranche, on a donc l'identité

$$\left. \begin{aligned} 1 + \frac{1}{6} x^2 - 3 \frac{B_3}{1.2.5.4} x^4 - \dots - (2q-1) \frac{B_{2q-1}}{1.2\dots 2q} x^{2q} - \dots \\ = \left[1 + \frac{B_1}{1.2} x^2 + \frac{B_3}{1.2.5.4} x^4 + \dots + \frac{B_{2q-1}}{1.2\dots 2q} x^{2q} + \dots \right]^2 \end{aligned} \right\} \dots (3)$$

d'où l'on déduit

$$\left. \begin{aligned} (2q+1) B_{2q-1} + \frac{2q(2q-1)}{1.2} B_{2q-3} B_1 \\ + \frac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-5)}{1.2.5.4} B_{2q-5} B_3 + \dots \\ + \frac{2q(2q-1)}{1.2} B_1 B_{2q-3} = 0. \end{aligned} \right\} \dots (A)$$

Telle est la relation qu'il s'agissait d'établir.

Note sur la communication précédente ; par E. Catalan.

3. Si l'on fait

$$A_{2n} = \frac{B_{2n-1}}{1.2\dots 2n},$$

on trouve aisément les deux formules :

$$\frac{1}{2} x \frac{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}} = 1 + A_2 x^2 + A_4 x^4 + \dots + A_{2n} x^{2n} + \dots,$$

$$\begin{aligned} \frac{1}{2} x \frac{e^{\frac{x}{2}} - e^{-\frac{x}{2}}}{e^{\frac{x}{2}} + e^{-\frac{x}{2}}} &= (4 - 1) A_2 x^2 + (4^2 - 1) A_4 x^4 + \dots \\ &+ (4^n - 1) A_{2n} x^{2n} + \dots; \end{aligned}$$

puis, par la multiplication,

$$\begin{aligned} \frac{1}{4} x^2 &= [1 + A_2 x^2 + \dots + A_{2q} x^{2q} + \dots] \times \\ &[(4 - 1) A_2 x^2 + \dots + (4^2 - 1) A_{2q} x^{2q} + \dots]. \end{aligned}$$

Donc, pour $q > 1$:

$$\begin{aligned} (4^q - 1) A_{2q} + (4^{q-1} - 1) A_{2q-2} A_2 + (4^{q-2} - 1) A_{2q-4} A_4 + \dots \\ + (4 - 1) A_2 A_{2q-2} = 0; \end{aligned}$$

ou, en changeant de notation,

$$\left. \begin{aligned} &(4^q - 1) B_{2q-1} + (4^{q-1} - 1) \frac{2q(2q-1)}{1.2} B_{2q-3} B_1 \\ &+ (4^{q-2} - 1) \frac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-3)}{1.2.3.4} B_{2q-5} B_3 + \dots \\ &+ (4 - 1) \frac{2q(2q-1)}{1.2} B_1 B_{2q-3} = 0; \end{aligned} \right\} \dots \text{ (B)}$$

relation que nous croyons nouvelle.

4. En la combinant avec (A), on obtient celle-ci :

$$\left. \begin{aligned} & (4^q + 2q) B_{2q-1} + 4^{q-1} \frac{2q(2q-1)}{1.2} B_{2q-3} B_1 \\ & + 4^{q-2} \frac{2q(2q-1)(2q-2)(2q-3)}{1.2.3.4} B_{2q-5} B_3 + \dots \\ & + 4 \frac{2q(2q-1)}{1.2} B_1 B_{2q-3} = 0; \end{aligned} \right\} \dots (C)$$

un peu plus simple que (B).

—

Au sujet d'une relation qui existerait entre la température de fusion des métaux et leur coefficient de dilatation; par M. P. De Heen, ingénieur, à Louvain.

On sait qu'en général les métaux les plus fusibles sont aussi les plus dilatables; je dis en général, car cette propriété offre de fréquentes anomalies : l'antimoine, par exemple, a un coefficient de dilatation sensiblement égal à celui du palladium quoique les températures de fusion de ces métaux soient fort différentes. Cette remarque me frappa néanmoins et je m'efforçai de trouver une relation entre ces deux chiffres de telle sorte que la connaissance de l'un d'eux permit d'en déduire l'autre. La première chose à faire consistait à compter les températures non pas à partir d'un zéro arbitraire tel que celui qui nous est donné par la fusion de la glace, mais bien à partir du zéro absolu, c'est-à-dire du point où les vibrations calorifiques sont nulles : on sait que ce point a été fixé par la thermodynamique à -273° centigrades.