This page intentionally left blank.

RAPPORTS.

—

Tables de logarithmes à douze décimales, jusqu'à 434 billions, par M. A. Namur; *avec introduction,* par M. P. Mansion.

Rapport de M. Catalan.

« I. M étant le module des logarithmes de Briggs, considérons un nombre entier, N, compris entre

$$1000000\ \mathrm{M} = \mathrm{A} = 434294$$

et

$$1000000\ \mathrm{M} - 994 = \mathrm{B} = 433300.$$

La différence des logarithmes de N et de N + 1, est donnée par la formule connue

$$\mathrm{D} = \mathrm{M}\left(\frac{1}{\mathrm{N}} - \theta\,\frac{1}{2\mathrm{N}^2}\right),$$

θ étant une fraction proprement dite.

La plus grande valeur de $\frac{\mathrm{M}}{2\mathrm{N}^2}$ est

$$\mathrm{E} = \frac{\mathrm{M}}{2(\mathrm{A} - 994)^2} = 0{,}000\,000\,000\,001\,15\ldots..$$

Dans l'intervalle considéré, on a donc, sensiblement,

$$\mathrm{D} = \frac{\mathrm{M}}{\mathrm{A} - n} = \frac{1}{1\,000\,000 - \frac{n}{\mathrm{M}}},$$

en représentant, par n, l'excès de A sur N.

Cette différence D, supérieure à 0,000 001, n'atteint pas 0,000 001 002 5. Ainsi :

Pour la série des 994 nombres entiers, immédiatement inférieurs à un million de fois le module, les différences logarithmiques commencent toutes par 0,000 001 00 (*).

II. Soit $d + \log N$ le logarithme d'un nombre $N + r$, compris entre N et $N + 1$. Si l'on fait usage de la *proportion logarithmique*, c'est-à-dire si l'on suppose

$$d = r\mathrm{D},$$

on commet une erreur ε, comprise entre zéro et $-\frac{\mathrm{M}}{8\mathrm{N}^2}$ (**). D'après les hypothèses ci-dessus, N surpasse

$$434\,294 - 995 = 433\,300;$$

donc

$$\varepsilon < \frac{0,434\,294}{8,433\,300^2},$$

ou

$$\varepsilon < \frac{0,434\,294}{1\,501\,991\,120\,000},$$

ou enfin

$$\varepsilon < 0,000\,000\,000\,000\,3.$$

Conséquemment : *l'erreur résultant de la proportion logarithmique, pour les nombres compris entre* 433 300 *et* 434 300, *est inférieur à* 3 *unités du treizième ordre décimal.*

(*) C'est en feuilletant les Tables de Callet que M. Namur a découvert ce théorème fondamental (P. M. — *Introduction*).

(**) Cette limite supérieure est un peu plus simple que celle qui est calculée dans l'*Introduction;* mais les deux formules entraînent la même conséquence.

III. D'après cela, si l'on a une table donnant, avec douze décimales exactes, les logarithmes des 994 nombres considérés ci-dessus, la proportion logarithmique fera connaître, aussi *avec douze décimales exactes*, le logarithme de tout nombre compris dans les limites de la table.

M. Namur fait observer que *cette interpolation sera simple :* en effet, *la différence* D *commençant toujours par les chiffres* 1, 0, 0, *la multiplication de* r *par* D *sera, en général*, *presque aussi facile qu'une multiplication par un nombre de trois chiffres.*

IV. Comment peut-on *amener* (*) un nombre N entre les limites 10A = 4 343 000 et 10B = 4 333 000 (**)? Pour résoudre ce problème, M. Namur considère d'abord les 400 *nombres*

$$3943,\ 3944,\ \ldots,\ 4342,\ \ldots\ldots \quad (A)$$

et les 104 *facteurs*

$$998,\ 999,\ \ldots,\ 1101 : \ \ldots\ldots \quad (F)$$

il trouve que *tout nombre* (A), successivement multiplié par *deux facteurs* consécutifs (F), convenablement choisis, donne deux produits compris entre les limites indiquées.

En second lieu, M. Namur prend les deux suites

$$434,\ 435,\ \ldots\ldots,\ 4343\ \ldots\ldots \quad (A')$$
$$10,\ 10{,}5,\ 11,\ 11{,}5,\ \ldots\ 19{,}5,\ 20,\ 20{,}5,\ \ldots\ 100\ . \quad (F')$$

En multipliant un nombre A′ par deux facteurs consé-

(*) Cette locution, peut-être incorrecte, est employée, paraît-il, par beaucoup de calculateurs.

(**) Pour plus de simplicité, on substitue 434 300 à A.

cutifs F′, on obtient des produits compris entre 39 430 et 43 430.

On saisira l'importance et l'ingéniosité de ces remarques, si l'on a égard à la proposition suivante :

Le nombre formé par les trois ou quatre premiers chiffres d'un nombre quelconque, multiplié au besoin par 10, 100 ou 1000, est compris :

entre 4333 et 4343, ou entre 3943 et 4333, ou entre 434 et 3943.

V. Supposons, comme les auteurs, que l'on ait deux tables auxiliaires donnant, avec 15 décimales, les logarithmes des facteurs F ou F′. On pourra trouver, par un calcul simple, *le logarithme de tout nombre inférieur à 434 billions : le maximum de l'erreur sera 13 unités du treizième ordre décimal.*

VI. Avec une patience et un soin qu'on ne saurait trop louer, M. Namur a construit les deux tables dont il vient d'être question, et aussi, bien entendu, la table principale (table 3) donnant, avec 12 décimales exactes, les logarithmes des nombres, de 433 300 à 434 299. Il y a joint une table d'*antilogarithmes* (table IV), de 637 784 à 638 659 : ces antilogarithmes, c'est-à-dire ces *nombres correspondants*, sont calculés avec 12 décimales. Par des raisonnements analogues à ceux que nous avons indiqués ci-dessus, on reconnaît que cette table IV permet de *calculer, avec 8 décimales, le nombre correspondant à un logarithme donné*, compris entre 637 784 311 301 et 638 659 000 000 (*).

VII. Après avoir expliqué la disposition et l'usage des

(*) Bien entendu, l'on fait abstraction de la caractéristique.

tables de M. Namur, et afin d'en vérifier l'exactitude, les auteurs du Mémoire ont fait quelques applications : chacune est accompagnée de la *preuve*, basée sur l'emploi de deux facteurs (F).

Par exemple, deux calculs différents conduisent à cette même valeur :

$$\log 412\,337 = 5{,}615\,252\,506\,848.$$

Une autre application donne ces deux résultats, qui ne diffèrent que d'une unité du douzième ordre :

$$\log 314\,159\,265\,359 = 11{,}497\,149\,872\,695,$$
$$\log 314\,159\,265\,359 = 11{,}497\,149\,872\,694\ (^*).$$

VIII. Jusqu'à présent, nous n'avons point parlé de la *théorie des nouvelles tables*, rédigée par M. Mansion, d'après les notes et les indications de M. Namur. Nous voudrions pouvoir approuver, sans restrictions, cette partie du Mémoire présenté à l'Académie, comme nous avons approuvé les autres; mais nous ne le pouvons, pour plusieurs causes.

Voici d'abord ce que nous pourrions appeler la cause *générale :*

M. Namur, calculateur infatigable et intelligent, ne connaît, paraît-il, que les éléments des Mathématiques : c'est à force de tâtonnement, de sagacité, d'efforts longs et continus, qu'il est parvenu à établir les formules sur lesquelles il a fondé la construction de ses tables (**), for-

---

(*) On sait que log π = 0,497 149 872.....

(**) D'après les renseignements qui m'ont été fournis par son frère, mon collègue à l'Université, M. A. Namur, employé longtemps dans une banque, est aujourd'hui Secrétaire de l'École communale de Thuin.

mules qu'un peu de Calcul différentiel lui aurait données sans peine. Par exemple, c'est au moyen de considérations géométriques assez compliquées, que l'honorable auteur démontre (p. 5) la relation

$$l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \theta' \frac{z^3}{2}.$$

S'il avait fait usage du développement connu, il aurait pu écrire, immédiatement,

$$l(1+z) = z - \frac{z^2}{2} + \theta \frac{z^3}{3},$$

formule plus approchée que la première.

M. Mansion a, comme nous l'avons déjà dit, *refait* l'introduction; mais il n'a pu faire disparaître complétement la *tache originelle*. C'est ce qu'il m'a fort bien expliqué dans diverses lettres (*). Néanmoins, je persiste à regretter qu'au lieu d'admettre, tout simplement, des formules préliminaires démontrées dans tous les Traités d'Analyse, les auteurs aient cru devoir les reprendre *ab ovo* (**) :

Ce n'est pas tout. Pour obtenir une limite de l'erreur commise sur le *nombre correspondant à un logarithme*

(*) La correspondance échangée, à diverses reprises, entre mon jeune collègue de Gand et moi, est l'unique cause des retards qu'a subis la rédaction du Rapport.

(**) M. Mansion dit, en note : « Nous démontrons ces formules afin que » l'*Introduction* soit comprise, même par les élèves de nos colléges. » Nous croyons que notre honorable collègue n'atteindra pas le but qu'il se propose : il est bien plus facile, à un lecteur peu instruit, d'*admettre* une formule, que de saisir une démonstration laborieuse.

donné (*), MM. Namur et Mansion cherchent un développement de e^u. Ils trouvent (p. 6, *verso*) :

$$e^u = 1 + \frac{u}{1} + \frac{u^2}{2} + \frac{\lambda}{2}\left(1 - \sqrt{1-2u}\right)^3, \quad . \quad . \quad (A)$$

λ étant une quantité inconnue, comprise entre $+1$ et -1.

Si cette formule était exacte, il en résulterait la double égalité :

$$\frac{5}{2} - \sqrt{-1} < e < \frac{7}{2} + \sqrt{-1};$$

ce qui n'a pas de sens. M. Mansion, à qui j'ai posé l'objection, m'a répondu : « *la valeur attribuée à* u *est toujours* » *fort petite.* » Peut-être, moyennant cette restriction, la formule (A) est-elle applicable; mais il est permis d'en douter : c'est la première fois, croyons-nous, que la fonction exponentielle, e^u, toujours *réelle et positive*, est égalée à une expression qui devient imaginaire pour une infinité de valeurs de u (**).

(*) Ce nombre est appelé, par les auteurs, *antilogarithme* : on trouve, dans divers ouvrages, des solutions de ce problème. Le savant Vincent a publié, sur ce sujet, dans l'*Algèbre de Bourdon*, une Note très-complète.

(**) On a

$$\begin{aligned}\left(1 - \sqrt{1-2u}\right)^3 &= 1 - 3\sqrt{1-2u} + 3(1-2u) - (1-2u)\sqrt{1-2u} \\ &= 4 - 6u - (4-2u)\sqrt{1-2u};\end{aligned}$$

donc, par la relation (A), et en supposant u compris entre 0 et 1 :

$$e^u < 3 - 2u + \frac{u^2}{2} - (2-u)(1-2u)^{\frac{1}{2}}.$$

Le développement du radical étant

$$\begin{aligned}&1 - \frac{1}{2}\cdot 2u - \frac{1}{2.4}\cdot 4u^2 - \frac{3}{2.4.6}\cdot 8u^3 - \frac{3.5}{2.4.6.8}\,16u^4 - \ldots \\ &= 1 - u - \frac{1}{2}u^2 - \frac{1}{2}u^3 - \frac{5}{8}u^4 - \cdots,\end{aligned}$$

CONCLUSIONS.

J'ai l'honneur de proposer à la Classe :

1° D'approuver et de *faire imprimer* les Tables de M. Namur, comme l'Académie d'Amsterdam a fait imprimer les Tables de M. Bierens de Haen.

2° De faire imprimer l'*Introduction théorique*, après révision par les auteurs. »

Rapport de M. F. Folie.

« Depuis plusieurs années nous connaissons les tables de M. Namur, et nous avons été vivement frappé et de l'idée ingénieuse de leur auteur, et de l'avantage qu'elles présentent sur toutes les autres, pour les calculs qui exigent une grande exactitude. Il faut avoir pratiqué ces calculs par différentes méthodes pour bien se rendre compte de tout ce qu'il y a de finesse et de profondeur dans le procédé imaginé par M. Namur.

Aussi sommes-nous très-heureux qu'il se soit enfin

---

il en résulte

$$(2-u)\sqrt{1-2u} = 2 - 3u - \frac{1}{2}u^3 - \frac{5}{8}u^4 + \cdots;$$

puis

$$e^u < 1 + u + \frac{1}{2}u^2 + \frac{1}{2}u^3 + \frac{5}{8}u^4 - \cdots$$

Si l'on prend $e^u = 1 + u + \frac{1}{2}u^2$, l'erreur ε peut donc, semble-t-il, devenir presque égale à $\frac{1}{2}u^3$. Or, par le développement connu, on trouve, très-facilement, $\varepsilon < \frac{1}{5}u^3$. La formule de MM. Namur et Mansion, même quand elle est applicable, ne présente donc aucun avantage.