This page intentionally left blank.

Note sur l'équation $xy'' + ky' - y = 0$; par M. C. Le Paige.

Rapport de M. Catalan.

« **1.** Nous avons déjà dit qu'en essayant de sommer la *série de Legendre* (*) :

$$y_1 = 1 + \frac{x}{k} + \frac{x^2}{1.2\,k(k+1)} + \frac{x^3}{1.2.3.k(k+1)(k+2)} + \ldots, \quad (1)$$

nous avons trouvé l'équation

$$xy'' + ky' - y = 0 \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (2)$$

Lorsque $k = \frac{1}{2}$, la somme de la série est

$$y_1 = \frac{1}{2}\left(e^{2\sqrt{x}} + e^{-2\sqrt{x}}\right);$$

résultat obtenu par l'illustre Géomètre.

De là, on conclut aisément l'*intégrale générale* de l'équation (2), relative à $k = \frac{1}{2}$; savoir :

$$y = Ae^{2\sqrt{x}} + Be^{-2\sqrt{x}} \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (3)$$

2. Il était curieux de rechercher si l'équation (1), intégrable pour $k\frac{1}{2}$, l'est pour d'autres valeurs de ce paramètre : c'est un problème que M. Le Paige me semble avoir heureusement résolu.

En effet, après avoir établi, d'une manière fort simple, que si cette équation est intégrable pour $k = \lambda$, elle l'est

(*) *Éléments de Géométrie*, p. 289 (1823).

pour $k = \lambda \pm n$, n étant un nombre entier (*), le jeune Docteur a eu recours à une transformation, employée par Lagrange (**), au moyen de laquelle la proposée (2) devient l'*équation de Riccati :*

$$\frac{dy}{dx} = ax^m + by^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (4)$$

Or, M. Liouville a démontré que les seuls cas dans lesquels l'équation de Riccati est intégrable (en quantités finies, explicites), sont ceux où l'on a

$$m = -\frac{4p}{2p+1}, \quad m = -\frac{4(p+1)}{2p+1};$$

p étant un entier quelconque. Donc, à cause de la relation entre les paramètres m et k, *l'équation* (2) *n'est intégrable que si* $\mathrm{k} = \frac{1}{2} \pm \mathrm{n}$ (***). Telle est la conclusion, très-intéressante, de M. Le Paige.

3. Le petit Mémoire que nous avons présenté à la Classe, dans la séance du 1er avril, est terminé par la détermination (sous deux formes différentes) de l'intégrale générale y. Par suite de cette recherche, l'auteur a dû considérer certains coefficients numériques, commensurables, vérifiant l'équation aux différences finies :

$$A_{p,q} = A_{p-1,q} + (p - q + 2)\, A_{p,q-1},$$

et sur lesquels il se propose de revenir.

(*) Pour passer de la première hypothèse à la seconde, il suffit de poser, soit $y = \frac{d^n u}{dx^n}$, soit $u = \frac{d^n y}{dx^n}$.

(**) Voir la Note I.

(***) Note II.

4. J'ai l'honneur de proposer l'impression du travail de M. Le Paige dans l'un des recueils de l'Académie; et je prie la Classe de vouloir bien adresser des remercîments à l'auteur.

NOTES.

I.

M. Le Paige prend, comme Lagrange,

$$z = -\frac{y'}{y} x^k,$$

ce qui lui donne l'équation du *premier ordre* :

$$\frac{dz}{dx} = x^{k-1} - x^{-k} z^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Au lieu de cette transformation, assez peu naturelle, faisons $y = e^{\int u dx}$: la transformée est

$$x(u' + u^2) + ku - 1 = 0. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Maintenant supposons, pour un instant, $u'x + ku = 0$; d'où $u = Cx^{-k}$. Le principe de la *variation des constantes* donne, tout de suite,

$$\frac{dC}{dx} = x^{k-1} - x^{-k} C^2;$$

ce qui est l'équation (5).

II.

Dans mon cours à l'Université de Liége, j'ai considéré ce cas particulier de la série (1) :

$$S = 1 + \frac{x}{1} + \frac{x^2}{(1 \cdot 2)^2} + \frac{2^3}{(1 \cdot 2 \cdot 3)^2} + \cdots$$

A priori, la sommation de cette série semble ne pas devoir être plus compliquée que celle de la série traitée par Legendre. Il n'en est rien : la valeur de S dépend de la quantité

$$\int_0^\pi c^{(1+x)\cos\theta} \cos(x \sin\theta) \cos(\sin\theta)\, d\theta.$$

III.

Il y a quelques années (*), j'ai fait voir que si l'équation de Riccati est intégrable, on peut, presque sans calcul, *écrire la valeur de* y, *sous forme de fraction continue.* Grâce à l'ingénieuse remarque de M. Le Paige, l'équation de Riccati peut être remplacée par l'équation (2), laquelle, quoique du deuxième ordre, a une forme beaucoup plus simple, relativement. On peut donc se proposer les deux questions suivantes, sur lesquelles j'appelle l'attention du jeune auteur :

1° *Quand l'équation* (2) *est intégrable, est-il possible d'écrire la valeur générale de* y, *sous la forme d'une fonc-*

(*) *Bulletin*, t. XXXI, p. 68.

tion finie, analogue à une fraction continue, ou dépendant d'une fraction continue ?

2° *Que devient cette expression de* y, *lorsque le paramètre* k *n'a pas la forme* $\frac{1}{2} \pm n$? »

M. De Tilly ayant adhéré aux conclusions du rapport de M. Catalan, la Classe a décidé l'impression au *Bulletin* de la note de M. Le Paige.

—

Sur le développement de l'électricité statique; par M. W. Spring.

Rapport de M. Montigny.

« Dans le travail que l'Académie a soumis à notre examen, M. W. Spring se propose, comme objet principal, de rapporter à une cause unique la production de l'électricité par les actions mécaniques, telles que le frottement, la pression, le clivage, la séparation des corps adhérents.

L'auteur commence l'étude de cette question importante et difficile par esquisser, avec des détails suffisants, l'historique de la découverte des divers modes d'électrisation par les ébranlements moléculaires. Après avoir rappelé des expériences qui se rattachent à ces manifestations, il cite et discute quelques hypothèses qui ont été proposées pour les expliquer. Il revient aussi sur les expériences célèbres que fit Volta, dans le but de prouver directement la production de l'électricité par le seul contact de métaux différents. M. W. Spring conclut des faits précisés par Volta lui-même et par d'autres expérimentateurs, que