This page intentionally left blank.

mises à la teinture, ce qui permettra de donner aux musées un aspect de nature qui y était inconnu jusqu'à présent.

Enfin, dans un but d'enseignement facile à saisir, on peut, au milieu d'une préparation générale, ne teindre en rouge que certains muscles déterminés sur lesquels on veut appeler l'attention.

Dans l'intérêt des musées et des cours d'anatomie, je désire que mon procédé ne passe pas inaperçu et qu'on en fasse l'essai; j'ose espérer qu'il a quelque avenir.

(Pendant cette lecture, quelques pièces anatomiques préparées par le procédé ci-dessus sont mises sous les yeux de l'Académie.)

Note sur le Problème de Malfatti; par M. E. Catalan, associé de l'Académie.

Le mémoire de M. Simons, inséré au dernier *Bulletin*, m'a rappelé la solution du célèbre *Problème de Malfatti*, que j'ai donnée (d'après M. Lechmütz) dans les *Nouvelles Annales de Mathématiques* (t. V, p. 61). Cette solution, déjà bien simple, peut être notablement réduite.

1. ABC étant le triangle donné, dont les angles sont A, B, C;

Soient :

$\rho = OA' = OB' = OC'$ le rayon du cercle inscrit;

$2\alpha, 2\beta, 2\gamma$ les *suppléments* respectifs de A, B, C;

X, Y, Z les centres des cercles cherchés;

x, y, z les rayons de ces cercles.

2. PU étant la tangente commune aux cercles X, Y, il est visible que le triangle XUY est rectangle en U; donc $PU = DU = GU = \sqrt{xy}$. Projetant AXYB sur AB, on a la première des trois équations du problème :

$$x \operatorname{tg} \alpha + 2\sqrt{xy} + y \operatorname{tg} \beta = \rho (\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \beta). \quad . \quad . \quad (1)$$

Pour la simplifier, résolvons-la par rapport à $\sqrt{x}$: la valeur *positive* de cette inconnue est

$$-\sqrt{y} \cot \alpha + \sqrt{y \cot \alpha (\cot \alpha - \operatorname{tg} \beta) + \rho (1 + \cot \alpha \operatorname{tg} \beta)}.$$

Ainsi

$$\sqrt{x} \sin \alpha + \sqrt{y} \cos \alpha$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\cos \beta}} \sqrt{y \cos \alpha \cos (\alpha + \beta) + \rho \sin \alpha \sin (\alpha + \beta)}.$$

Et comme $\alpha + \beta + \gamma = \pi$, cette formule devient

$$\sqrt{x} \sin \alpha + \sqrt{y} \cos \alpha$$
$$= \frac{1}{\sqrt{\cos \beta}} \sqrt{\rho \sin \alpha \sin \gamma - y \cos \alpha \cos \gamma}. \quad . \quad . \quad (2).$$

3. Le second membre est une fonction symétrique de α, γ; donc

$$\sqrt{x} \sin \alpha + \sqrt{y} \cos \alpha = \sqrt{z} \sin \gamma + \sqrt{y} \cos \gamma; \quad . \quad . \quad (3)$$

puis, au moyen d'une permutation tournante :

$$\sqrt{y} \sin \beta + \sqrt{z} \cos \beta = \sqrt{x} \sin \alpha + \sqrt{z} \cos \alpha, \quad . \quad . \quad (4)$$

$$\sqrt{z} \sin \gamma + \sqrt{x} \cos \gamma = \sqrt{y} \sin \beta + \sqrt{x} \cos \beta. \quad . \quad . \quad (5)$$

Ces équations (3), (4), (5) déterminent les rapports de

$\sqrt{x}, \sqrt{y}, \sqrt{z}$. En *ajoutant membre à membre* les deux premières, on trouve

$$\sqrt{y}\,(\cos\alpha - \cos\gamma + \sin\beta) = \sqrt{z}\,(\cos\alpha - \cos\beta + \sin\gamma);$$

ou, par une transformation simple,

$$\sqrt{y}\cos\tfrac{1}{2}\beta\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\gamma}{2}\right) = \sqrt{z}\cos\tfrac{1}{2}\gamma\cos\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\beta}{2}\right);$$

ou encore

$$\sqrt{y}\,(1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma) = \sqrt{z}\,(1+\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta).$$

Nous pouvons donc prendre, au lieu des équations ci-dessus, les proportions

$$\frac{x}{(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\alpha)^2} = \frac{y}{(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\beta)^2} = \frac{z}{(1+\operatorname{tg}\frac{1}{2}\gamma)^2}\cdot\;.\;.\;\;(6)$$

4. λ étant la valeur commune des trois rapports, soient, pour abréger :

$$\operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\alpha = f,\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\beta = g,\ \operatorname{tg}\tfrac{1}{2}\gamma = h.$$

L'équation (1) devient

$$\left[\frac{f(1+f)}{1-f} + (1+f)(1+g) + \frac{g(1+g)}{1-g}\right]\lambda = \rho\left(\frac{f}{1-f^2} + \frac{g}{1-g^2}\right).$$

On tire, de celle-ci,

$$\lambda = \rho\,\frac{f+g}{(1+f)(1+g)(1+f+g-fg)}.$$

Mais, à cause de

$$\tfrac{1}{2}\alpha + \tfrac{1}{2}\beta + \tfrac{1}{2}\gamma = \frac{\pi}{2},$$

on a la relation connue :

$$fg + gh + hf = 1, \quad \ldots\ldots \quad (7)$$

ou

$$1 - fg = (f + g)\,h;$$

donc

$$\lambda = \frac{\rho}{(1+f)(1+g)(1+h)}; \quad \ldots\ldots \quad (8)$$

puis, par les relations (6) :

$$x = \rho\frac{1+f}{(1+g)(1+h)},$$

$$y = \rho\frac{1+g}{(1+h)(1+f)},$$

$$z = \rho\frac{1+h}{(1+f)(1+g)}, \quad \ldots\ldots \quad (9)$$

$$\sqrt{yz} = \frac{\rho}{1+f}, \sqrt{zx} = \frac{\rho}{1+g}, \sqrt{xy} = \frac{\rho}{1+h}. \quad .. \quad (10)$$

5. Pour construire ces expressions, il suffit d'observer que

$$\frac{1}{1+f} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha}{\cos\frac{1}{2}\alpha + \sin\frac{1}{2}\alpha} = \frac{\cos\frac{1}{2}\alpha\,(\cos\frac{1}{2}\alpha - \sin\frac{1}{2}\alpha)}{\cos\alpha}$$

$$= \tfrac{1}{2}\frac{1 + \cos\alpha - \sin\alpha}{\cos\alpha} = \tfrac{1}{2}\left(\frac{1}{\cos\alpha} + 1 - \operatorname{tg}\alpha\right).$$

En effet, cette transformation donne

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\rho}{1+f} &= \sqrt{yz} = \mathrm{FS} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{AO} + \mathrm{OC'} - \mathrm{AC'}),\\
\frac{\rho}{1+g} &= \sqrt{zx} = \mathrm{KT} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{BO} + \mathrm{OA'} - \mathrm{BA'}),\\
\frac{\rho}{1+h} &= \sqrt{xy} = \mathrm{DU} = \tfrac{1}{2}(\mathrm{CO} + \mathrm{OB'} - \mathrm{CB'}).
\end{aligned}\right\} \quad (11)$$

On trouve, de la même manière:

$$\left.\begin{aligned}\frac{\rho}{1-f}&=\tfrac{1}{2}(\mathrm{AO}+\mathrm{OC}'+\mathrm{AC}'),\\ \frac{\rho}{1-g}&=\tfrac{1}{2}(\mathrm{BO}+\mathrm{OA}'+\mathrm{BA}'),\\ \frac{\rho}{1-h}&=\tfrac{1}{2}(\mathrm{CO}+\mathrm{OB}'+\mathrm{CB}').\end{aligned}\right\}\quad . \; . \; . \; (12)$$

6. *Remarque.* Si l'on se rappelle les propriétés des cercles tangents aux trois côtés d'un triangle donné, on arrive à cette interprétation géométrique des formules (11), (12) :

A l'angle AOC′, *inscrivez les deux cercles tangents à* C′A : *les distances du sommet* O, *aux points où ces cercles touchent le côté* OC′, *représentent* $\frac{\rho}{1+f}$ *et* $\frac{\rho}{1-f}$. *La même construction, appliquée aux triangles* BOA′, COB′, *détermine* $\frac{\rho}{1+g}$, $\frac{\rho}{1-g}$, $\frac{\rho}{1+h}$ *et* $\frac{\rho}{1-h}$.

7. *Autre remarque.* — Chacune des équations

$$\sqrt{x}\sin\alpha+\sqrt{y}\cos\alpha=\sqrt{z}\sin\gamma+\sqrt{y}\cos\gamma,\; . \; . \; (3)$$
$$\sqrt{y}\sin\beta+\sqrt{z}\cos\beta=\sqrt{x}\sin\alpha+\sqrt{z}\cos\alpha,\; . \; . \; (4)$$
$$\sqrt{z}\sin\gamma+\sqrt{x}\cos\gamma=\sqrt{y}\sin\beta+\sqrt{x}\cos\beta\; . \; . \; . \; (5)$$

exprime une propriété assez curieuse, dont il serait intéressant de trouver une démonstration directe. Considérons, par exemple, l'équation (4). En l'écrivant ainsi

$$\sqrt{xz}\sin\alpha+z\cos\alpha=\sqrt{yz}\sin\beta+z\cos\beta,$$

et en observant que $\sqrt{xz}=\mathrm{KT}$, $z=\mathrm{KZ}$, etc., on en conclut :

projection de TZ *sur* AO = *projection de* SZ *sur* BO.

De même,

projection de UX *sur* BO = *projection de* TX *sur* CO,

projection de SY *sur* CO = *projection de* UY *sur* AO.

8. La valeur commune des binômes

$$\sqrt{xz}\sin\alpha + z\cos\alpha,\ \sqrt{yz}\sin\beta + z\cos\beta$$

est

$$\begin{aligned} \mathrm{P} &= \frac{\rho}{1+g}\,\frac{2f}{1+f^2} + \rho\,\frac{1+h}{(1+f)(1+g)}\,\frac{1-f^2}{1+f^2} \\ &= \frac{\rho}{(1+g)(1+f^2)}\left[2f + (1+h)(1-f)\right]. \end{aligned}$$

La quantité entre parenthèses égale

$$1+f+h(1-f) = 1+f+\frac{(1-fg)(1-f)}{f+g} = \frac{(1+f^2)(1+g)}{f+g};$$

donc

$$\mathrm{P} = \frac{\rho}{f+g}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

formule très-simple.

9. On a

$$\mathrm{AU} = \mathrm{AD} + \sqrt{xy} = x\operatorname{tg}\alpha + \sqrt{xy};$$

et, par les formules (9), (10) :

$$\mathrm{AU} = \rho\,\frac{1+f+g-fg}{(1+g)(1+h)(1-f)}.$$

Mais, à cause de la relation (7),

$$1+h = \frac{1+f+g-fg}{f+g};$$

donc

$$\mathrm{AU} = \rho\,\frac{f+g}{(1+g)(1-f)}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

ou, ce qui est équivalent,

$$AU = \rho\left[\frac{1}{1-f} - \frac{1}{1+g}\right] \quad \ldots\ldots \quad (14)$$

10. D'après les formules (11), (12), (14) :

$$AU = \tfrac{1}{2}(AO - BO + AC' + BA'),$$

ou

$$AU = \tfrac{1}{2}(AO + AB - BO). \quad \ldots\ldots \quad (15)$$

Cette valeur a la même forme que l'expression de DU (5); donc la remarque faite ci-dessus (6) est applicable, et, en conséquence :

Le point U *est celui où le côté* AB *touche la circonférence inscrite au triangle* AOB (*).

De même, les circonférences inscrites aux triangles BOC, COA déterminent les points S, T.

Ces points U, S, T étant construits, il en résulte les points D, G, F,.... où les circonférences cherchées touchent les côtés du triangle donné.

11. *Remarques.* I. On a

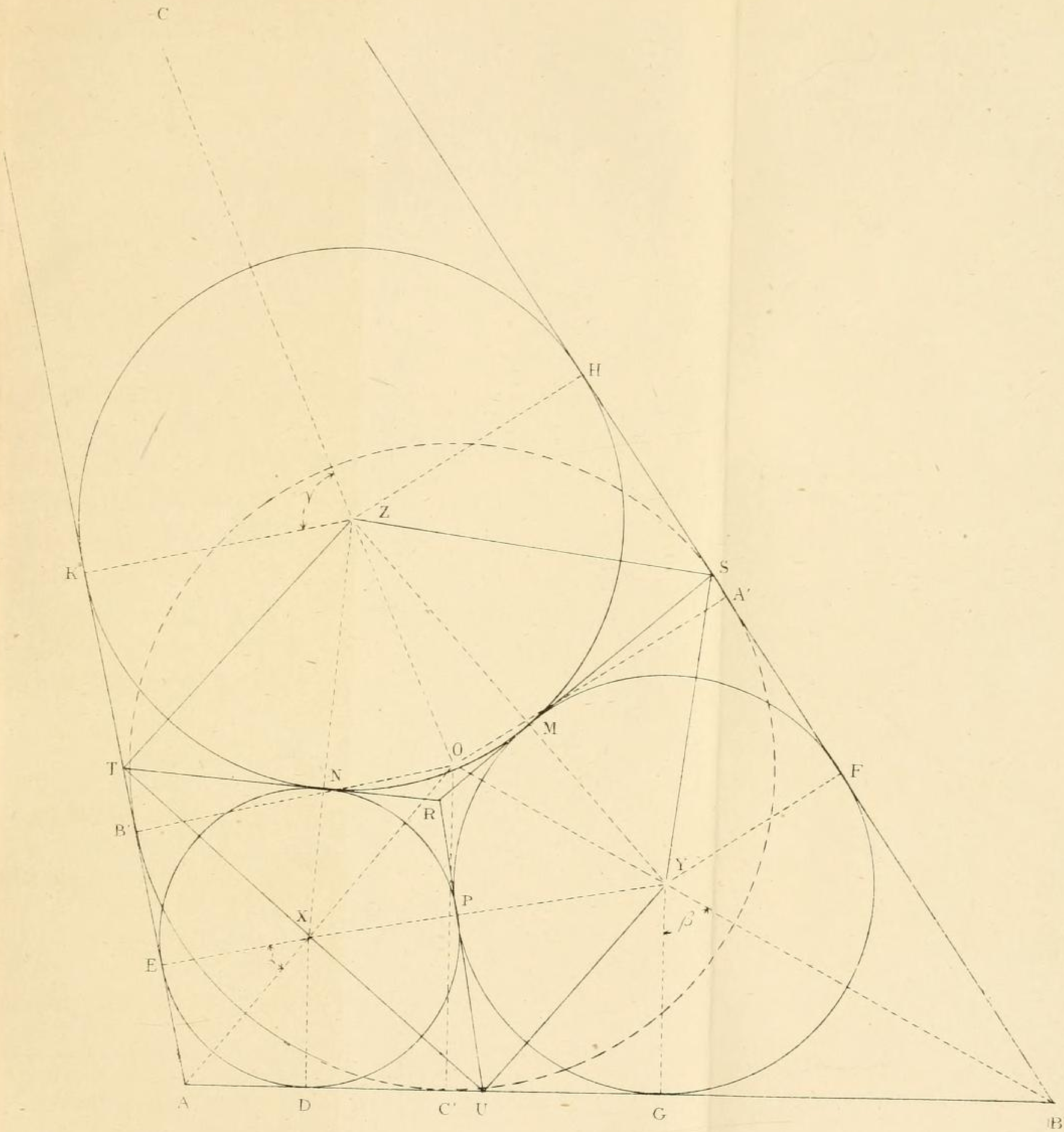
$$AD = AU - DU = \tfrac{1}{2}(AO + AB - BO - CO - OB' + CA');$$

ou, si l'on désigne par p le demi-périmètre du triangle ABC :

$$AD = \tfrac{1}{2}(AO - BO - CO + p - \rho).$$

Pour que le second membre devienne une fonction

(*) Propriété connue. En outre, la droite PU, tangente commune aux cercles X, Y, touche aussi les cercles inscrits aux triangles BOC, COA (Théorème de Steiner).



Problème de Malfatti.

symétrique, il suffit de le retrancher de AO; on trouve ainsi

$$AO - AD = BO - BF = CO - CK = \tfrac{1}{2}(AO + BO + CO - p + \rho) \quad (16).$$

Ce résultat simple, et la construction qui en résulte, sont dus à M. Simons.

II. D'après les relations (11),

$$\tfrac{1}{2}(AO + BO + CO + \rho - p) = \rho\left[\frac{1}{1+f} + \frac{1}{1+g} + \frac{1}{1+h} - 1\right] \quad (17).$$

III. Si l'on désigne par a, b, c les rayons des cercles inscrits aux triangles BOC, COA, AOB, on trouve :

$$a = \rho\frac{g+h}{(1+g)(1+h)},\ b = \rho\frac{h+f}{(1+h)(1+f)},\ c = \rho\frac{f+g}{(1+f)(1+g)} \quad (18).$$

IV. Enfin, ρ_1 étant le rayon du cercle inscrit au triangle XYZ :

$$\rho_1 = \frac{\rho}{f+g+h+1} \quad \ldots\ldots \quad (19)$$

—