This page intentionally left blank.

RAPPORTS.

Recherches sur le développement de la fonction Γ; mémoire par M. Gilbert.

Rapport de M. E. Catalan.

« Afin que l'on puisse juger de l'importance des *Recherches* effectuées par M. Gilbert, je vais en donner une analyse, aussi succincte que possible.

I.

Partant des formules de Binet :

$$\mathrm{l}.\Gamma(\mu) = \frac{1}{2}\,\mathrm{l}.(2\pi) + \left(\mu - \frac{1}{2}\right)\mathrm{l}.\mu - \mu + \varpi(\mu), \quad . \quad (1)$$

$$\varpi(\mu) = \int_0^\infty \left(\frac{1}{e^x - 1} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2}\right)\frac{e^{-\mu x}}{x}\,dx, \quad . \quad . \quad (2)$$

et de la relation fondamentale

$$\Gamma(\mu + 1) = \mu\Gamma(\mu),$$

notre confrère trouve très-simplement : 1° la *série de Gudermann,* avec une expression du *reste;* 2° le *développement de* $\Gamma(\mu)$ *sous forme de produit indéfini,* donné par

Gauss. Une seconde démonstration de ce développement, basée sur la *formule de Stirling*, me paraît moins satisfaisante que la première. Elle est peut-être moins originale aussi que celle-ci.

II.

La *constante d'Euler* a été mise, par Schlömilch, sous la forme :

$$C = -\int_0^\infty e^{-x} \mathrm{l}.x dx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)\ (^*)$$

De cette formule, M. Gilbert déduit, non-seulement :

$$-C = lim\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-x}dx}{x} + \mathrm{l}.\varepsilon\right) = lim\left(\int_\varepsilon^\infty \frac{e^{-ax}}{x} dx + \mathrm{l}.\,a\varepsilon\right),$$

mais encore :

$$\int_\varepsilon^\infty \frac{\cos ax}{x} dx = -(C + \mathrm{l}.\ a\varepsilon).$$

III.

Si l'on désigne par $F(x)$ la fonction

$$\frac{x}{e^x - 1} - 1 + \frac{x}{2},$$

de manière que

$$\varpi(\mu) = \int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}}{x^2} F(x) dx, \quad . \quad . \quad . \quad (4)\ (^{**})$$

(*) Voir la Note I, à la fin du Rapport.
(**) Voir la Note II.

on trouve aisément :

$$F(x) = 2x^2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{4n^2\pi^2 + x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5)$$

Par suite,

$$\varpi(\mu) = 2 \sum_{n=1}^{n=\infty} \int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}dx}{4n^2\pi^2 + x^2} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (6)$$

Après avoir rappelé cette formule, due à Cauchy, M. Gilbert en conclut d'abord :

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{1}{n} \int_0^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{\mu + z} dz = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \frac{dz}{\mu + z} \sum_1^\infty \frac{\sin 2n\pi z}{n} \quad (7);$$

puis, observant que

$$\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\sin nu}{n} = \frac{\pi - u}{2}$$

pour toute valeur de u comprise entre 0 et 2π, notre confrère décompose l'intégrale en une infinité de parties, convenablement choisies, et il trouve cette nouvelle formule :

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{k=\infty} \int_0^1 \frac{\left(\frac{1}{2} - x\right) dx}{\mu + k + x} \quad . \quad . \quad . \quad (8)$$

Comme le dit avec raison l'auteur : « la dernière trans-
» formation présente ceci de remarquable, que la fonc-
» tion $\varpi(\mu)$, ... se trouve, dans l'équation (8), repré-
» sentée par une série d'intégrales définies à différentielles
» rationnelles. »

Après avoir retrouvé, au moyen de l'équation (7), la *série de Gudermann* et la *série de Binet,* M. Gilbert fait subir diverses transformations à cette formule (7), et il en conclut :

$$\varpi(\mu)=\frac{1}{3}\sum_0^\infty\frac{1}{(2\mu+2k+1)^2}+\frac{1}{5}\sum_0^\infty\frac{1}{(2\mu+2k+1)^4}$$
$$+\frac{1}{7}\sum_0^\infty\frac{1}{(2\mu+2k+1)^6}+\ldots\ldots\qquad (9)\ (^*)$$

Lorsque $\mu=\frac{1}{2}$, cette nouvelle relation donne la « *formule curieuse :*

$$1-\mathrm{l}.2=\frac{\pi^2}{1.2.3}B_1-\frac{\pi^4}{1.2.3.4.5}B_3+\frac{\pi^6}{1\ldots.7}B_5-\ldots.\qquad (^{**})$$

» qui associe, dans une même équation, les nombres ber-
» noulliens, le nombre π et le logarithme népérien de 2. »

L'intégration par parties, appliquée à l'équation (8), conduit M. Gilbert à d'autres développements de la fonction $\varpi(\mu)$; par exemple celui-ci :

$$\varpi(\pi)=\frac{1}{3.2^2}\sum_0^\infty\frac{1}{(\mu+k)(\mu+k+1)}-\frac{1}{3.5.2^3}\sum_0^\infty\frac{1}{(\mu+k)^2(\mu+k+1)^2}$$
$$+\frac{1.2}{3.5.7.2^4}\sum_0^\infty\frac{1}{(\mu+k)^3(\mu+k+1)^3}-\ldots.$$

IV.

Au moyen d'une identité due à Stirling, et dont MM. Genocchi et De Tilly avaient déjà fait d'heureux usages, M. Gilbert retrouve la *série de Binet,* avec l'expression du *reste.* Les géomètres que je viens de citer avaient déjà résolu cette question du *reste;* mais seulement pour des valeurs

---

(*) Voir la Note III.

(**) L'auteur appelle $B_1, B_2, B_3, \ldots$ ce que je désigne ici par B_1, — B_3, $+B_5, \ldots.$ On sait qu'il y a *plusieurs définitions* des nombres de Bernoulli.

entières de μ. Après avoir démontré la relation :

$$R_n < \frac{1}{8\mu^2} \frac{1.2.3\ldots.(n-1)}{(\mu+1)\ldots.(\mu+n-1)}, \quad . \quad . \quad (10)$$

notre confrère en conclut :

$$R_n < \frac{1}{8\mu^2} \frac{1}{1+C\mu+\mu \mathrm{l}.(n-1)}. \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Cette seconde limite de R_n est, me semble-t-il, un peu grande (*).

M. Gilbert fait observer, en passant, que les séries de Gudermann et de Binet ne sont pas essentiellement différentes : on peut déduire l'une de l'autre. Cette remarque avait déjà été faite par M. De Tilly.

De simples *identités*, d'où l'on conclut le développement de $\frac{1}{\mu+k+n}$ en sommes de fractions dont les deux termes sont des factorielles, conduisent l'auteur à la découverte d'une *infinité de séries* propres à représenter $\varpi(\mu)$, et dont la série de Binet est un cas très-particulier. Citons celle-ci, par exemple :

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{2}\left[\frac{1}{\mu} + \frac{1}{\mu+1}\right]\int_0^1 x\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$+\frac{1}{4}\left[\frac{1}{\mu(\mu+2)} + \frac{1}{(\mu+1)(\mu+3)}\right]\int_0^1 x(2-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$+\frac{1}{6}\left[\frac{1}{\mu(\mu+2)(\mu+4)} + \frac{1}{(\mu+1)(\mu+3)(\mu+5)}\right]$$

$$\int_0^1 x(2-x)(4-x)\left(x-\frac{1}{2}\right)dx$$

$$+\ldots.$$

(*) Note IV.

V.

Reprenant la formule :

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{\pi} \sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{1}{n} \int_0^{\infty} \frac{\sin 2n\pi z}{\mu + z}\, dz,$$

et opérant, comme il le dit « de simples intégrations par » parties, » M. Gilbert retrouve la série de Stirling, avec *deux nouvelles expressions* du reste. Je ne suis pas bien sûr que ces limites soient préférables à celles que l'on connaissait déjà.

Pour terminer ce paragraphe, l'auteur conclut, de l'équation ci-dessus, le curieux développement de $\varpi(\mu)$ en série périodique, dû à M. Kummer. Il déduit ensuite, de cette série, diverses intégrales définies remarquables. Je citerai seulement celle-ci :

$$\int_0^1 \mathrm{l.}\Gamma(\mu) \cos 2k\mu\pi = \frac{1}{4\pi} \cdot$$

VI.

Dans ce paragraphe, qui constitue la partie la plus abstraite de son travail, M. Gilbert considère encore l'intégrale

$$\int \left(\frac{1}{e^z - 1} - \frac{1}{z} + \frac{1}{2} \right) \frac{e^{-\mu z}}{z} dz\,;$$

mais il suppose z imaginaire, et il étend l'intégration à un certain contour fermé. Appliquant, avec beaucoup de sagacité et de pénétration, la *théorie des fonctions d'une variable imaginaire,* théorie encore nouvelle, il arrive à ces deux équations, bien remarquables :

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\cos 2n\mu\pi}{n} + \frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{x} - \cot x\right)\frac{\sin 2\mu x}{x}dx, \quad (12)$$

$$\int_0^\infty\left(\frac{1}{x} - \cot x\right)\frac{\cos 2\mu x}{x}dx = \sum_{n=1}^{n=\infty}\frac{\sin 2n\mu\pi}{n}.$$

La seconde conduit l'auteur à des résultats étonnants, presque paradoxaux, parmi lesquels je citerai seulement celui-ci : l'intégrale

$$\int_0^\infty \frac{\cos 2\mu x - \cos 2ax}{x}\cot x dx$$

a des valeurs *très-différentes,* selon que les paramètres μ, a sont entiers ou fractionnaires. Cette *discontinuité,* dont on ne connaissait que peu d'exemples, me paraît susceptible d'applications importantes.

VII.

M. Gilbert reprend la formule (12), en l'écrivant ainsi :

$$\varpi(\mu) = -\frac{1}{2}\mathrm{l}.\overline{2\sin\mu\pi}^{(*)} + \frac{1}{2}\int_0^\infty\left(\frac{1}{x} - \cot x\right)\frac{\sin 2\mu x}{x}dx. \quad (13)$$

(*) Cette notation signifie que le sinus est pris en valeur absolue :

$$\mathrm{l}.\overline{2\sin\mu\pi} = \frac{1}{2}\mathrm{l}.(4\sin^2\mu\pi).$$

Combinant cette équation (13) avec les propriétés de la fonction $\varpi(\mu)$, notre confrère trouve des intégrales définies nouvelles et remarquables ; savoir :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\cos(2\mu+1)x\,dx = 1 - \left(\mu+\frac{1}{2}\right)\mathrm{l.}\left(1+\frac{1}{\mu}\right),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,\frac{\sin(2\mu+1)x}{\sin x}\,dx = (2n+1) + 2\,\mathrm{l.}\left[1.3.5\ldots\overline{2n-1}\right]$$
$$-2n\,\mathrm{l.}(2n+1),$$

$$\int_0^\infty \frac{\sin x - x\cos x}{x^2}\,\frac{\sin\frac{n-1}{n}x}{\sin\frac{x}{n}}\,dx = (n-1) + \mathrm{l.}\left[1.2.3\ldots\overline{n-1}\right]$$
$$-\frac{2}{n}\mathrm{l.}\left[1.2^2.3^3\ldots.(n-1)^{n-1}\right];\ \text{etc.}$$

Ce paragraphe est terminé par les développements de $\varpi(\mu)$ en séries procédant suivant le *sinus intégral* et le *cosinus intégral* de $n\pi$.

VIII.

Après avoir prouvé que

$$\int_0^\infty \left(\frac{1}{x}-\cot x\right)\frac{\sin 2\mu x}{x}\,dx = 2\mu - (2\mu-1)\,\mathrm{l.}\,\mu$$
$$+\int_0^\infty \left[(2\mu-1)\cos 2x - \frac{\sin(2\mu-1)x}{\sin x}\right]dx,$$

l'auteur, au moyen de cette transformation, met la fonction $\varpi(\mu)$ sous une nouvelle forme ; il en conclut :

$$\mathrm{l.}\,\Gamma(\mu) = \frac{1}{2}\mathrm{l.}\frac{\pi}{\sin\mu\pi} + \frac{1}{2}\int_0^\infty \left[(2\mu-1)\cos 2x - \frac{\sin(2\mu-1)x}{\sin x}\right]\frac{dx}{x}. \quad (14)$$

« Cette expression », dit notre confrère, « ne semble pas,
» au premier abord, se prêter facilement à l'étude des pro-
» priétés de la fonction $\Gamma(\mu)$ (*)... Néanmoins, il est très-
» curieux que cette équation conduise, de la manière la
» plus simple et la plus naturelle, aux propriétés caracté-
» ristiques de la fonction Γ... » Je n'ai pas besoin d'ajouter que M. Gilbert justifie, amplement, cette appréciation.

Le Mémoire se termine par la démonstration de la formule

$$\int_0^{\infty} \frac{dz}{(1+z^2)\left(e^{\mu\pi z}-2\cos\mu\pi+e^{-\mu\pi z}\right)}=-\frac{1}{4\sin\mu\pi}\int_0^1 \frac{1-x^{\mu-1}}{1-x}\,dx.$$

Cette démonstration me paraît trop longue (**).

En résumé, et malgré quelques points que j'ai cru pouvoir critiquer, le Mémoire de notre confrère est certainement aussi important, au fond, que remarquable sous le rapport de l'élégance des transformations et de la variété des résultats. Ce travail est, à ma connaissance, le meilleur commentaire du célèbre Mémoire de Binet. J'ai donc l'honneur de proposer l'insertion des *Recherches sur le développement de la fonction* Γ, dans l'un des recueils de l'Académie. »

MM. J. Liagre et J. De Tilly, deuxième et troisième commissaires, déclarent qu'ils partagent l'opinion de M. Catalan sur le mérite du mémoire de M. Gilbert, et qu'ils adhèrent aux conclusions du rapport ci-dessus; la classe décide, en conséquence, d'imprimer ce travail dans le recueil des Mémoires in-4°.

(*) Il fait observer, avec raison, que la formule (14) devient illusoire lorsque μ est entier.

(**) Note V.

NOTES.

I.

En général,

$$\frac{d\Gamma(\mu)}{d\mu} = \int_0^\infty e^{-x} x^{\mu-1} \,\mathrm{l}.\, x dx,$$

et

$$\frac{d.\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} = \int_0^\infty \left[\frac{e^{-x}}{x} - \frac{e^{-\mu x}}{1-e^{-x}}\right] dx.$$

Si l'on fait $e^{-x} = z$, cette dernière équation devient :

$$\frac{d.\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} = -\int_0^1 \left[\frac{1}{\mathrm{l}.\, z} + \frac{z^{\mu-1}}{1-z}\right] dz.$$

C étant la *constante d'Euler*, on a :

$$\mathrm{C} = \int_0^1 \left[\frac{1}{\mathrm{l}.\, z} + \frac{1}{1-z}\right] dz;$$

donc

$$\frac{d.\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu} + \mathrm{C} = \int_0^1 \frac{1 - z^{\mu-1}}{1-z}\, dz.$$

Le second membre s'annule pour $\mu = 1$; conséquemment,

$$-\mathrm{C} = \left[\frac{d.\mathrm{l}.\,\Gamma(\mu)}{d\mu}\right]_{(\mu=1)} = \int_0^\infty e^{-x} \,\mathrm{l}.\, x dx; \quad . \;\; . \;\; . \;\; . \quad (3)$$

formule de Schlömilch.

II.

La célèbre formule de Poisson :

$$\mathrm{F}(x) = 2x \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^{2\pi\alpha} - 1}\, d\alpha,$$

donne :

$$\varpi(\mu) = 2\int_0^\infty \frac{e^{-\mu x}}{x}\,dx \int_0^\infty \frac{\sin \alpha x}{e^{2\pi\alpha}-1}\,d\alpha = 2\int_0^\infty \frac{d\alpha}{e^{2\pi\alpha}-1}$$

$$\int_0^\infty e^{-\mu x}\sin\alpha x\,\frac{dx}{x}.$$

L'intégrale relative à x est $\frac{\pi}{2} - \text{arc tg}\,\frac{\mu}{\alpha} = \text{arc tg}\,\frac{\alpha}{\mu}$; donc

$$\varpi(\mu) = 2\int_0^\infty \frac{dx}{e^{2\mu x}-1}\,\text{arc tg}\,\frac{\alpha}{\mu};$$

formule trouvée par Binet, un peu moins simplement.

III.

Si, dans l'équation (9), on transforme chaque fraction en intégrale définie, on retombe sous la formule (2). Réciproquement, on peut conclure, de celle-ci, l'équation (9). En effet, si l'on change x en $2x$, on peut mettre cette équation (2) sous la forme :

$$\varpi(\mu) = \frac{1}{2}\int_0^\infty \frac{e^{-(2\mu+1)x}}{1-e^{-2x}}\;\frac{x(e^x+e^{-x})-(e^x-e^{-x})}{x^2}\,dx.$$

La première fraction égale

$$\sum_{k=0}^{k=\infty} e^{-(2\mu+2k+1)x}.$$

La seconde est la dérivée de

$$y = \frac{e^x - e^{-x}}{x} = 2\left[1 + \frac{x^2}{1.2.3} + \frac{x^4}{1.2.3.4.5} + \cdots\right].$$

Le développement de cette seconde fraction est donc

$$y' = 2\left[\frac{x}{1.3} + \frac{x^3}{1.2.3.5} + \frac{x^5}{1.2.3.4.5.7} + \cdots\right].$$

Par suite,

$$\varpi(\mu)=\sum_{k=0}^{k=\infty}\int_0^\infty\left[\frac{x}{1.3}+\frac{x^3}{1.2.3.5}+\frac{x^5}{1.2.3.4.5.7}+\cdots\right]e^{-(2\mu+2k+1)x}dx;$$

et il est visible que cette formule ne diffère pas de l'équation (9).

IV.

On a, pour de grandes valeurs de n :

$$1.2.3\ldots\overline{n-1}=\sqrt{2\pi}\,(n-1)^{n-\frac{1}{2}}e^{-(n-1)},$$

$$(\mu+1)\ (\mu+2)\ldots\ldots(\mu+n-1)=\sqrt{2\pi}\,\frac{(n-1)^{\mu+n-\frac{1}{2}}\,e^{-(n-1)}}{\Gamma(\mu)}\ (^*).$$

Donc, l'inégalité (10) devient :

$$R_n<\frac{1}{8\mu^2}\,\frac{\Gamma(\mu)}{(n-1)^\mu}\ \ldots\ldots\ (11^{bis})$$

Soit $n=101$: la formule (11) devient :

$$R_n<\frac{1}{8\mu^2}\,\frac{1}{1+\mu.3{,}18239};$$

et la formule (11^{bis}) :

$$R_n<\frac{1}{8\mu^2}\,\frac{\Gamma(\mu)}{100^\mu}.$$

Si $\mu=1$, la première formule donne

$$R_n<\frac{1}{49{,}459};$$

et la seconde :

$$R_n<\frac{1}{800}.$$

Pour $\mu=\frac{1}{2}$, les limites seraient moins écartées; mais la seconde est toujours notablement plus petite que la première.

(*) Mémoire de M. Gilbert, p. 5.

V.

Soit, comme dans la Note I :

$$\frac{d.\mathrm{l}.\Gamma(\mu)}{d\mu}+\mathrm{C}=\int_0^1 \frac{1+x^{\mu-1}}{1-x}\,dx=\mathrm{A}.$$

Si l'on fait $x=e^{-2\alpha}$, on trouve :

$$\mathrm{A}=2\int_0^\infty \frac{e^{(\mu-1)\alpha}-e^{-(\mu-1)\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}\,e^{-\mu\alpha}\,d\alpha.$$

D'après une remarquable formule de Poisson (*), on a :

$$\frac{e^{(\mu-1)\alpha}-e^{-(\mu-1)\alpha}}{e^{\alpha}-e^{-\alpha}}=-\frac{2}{\pi}\sin\mu\pi\int_0^\infty \frac{\cos\frac{\alpha\beta}{\pi}\,d\beta}{e^{\beta}-2\cos\mu\pi+e^{-\alpha}}$$

$$=-2\sin\mu\pi\int_0^\infty \frac{\cos\alpha t}{e^{\pi t}-2\cos\mu\pi+e^{-\pi t}}\,dt \text{ (**)}..$$

Substituant, je trouve :

$$\mathrm{A}=-4\sin\mu\pi\int_0^\infty \frac{dt}{e^{\pi t}-2\cos\mu\pi+e^{-\pi t}}\int_0^\infty \cos\alpha t.e^{-\mu\alpha}\,d\alpha.$$

L'intégrale relative à α a pour valeur $\frac{\mu}{t^2+\mu^2}$; donc

$$\mathrm{A}=-4\mu\sin\mu\pi\int_0^\infty \frac{1}{e^{\pi t}-2\cos\mu\pi+e^{-\pi t}}\,\frac{dt}{t^2+\mu^2};$$

ou, plus simplement,

$$\mathrm{A}=-4\sin\mu\pi\int_0^\infty \frac{1}{2^{\mu\pi z}-2\cos\mu\pi+e^{-\mu\pi z}}\,\frac{dz}{1+z^2};$$

valeur trouvée par M. Gilbert.

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 18e cahier, p. 306.

(**) μ est une fraction proprement dite; donc la fraction transformée est *négative;* et les deux intégrales définies sont positives.