This page intentionally left blank.

ÉLECTION.

La classe a renouvelé, pour l'année actuelle, le mandat de M. J. S. Stas comme délégué auprès de la commission administrative.

RAPPORTS.

Sur l'existence de la dérivée dans les fonctions continues; par M. Gilbert, associé de l'Académie.

Rapport de M. Catalan.

L'objet que notre savant confrère s'est proposé étant très-clairement indiqué dans l'*Introduction* de son Mémoire, je demande à l'Académie la permission de reproduire d'abord quelques passages de cette introduction :

« La question de savoir si l'existence de la dérivée en » général, dans une fonction *continue* $f(x)$ de la variable x, » est une suite nécessaire de la continuité de la fonction, » ou si elle implique une nouvelle condition imposée à la » fonction, n'a guère préoccupé les géomètres que dans » ces derniers temps.

» La plupart des auteurs qui écrivent sur le calcul dif- » férentiel ne la soulèvent même pas, et se contentent » d'admettre l'existence de la dérivée dans les fonctions » qu'ils considèrent, sauf, bien entendu, pour des valeurs » exceptionnelles de la variable : d'autres ne traitent que

» quelques points du problème, et reproduisent, à peu de » chose près, la démonstration, très-insuffisante, qu'Am» père a donnée dans le *Journal de l'École polytech-* » *nique.* »

« Le seul géomètre, à notre connaissance, qui ait traité » ce sujet d'une manière approfondie, est M. Lamarle, » dont le mémoire, publié dans les recueils de notre Aca» démie, paraît avoir échappé à l'attention d'un grand » nombre de géomètres. Dans ce travail remarquable, » M. Lamarle s'est proposé d'établir que le rapport de » l'accroissement d'une fonction continue de x à celui » de la variable tend généralement vers une limite finie, » déterminée, variable avec x, lorsque l'accroissement » de x tend vers zéro; et que ce rapport ne peut croître » indéfiniment, ou osciller sans fin entre deux limites » distinctes, que pour des valeurs particulières de x, » séparées les unes des autres par des intervalles déter» minés....... »

« Quoi qu'il en soit, si beaucoup de géomètres regar» daient comme difficile, ou même comme impossible, de » démontrer l'existence de la dérivée en général, en tant » que résultant nécessairement de la continuité de la fonc» tion, aucun, pensions-nous, n'allait jusqu'à mettre en » doute la propriété même qui faisait l'objet de cette dé» monstration. Un géomètre allemand, M. Hermann Han» kel, professeur à l'Université de Tubingue et disciple » distingué de Riemann, nous a ôté cette illusion. Dans » un mémoire publié en 1870, non-seulement M. Hankel » admet parfaitement l'existence de fonctions continues » qui n'ont point de dérivée, nous il formule un principe » général, auquel il donne le nom de *Condensation des* » *singularités*, et qui permettrait d'en construire un

» nombre indéfini. Il donne même divers exemples de
» semblables fonctions...... »

Le mémoire de M. Gilbert se compose de deux parties. Dans la première, dit-il : « Nous mettons en relief quel-
» ques-unes des principales erreurs commises par M. Han-
» kel, de manière à ne laisser aucun doute sur l'inanité
» de ses conclusions. »

« La seconde partie est encore, sous un autre point de
» vue, la réfutation des théories de M. Hankel. Repre-
» nant, sans y rien changer d'essentiel, la méthode ex-
» posée par M. Lamarle dans son beau mémoire, nous
» essayons d'établir directement l'existence générale de la
» dérivée dans toute fonction continue. »

Après cette indication sommaire des deux problèmes traités par M. Gilbert, je passe à l'analyse des parties principales de son important mémoire.

I.

$\varphi(y)$ représentant une fonction qui, pour toutes les valeurs de y comprises entre -1 et $+1$, sauf pour $y=0$, ait une valeur unique, déterminée, comprise entre -1 et $+1$, et variant d'une manière continue avec y, M. Hankel considère la série

$$\sum_1^\infty \frac{\varphi(\sin n\pi x)}{n^s},$$

dans laquelle la constante s surpasse 3. La somme de cette série toujours convergente étant désignée par $f(x)$, si l'on considère la courbe dont l'équation est $z=f(x)$, cette courbe, suivant M. Hankel, est tellement *imprégnée* de la singularité que $\varphi(y)$ présente exclusivement pour $y=0$, qu'*elle en sera affectée en un nombre infini de points appartenant à un intervalle fini quelconque.*

Pour établir cette proposition paradoxale, M. Hankel s'appuie sur la continuité de $f(x)$; mais la manière dont il prouve cette continuité laissant beaucoup à désirer, paraît-il, notre confrère part de l'équation

$$f(x+h)-f(x)=\sum_{n=1}^{n=p} \frac{\varphi[\sin n\pi(x+\varepsilon)]-\varphi[\sin n\pi x]}{n^s} \pm \frac{\theta}{p^{s-1}}, \quad (1)$$

dans laquelle p désigne un très-grand nombre entier, et θ, une fraction proprement dite; puis il démontre, d'une manière simple et rigoureuse, le lemme employé par l'auteur allemand.

II.

M. Hankel transforme ainsi l'équation (1) :

$$\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}=$$

$$\pi \sum_{n=1}^{n=p} \frac{\varphi'[\sin n\pi(x+\theta_1\varepsilon)]}{n^{s-1}} \cos n\pi(x+\theta_1\varepsilon) \pm \frac{\theta}{\varepsilon p^{s-1}}; \quad (2)$$

après quoi, faisant tendre ε vers zéro et p vers l'infini, *simultanément*, il pense démontrer que :

1° *Pour toute valeur incommensurable de* x,

$$f'(x)=\pi\sum_{n=1}^{n=\infty} \frac{\varphi'[\sin n\pi x]}{n^{s-1}} \cos n\pi x; \quad (4)$$

2° *Pour toute valeur commensurable de* x, *le premier membre de l'équation* (2) *ne tend vers aucune limite déterminée : en chacun des points correspondant à ces valeurs* *commensurables de* x, *la courbe considérée n'a pas de tangente.*

M. Gilbert discute, avec beaucoup de sagacité, les paralogismes commis par M. Hankel. L'un d'eux, réduit à sa plus simple expression, peut être énoncé ainsi : *La limite d'une somme composée d'un nombre indéfiniment grand de parties, est égale à la somme des limites de ces parties;* et l'on sait que ce principe faux conduit aisément à l'équation $1=0$.

III.

« Concluons donc, » avec notre confrère, « que le principe de la *condensation des singularités* ne repose sur » aucun fondement; et que l'existence de fonctions toujours continues, n'ayant point de dérivée déterminée, » pour une infinité de valeurs de la variable, comprises » dans un intervalle assignable, reste encore à démontrer. »

IV.

Les diverses propositions énoncées par M. Hankel n'étant point justifiées, on peut se demander si elles sont fausses. M. Gilbert aurait rendu son travail encore plus intéressant et plus instructif s'il avait démontré, *directement*, l'inexactitude de l'équation (4) et des autres relations d'où le géomètre allemand tire des conséquences si paradoxales. Mais, ainsi que me l'a fait observer notre savant confrère, à défaut d'une preuve directe, peut-être bien difficile à trouver (*), la seconde partie de son mémoire constitue, véritablement, une démonstration de la fausseté des proposi-

(*) Voir la note à la fin du rapport.

tions dont il s'agit. En effet, si, pour toutes les valeurs de x comprises entre deux quantités A, B, aussi voisines qu'on le veut, le rapport $\frac{f(x+\varepsilon)-f(x)}{\varepsilon}$ tend vers une limite finie et déterminée, l'impossibilité des courbes imaginées par M. Hankel sera une chose certaine.

V.

Dans cette seconde partie, intitulée : *Existence de la dérivée dans les fonctions continues d'une seule variable*, M. Gilbert reprend et simplifie la méthode employée autrefois par notre éminent confrère M. Lamarle (*). L'un des principaux théorèmes à établir peut être énoncé en ces termes :

Si, à partir d'une valeur quelconque x *de la variable, comprise dans l'intervalle* (A, B), *on donne à cette variable un accroissement* h, *l'accroissement correspondant de la fonction finira*, EN GÉNÉRAL, *par rester de même signe lorsque* h *tendra indéfiniment vers la limite zéro.*

Pour démontrer cette proposition, M. Gilbert examine d'abord *si, pour une valeur quelconque de* x, *comprise dans l'intervalle considéré, l'accroissement* $f(x+h)-f(x)$ *peut changer indéfiniment de signe lorsque* h *tend vers zéro;* autrement dit : *un arc continu, limité à deux points* A, B *aussi voisins qu'on le voudra, coupe-t-il nécessairement, une infinité de fois, toute parallèle à l'axe des abscisses, menée par un point quelconque de cet arc?* La réponse est négative; et, en conséquence :

« 1° *Sauf pour certaines valeurs isolées et exception-*

(*) *Étude approfondie sur les deux équations....* (BULL. DE L'ACAD., 1re sér., t. XXI, 2e part., p. 5).

» *nelles de la variable* x, *la différence* $f(\mathrm{x}+\mathrm{h})-f(\mathrm{x})$
» *finit, lorsque* h *tend vers zéro, par garder constamment*
» *un même signe;*

» 2° *Les fonctions continues qui, pour chaque valeur*
» *rationnelle de* x, *effectuent, suivant l'hypothèse de*
» *M. Hankel, une infinité d'oscillations infiniment pe-*
» *tites, sont impossibles.* »

VI.

Après avoir élucidé cette première partie de la théorie des dérivées, ou plutôt de leur existence, M. Gilbert considère le rapport $\lambda=\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$, x étant une valeur quelconque, intermédiaire entre A et B; et faisant tendre h vers zéro, il discute, comme l'a déjà fait M. Lamarle, les quatre hypothèses suivantes (*) :

1° λ *tend vers zéro;*

2° λ *croît indéfiniment;*

3° λ *oscille entre deux quantités constantes, sans tendre vers une limite fixe;*

4° λ *converge vers une limite déterminée, finie et différente de zéro.*

Par une série de raisonnements très-serrés et même très-abstraits, l'honorable auteur prouve que les trois premières sont inadmissibles. Reste donc la quatrième; et, en conséquence :

Si la fonction $f(\mathrm{x})$ *est continue depuis* $\mathrm{x}=\mathrm{A}$ *jusqu'à* $\mathrm{x}=\mathrm{B}$, *le rapport* λ *tend généralement vers une limite déterminée, finie et différente de zéro, pour des valeurs quel-*

(*) Évidemment, ce sont les seules possibles.

conques de x *comprises dans l'intervalle* (A, B); *en sorte que les valeurs de* x *pour lesquelles cette condition n'est point vérifiée seront, nécessairement, des valeurs isolées, exceptionnelles, séparées les unes des autres par des intervalles finis.*

VII.

La longue analyse dont je viens de donner lecture fera comprendre, je l'espère, l'importance et le mérite du nouveau travail de M. Gilbert. Si, malgré les éclaircissements qu'il m'a donnés par lettres, quelques-uns des arguments de notre savant confrère n'ont pas amené chez moi une conviction complète, la raison en est due sans doute à la difficulté du sujet que nous discutions : on sait qu'il est presque toujours impossible de prouver ce que l'on est tenté de regarder comme évident; par exemple, le postulatum d'Euclide.

Quoi qu'il en soit, M. Gilbert a montré la fausseté des démonstrations employées par un géomètre qui pouvait *faire école;* il a traité, avec beaucoup de talent, une question de principe, sur laquelle la plupart des auteurs ne s'arrêtaient pas; il a donc complété, dans une partie importante, l'enseignement du calcul différentiel.

En conséquence, j'ai l'honneur de proposer l'impression de son mémoire dans un des recueils de l'Académie. »

NOTE.

La courbe représentée par

$$y=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{i=n}\left(\frac{i}{n}-x\right)\sin\frac{1}{\frac{i}{n}-x} \qquad (1)$$

donne lieu aux remarques suivantes :

1° L'ordonnée à l'origine est comprise entre $\pm \frac{1}{n} \sum_{1}^{n} \frac{i}{n}$, c'est-à-dire entre $\pm \frac{n+1}{n}$;

2° x ne surpassant pas l'unité, y est compris entre

$$\pm \frac{1}{n} \left[\frac{n+1}{2} + n \right] = \pm \left(\frac{3}{2} + \frac{1}{2n} \right);$$

3° Lorsque x croît indéfiniment, y tend vers une limite égale à 1. La courbe a donc une asymptote indépendante de n;

4° *La dérivée de* y *devient indéterminée pour* $x = \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \frac{3}{n}, \dots \frac{n}{n}$;

Il y a donc, du côté des abscisses positives, n *points à tangente indéterminée* : ces points sont situés entre l'axe des ordonnées et la parallèle à cet axe, représentée par $x = 1$.

5° Si l'on fait croître n indéfiniment, le second membre de l'équation (1) tend vers une certaine fonction de x, $\varphi(x)$, continue, telle que $\varphi(0)$ est comprise entre $\pm \frac{1}{2}$, etc.

D'après les remarques précédentes, *il semble* que

$$y = \varphi(x) \tag{2}$$

représente une courbe ayant une *infinité de points à tangente indéterminée*, dont les abscisses sont comprises entre 0 et 1.

J'appelle, sur ce point, l'attention de mon savant confrère M. Gilbert.

Conformément aux conclusions de ce rapport, auxquelles a adhéré M. Steichen, second commissaire, la classe a décidé l'impression du mémoire de M. Gilbert dans le recueil in-8° et celle des rapports dans les *Bulletins* de la séance.
