This page intentionally left blank.

Sur l'équation de Riccati; par M. Eug. Catalan, associé de l'Académie.

La Note que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie a pour objet la simplification des calculs au moyen desquels on trouve l'intégrale de l'équation

$$dy = (ax^m + by^2)\,dx,$$

quand l'exposant m a l'une ou l'autre des formes

$$-\frac{4k}{2k+1}, \quad -\frac{4(k+1)}{2k+1};$$

k désignant, bien entendu, un nombre entier quelconque. On sait que, a et b étant supposés différents de zéro, ces deux cas sont les seuls dans lesquels l'intégration soit possible.

I. Les premières valeurs de m sont les termes de la série

$$0, \quad -\frac{4}{3}, \quad -\frac{8}{5}, \quad -\frac{12}{7}, \ldots : \tag{1}$$

elles tendent vers -2. De même, les secondes valeurs de m forment une autre série :

$$-4, \quad -\frac{8}{3}, \quad -\frac{12}{5}, \quad -\frac{16}{7}, \ldots, \tag{2}$$

dont le *terme-limite* serait encore -2. En outre, la somme de deux termes correspondants est -4.

II. Sans rendre l'équation de Riccati moins générale, on peut prendre $b = a$; savoir

$$dy = a(x^m + y^2)\,dx. \tag{3}$$

Cela posé, si $m = 0$, l'intégrale est

$$y = \operatorname{tg}(ax + c); \qquad (4)$$

et, lorsque $m = -4$, cette intégrale devient

$$y = \frac{1}{x^2} \operatorname{tg}\left(c - \frac{a}{x}\right) - \frac{1}{ax} \cdot \qquad (5)$$

Pour toute autre valeur de m (-2 excepté), l'intégrale n'est qu'une transformée des équations (4) ou (5). Cette simple remarque a suggéré les considérations suivantes.

III. L'exposant m étant d'abord supposé appartenir à la série (1), soient

$$m = -\frac{4k}{2k+1}, \quad m_1 = -\frac{4(k-1)}{2k-1}, \ldots\ldots \quad m_k = 0. \qquad (6)$$

Si, dans la proposée (3), on faisait

$$x = x_1^{-\frac{1}{1+m}}, \quad y = \frac{a}{a x_1^2 y_1 + (1+m) x_1}, \quad a = (1+m) a_1, \qquad (7)(^*)$$

on obtiendrait une équation

$$dy_1 = a_1 (x_1^{m_1} + y_1^2)\, dx_1,$$

de même forme que la proposée. Une nouvelle application des formules (7) (après un changement d'indices) conduirait à une deuxième transformée dans laquelle m_1 serait remplacé par m_2; et ainsi de suite. Or, il est inutile d'effectuer les longs calculs qui donneraient ces transformées

(*) Cette transformation unique est, pour ainsi dire, la *résultante* des deux transformations indiquées dans tous les traités de calcul intégral.

successives : il suffit, pour former l'intégrale cherchée, de prendre l'intégrale de la k^ième transformée, savoir

$$y_k = \mathrm{tg}\,(c + a_k x_k), \tag{8}$$

et d'y remplacer a_k, x_k, y_k par leurs valeurs. C'est à quoi l'on parvient au moyen des formules

$$\left.\begin{aligned} a_1 &= \frac{a}{1+m}, \quad a_2 = \frac{a_1}{1+m_1}, \;\ldots,\; a_k = \frac{a_{k-1}}{1+m_{k-1}},\\ x_k &= x_{k-1}^{-(1+m_{k-1})}, \quad x_{k-1} = x_{k-2}^{-(1+m_{k-2})}, \;\ldots\\ y_k &= x_{k-1}^{1+m_{k-1}}\left[\frac{x_{k-1}^{1+m_{k-1}}}{y_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right], \;\ldots.. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

conséquences des relations (7); mais ces formules peuvent être considérablement simplifiées.

IV. 1° Il est visible que

$$a_k = \frac{a}{(1+m)(1+m_1)\ldots(1+m_{k-1})}.$$

Or, d'après les notations (6) :

$$\left.\begin{aligned} 1+m &= -\frac{2k-1}{2k+1}, \qquad 1+m_1 = -\frac{2k-3}{2k-1},\\ 1+m_2 &= -\frac{2k-5}{2k-3}, \;\ldots,\; 1+m_{k-1} = -\frac{1}{3}; \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

donc

$$(1+m)(1+m_1)\ldots(1+m_{k-1}) = (-1)^k \frac{1}{2k+1}; \tag{11}$$

puis

$$\left.\begin{aligned} a_k &= (-1)^k \frac{2k+1}{1} a, \quad a_{k-1} = (-1)^{k-1} \frac{2k+1}{3} a,\\ a_{k-2} &= (-1)^{k-2} \frac{2k+1}{5} a, \;\ldots,\; a_1 = -\frac{2k+1}{2k-1} a. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

2° $x_k = x_{k-1}^{\frac{1}{3}},\ x_{k-1} = x_{k-2}^{\frac{3}{5}},\ x_{k-2} = x_{k-3}^{\frac{5}{7}},\ \ldots,\ x_1 = x^{\frac{2k-1}{2k+1}}$;

donc

$$x_k = x^{\frac{1}{2k+1}},\quad x_{k-1} = x^{\frac{3}{2k+1}},\quad x_{k-2} = x^{\frac{5}{2k+1}},\quad \ldots,\quad x_1 = x^{\frac{2k-1}{2k+1}}. \tag{13}$$

3° Au moyen de ces valeurs, celles de y_k, y_{k-1}, ... deviennent :

$$\left.\begin{aligned}
y_k &= \frac{(-1)^{k-1}}{(2k+1)\,ax^{\frac{1}{2k+1}}} + \frac{1}{x^{\frac{2}{2k+1}}y_{k-1}},\\
y_{k-1} &= \frac{3(-1)^{k-2}}{(2k+1)\,ax^{\frac{3}{2k+1}}} + \frac{1}{x^{\frac{6}{2k+1}}y_{k-2}},\\
y_{k-2} &= \frac{5(-1)^{k-3}}{(2k+1)\,ax^{\frac{5}{2k+1}}} + \frac{1}{x^{\frac{10}{2k+1}}y_{k-3}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_1 &= \frac{(2k-1)}{(2k+1)\,ax^{\frac{2k-1}{2k+1}}} + \frac{1}{x^{\frac{4k-2}{2k+1}}y}.
\end{aligned}\right\} \tag{14}$$

V. 4° On conclut, des formules (14) :

$$\begin{aligned}
x^{\frac{2}{2k+1}}y_{k-1} &= \frac{3(-1)^{k-2}}{(2k+1)\,ax^{\frac{1}{2k+1}}} + \frac{1}{x^{\frac{4}{2k+2}}y_{k-2}},\\
x^{\frac{4}{2k+1}}y_{k-2} &= \frac{5(-1)^{k-3}}{(2k+1)\,ax^{\frac{1}{2k+1}}} + \frac{1}{x^{\frac{6}{2k+1}}y_{k-1}},\\
x^{\frac{6}{2k+1}}y_{k-3} &= \frac{7(-1)^{k-4}}{(2k+1)\,ax^{\frac{1}{2k+1}}} + \frac{1}{x^{\frac{8}{2k+1}}y_{k-4}},\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
x^{\frac{2k-2}{2k+1}}y_1 &= \frac{(2k-1)}{(2k+1)\,ax^{\frac{1}{2k+1}}} + \frac{1}{x^{\frac{2k}{2k+1}}y}.
\end{aligned}$$

Par conséquent, si l'on pose

$$(2k+1)\,ax^{\frac{1}{2k+1}} = \alpha, \tag{15}$$

la valeur de y_k se développe en fraction continue; savoir

$$y_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\alpha} + \cfrac{1}{\cfrac{3(-1)^{k-2}}{\alpha} + \cfrac{1}{\cfrac{5(-1)^{k-3}}{\alpha} + \ldots + \cfrac{1}{\cfrac{2k-1}{\alpha} + \cfrac{1}{\frac{2k}{x^{2k+1}}y}}}}; \tag{16}$$

et l'intégrale (8) devient, finalement,

$$y_k = \operatorname{tg}\left[c + (-1)^k \alpha\right]. \tag{17}$$

VI. *Application :*

$$dy = \left(x^{-\frac{8}{5}} + y^2\right) dx.$$

On a

$$m = -\frac{8}{5} = -\frac{4.2}{2.2+1}, \quad k = 2, \quad a = 1.$$

Donc

$$\alpha = 5x^{\frac{1}{5}}, \quad a_2 = 5, \quad x_2 = x^{\frac{1}{5}},$$

$$y_2 = -\frac{1}{5x^{\frac{1}{5}}} + \cfrac{1}{\cfrac{3}{5x^{\frac{1}{5}}} + \cfrac{1}{x^{\frac{4}{5}}y}} = \frac{25xy - 3x^{\frac{3}{5}}y - 5}{5x^{\frac{1}{5}}\left(3x^{\frac{3}{5}}y + 5\right)}.$$

L'intégrale est, d'après la formule (8) :

$$\frac{25xy - 3x^{\frac{3}{5}}y - 5}{5x^{\frac{1}{5}}\left(3x^{\frac{3}{5}}y + 5\right)} = \operatorname{tg}\left(c + 5x^{\frac{1}{5}}\right);$$

ainsi qu'on le trouve directement.

VII. Quand l'exposant m fait partie de la série (2), l'intégrale générale (8) est remplacée par

$$y_k = \frac{1}{x_k^2} \operatorname{tg}\left[c - \frac{a_k}{x_k}\right] - \frac{1}{a_k x_k}; \tag{18}$$

et celle-ci ne se prête pas aisément aux transformations précédentes. Mais on peut, comme l'on sait, revenir de ce cas au premier. Soient, en effet, dans la proposée (3) :

$$x = \frac{1}{u}, \quad y = -\frac{u}{a} - u^2 v. \tag{19}$$

La transformée,

$$dv = a\left(u^{-m-4} + v^2\right) du, \tag{20}$$

a même forme que l'équation (3); et l'exposant de la variable u, augmenté de l'exposant primitif, donne une somme égale à -4. Appliquant à cette transformée les formules (15), (16), (17) (en y remplaçant x par u et y par v), il suffira, pour former l'intégrale cherchée, de substituer, pour u et v, les valeurs qui résultent des équations (19); savoir

$$u = \frac{1}{x}, \quad v = -x^2 y - \frac{x}{a} \cdot \text{(*)} \tag{21}$$

(*) On peut comparer la solution précédente avec celle que donne Lacroix, d'après Lagrange (*Calcul intégral*, t. II, p. 434).