This page intentionally left blank.

» espèce, à travers la Laponie, à Saint-Pétersbourg. Je me » propose de le faire dessiner et de vous en envoyer le » dessin. Probablement vous reconnaîtrez l'espèce. »

M. Van Beneden pense que c'est de la *Balaenoptera borealis* que M. von Baër a rapporté le crâne. Il fait remarquer ensuite, d'après une note que le docteur Gray vient de publier à Londres, que sir George Grey, le gouverneur de la Nouvelle-Zélande, a obtenu une tête de baleine de l'île de Kawan (Nouvelle-Zélande), qu'il a présentée au musée de Wellington, et que cette tête indique l'existence d'une espèce toute distincte dans ces parages. M. le docteur Gray la rapporte à la *Balaena* (*Neobalaena*) *marginata*. Il reste à savoir si cette espèce occupe la troisième zone de l'hémisphère austral, zone qui s'étend entre le cap de Bonne-Espérance et l'Australie.

M. Van Beneden se propose de présenter bientôt à l'Académie un travail sur le sujet dont il vient d'entretenir la classe.

Sur la détermination de l'aire de l'ellipsoïde;
par M. E. Catalan, associé de l'Académie.

L'illustre inventeur de la théorie des fonctions elliptiques a représenté, par deux formules différentes, l'aire A d'un ellipsoïde quelconque. La première formule, sur laquelle Legendre n'a peut-être pas suffisamment insisté, permet de développer A en série; la seconde, qu'il obtient en décomposant la surface en *rectangles formés par des lignes de courbure,* contient une somme d'intégrales elliptiques, des deux premières espèces, respectivement multipliées par des constantes. Malheureusement, la décomposition dont il s'agit conduit à des calculs très-pénibles, malgré les réductions, presque inespérées, dues au génie de l'auteur.

Aucun géomètre, que je sache, n'avait simplifié la solution du problème résolu par Legendre, lorsque, en 1839, je fis connaître (*) une méthode indirecte, applicable à un grand nombre de cas, et qui conduit rapidement à la seconde formule de Legendre.

Il y a cinq ans, à propos de l'hyperboloïde gauche, j'ai fait observer que cette méthode équivaut à la décomposition de la surface en *rectangles formés par des sections parallèles à l'un des plans principaux et par leurs trajectoires orthogonales* (**).

Dans la note que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, je fais voir que le premier procédé de Legendre équivaut, lui-même, à la décomposition dont je viens de parler. Si le grand géomètre n'avait pas été séduit par les « *résultats élégants* » que « *semblait promettre* (***) » l'emploi des lignes de courbure, il aurait, très-probablement, trouvé la méthode à laquelle je suis parvenu en 1839.

I.

L'équation de l'ellipsoïde étant

$$\frac{x'^2}{\alpha^2}+\frac{y'^2}{\beta^2}+\frac{z'^2}{\gamma^2}=1, \tag{1}$$

(*) *Journal de Liouville*, tome IV, p. 323.

(**) *Mélanges mathématiques*, pp. 7, 8.

(***) *Traité des fonctions elliptiques*, tome I^{er}, p. 352.

l'aire totale est donnée (*) par la formule

$$A = 8 \iint dx'dy' \sqrt{\frac{1 - \frac{\alpha^2 - \gamma^2}{\gamma^4} x'^2 - \frac{\beta^2 - \gamma^2}{\gamma^4} y'^2}{1 - \frac{x'^2}{\alpha^2} - \frac{y'^2}{\beta^2}}}, \quad (2)$$

dans laquelle les variables x, y, *positives*, satisfont à la condition

$$\frac{x'^2}{\alpha^2} + \frac{y'^2}{\beta^2} \leqq 1. \quad (3)$$

De plus, pour fixer les idées, on suppose

$$\alpha > \beta > \gamma. \quad (4)$$

La *première méthode* de Legendre consiste à faire

$$z' = \gamma \cos\theta, \quad x' = \alpha \sin\theta \sin\varphi, \quad y' = \beta \sin\theta \cos\varphi, \quad (5)$$

$$\alpha = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - a^2}}, \quad \beta = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - b^2}}: \quad (6)\ (^{**})$$

d'après les conditions (4),

$$1 > a > b > 0. \quad (7)$$

Au moyen d'un calcul très-simple, dont on peut voir le détail dans l'ouvrage cité, la formule (2) devient

$$A = 8\alpha\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi d\theta \sin\theta \sqrt{1 - (a^2 \sin^2\varphi + b^2 \cos^2\varphi) \sin^2\theta} : \quad (8)$$

c'est celle-ci que le célèbre auteur développe en série.

(*) *Fonct. ellipt.*, tome Ier, p. 352.

(**) Pour rendre plus facile la comparaison des procédés, j'ai légèrement modifié les notations employées par Legendre.

II.

Dans le *Mémoire sur la réduction d'une classe d'intégrales multiples* (*), la formule (2) est remplacée par

$$A = 8\alpha\beta \int\int dx dy \sqrt{\frac{1 - a^2x^2 - b^2y^2}{1 - x^2 - y^2}}\,; \tag{9}$$

les variables x, y, respectivement égales à $x'\alpha$, $y'\beta$, satisfont à la condition

$$x^2 + y^2 \overline{\overline{<}}\, 1. \tag{10}$$

Soient

$$F(v) = \int\int dx dy \sqrt{1 - a^2x^2 - b^2y^2}, \tag{11}$$

$$x^2 + y^2 \overline{\overline{<}}\, 1 - v^2\,: \tag{12}$$

on démontre aisément (**) que

$$A = -8\alpha\beta \int_0^1 \frac{dv}{v} F'(v). \tag{13}$$

Pour calculer $F(v)$, ou sa dérivée $F'(v)$, je suppose

$$x = u \sin \Psi, \quad y = u \cos \Psi; \tag{14}$$

j'obtiens

$$F(v) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Psi \int_0^{\sqrt{1-v^2}} u du \sqrt{1 - (a^2 \sin^2 \Psi + b^2 \cos^2 \Psi) u^2}\,(^{***}), \tag{15}$$

$$\frac{1}{v} F'(v) = -\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Psi \sqrt{1 - (a^2 \sin^2 \Psi + b^2 \cos^2 \Psi)(1 - v^2)};$$

(*) *Journal de Liouville*, tome IV.

(**) *Journal de Liouville*, t. IV, pp. 330 et suivantes.

(***) Il est inutile, quant à présent, de mettre $F(v)$ sous forme d'intégrale définie simple.

puis

$$A = 8\alpha\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\Psi \int_0^1 dv \sqrt{1 - (a^2 \sin^2\Psi + b^2 \cos^2\Psi)(1 - v^2)}. \quad (16)$$

Si l'on fait $v = \cos\theta$, les formules (8), (16) rentrent l'une dans l'autre. Donc *la méthode fondée sur la variation du paramètre* v *ne diffère pas, au fond, de la première méthode de Legendre.*

III.

Les trajectoires orthogonales des sections parallèles au plan des $x'y'$, ou les *lignes de plus grande pente* de l'ellipsoïde, sont caractérisées par la condition

$$-\frac{\beta^2 x'}{\alpha^2 y'}\frac{dy'}{dx'} + 1 = 0. \quad (17)$$

Soient ds l'élément d'une *ligne de niveau*, $d\sigma$ l'élément d'une trajectoire :

$$dA = ds\,d\sigma.$$

Premièrement, si l'on différentie l'équation (1) en supposant z' constante, et que l'on fasse

$$\frac{x'}{\alpha} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - z'^2}}{\gamma}\sin\varphi', \qquad \frac{y'}{\beta} = \frac{\sqrt{\gamma^2 - z'^2}}{\gamma}\cos\varphi',$$

on a

$$dx' = \frac{\alpha}{\gamma}\sqrt{\gamma^2 - z'^2}\cos\varphi'\,d\varphi', \qquad dy' = \frac{\beta}{\gamma}\sqrt{\gamma^2 - z'^2}\sin\varphi'\,d\varphi', \quad (18)$$

$$ds = \frac{\sqrt{\gamma^2 - z'^2}}{\gamma}\,d\varphi'\sqrt{\alpha^2\cos^2\varphi' + \beta^2\sin^2\varphi'}. \quad (19)$$

En second lieu, l'équation (1), différentiée par rapport aux trois variables, donne

$$\beta^2 x' dx' + \alpha^2 y' dy' = -\frac{\alpha^2\beta^2}{\gamma^2} z' dz';$$

d'où, à cause de la relation (17) :

$$dx' = -\frac{\alpha^2\beta^4 x' z'}{\gamma^2(\beta^4 x'^2 + \alpha^4 y'^2)} dz', \quad dy' = -\frac{\alpha^4\beta^2 y' z'}{\gamma^4(\beta^4 x'^2 + \alpha^4 y'^2)} dz';$$

ou, ce qui est équivalent ;

$$dx' = -\frac{\alpha\beta^2}{\gamma}\frac{z' dz'}{\sqrt{\gamma^2 - z'^2}}\frac{\sin\varphi'}{\alpha^2\cos^2\varphi' + \beta^2\sin^2\varphi'},$$

$$dy' = -\frac{\alpha^2\beta}{\gamma}\frac{z' dz'}{\sqrt{\gamma^2 - z'^2}}\frac{\cos\varphi'}{\alpha^2\cos^2\varphi' + \beta^2\sin^2\varphi'}.$$

Il résulte, de ces valeurs :

$$d\sigma = dz'\sqrt{\frac{\alpha^2\beta^2 z'^2}{\gamma^2(\gamma^2 - z'^2)(\alpha^2\cos^2\varphi' + \beta^2\sin^2\varphi')} + 1}; \quad (20)$$

$$dA = \frac{1}{\gamma^2} d\varphi' dz' \sqrt{[\alpha^2\beta^2 + \gamma^2(\gamma^2 - z'^2)(\alpha^2\cos^2\varphi' + \beta^2\sin^2\varphi')};$$

ou plutôt, si l'on fait usage des abréviations (6), que l'on intègre, et que l'on multiplie par 8 :

$$A = \frac{8\alpha\beta}{\gamma^2}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi' \int_0^{\gamma} dz' \sqrt{\gamma^2 - (\gamma^2 - z'^2)(a^2\sin^2\varphi' + b^2\cos^2\varphi')}. \quad (21)$$

Cette nouvelle expression, si l'on remplace z' par $\gamma\cos\theta$, se réduit encore à la formule (8); donc, comme nous l'avons annoncé, *la première méthode de Legendre équivaut à la décomposition de la surface en rectangles formés par des lignes de niveau et des lignes de plus grande pente.*

IV.

Soit, dans la dernière égalité, $z' = \gamma\lambda$: il vient

$$A = 8\alpha\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi' \int_0^1 d\lambda \sqrt{(a^2 \sin^2\varphi' + b^2 \cos^2\varphi')(\lambda^2 - 1) + 1}. \quad (22)$$

En général,

$$\int_0^1 d\lambda \sqrt{P\lambda^2 + Q} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{P+Q} + \frac{Q}{\sqrt{P}}\, l\, \frac{\sqrt{P} + \sqrt{P+Q}}{\sqrt{Q}}\right],$$

ou

$$\int_0^1 d\lambda \sqrt{P\lambda^2 + Q} = \frac{1}{2}\left[\sqrt{P+Q} + \frac{1}{2}\frac{Q}{\sqrt{P}}\, l\, \frac{\sqrt{P+Q} + \sqrt{P}}{\sqrt{P+Q} - \sqrt{P}}\right];$$

donc, dans la formule (22), l'intégrale relative à λ est

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4}\frac{1 - a^2 \sin^2\varphi' - b^2 \cos^2\varphi'}{\sqrt{a^2 \sin^2\varphi' + b^2 \cos^2\varphi'}}\, l\, \frac{1 + \sqrt{a^2 \sin^2\varphi' + b^2 \cos^2\varphi'}}{1 - \sqrt{a^2 \sin^2\varphi' + b^2 \cos^2\varphi'}}.$$

Si l'on fait

$$a^2 \sin^2\varphi' + b^2 \cos^2\varphi' = R^2, \quad (23)$$

cette formule se change en

$$A = 2\pi\alpha\beta + 2\alpha\beta \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi' \left(\frac{1}{R} - R\right) l\, \frac{1 + R}{1 - R}. \quad (24)$$

Mais, si l'on suppose

$$a = \sin\mu, \quad b = ak, \quad (25)$$

on a (*) :

$$A = 2\pi\gamma^2 + \frac{2\pi a\gamma^2}{\sqrt{(1-a^2)(1-b^2)}}\,E(k,\mu) + \frac{2\pi\gamma^2}{a}\sqrt{\frac{1-a^2}{1-b^2}}\,F(k,\mu); \quad (26)$$

donc

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1 - a^2\sin^2\varphi - b^2\cos^2\varphi}{\sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}\, l\, \frac{1 + \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}{1 - \sqrt{a^2\sin^2\varphi + b^2\cos^2\varphi}}$$

$$= \sqrt{(1-a^2)(1-b^2)} - 1 + aE(k,\mu) + \frac{1-a^2}{a}F(k,\mu);$$

relation probablement connue. Elle devient, pour $a = 1$:

$$\frac{1-b^2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{1-(1-b^2)\cos^2\varphi}}\, l\, \frac{1 + \sqrt{1-(1-b^2)\cos^2\varphi}}{1 - \sqrt{1-(1-b^2)\cos^2\varphi}} = -1 + E_1(b).$$

Lorsque $b = 0$, cette nouvelle égalité se réduit à

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sin^2\varphi}{\cos\varphi}\, d\varphi\, l.\cot\frac{1}{2}\varphi = \frac{\pi^2}{4} - \frac{\pi}{2};$$

ce qui est exact (**).

Enfin, si l'on fait $b = 0$ dans la relation (27), on trouve cette autre formule, assez simple :

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} d\varphi\, \frac{1 - a^2\sin^2\varphi}{\sin\varphi}\, l\, \frac{1 + a\sin\varphi}{1 - a\sin\varphi} = a\left(\sqrt{1-a^2} - 1\right) + \arcsin a.$$

(*) *Journal de Liouville*, tome IV, p. 328.

(**) *Sur quelques questions relatives aux fonctions elliptiques*, p. 11.