



<http://www.biodiversitylibrary.org/>

**Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et des beaux-arts de Belgique.**

Bruxelles.

<http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550>

**ser.2:t.28 (1869):** <http://www.biodiversitylibrary.org/item/28480>

Article/Chapter Title: Rapport sur quelques propriétés des surfaces  
apsidales ou conjuguées par M. Ph. Gilbert

Author(s): Eugène Catalan

Page(s): Page 21, Page 22, Page 23, Page 24

Contributed by: Harvard University, Museum of Comparative Zoology,  
Ernst Mayr Library

Sponsored by: Harvard University, Museum of Comparative Zoology,  
Ernst Mayr Library

Generated 12 January 2016 3:15 AM

<http://www.biodiversitylibrary.org/pdf4/047224600028480>

This page intentionally left blank.

Ces exemples suffiront, je pense, pour faire juger de l'intérêt que présente le travail de M. Van der Mensbrugghe; je considère ce travail comme très-digne de figurer dans le recueil de l'Académie, et, en conséquence, j'ai l'honneur d'en proposer l'impression. »

MM. F. Duprez et Ch. Montigny, deuxième et troisième commissaires, ayant adhéré aux conclusions du rapport de M. Plateau, la classe vote l'impression du travail de M. Van der Mensbrugghe dans le recueil des *Mémoires couronnés et des savants étrangers*, in-4°.

—

*Sur quelques propriétés des surfaces apsidales ou conjuguées, par M. Ph. Gilbert.*

**Rapport de M. Catalan.**

« Considérons, sur une surface quelconque  $s$ , une courbe telle, que sa tangente en  $m$  soit contenue dans le plan passant par la normale  $mn$  à  $s$  et par un pôle ou origine  $O$  : cette courbe est appelée, par M. Gilbert, *ligne d'attraction*. L'étude des propriétés des lignes d'attraction, et de leurs *trajectoires orthogonales*, est l'objet de la Note présentée par notre confrère.

Tout d'abord, M. Gilbert fait observer que les trajectoires dont il s'agit sont des courbes sphériques, intersections de la surface  $s$  par des sphères ayant, pour centre commun, le pôle. Il cherche ensuite, et c'est là le sujet principal de son travail, quelles relations existent entre les lignes d'attraction de  $s$  et les lignes d'attraction de la

surface  $S$ , conjuguée de  $s$ ; le mot *conjugué* ayant ici la signification que je lui ai attribuée dans un *Mémoire sur la surface des ondes*, dont l'Académie a bien voulu voter l'impression. Pour démontrer ces relations, très-nombreuses, M. Gilbert fait usage des méthodes et des formules qu'il a exposées dans un *Mémoire sur la théorie des lignes tracées sur une surface* : il serait difficile d'énoncer, en langage ordinaire, les résultats auxquels il parvient. Cependant, en voici quelques-uns qui me paraissent très-dignes d'attention :

1° *Les intersections de deux surfaces conjuguées,  $s$ ,  $S$ , par une sphère dont le centre est au pôle, sont des courbes correspondantes; ces courbes sont parallèles (\*), c'est-à-dire qu'en deux points correspondants, elles ont le même plan normal, savoir, le plan de correspondance;*

2° *Les tangentes aux lignes d'attraction, en deux points correspondants, ne sont pas des directions correspondantes (\*\*);*

3° *Le rapport des aires infiniment petites, correspon-*

(\*) Dénomination proposée par M. Laduron, dans un mémoire pour le concours universitaire.

(\*\*) Autrement dit, si  $mm'm'' \dots$  est une ligne d'attraction de  $s$ , sa conjuguée  $MM'M'' \dots$  n'est pas une ligne d'attraction de  $S$ . En effet, celle-ci est représentée par

$$\alpha dX + \beta dY + \gamma dZ = 0;$$

et je trouve, pour équation de  $MM'M'' \dots$

$$v(\alpha dX + \beta dY + \gamma dZ) = u^2(\alpha dL + \beta dM + \gamma dN).$$

Cette seconde équation (en général incompatible avec la première) donne une définition de la courbe  $MM'M'' \dots$ , bien différente de celle qui appartient aux lignes d'attraction.

dantes, sur deux surfaces conjuguées, est égal à la tangente de l'angle que fait le rayon vecteur  $Om$  avec le plan osculateur, en  $M$ , à la trajectoire.

M. Gilbert cherche aussi la relation qui existe entre les courbures de deux surfaces conjuguées, en deux points correspondants; il trouve une équation très-simple, mais dont la forme n'est pas symétrique. Cependant, eu égard à ce que l'on pourrait appeler la *réciprocité* des surfaces  $s, S$ , il semble que leurs courbures, en deux points correspondants, devraient entrer de la même manière dans l'équation qui les lie. J'appelle sur cette question intéressante l'attention de mon jeune et perspicace confrère.

Dans la seconde partie de sa Note, M. Gilbert applique, à l'ellipsoïde et à la surface des ondes, les résultats généraux démontrés dans la première partie. Il intègre, d'une manière simple et élégante, l'équation des lignes d'attraction de l'ellipsoïde : ces lignes sont situées sur des cônes ayant pour équation

$$x \frac{a^2c^2 + b^2c^2 - 2a^2b^2}{(a^2 - b^2)c^2} y \frac{2b^2(a^2 - c^2)}{(a^2 - b^2)c^2} = gz,$$

$g$  étant la constante arbitraire.

Quant aux lignes d'attraction de la surface des ondes, il résulte, de propriétés connues, qu'elles appartiennent aux ellipsoïdes représentés par

$$a^2x^2 + b^2y^2 + c^2z^2 = abcw.$$

On voit que le travail de M. Gilbert présente certaines analogies avec le mien. Notre confrère, non content de déclarer que mon Mémoire a été l'occasion du sien, fait une réserve expresse en faveur de mes droits. Je crois

devoir répondre à cette loyale déclaration que les théorèmes démontrés par M. Gilbert lui appartiennent légitimement, et que, loin d'en avoir trouvé aucun de mon côté, j'espère que son intéressant travail pourra me servir dans des recherches ultérieures.

Si je ne me trompe, les géomètres partageront, en lisant la Note de M. Gilbert, le plaisir qu'elle m'a procuré; et, en conséquence, je propose à l'Académie d'en ordonner la publication. »

M. Steichen, second commissaire, ayant adopté les conclusions du rapport de M. Catalan, la classe vote l'impression du travail de M. Gilbert dans les *Bulletins*.

---

M. Eug. Catalan, premier commissaire pour un travail de M. F. Folie intitulé : *Note sur quelques théorèmes généraux de géométrie supérieure*, donne lecture du rapport qu'il a rédigé à ce sujet.

Conformément aux conclusions de ce rapport, adoptées par les deux autres commissaires, MM. J. Liagre et Ph. Gilbert, la classe vote l'impression du travail de M. Folie dans les *Bulletins*.

---