This page intentionally left blank.

relation suivante, qui n'a peut-être pas été remarquée :

$$\frac{1}{r}+\frac{1}{R}=\frac{1}{v} \quad . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \; . \quad (A)$$

On a donc ce théorème :

La somme (*) *des courbures de la roulette et de la podaire, en deux points correspondants, est égale à l'inverse de la distance comprise entre le point décrivant la roulette et le point où la courbe roulante touche la droite fixe.*

Les applications de la formule (A) sont nombreuses. On en conclut, par exemple, le théorème de Steiner, retrouvé par MM. Mannheim et Paul Serret, puis généralisé par notre confrère M. Lamarle (**).

Sur l'addition des fonctions elliptiques de première espèce;
par M. E. Catalan, associé de l'Académie.

Legendre fait observer qu' « *une application fort simple de la trigonométrie sphérique aurait suffi pour trouver l'intégrale algébrique complète de l'équation transcendante*

$$\frac{d\varphi}{\Delta(\varphi)}+\frac{d\psi}{\Delta(\psi)}=0 \text{ » } (***).$$

(*) Il s'agit ici, bien entendu, de *somme algébrique*.

(**) *Journal de l'École polytechnique*, 40^{me} cahier; BULLETINS DE L'ACADÉMIE ROYALE DE BELGIQUE, 2^{e} série, t. IV.

(***) *Traité des fonctions elliptiques*, t. I, p. 21.

Peut-être n'a-t-on pas fait attention à une autre interprétation géométrique de cette intégrale, ou à une seconde manière de démontrer le théorème d'Euler. L'indication de ce procédé particulier est l'objet de la présente note.

I.

Soit l'équation

$$\frac{du}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 u}} \pm \frac{dv}{\sqrt{1 - c^2 \sin^2 v}} = o, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (1)$$

que l'on peut écrire sous la forme abrégée et rationnelle :

$$\frac{du^2}{U} = \frac{dv^2}{V} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (2)$$

Si l'on fait

$$u = \frac{\theta + \omega}{2}, \quad v = \frac{\theta - \omega}{2}, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (3)$$

on change l'équation (2) en

$$V(d\theta + d\omega)^2 = U(d\theta - d\omega)^2,$$

ou en

$$(V - U)(d\theta^2 + d\omega^2) + 2(V + U)\,d\theta\,d\omega = o. \quad . \quad . \quad (4)$$

Mais

$$\left.\begin{aligned} V - U &= c^2(\sin^2 u - \sin^2 v) = \frac{c^2}{2}(\cos 2v - \cos 2u) = c^2 \sin\theta \sin\omega, \\ V + U &= 2 - c^2(\sin^2 u + \sin^2 v) = 2 - c^2\,\frac{2 - \cos 2u - \cos 2v}{2} \\ &= 1 + b^2 + c^2 \cos\theta \cos\omega; \end{aligned}\right\} \quad . \quad (5)$$

donc

$$c^2 \sin\theta \sin\omega (d\theta^2 + d\omega^2) + 2[1 + b^2 + c^2 \cos\theta \cos\omega] \, d\theta \, d\omega = o,$$

ou

$$c^2 \sin^2\theta \sin^2\omega (d\theta^2 + d\omega^2) + 2[1 + b^2 + c^2 \cos\theta \cos\omega] \sin\theta \sin\omega \, d\theta \, d\omega = o. \quad (6)$$

Soit maintenant :

$$\cos\theta = \frac{x + y}{k}, \qquad \cos\omega = \frac{y - x}{k} : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (7)$$

l'équation (6) devient

$$c^2 [k^2 - (x - y)^2] (dx + dy)^2 + c^2 [k^2 - (x + y)^2] (dx - dy)^2$$
$$+ 2 [(1 + b^2) k^2 + c^2 (y^2 - x^2)] (dy^2 - dx^2) = o;$$

ou, après quelques réductions,

$$(k^2 - c^2 x^2) \, dy^2 + 2c^2 xy \, dx \, dy - (b^2 k^2 + c^2 y^2) \, dx^2 = o. \quad (8)$$

II.

On tire, de cette équation,

$$y = x \frac{dy}{dx} \pm \frac{k}{c} \sqrt{\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 - b^2} . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

Celle-ci ne diffère pas de l'équation de Clairault; en sorte que l'intégrale des équations (8), (9) est

$$y = mx \pm \frac{k}{c} \sqrt{m^2 - b^2}; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

m étant la constante arbitraire.

Les droites représentées par cette équation (10) ont pour enveloppe la courbe déterminée par la solution singulière de l'équation (8); savoir

$$y^2 - b^2x^2 = -\frac{b^2}{c^2}k^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Cette courbe est donc une hyperbole rapportée à ses axes. Représentant par A le demi-axe transverse, on a, au lieu de l'équation (11),

$$y^2 - b^2x^2 = -b^2\mathrm{A}^2 \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

III.

On satisfait à la dernière relation en prenant

$$x = \frac{\mathrm{A}}{\cos\varphi}, \quad y = b\mathrm{A}\,\mathrm{tang}\,\varphi; \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (13)$$

donc l'équation (10) peut être écrite ainsi

$$y \sin\varphi + b\mathrm{A}\cos\varphi = bx. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (14)$$

En effet, si l'on élimine φ entre cette équation (14) et sa différentielle, on trouve

$$\mathrm{A}^2dy^2 - \mathrm{A}^2b^2dx^2 - (xdy - ydx)^2 = o;$$

ce qui ne diffère pas de la relation (8).

IV.

Dans l'intégrale (14), remplaçons x et y par leurs valeurs tirées des équations (5), (7); savoir :

$$x = \frac{1}{2}c\mathrm{A}(\cos\theta - \cos\omega) = c\mathrm{A}\sin u \sin v,$$

$$y = \frac{1}{2}c\mathrm{A}(\cos\theta + \cos\omega) = c\mathrm{A}\cos u \cos v;$$

et nous aurons, pour intégrale algébrique de l'équation (1) :

$$\cos u \cos v \sin \varphi + \frac{b}{c} \cos \varphi = b \sin u \sin v \quad . \quad . \quad (15)$$

Effectivement, si l'on prend les formules

$$tg\, \varphi = - \frac{b}{c \cos \mu}, \sin^2 \varphi = \frac{b^2}{1 - c^2 \sin^2 \mu},$$

d'où résulte l'identité

$$\frac{b^2}{1 - c^2 \sin^2 \mu} = \frac{b^2}{b^2 + c^2 \cos^2 \mu};$$

on retrouve l'équation connue :

$$\cos u \cos v - \sin u \sin v \sqrt{1 - c^2 \sin^2 \mu} = \cos \mu.$$

V.

Je suis arrivé à l'intégrale (15) en cherchant à intégrer

$$(a^2 - x^2)\, dy^2 + 2xy\, dx\, dy + (b^2 - y^2)\, dx^2 = o. \quad (16)$$

Si, afin de rendre cette équation homogène, on pose

$$x = a \cos \theta, \quad y = b \cos \omega,$$

puis

$$\theta = \frac{u + v}{2}, \quad \omega = \frac{u - v}{2},$$

on est conduit à

$$\frac{du}{\sqrt{\cos u}} = \frac{dv}{\sqrt{\cos v}} : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (17)$$

chacun des deux membres est la différentielle d'une fonction elliptique. Mais, si l'on écrit ainsi l'équation (14) :

$$y^2 - 2xy\frac{dy}{dx} - b^2 - (a^2 - x^2)\left(\frac{dy}{dx}\right)^2 = o, \quad . \quad (18)$$

on voit que l'intégrale des équations (16 et 17) est, si l'on veut,

$$\frac{x}{a}\cos\varphi + \frac{y}{b}\sin\varphi = 1 : \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

sous cette forme, on reconnaît que l'équation (16) appartient aux tangentes à une ellipse. Remplaçant x et y par leurs valeurs, on a cette intégrale *algébrique* ou *trigonométrique* de l'équation (17) :

$$\cos\varphi\cos\frac{u+v}{2} + \sin\varphi\cos\frac{u-v}{2} = 1 \quad . \quad . \quad (20)$$

Recherches sur les sulfocyanures des radicaux alcooliques, par M. Louis Henry. correspondant de l'Académie.

§ 2. (1). — *Action de l'iodure de cyanogène sur l'éthylesulfure de mercure.*

On connaît aujourd'hui, grâce surtout aux intéressantes recherches de M. Hoffmann, deux séries, à peu près également riches, de *sulfocyanates* alcooliques isomères, analogues aux *oxycyanates* correspondants.

---

(1) Voir notre première notice, *Bulletins de l'Académie royale de Belgique*, 2e série, t. XXV, p. 659.