This page intentionally left blank.

seulement dans six cas où le brouillard se résolvait en pluie;

9° L'électricité négative n'apparaît pas indifféremment par tous les vents; elle est plus fréquente par les vents d'entre N. et S. du côté de l'O. que par ceux de direction opposée : le rapport du nombre de fois où elle a été obtenue par les premiers à celui qui correspond aux seconds s'est élevé à 5,50 pour Gand, à 5,21 pour Bruxelles, à 1,89 pour Rome, et, d'après les observations de Schübler, à 6,17 pour l'Allemagne;

10° Des rapports analogues aux précédents se déduisent, pour les mêmes vents, des observations faites sur l'électricité positive dans l'état anormal de l'air;

11° Il résulte des observations de Gand et de Bruxelles que l'électricité négative se manifeste, en général, par des hauteurs barométriques moindres que celles relatives à l'électricité positive, cette dernière étant encore considérée dans les circonstances anormales de l'atmosphère.

Note sur les surfaces orthogonales; par M. E. Catalan, associé de l'Académie.

M. Bouquet a montré (*) que les surfaces S, représentées par une équation de la forme

$$F(x, y, z) = \lambda,$$

ne font pas toujours partie d'un *système orthogonal triple.* Autrement dit, à la série des surfaces S ne correspondent

(*) *Journal de Liouville*, t. XI, p. 646.

pas, *nécessairement*, deux autres séries de surfaces S_1, S_2, représentées par

$$F_1(x, y, z) = \lambda_1, \quad F_2(x, y, z) = \lambda_2,$$

et telles, qu'une surface quelconque, prise arbitrairement dans une des séries, coupe orthogonalement toutes les surfaces appartenant aux deux autres groupes.

Récemment, on est allé plus loin dans cette voie *restrictive;* et un jeune géomètre, déjà célèbre, suppose qu'*une surface quelconque ne peut faire partie d'un système triple orthogonal* (*). Quand il a énoncé cette proposition, M. Darboux ignorait probablement l'existence du mémoire (**) dans lequel j'ai établi, implicitement, le théorème contraire. Il n'est donc peut-être pas inutile de revenir sur ce théorème, en y insistant un peu plus que la première fois.

I.

Commençons par rappeler une définition et quelques théorèmes (***).

« *Définition.* Par un point M, pris sur une surface S, on » élève une normale MM′, ayant une longueur donnée *l*. » Le lieu des points M′ est une surface S′ qui peut être » dite *parallèle* à S. »

« THÉORÈME. *Si une surface* S′ *est parallèle à la sur-* » *face* S, *réciproquement celle-ci est parallèle à* S′.

(*) *Annales de l'École normale*, t. II, p. 59.

(**) *Académie royale de Belgique.* — Mémoires cour., t. XXXII, p. 15.

(***) Les passages guillemetés sont extraits du mémoire cité.

» THÉORÈME. *Les surfaces parallèles à une surface déve-*
» *loppable sont développables.*

» THÉORÈME. *Des surfaces parallèles* S, S′, S″, ... *appar-*
» *tiennent toujours à un système orthogonal.* »

COROLLAIRE I. — *Toute surface fait partie d'un système triple orthogonal.*

En effet, quelle que soit une surface donnée, S, on peut construire une infinité de surfaces S′ S″, . . . parallèles à S.

COROLLAIRE II. — *Le nombre des systèmes orthogonaux triples est infini* (*).

II.

On connaît peu de systèmes orthogonaux, sans doute à cause des difficultés que présente la recherche de l'équation des surfaces parallèles à une surface donnée S. Par exemple, on n'a pas encore, paraît-il, *écrit* l'équation des surfaces parallèles à l'ellipsoïde. M. Cayley, lui-même, a reculé devant ce travail (**). Dans le mémoire cité plus haut, j'indique, sans effectuer les calculs, le système triple déterminé par des *tores elliptiques parallèles.* Pour compléter la présente note, je chercherai successivement :

(*) Dans un très-beau mémoire sur les surfaces orthogonales (*Journal de Liouville*, t. XII, p. 242), M. Serret a émis, sous forme dubitative, cette opinion : *Le nombre des surfaces susceptibles de faire partie d'un système triple pourrait bien être assez limité.* On voit que l'hypothèse de ce géomètre ne s'est pas realisée.

(**) *Annali di matematica*, t. III, p. 345.

1° *L'équation des tores elliptiques* S, S′, S″, ... *enveloppes de sphères dont les centres parcourent une ellipse* E *donnée;*

2° *L'équation des plans* $\Sigma_1, \Sigma'_1, \Sigma''_1, \ldots$ *normaux à cette ellipse* (*);

3° *L'équation des surfaces développables* $\Sigma_2, \Sigma'_2, \Sigma''_2, \ldots$ *orthogonales à* S, S′, S″, ... *et à* $\Sigma_1, \Sigma'_1, \Sigma''_1 \ldots$

III.

Équation des tores elliptiques.

Soit une ellipse E, déterminée par les équations

$$a^2y^2 + b^2x^2 = a^2b^2 \ (1), \quad z = 0 \ (2).$$

Si le centre d'une sphère s décrit E, le *tore elliptique* S, enveloppe de s, ne diffère pas de la surface qui serait engendrée par la circonférence c du grand cercle dont le plan est normal à E (**). Dans ce mouvement, un point quelconque de c engendre une *toroïde* T, dont l'équation est (***)

$$(AB - 9C)^2 = 4\,(A^2 + 3B)\,(B^2 + 3AC) \ (A),$$

en supposant

$$\left.\begin{aligned} A &= x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2, \\ B &= a^2y^2 + b^2x^2 - a^2k^2 - b^2k^2 - a^2b^2, \\ C &= a^2b^2k^2. \end{aligned}\right\} \ (3)$$

(*) Mémoire cité, p. 18.

(**) Idem.

(***) *Nouvelles annales de mathématiques*, t. III, p. 555.

D'ailleurs $k^2 = \lambda^2 - z^2$, λ désignant le rayon de la sphère; donc les tores elliptiques S, S′, S″, ... sont représentés par l'équation (A), dans laquelle

$$\left.\begin{aligned} A &= x^2 + y^2 + z^2 - a^2 - b^2 - \lambda^2, \\ B &= a^2y^2 + b^2x^2 + (a^2 + b^2)z^2 - (a^2 + b^2)\lambda^2 + a^2b^2, \\ C &= a^2b^2(\lambda^2 - z^2). \end{aligned}\right\} \quad (4)$$

IV.

Équation des plans normaux.

Cette équation est

$$y = mx + \frac{(a^2 - b^2)m}{\sqrt{a^2 + b^2m^2}},$$

ou sous une forme plus symétrique,

$$(x \sin\mu - y\cos\mu)^2 (a^2\cos^2\mu + b^2\sin^2\mu) = (a^2 - b^2)^2 \sin^2\mu\cos^2\mu. \quad (B)$$

V.

Équation des développables Σ.

Chacune de ces surfaces est engendrée par une droite normale à l'ellipse E et à la toroïde T; d'où il résulte que Σ_2 est une *surface à pente constante, dont les lignes de niveau sont des toroïdes* (*). Si ν est l'angle de la génératrice avec l'axe des z, on a

$$k = z \operatorname{tg} \nu.$$

(*) Mémoire cité, p. 19.

Ainsi, l'équation cherchée est encore

$$(AB - 9C)^2 = 4\,(A^2 + 3B)\,(B^2 + 3AC) \quad (A),$$

pourvu que

$$\left.\begin{aligned} A &= x^2 + y^2 - z^2\,\mathrm{tg}^2\nu - a^2 - a^2, \\ B &= a^2y^2 + b^2x^2 - (a^2 + b^2)\,z^2\,\mathrm{tg}^2\nu - a^2b^2, \\ C &= a^2b^2\,z^2\,\mathrm{tg}^2\nu. \end{aligned}\right\} \quad (5)$$

VI.

Autres systèmes orthogonaux.

Des *recherches sur la surface des ondes,* entreprises depuis longtemps, et que j'espère avoir bientôt l'honneur de communiquer à l'Académie, prouvent qu'*à un système quelconque de surfaces parallèles* S, *correspond un autre système de surfaces parallèles* S_1. Si la surface S est un tore elliptique, enveloppe d'une sphère *s*, la surface S_1 peut être ainsi définie :

D'un point quelconque m *de l'ellipse* E, *comme centre, avec un rayon* λ *égal au rayon de la spère* s, *décrivez une circonférence dans le plan de l'ellipse, et faites-la tourner autour du diamètre perpendiculaire à celui qui passe en* m, *de manière à engendrer un tore* t : *la surface* S_1 *est l'enveloppe de ce tore.*

Les surfaces S_1, *parallèles entre elles*, déterminent deux séries de surfaces développables Σ_1 et Σ_2; et ces trois séries de surfaces constituent un nouveau système orthogonal.

Liége, 3 juin 1868.