This page intentionally left blank.

Application d'un problème de géométrie à une question d'analyse indéterminée; par M. E. Catalan, associé de l'Académie.

I. La *Toroïde*, c'est-à-dire la *parallèle à l'ellipse,* a pour équation (*) :

$$\begin{aligned}&(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^2(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^2\\&+4a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)^3\\&+4(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)^3\\&+18a^2b^2k^2(x^2+y^2-a^2-b^2-k^2)\\&(a^2y^2+b^2x^2-a^2k^2-b^2k^2-a^2b^2)-27a^4b^4k^4=0 \quad (1);\end{aligned}$$

k désignant la distance comprise entre les deux courbes, comptée sur la normale commune.

II. Si l'on suppose $b=a$, $x^2+y^2=u^2$, on réduit l'équation (1) à :

$$\begin{aligned}&(u^2-2a^2-k^2)^2(u^2-a^2-2k^2)^2+4k^2(u^2-2a^2-k^2)^3\\&+4a^2(u^2-2k^2-a^2)^3\\&+18a^2k^2(u^2-2a^2-k^2)(u^2-a^2-2k^2)\\&-27a^4k^4=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (2);\end{aligned}$$

ou, en posant $u^2-a^2-k^2=t^2$, à

$$\begin{aligned}&t^8+2(a^2+k^2)t^6+(a^2-k^2)^2t^4-8a^2k^2(a^2+k^2)t^2\\&-4a^2k^2(a^2+k^2)^2=0 \quad \ldots\ldots\ldots\ldots \quad (3).\end{aligned}$$

III. Lorsque $b=a$, l'ellipse donnée se change en un cercle, et la toroïde se réduit au système de deux cercles,

(*) *Nouvelles Annales de mathématiques*, t. III, p. 553.

concentriques avec le premier, et dont les rayons sont $u = a \pm k$: le premier membre de l'équation (3) est donc divisible par $(t^2 + 2ak)(t^2 - 2ak)$. Si l'on effectue la division, on trouve pour quotient $(t^2 + a^2 + k^2)^2$, c'est-à-dire u^4. Conséquemment, l'équation (2) est vérifiée par $u^2 = 0$; ce qui prouve que *l'on a, identiquement :*

$$[(2a^2 + k^2)(a^2 + 2k^2) + 9a^2 k^2]^2$$
$$= 4k^2(2a^2 + k^2)^3 + 4a^2(a^2 + 2k^2)^3 + 108\, a^4 k^4;$$

ou

$$(a^4 + 7a^2k^2 + k^4)^2 = k^2(2a^2 + k^2)^3 + a^2(a^2 + 2k^2)^3 + 27\, a^4 k^4;$$

ou encore, en posant

$$a^2 = \alpha^3,\ k^2 = \beta^3 :$$

$$(\alpha^6 + 7\alpha^3\beta^3 + \beta^6)^2 = (\alpha^4 + 2\alpha\beta^3)^3 + (\beta^4 + 2\beta\alpha^3)^3 + (3\alpha^2\beta^2)^3 \quad (4).$$

IV. Cette identité (4) fait connaître une infinité de solutions rationnelles de l'équation

$$x^3 + y^3 + z^3 = u^2. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (5).$$

Par exemple :

1° $\alpha = 1, \beta = 1, x = 3, y = 3, z = 3, u = 9$;
2° $\alpha = 2, \beta = 1, x = 17, y = 20, z = 12, u = 121$;
3° $\alpha = 2, \beta = 5, x = 705, y = 516, z = 3\,000, u = 22\,689$.

V. Cette même identité (4) ne donne pas *toutes* les solutions de l'équation (5); ainsi, l'on n'en pourrait tirer la solution connue :

$$1^3 + 2^3 + 3^3 = 6^2.$$

—