



<http://www.biodiversitylibrary.org/>

**Bulletins de l'Académie royale des sciences, des lettres et
des beaux-arts de Belgique.**

Bruxelles.

<http://www.biodiversitylibrary.org/bibliography/5550>

ser.2:t.22 (1866): <http://www.biodiversitylibrary.org/item/111247>

Article/Chapter Title: Application d'un problème de géométrie à une
question d'analyse indéterminée

Author(s): Eugène Catalan

Page(s): Page 29, Page 30

Contributed by: Missouri Botanical Garden, Peter H. Raven Library

Sponsored by: Missouri Botanical Garden

Generated 13 November 2015 4:30 AM

<http://www.biodiversitylibrary.org/pdf4/045305400111247>

This page intentionally left blank.

Application d'un problème de géométrie à une question d'analyse indéterminée; par M. E. Catalan, associé de l'Académie.

I. La *Toroïde*, c'est-à-dire la *parallèle à l'ellipse*, a pour équation (*):

$$\begin{aligned} & (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2)^2 (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 - a^2 b^2)^2 \\ & + 4a^2 b^2 k^2 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2)^3 \\ & + 4 (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 - a^2 b^2)^3 \\ & + 18 a^2 b^2 k^2 (x^2 + y^2 - a^2 - b^2 - k^2) \\ & (a^2 y^2 + b^2 x^2 - a^2 k^2 - b^2 k^2 - a^2 b^2) - 27 a^4 b^4 k^4 = 0 \quad (1); \end{aligned}$$

k désignant la distance comprise entre les deux courbes, comptée sur la normale commune.

II. Si l'on suppose $b = a$, $x^2 + y^2 = u^2$, on réduit l'équation (1) à :

$$\begin{aligned} & (u^2 - 2a^2 - k^2)^2 (u^2 - a^2 - 2k^2)^2 + 4k^2 (u^2 - 2a^2 - k^2)^3 \\ & + 4a^2 (u^2 - 2k^2 - a^2)^3 \\ & + 18 a^2 k^2 (u^2 - 2a^2 - k^2) (u^2 - a^2 - 2k^2) \\ & - 27 a^4 k^4 = 0 \quad \dots \dots \dots (2); \end{aligned}$$

ou, en posant $u^2 - a^2 - k^2 = t^2$, à

$$\begin{aligned} & t^8 + 2 (a^2 + k^2) t^6 + (a^2 - k^2)^2 t^4 - 8a^2 k^2 (a^2 + k^2) t^2 \\ & - 4a^2 k^2 (a^2 + k^2)^2 = 0 \quad \dots \dots \dots (3). \end{aligned}$$

III. Lorsque $b = a$, l'ellipse donnée se change en un cercle, et la toroïde se réduit au système de deux cercles,

(*) *Nouvelles Annales de mathématiques*, t. III, p. 555.

concentriques avec le premier, et dont les rayons sont $u = a \pm k$: le premier membre de l'équation (3) est donc divisible par $(t^2 + 2ak)(t^2 - 2ak)$. Si l'on effectue la division, on trouve pour quotient $(t^2 + a^2 + k^2)^2$, c'est-à-dire u^4 . Conséquemment, l'équation (2) est vérifiée par $u^2 = 0$; ce qui prouve que l'on a, identiquement :

$$\begin{aligned} & [(2a^2 + k^2)(a^2 + 2k^2) + 9a^2k^2]^2 \\ & = 4k^2(2a^2 + k^2)^5 + 4a^2(a^2 + 2k^2)^5 + 108a^4k^4; \end{aligned}$$

ou

$$(u^4 + 7a^2k^2 + k^4)^2 = k^2(2a^2 + k^2)^5 + u^2(a^2 + 2k^2)^5 + 27a^4k^4;$$

ou encore, en posant

$$a^2 = \alpha^5, k^2 = \beta^5 :$$

$$(\alpha^6 + 7\alpha^5\beta^5 + \beta^6)^2 = (\alpha^4 + 2\alpha\beta^5)^5 + (\beta^4 + 2\beta\alpha^5)^5 + (3\alpha^2\beta^2)^5 \quad (4).$$

IV. Cette identité (4) fait connaître une infinité de solutions rationnelles de l'équation

$$x^5 + y^5 + z^5 = u^2. \quad \dots \quad (5).$$

Par exemple :

$$1^\circ \alpha = 1, \beta = 1, x = 5, y = 5, z = 5, u = 9;$$

$$2^\circ \alpha = 2, \beta = 1, x = 17, y = 20, z = 12, u = 121;$$

$$3^\circ \alpha = 2, \beta = 5, x = 705, y = 516, z = 5000, u = 22689.$$

V. Cette même identité (4) ne donne pas toutes les solutions de l'équation (5); ainsi, l'on n'en pourrait tirer la solution connue :

$$1^5 + 2^5 + 3^5 = 6^2.$$