This page intentionally left blank.

Lion. Dans la soirée suivante, de huit à neuf heures, il vit avec quelques autres personnes 53 météores. Entre 9 et 10 heures, il en compta 51; mais le ciel se couvrit tellement que les observations furent abandonnées.

J'ai l'espoir d'obtenir encore d'autres documents sur les apparitions de novembre, je les attends de différentes places tellement distantes que les lettres n'ont pas eu le temps de parvenir jusqu'à moi.

Note sur l'intégration d'un système d'équations homogènes; par M. E. Catalan, associé de l'Académie.

I. Pour intégrer les équations simultanées

$$\frac{dx}{P}=\frac{dy}{Q}=\frac{dz}{R}=\frac{du}{S}= \ldots \ldots \qquad (1)$$

dans lesquelles les dénominateurs P, Q, R, S,... sont des fonctions, *homogènes et du premier degré,* des variables x, y, z, u,..., on peut opérer comme il suit :

Chacun des rapports (1) est égal à

$$\frac{\lambda dx+\lambda' dy+\lambda'' dz+\lambda''' du+}{\lambda P+\lambda' Q+\lambda'' R+\lambda''' S+}, \ldots \qquad (2)$$

λ, λ', λ'', λ''',.... étant des facteurs quelconques, indépendants des variables. D'ailleurs, le rapport (2), que l'on peut mettre sous la forme

$$\frac{\lambda dx+\lambda' dy+\lambda'' dz+\lambda''' du+}{Lx+L'y+L''z+L'''u+}, \ldots \qquad (3)$$

se simplifie, si l'on dispose des indéterminées λ, λ' λ'',... de manière que

$$\frac{\lambda}{L}=\frac{\lambda'}{L'}=\frac{\lambda''}{L''}=\frac{\lambda'''}{L'''}=-=\frac{1}{s}, \ldots \qquad (4)$$

s étant une inconnue auxiliaire. En effet, d'après ces dernières égalités, la fraction (3) devient

$$\frac{1}{s}\,\frac{d(\lambda x+\lambda' y+\lambda'' z+\ldots)}{\lambda x+\lambda' y+\lambda'' z+\ldots}=\frac{1}{s}\,d.l(\lambda x+\lambda' y+\lambda'' z+\ldots). \quad (5)$$

II. Pour plus de clarté, supposons que les variables soient au nombre de quatre, auquel cas

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{P}=\mathrm{A}x+\mathrm{B}y+\mathrm{C}z+\mathrm{D}u, \\ \mathrm{Q}=\mathrm{A}'x+\mathrm{B}'y+\mathrm{C}'y+\mathrm{D}'u, \\ \mathrm{R}=\mathrm{A}''x+\mathrm{B}''y+\mathrm{C}''z+\mathrm{D}''u, \\ \mathrm{S}=\mathrm{A}'''x+\mathrm{B}'''y+\mathrm{C}'''z+\mathrm{D}'''u; \end{array}\right\} \ldots \quad (6)$$

$$\left.\begin{array}{l} \mathrm{L}=\lambda\mathrm{A}+\lambda'\mathrm{A}'+\lambda''\mathrm{A}''+\lambda'''\mathrm{A}''', \\ \mathrm{L}'=\lambda\mathrm{B}+\lambda'\mathrm{B}'+\lambda''\mathrm{B}''+\lambda'''\mathrm{B}''', \\ \mathrm{L}''=\lambda\mathrm{C}+\lambda'\mathrm{C}'+\lambda''\mathrm{C}''+\lambda'''\mathrm{C}''', \\ \mathrm{L}'''=\lambda\mathrm{D}+\lambda'\mathrm{D}'+\lambda''\mathrm{D}''+\lambda'''\mathrm{D}'''. \end{array}\right\} \ldots \quad (7)$$

Les équations (4), homogènes en λ, λ', λ'', λ''' donnent, par l'élimination de ces inconnues,

$$\left|\begin{array}{llll} \mathrm{A}-s, & \mathrm{A}', & \mathrm{A}'', & \mathrm{A}''' \\ \mathrm{B}, & \mathrm{B}'-s, & \mathrm{B}'', & \mathrm{B}''' \\ \mathrm{C}, & \mathrm{C}', & \mathrm{C}''-s, & \mathrm{C}''' \\ \mathrm{D}, & \mathrm{D}', & \mathrm{D}'', & \mathrm{D}'''-s \end{array}\right|=0 \ldots \quad (8)$$

En général, le nombre des valeurs de s, tirées de cette équation symbolique, est égal au nombre des variables (*) : dans le cas particulier que nous considérons, il y aura donc

(*) Je laisse de côté le cas où l'équation *caractéristique* (8) aurait des racines égales : il ne saurait offrir de véritables difficultés.

quatre valeurs de s, et, par suite, *quatre* systèmes de valeurs pour les auxiliaires λ, λ', λ'', λ'''.

III. Soient s_1, s_2, s_3, s_4 les racines de l'équation (8); soient λ_1, λ'_1, λ''_1, λ'''_1; λ_2,... les valeurs correspondantes des auxiliaires; nous avons, par la formule (5) :

$$\left.\begin{array}{l}\frac{1}{s_1}d.l(\lambda_1 x+\lambda'_1 y+\lambda''_1 z+\lambda'''_1 u)=\frac{1}{s_2}d.l(\lambda_2 x+\lambda'_2 y+\lambda''_2 z+\lambda'''_2 u)= \\ \frac{1}{s_3}d.l(\lambda_3 x+\lambda'_3 y+\lambda''_3 z+\lambda'''_3 u)=\frac{1}{s_4}d.l(\lambda_4 x+\lambda'_4 y+\lambda''_4 z+\lambda'''_4 u)\end{array}\right\}. \quad (9)$$

Conséquemment, les intégrales des équations (1) sont :

$$\left.\begin{array}{l}\left(\frac{\lambda_1 x+\lambda'_1 y+\lambda''_1 z+\lambda'''_1 u}{k_1}\right)^{\frac{1}{s_1}}=\left(\frac{\lambda_2 x+\lambda'_2 y+\lambda''_2 z+\lambda'''_2 u}{k_2}\right)^{\frac{1}{s_2}} \\ =\left(\frac{\lambda_3 x+\lambda'_3 y+\lambda''_3 z+\lambda'''_3 u}{k_3}\right)^{\frac{1}{s_3}}=\left(\frac{\lambda_4 x+\lambda'_4 y+\lambda''_4 z+\lambda'''_4 u}{k_4}\right)^{\frac{1}{s_4}};\end{array}\right\} (10)$$

k_1, k_2, k_3, k_4 étant *quatre* constantes arbitraires (*).

IV. Comme application, je prendrai les équations

$$\frac{dx}{y}=\frac{dy}{z}=\frac{dz}{u}=\frac{du}{x} \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (11)$$

Il en résulte, pour les équations (4),

$$\frac{\lambda}{\lambda'''}=\frac{\lambda'}{\lambda}=\frac{\lambda''}{\lambda'}=\frac{\lambda'''}{\lambda''}=\frac{1}{s}; \quad . \quad . \quad . \quad (12)$$

(*) Ainsi que cela doit être, ces *quatre* constantes sont réductibles à *trois*; car l'on peut faire

$$k_2^{\frac{1}{s_2}}=\alpha k_1^{\frac{1}{s_1}},\ k_3^{\frac{1}{s_3}}=\beta k_1^{\frac{1}{s_1}},\ k_4^{\frac{1}{s_4}}=\gamma k_1^{\frac{1}{s_1}}.$$

puis, par l'élimination des auxiliaires,

$$s^4 = 1.$$

Conséquemment,

$$s_1 = +1, \quad s_2 = -1, \quad s_3 = +\sqrt{-1}, \quad s_4 = -\sqrt{-1}.$$

On satisfait aux équations (12) par les systèmes de valeurs suivantes :

$$\begin{array}{llll}
s_1 = +1, & \lambda_1 = +1, \lambda'_1 = +1, & \lambda''_1 = +1, \lambda'''_1 = +1; \\
s_2 = -1, & \lambda_2 = +1, \lambda'_2 = -1, & \lambda''_2 = +1, \lambda'''_2 = -1; \\
s_3 = +\sqrt{-1}, & \lambda_3 = +1, \lambda'_3 = -\sqrt{-1}, & \lambda''_3 = -1, \lambda'''_3 = +\sqrt{-1}; \\
s_4 = -\sqrt{-1}, & \lambda_4 = +1, \lambda'_4 = +\sqrt{-1}, & \lambda''_4 = -1, \lambda'''_4 = -\sqrt{-1}.
\end{array}$$

Les équations (10) deviennent donc :

$$\left.\begin{array}{l}
l\dfrac{x+y+z+u}{k_1} = -l\dfrac{x-y+z-u}{k_2} \\
= \sqrt{-1}\, l\dfrac{x-y\sqrt{-1}-z+u\sqrt{-1}}{k_3} \\
= -\sqrt{-1}\, l\dfrac{x+y\sqrt{-1}-z-u\sqrt{-1}}{k_4}
\end{array}\right\}. \quad (13)$$

Pour simplifier ces équations *intégrales*, je suppose :

$$k_1 = 1, \; k_2 = \gamma, \; \frac{1}{k_3} = \alpha + \beta\sqrt{-1}, \; \frac{1}{k_4} = \alpha - \beta\sqrt{-1}.$$

J'obtiens :

$$\begin{array}{l}
l(x+y+z+u) = l\gamma - l(x-y+z-u) \\
= \sqrt{-1}\, l[(x-z)\alpha + (y-u)\beta + (x-z)\beta\sqrt{-1} - (y-u)\alpha\sqrt{-1}] \\
= -\sqrt{-1}\, l[(x-z)\alpha + (y-u)\beta - (x-z)\beta\sqrt{-1} + (y-u)\alpha\sqrt{-1}];
\end{array}$$

puis, en prenant :

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \dfrac{(x-z)\,\alpha + (y-u)\,\beta}{\mathrm{R}}, \sin\varphi = \dfrac{(x-z)\,\beta - (y-u)\,\alpha}{\mathrm{R}}, \\ \mathrm{R}^2 = (\alpha^2 + \beta^2)\,[(x-z)^2 + (y-u)^2] :\end{array}\right\} (14) .$$

$$\left.\begin{array}{l}l(x+y+z+u) = l\gamma - l(x-y+z-u) \\ = \sqrt{-1}\,[l\mathrm{R} + \varphi\sqrt{-1}] = -\sqrt{-1}\,[l\mathrm{R} - \varphi\sqrt{-1}].\end{array}\right\} (15)$$

La dernière équation exige que $\mathrm{R} = 1$; donc

$$l(x+y+z+u) = l\gamma - l(x-y+z-u) = -\varphi. \quad (16)$$

D'ailleurs, si l'on remplace les constantes arbitraires α, β par deux constantes ρ, θ, telles que l'on ait :

$$\alpha = \frac{1}{\rho}\cos\theta,\ \beta = \frac{1}{\rho}\sin\theta,$$

on change les équations (14) en

$$\left.\begin{array}{l}\cos\varphi = \dfrac{(x-z)\cos\theta + (y-u)\sin\theta}{\rho}, \\ \sin\varphi = \dfrac{(x-z)\sin\theta - (y-u)\cos\theta}{\rho},\end{array}\right\} \ .\ .\ (17)$$

$$(x-z)^2 + (y-u)^2 = \rho^2 : \ .\ .\ .\ .\ (18)$$

l'équation (18) est une des intégrales des équations données. Les deux autres intégrales sont, d'après les équations (16) :

$$(x+z)^2 - (y+u)^2 = \gamma \ .\ .\ .\ .\ (19)$$

$$l(x+y+z+u) = -\varphi : \ .\ .\ .\ .\ (20)$$

les constantes arbitraires sont γ, ρ, θ; et la fonction auxiliaire φ est déterminée par les formules (17). Si on les résout, on trouve :

$$\varphi = \theta - \text{arctg.} \frac{y-u}{x-z};$$

en sorte que les intégrales du système (11) sont, finalement :

$$(x-z)^2 + (y-u)^2 = \rho^2, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (18)$$

$$(x+z)^2 - (y+u)^2 = \gamma, \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (19)$$

$$l(x+y+z+u) + \text{arctg.} \frac{y-u}{x-z} = \theta. \quad . \quad . \quad (21)$$

En effet, si l'on différencie ces trois dernières équations et que, dans les différentielles, on remplace dx, dy, dz, du respectivement par y, z, u, x, on trouve des identités.

V. *Remarque.* — Si on voulait intégrer les équations (11) par la méthode ordinaire, on devrait, par exemple, commencer par éliminer y et z. Cette élimination conduit à l'équation du troisième ordre :

$$x^3 \frac{d^3x}{du^3} + 4x^2 \frac{dx}{du} \frac{d^2x}{du^2} + x\left(\frac{dx}{du}\right)^3 = u,$$

qu'il serait peut-être difficile d'intégrer directement. Quoi qu'il en soit, on peut prendre, pour *intégrale* de cette équation, *le système des équations* (18), (19) et (21) : ρ, γ, θ sont les trois constantes arbitraires, tandis que y et z sont alors deux fonctions auxiliaires.