This page intentionally left blank.

Recherches sur les déterminants, *par* M. Catalan, répétiteur à l'École polytechnique, secrétaire de la Société philomatique de Paris, etc.

Divers géomètres, parmi lesquels il suffit de citer MM. Cauchy, Binet, Jacobi et Lebesgue, se sont occupés, à plusieurs reprises, des propriétés nombreuses dont jouissent les fonctions connues sous le nom de *déterminants*. J'ai indiqué aussi quelques-unes de ces propriétés, dans mon *Mémoire sur la transformation des variables dans les intégrales multiples* (*).

Dans le travail que j'ai l'honneur de présenter à l'Académie, je me suis principalement proposé de calculer les valeurs numériques des déterminants, lorsque les coefficients des équations données sont des expressions très-simples, telles que $+1$, -1, 0, etc. Cette recherche m'a obligé de reprendre, sous un point de vue qui me paraît simple et nouveau, l'étude des déterminants. Les considérations dont j'ai fait usage m'ont très-aisément conduit aux principaux théorèmes connus, et à d'autres, qui n'avaient peut-être pas été remarqués. Enfin, la connaissance des valeurs numériques dont je viens de parler, m'a donné quelques intégrales multiples qu'il serait difficile, je pense, de déterminer par d'autres moyens.

1. Je commence par expliquer quelques définitions et quelques notations.

(*) *Mémoires couronnes par l'Académie de Bruxelles*, tome XIV.

Si l'on considère les n équations suivantes,

$$\left.\begin{array}{l} a_1\, x_1 + b_1\, x_2 + c_1\, x_3 + \ldots + k_1\, x_{n-1} + l_1\, x_n = u_1, \\ a_2\, x_2 + b_2\, x_2 + c_2\, x_3 + \ldots + k_2\, x_{n-1} + l_2\, x_n = u_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_n\, x_1 + b_n\, x_2 + c_n\, x_3 + \ldots + k_n\, x_{n-1} + l_n\, x_n = u_n, \end{array}\right\} \quad (1)$$

le dénominateur commun des valeurs des inconnues x_1, x_2, x_3, ... x_n, est ce qu'on appelle le *déterminant* des n^2 quantités

$$\left.\begin{array}{l} a_1,\, b_1,\, c_1,\, \ldots\, k_1,\, l_1, \\ a_2,\, b_2,\, c_2,\, \ldots\, k_2,\, l_2, \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ a_n,\, b_n,\, c_n,\, \ldots\, k_n,\, l_n, \end{array}\right\} \quad \ldots\ldots \quad (2)$$

Ce déterminant, que l'on peut former de différentes manières, a un signe qui dépend de celui que l'on adopte pour le terme $a_1\, b_2\, c_3 \ldots k_{n-1}\, l_n$. Afin d'éviter toute ambiguité, nous supposerons que ce terme, que l'on pourrait nommer *terme caractérisque,* est pris positivement, et qu'il est écrit le premier.

2. Pour abréger, je représenterai généralement par A, B, C, ... l'ensemble des lettres contenues dans la première, la seconde, la troisième, ... ligne d'un système tel que (2); de façon qu'un pareil système pourra être représenté par

$$\begin{array}{c} \mathrm{A}, \\ \mathrm{B}, \\ \mathrm{C}, \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot\,, \end{array}$$

ou encore par (A, B, C, ...). Le déterminant de ce système pourra, d'une manière analogue, être représenté par dét. (A, B, C, ...).

3. On sait que si l'on change l'ordre de deux des colonnes horizontales du système (2), le déterminant change de signe; d'où l'on conclut que si l'on remplace une ligne par une autre, sans opérer le changement réciproque, le déterminant devient zéro. Ces deux propriétés sont exprimées commodément par

$$\text{dét.}\,(B,\ A,\ C,\ \ldots) = -\,\text{dét.}\,(A,\ B,\ C,\ \ldots),$$
$$\text{et dét.}\,(A,\ A,\ C,\ \ldots) = 0.$$

4. *Théorème. Soient les trois systèmes*

$$\left.\begin{matrix} A, \\ B; \end{matrix}\right| \left.\begin{matrix} M, \\ B; \end{matrix}\right| \begin{matrix} A + M, \\ B; \end{matrix}$$

on aura, entre leurs déterminants, la relation

$$\text{dét.}\,(A + M,\ B) = \text{dét.}\,(A,\ B) + \text{dét.}\,(M,\ B).$$

Démonstration. Un terme quelconque du premier déterminant provient de la multiplication d'un terme de B par un terme de A + M; or, celui-ci est égal à la *somme* des termes qui lui correspondent dans A et dans M; et, d'un autre côté, ces deux termes, multipliés respectivement par le terme de B dont il s'agit, ont formé, l'un un terme du déterminant de (A, B), l'autre un terme du déterminant de (M, B); donc, etc.

5. Ce théorème très-simple paraît fondamental dans la théorie qui nous occupe; il conduit immédiatement aux corollaires suivants :

1° $\text{dét.}\,(A+M,\ B,\ C,\ \ldots) = \text{dét.}\,(A,\ B,\ C,\ \ldots) + \text{dét.}\,(M,\ B,\ C,\ \ldots)$.

2° $\text{dét.}\,(A+M,\ B+N) = \text{dét.}\,(A,\ B) + \text{dét.}\,(A,\ N) + \text{dét.}\,(M,\ B) + \text{dét.}\,(M,\ N)$.

3° $\text{dét.}\,(A+M,\ B+N,\ C+P) = \text{dét.}\,(A,\ B,\ C) + \text{dét.}\,(M,\ B,\ C) + \text{etc.}$

6. Considérons un système semblable au système (2), et décomposons chaque ligne horizontale en deux parties, dont la première contienne p lettres $a, b, c, \ldots f$, et la seconde, $n-p$ lettres $g, h, \ldots k, l$. Nous pourrons représenter ce système par

$$\begin{array}{c} A_1 + M_1, \\ A_2 + M_2, \\ \cdots\cdots \\ A_n + M_n. \end{array}$$

D'après le corollaire 3°, étendu à un nombre quelconque d'équations, le déterminant sera donné par la formule

$$\begin{aligned} \Delta = {} & \text{dét.}\,(A_1, A_2, \ldots A_n) + \Sigma\,\text{dét.}\,(A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, M_n) \\ & + \Sigma\,\text{dét.}\,(A_1, A_2, \ldots A_{n-2}, M_{n-1}, M_n) + \ldots \\ & + \Sigma\,\text{dét.}\,(A_1, A_2, \ldots A_p, M_{p+1}, M_{p+2}, \ldots M_n) + \ldots \\ & + \text{dét.}\,(M_1, M_2, \ldots M_n). \end{aligned}$$

Nous représentons par Σ dét. $(A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, M_n)$ la quantité

$$\begin{gathered} \text{dét.}\,(A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, M_n) + \text{dét.}\,(A_1, A_2, \ldots M_{n-1}, A_n) + \ldots \\ + \text{dét.}\,(M_1, A_2, \ldots A_n)\,; \end{gathered}$$

et ainsi des autres.

Observons maintenant que si un système d'équations du premier degré n'est pas complétement déterminé, le dénominateur des valeurs des inconnues sera égal à zéro. Or, le système $(A_1, A_2, \ldots A_n)$ répond à n équations entre p inconnues ; le système $(A_1, A_2, \ldots A_{n-1}, M_n)$ répond à $n-1$ équations entre p inconnues, etc. Tous ces systèmes ont donc des déterminants nuls, et la formule se réduit à

$$\Delta = \Sigma\,\text{dét.}\,(A_1, A_2, \ldots A_p, M_{p+1}, M_{p+2}, \ldots M_n). \qquad (3)$$

Dans le second membre, considérons en particulier le déterminant du système $(A_1, A_2, \ldots A_p, M_{p+1}, \ldots M_n)$. Ce déterminant contient les termes

$$+ a_1 b_2 \ldots f_p g_{p+1} \ldots k_{n-1} l_n - a_1 b_2 \ldots f_p g_{p+1} \ldots l_{n-1} k_n + \ldots;$$

c'est-à-dire qu'il renferme le produit de $a_1 b_2 \ldots f_p$ par la quantité

$$g_{p+1} \ldots k_{n-1} l_n - g_{p+1} \ldots l_{n-1} k_n + \ldots,$$

laquelle est égale au déterminant du système $(M_{p+1}, M_{p+2}, \ldots M_n)$. Une seconde partie de ce déterminant sera

$$- b_1 a_2 \ldots f_p \text{ dét.} (M_{p+1}, \ldots M_n); \text{ etc.}$$

Il résulte de cette observation que

$$\left.\begin{aligned} &\text{dét.} (A_1, A_2, \ldots A_p, M_{p+1}, M_{p+2}, \ldots M_n) \\ &= \text{dét.} (A_1, A_2, \ldots A_p) \text{ dét.} (M_{p+1}, M_{p+2}, \ldots M_n). \end{aligned}\right\} (4)$$

Par suite, l'équation (3) peut être mise sous la forme

$$\left.\begin{aligned} \Delta = &\text{ dét.} (A_1, A_2, \ldots A_p) \text{ dét.} (M_{p+1}, M_{p+2}, \ldots M_n) \\ &- \text{dét.} (A_1, A_2, \ldots A_{p-1}, A_{p+1}) \text{ dét.} (M_p, M_{p+2}, \ldots M_n) \\ &+ \text{dét.} (A_1, A_2, \ldots A_{p-2}, A_p, A_{p+1}) \text{ dét.} (M_{p-1}, M_{p+2}, \ldots M_n) \\ &- \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots; \end{aligned}\right\} (5)$$

en observant que, d'après le n° 3, un terme du second membre doit avoir le signe + ou le signe —, suivant que les indices présentent un nombre *pair* ou un nombre *impair d'inversions numériques.*

7. Pour appliquer le théorème précédent, supposons d'abord $p = 1$: alors les suites $A_1, A_2, \ldots A_n$ se réduisent à leurs premiers termes $a_1, a_2, \ldots a_n$, et l'équation (5) devient

$$\left.\begin{aligned} \Delta = a_1 &\text{ dét.} (M_2, M_3, \ldots M_n) - a_2 \text{ dét.} (M_1, M_3, \ldots M_n) \ldots \\ &\pm a_n \text{ dét.} (M_1, M_2, \ldots M_{n-1}), \end{aligned}\right\} (6)$$

le signe + répondant au cas de n impair.

8. Supposons ensuite $p=2$, de manière que les quantités $A_1, A_2, \ldots A_n$ contiennent les lettres a et b. L'équation (5) étant développée, donnera

$$\left.\begin{aligned}\Delta=&(a_1b_2-a_2b_1)\text{dét.}(M_3,M_4,\ldots M_n)-(a_1b_3-a_3b_1)\text{dét.}(M_2,M_4,\ldots M_n)+\ldots\\&\qquad\pm(a_1b_n-a_nb_1)\text{dét.}(M_2,M_3,\ldots M_{n-1})\\&+(a_2b_3-a_3b_2)\text{dét.}(M_1,M_4,\ldots M_n)-(a_2b_4-a_4b_2)\text{dét.}(M_1,M_3,\ldots M_n)+\ldots\\&\qquad\mp(a_2b_n-a_nb_2)\text{dét.}(M_1,M_3,\ldots M_{n-1})\\&+\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\&\qquad+(a_{n-1}b_n-a_nb_{n-1})\text{dét.}(M_1,M_2,\ldots M_{n-2}).\end{aligned}\right\}(7)$$

Si par exemple $n=4$, cette formule donnera, pour le déterminant du système

$$\begin{matrix}a_1, & b_1, & c_1, & d_1,\\ a_2, & b_2, & c_2, & d_2,\\ a_3, & b_3, & c_3, & d_3,\\ a_4, & b_4, & c_4, & d_4;\end{matrix}$$

$$\begin{aligned}\Delta=&(a_1b_2-a_2b_1)(c_3d_4-c_4d_3)-(a_1b_3-a_3b_1)(c_2d_4-c_4d_2)\\&+(a_1b_4-a_4b_1)(c_2d_3-c_3d_2)+(a_2b_3-a_3b_2)(c_1d_4-c_4d_1)\\&-(a_2b_4-a_4b_2)(c_1d_3-c_3d_1)+(a_3b_4-a_4b_3)(c_1d_2-c_2d_1);\end{aligned}$$

ce qui est exact.

9. Supposons encore, dans la formule (5), $p=n-1$; auquel cas les suites $M_1, M_2, \ldots M_n$ se réduisent à $l_1, l_2, \ldots l_n$, nous aurons

$$\left.\begin{aligned}\Delta=&l_n\,\text{dét.}(A_1,A_2,\ldots A_{n-1})-l_{n-1}\,\text{dét.}(A_1,A_2,\ldots A_{n-2},A_n)+\ldots\\&\qquad\pm l_1\,\text{dét.}(A_2,A_3,\ldots A_n).\end{aligned}\right\}(8)$$

Cette nouvelle formule, qui permet évidemment de passer du déterminant de $n-1$ lettres au déterminant de n lettres, ne diffère que par la notation, de celle que j'ai donnée dans le mémoire déjà cité.

10. Soient les deux équations

$$\begin{aligned}a_1x_1+b_1x_2&=u_1,\\a_2x_2+b_2x_2&=u_2.\end{aligned}$$

Supposons qu'on les remplace par deux nouvelles équations, dont les premiers membres soient

$$(\alpha_1 a_1 + \alpha_2 a_2) x_1 + (\alpha_1 b_1 + \alpha_2 b_2) x_2,$$
$$(\beta_1 a_1 + \beta_2 a_2) x_1 + (\beta_1 b_1 + \beta_2 b_2) x_2.$$

On pourra exprimer facilement le déterminant Δ du nouveau système, à l'aide des déterminants D et δ des systèmes

$$\begin{array}{l|l} a_1,\ b_1 & \alpha_1,\ \beta_1 \\ a_2,\ b_2 & \alpha_2,\ \beta_2. \end{array}$$

En effet, si nous représentons par (A_1, A_2) le premier de ces deux systèmes, nous aurons

$$\begin{aligned} \Delta &= \text{dét.}\,(\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2,\ \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2) \\ &= \alpha_1 \beta_1\ \text{dét.}\,(A_1, A_1) + \alpha_1 \beta_2\ \text{dét.}\,(A_1, A_2) \\ &+ \alpha_2 \beta_1\ \text{dét.}\,(A_2, A_1) + \alpha_2 \beta_2\ \text{dét.}\,(A_2, A_2). \end{aligned}$$

Le premier et le dernier de ces quatre déterminants sont nuls; et dét. $(A_2, A_1) = -$ dét. $(A_1, A_2) = -$ D; donc

$$\Delta = (\alpha_1 \beta_2 - \alpha_1 \beta_1)\,D = \delta.\,D.$$

11. Supposons encore qu'ayant le système représenté par (A_1, A_2, A_3) et le système

$$\begin{array}{l} \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1, \\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2, \\ \alpha_3,\ \beta_3,\ \gamma_3, \end{array}$$

nous formions le système résultant

$$\begin{array}{l} \alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2 + \alpha_3 A_3, \\ \beta_1 A_1 + \beta_2 A_2 + \beta_3 A_3, \\ \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \gamma_3 A_3. \end{array}$$

Le déterminant de ce nouveau système sera, en négligeant les déterminants nuls :

$$\begin{aligned}\Delta = &\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 \,\text{dét.}\,(A_1, A_2, A_3) + \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 \,\text{dét.}\,(A_1, A_3, A_2)\\ &+ \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 \,\text{dét.}\,(A_2, A_3, A_1) + \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 \,\text{dét.}\,(A_2, A_1, A_3)\\ &+ \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 \,\text{dét.}\,(A_3, A_1, A_2) + \alpha_3 \beta_2 \gamma_1 \,\text{dét.}\,(A_3, A_2, A_1).\end{aligned}$$

D'ailleurs, tous les déterminants qui entrent dans le second membre de cette formule sont égaux à $+$ D ou à $-$ D, selon que les indices présentent un nombre *pair* ou un nombre *impair* d'inversions; donc

$$\Delta = (\alpha_1 \beta_2 \gamma_3 - \alpha_1 \beta_3 \gamma_2 + \alpha_2 \beta_3 \gamma_1 - \alpha_2 \beta_1 \gamma_3 + \alpha_3 \beta_1 \gamma_2 - \alpha_3 \beta_2 \gamma_1)\,D.$$

La quantité entre parenthèses contient tous les termes qui doivent entrer dans δ; de plus, ces termes sont positifs ou négatifs, selon que le nombre des inversions est pair ou impair; donc cette quantité est précisément égale à δ; et conséquemment

$$\Delta = \delta.\,D.$$

12. Le même mode de démonstration s'étendrait évidemment à des systèmes composés d'un nombre quelconque de lettres : nous pouvons donc établir le théorème suivant, démontré d'abord par M. Cauchy (*) :

« si l'on a deux systèmes de quantités

$$\left.\begin{array}{l} a_1,\ b_1,\ c_1,\ \ldots\ l_1,\\ a_2,\ b_2,\ c_2,\ \ldots\ l_2,\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\\ a_n,\ b_n,\ c_n,\ \ldots\ l_n; \end{array}\right| \begin{array}{l} \alpha_1,\ \beta_1,\ \gamma_1,\ \ldots\ \lambda_1,\\ \alpha_2,\ \beta_2,\ \gamma_2,\ \ldots\ \lambda_2,\\ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\ \ \cdot\\ \alpha_n,\ \beta_n,\ \gamma_n,\ \ldots\ \lambda_n; \end{array}$$

(*) *Journal de l'École polytechnique*, 17e cahier.

» et si, à l'aide de ces quantités, on forme le système

$$\begin{array}{l}
\alpha_1 a_1+\alpha_2 a_2+\ldots+\alpha_n a_n,\ \alpha_1 b_1+\alpha_2 b_2+\ldots+\alpha_n b_n,\ldots \alpha_1 l_1+\alpha_2 l_2+\ldots+\alpha_n l_n,\\
\beta_1 a_1+\beta_2 a_2+\ldots+\beta_n a_n,\ \beta_1 b_1+\beta_2 b_2+\ldots+\beta_n b_n,\ldots \beta_1 l_1+\beta_2 l_2+\ldots+\beta_n l_n,\\
\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\lambda_1 a_1+\lambda_2 a_2+\ldots+\lambda_n a_n,\ \lambda_1 b_1+\lambda_2 b_2+\ldots+\lambda_n b_n,\ldots \lambda_1 l_1+\lambda_2 l_2+\ldots+\lambda_n l_n,
\end{array}$$

le déterminant du troisième système sera égal au produit des déterminants des deux autres systèmes. »

13. Supposons maintenant qu'étant donné le système

$$\left.\begin{array}{l} A_1,\\ A_2,\\ \cdot\\ \cdot\\ \cdot\\ A_n, \end{array}\right\} \ldots\ldots\ldots\ldots (A)$$

dont le déterminant est Δ, on ait combiné par voie d'addition et de soustraction les équations dont les premiers membres sont représentés par A_1, A_2, ... A_n; et, par exemple, qu'on ait déduit du système (A) le système suivant

$$\left.\begin{array}{l} A_1+A_2+\ldots+A_n,\\ A_1 \quad -A_2,\\ A_2 \quad -A_3,\\ \cdot\quad\cdot\quad\cdot\quad\cdot\\ A_{n-1}-A_n, \end{array}\right\} \ldots\ldots (B)$$

dont la considération nous sera utile plus loin. Soit Δ' le déterminant de ce nouveau système : d'après les n^os^ (3) et (4), nous aurons,

$$\begin{array}{l}\Delta'=\text{dét.}(A_1,-A_2,-A_3,\ldots,-A_n)+\text{dét.}(A_2,A_1,-A_3,-A_4,\ldots-A_n)\\ \quad+\text{dét.}(A_3,A_1,A_2,-A_4,\ldots-A_n)+\ldots.+\text{dét.}(A_n,A_1,A_2,\ldots A_{n-1}).\end{array}$$

On sait que si l'on change les signes des termes d'une colonne horizontale, le déterminant change de signe; donc

$$\Delta' = (-1)^{n-1} \text{dét.}(A_1, A_2, \ldots A_n) + (-1)^{n-2} \text{dét.}(A_2, A_1, A_3, \ldots A_n)$$
$$+ (-1)^{n-3} \text{dét.}(A_3, A_1, A_2, A_4, \ldots A_n) + \ldots\ldots$$
$$+ (-1) \text{dét.}(A_{n-1}, A_1, A_2, \ldots A_{n-2}, A_n) + \text{dét.}(A_n, A_1, A_2, \ldots A_{n-1}).$$

Dans la première parenthèse, il n'y a pas d'inversion; dans la seconde, il y a une inversion, etc.; donc

$$\Delta' = (-1)^{n-1} n \Delta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (9)$$

14. Si la première ligne du système (B) avait renfermé seulement p des quantités A_1, A_2, ... A_n, nous aurions trouvé, pour le déterminant de ce système,

$$\Delta' = (-1)^{n-1} p\Delta. \quad . \quad . \quad . \quad . \quad . \quad (10)$$

15. Pour donner une application des théorèmes (9) et (10), supposons que le système (B) se réduise à

$$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 + \ldots + x_p = u_1,$$
$$\begin{aligned} x_1 \quad - x_2 &= u_2, \\ x_2 \quad - x_3 &= u_3, \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad &\cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ x_{n-1} - x_n &= u_n; \end{aligned}$$

alors, comme le déterminant Δ se réduit évidemment à l'unité, nous aurons

$$\Delta' = (-1)^{n-1} p.$$

Ainsi, en particulier, le déterminant relatif aux équations

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + x_3 &= u_1, \\ x_1 - x_2 \quad &= u_2, \\ x_2 - x_3 \quad &= u_3, \\ x_3 - x_4 \quad &= u_4, \\ x_4 - x_5 \quad &= u_5, \end{aligned}$$

sera

$$\Delta' = 3.$$

16. Nous avons supposé tout à l'heure que les équations représentées par A_1, A_2, A_3, ... etc... étaient combinées par voie de soustraction, dans l'ordre le plus naturel, c'est-à-dire, que la seconde était retranchée de la première, la troisième retranchée de la seconde, etc. Mais comme il est permis d'écrire d'abord, dans un ordre quelconque, les équations proposées, il s'ensuit que le déterminant Δ' de tout système déduit du système primitif par voie de soustraction, sera toujours exprimé par $\pm p\Delta$, p étant le nombre des équations qui ont été ajoutées. Il est d'ailleurs bien entendu que les équations doivent être combinées de telle sorte, que le système résultant ne soit pas indéterminé.

Si, par exemple, le système proposé est $(A_1, A_2, A_3, A_4, A_5, A_6)$, et que l'on en déduise les équations représentées par

$$\begin{gathered} A_2 + A_5 + A_6, \\ A_1 - A_4, \\ A_4 - A_2, \\ A_2 - A_3, \\ A_4 - A_5, \\ A_5 - A_6; \end{gathered}$$

on aura

$$\Delta' = \pm 3\Delta.$$

17. Afin de sortir de ces généralités, considérons les équations

$$\begin{array}{c} -x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = u_1, \\ x_1 - x_2 + x_3 + \ldots + x_n = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_1 + x_2 + x_3 + \ldots - x_n = u_n. \end{array}$$

En prenant pour inconnue auxiliaire la somme s de toutes les inconnues, on trouve

$$s = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{n-2},$$

et

$$x_1 = \frac{s - u_1}{2}, \; x_2 = \frac{s - u_2}{2}, \ldots \; x_n = \frac{s - u_n}{2}.$$

Pour obtenir le déterminant Δ, je remplace d'abord les équations données par les suivantes :

$$\begin{array}{l}
(n-2)x_1 + (n-2)x_2 + \ldots + (n-2)x_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n, \\
\qquad -2x_1 + 2x_2 \qquad = u_1 - u_2, \\
\qquad -2x_2 + 2x_3 \qquad = u_2 - u_3, \\
\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots \\
\qquad -2x_{n-1} + 2x_n = u_{n-1} - u_n.
\end{array}$$

D'après ce qui précède, le déterminant Δ' du nouveau système sera $(-1)^{n-1} n\Delta$.

Mais, d'un autre côté, en comparant Δ' au déterminant Δ'' du système

$$\begin{array}{l}
x_1 + x_2 + x_3 + \ldots + x_n = \ldots \\
\qquad -x_1 + x_2 \qquad = \ldots \\
\qquad -x_2 + x_3 \qquad = \ldots \\
\qquad \cdots\cdots\cdots \\
\qquad -x_{n-1} + x_n \quad = \ldots,
\end{array}$$

on a $\Delta' = (n-2)\, 2^{n-1}\, \Delta''$. Enfin, d'après le n° 13, et en observant que les quantités $A_1 - A_2$, $A_2 - A_3$, ... ont ici changé de signe,

$$\Delta'' = n.$$

On déduit, de ces diverses formules,

$$\Delta = (n-2)(-2)^{n-1}.$$

18. Soient, plus généralement, les équations

$$\begin{array}{l} -x_1 - x_2 - \ldots - x_p + x_{p+1} + \ldots + x_n = u_1, \\ x_1 - x_2 - \ldots - x_p - x_{p+1} + \ldots + x_n = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ -x_1 - x_2 - \ldots + x_p + x_{p+1} + \ldots - x_n = u_n, \end{array}$$

dans lesquelles nous supposerons $p < \frac{1}{2}n$: si p était égal à $\frac{1}{2}n$, ces équations seraient évidemment indéterminées. Pour obtenir le déterminant Δ, formons la somme de ces équations et retranchons-les deux à deux; nous aurons

$$\begin{array}{l} (n-2p)x_1 + (n-2p)x_2 + \ldots + (n-2p)x_n = \ldots \\ \qquad -2x_1 \quad + 2x_{p+1} = \ldots \\ \qquad -2x_2 \quad + 2x_{p+2} = \ldots \\ \qquad \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \qquad +2x_{p-1} - 2x_{n-1} = \ldots; \end{array}$$

et nous aurons, par les mêmes considérations que ci-dessus,

$$\Delta' = n(-1)^{n-1}\Delta = n(n-2p)2^{n-1}(-1)^{2n-2};$$

donc

$$\Delta = (n-2p)(-2)^{n-1}.$$

19. Considérons actuellement les équations

$$\begin{array}{l} x_1 + x_2 + x_3 + \ldots \quad + x_p \quad = u_1, \\ x_2 + x_3 + \ldots \quad\quad + x_{p+1} = u_2, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_{n-p+1} + x_{n-p+2} + \ldots + x_n \quad = u_{n-p+1}, \\ x_{n-p+2} + x_{n-p+2} + \ldots + x_1 \quad = u_{n-p+2}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_n + x_1 + x_2 + \ldots \quad + x_{p-1} = u_n. \end{array}$$

On voit que le premier membre de chacune de ces équations est égal à la somme de p des inconnues $x_1, x_2, \ldots x_n$; et que si ces inconnues étaient disposées circulairement, les p d'entre elles, qui entrent dans chacun des premiers membres, seraient toujours consécutives.

Pour essayer de résoudre ces équations, écrivons-les dans l'ordre suivant :

$$\begin{aligned}
x_1 + x_2 + \ldots + x_p &= u_1,\\
x_{p+1} + x_{p+2} + \ldots + x_{2p} &= u_{p+1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\
x_{(q-1)p+1} + x_{(q-1)p+2} + \ldots + x_{qp} &= u_{(q-1)p+1},\\
x_{qp+1} + x_{qp+2} + \ldots + x_{p-r} &= u_{qp+1},\\
\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots
\end{aligned}$$

en représentant par q le quotient, et par r le reste de la division de n par p.

Cela étant, il pourra se présenter deux cas :

1° Si n et p ont un facteur commun θ, on pourra poser $n = n'\theta$, $p = p'\theta$, n' et p' étant premiers entre eux; alors la n'^e équation se terminera par x_n, et la somme des premiers membres sera $p's$, s étant la somme de toutes les inconnues. En effet, chaque équation renferme p inconnues, et l'on a $n'p = np'$.

D'un autre côté, en ajoutant toutes les équations proposées, on trouve $ps = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$. Les deux valeurs de s, savoir

$$s = \frac{u_1 + u_{p+1} + u_{2p+1} + \ldots}{p'}, \quad s = \frac{u_1 + u_2 + \ldots + u_n}{p},$$

seront identiques ou différentes : donc les équations proposées sont indéterminées ou incompatibles.

2° Si n et p sont premiers entre eux, posons l'équation

$$nt - pv = 1.$$

Soient $t = a$, $y = b$ les valeurs entières positives les plus simples satisfaisant à cette équation. Si nous prenons les b premières des équations ci-dessus, la b^e sera

$$x_{n-p} + x_{n-p+1} + \dots + x_{n-1} = u_{n-p},$$

et la somme des premiers membres sera $as - x_n$; donc

$$as - x_n = u_1 + u_{p+1} + u_{2p+1} + \dots + u_{n-p};$$

puis

$$x_n = \frac{a}{p}(u_1 + u_2 + \dots + u_n) - (u_1 + u_{p+1} + u_{2p+1} + \dots + u_{n-p}),$$

valeur finie et déterminée.

Cette discussion nous apprend que les équations proposées formeront un système complétement déterminé, seulement dans le cas où n et p sont premiers entre eux.

20. Le déterminant Δ relatif à ces équations s'obtiendra bien facilement à l'aide des considérations précédentes. En effet, remplaçons le système proposé par

$$\begin{array}{l}
px_1 + px_2 + \dots + px_n = \dots \\
\qquad\quad x_1 - x_{p+1} \qquad\quad = \dots \\
\qquad\quad x_2 - x_{p+2} \qquad\quad = \dots \\
\qquad\quad \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
\qquad\quad x_{n-1} - x_{p-1} \qquad = \dots;
\end{array}$$

En comparant ces équations à celles du n° 18, nous voyons que leur déterminant sera

$$\Delta' = n(-1)^{n-1}\Delta = np(-1)^{n-1};$$

donc

$$\Delta = p.$$

21. J'indiquerai encore ici une propriété remarquable, dont jouit le déterminant Δ du système

$$\begin{array}{l} a_1,\ a_2,\ a_3,\ \ldots\ a_n, \\ a_2,\ a_3,\ a_4,\ \ldots\ a_1, \\ .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ a_n,\ a_1,\ a_2,\ \ldots\ a_{n-1}. \end{array}$$

Nommons s la somme des lettres $a_1, a_2, \ldots a_n$: d'après le n° 13, la recherche de Δ se réduit à celle du déterminant Δ' du système suivant :

$$\begin{array}{l} s,\ a_1 - a_2,\ a_2 - a_3,\ \ldots\ a_{n-1} - a_n, \\ s,\ a_2 - a_3,\ a_3 - a_4,\ \ldots\ a_n - a_1, \\ s,\ a_3 - a_4,\ a_4 - a_5,\ \ldots\ a_1 - a_2, \\ .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad .\quad . \\ s,\ a_n - a_1,\ a_1 - a_2,\ \ldots\ a_{n-2} - a_{n-1}. \end{array}$$

La formule (9) donne en effet :

$$\Delta = (-1)^{n-1}\frac{1}{n}\Delta'.$$

D'un autre côté, si nous désignons par $A_1, A_2, \ldots A_n$ les diverses lignes horizontales ci-dessus, abstraction faite du terme s qui entre dans chacune d'elles, nous aurons

$$\frac{\Delta'}{s} = \text{dét.}(A_2, A_3, \ldots A_n) - \text{dét.}(A_1, A_3, \ldots A_n)$$
$$+ \text{dét.}(A_1, A_2, A_4, \ldots A_n) - \ldots + (-1)^{n-1}\text{dét.}(A_1, A_2, \ldots A_{n-1}).$$

Observons maintenant que, d'après les équations ci-dessus, nous pouvons écrire

$$A_n = -(A_1 + A_2 + \dots + A_{n-1}).$$

En effet, le terme $a_n - a_1$ est égal à

$$-[(a_1 - a_2) + (a_2 - a_3) + \dots + (a_{n-1} - a_n)]\text{; etc.}$$

Remplaçant A_n par sa valeur, et négligeant les déterminants nuls, nous trouvons

$$\begin{aligned}\frac{\Delta'}{s} &= \text{dét.}(A_2, A_3, \dots A_{n-1}, -A_1) - \text{dét.}(A_1, A_3, \dots A_{n-1}, -A_2)\\ &\quad + \text{dét.}(A_1, A_2, A_4, \dots A_{n-1}, -A_3) - \dots\\ &= (-1)^{n-1}\text{dét.}(A_1, A_2, \dots A_{n-1}) - (-1)^{n-2}\text{dét.}(A_1, A_2, \dots A_{n-1})\\ &\quad + (-1)^{n-3}\,\text{dét.}(A_1, A_2, \dots A_{n-1}) - \dots\\ &= n(-1)^{n-1}\,\text{dét.}(A_1, A_2, \dots A_{n-1}).\end{aligned}$$

Par suite

$$\Delta = s\ \text{dét.}(A_1, A_2, \dots A_{n-1}).$$

Ainsi, le déterminant du système proposé s'obtiendra en multipliant $a_1 + a_2 + \dots + a_n$ par le déterminant du système

$$\begin{array}{l} a_1 - a_2,\ a_2 - a_3,\ \dots\ a_{n-1} - a_n,\\ a_2 - a_3,\ a_3 - a_4,\ \dots\ a_n - a_1,\\ \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\quad \cdot\\ a_{n-1} - a_n,\ a_n - a_1,\ \dots\ a_{n-3} - a_{n-2}. \end{array}$$

22. On sait que si l'on a une intégrale multiple dans laquelle les variables soient $x_1, x_2, \dots x_n$, et que l'on veuille transformer cette intégrale en une autre dans laquelle les variables soient $u_1, u_2, \dots u_n$, on doit remplacer

l'élément

$$dx_1\, dx_2 \ldots dx_n \text{ par } \frac{1}{\Delta}\, du_1\, du_2 \ldots du_n,$$

Δ étant le déterminant des équations

$$\frac{du_1}{dx_1}dx_1 + \frac{du_1}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{du_1}{dx_n}dx_n = du_1,$$
$$\frac{du_2}{dx_1}dx_1 + \frac{du_2}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{du_2}{dx_n}dx_n = du_2,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\frac{du_n}{dx_1}dx_1 + \frac{du_n}{dx_2}dx_2 + \ldots + \frac{du_n}{dx_n}dx_n = du_n,$$

dans lesquelles on regarde dx_1, dx_2, ... dx_n comme des inconnues (*)

Il résulte de là que la connaissance d'un certain nombre de déterminants peut donner la valeur de certaines intégrales multiples qu'il serait difficile de calculer directement. Par exemple, les formules des nos 17, 18 et 20 vont nous donner des intégrales multiples remarquables.

23. Soit d'abord l'intégrale

$$A = \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots e^{-[u_1^2 + u_2^2 + \ldots + u_n^2]}\, dx_1\, dx_2 \ldots dx_n,$$

dans laquelle on a fait, pour abréger,

$$\begin{aligned} -x_1 + x_2 + \ldots + x_n &= u_1, \\ x_1 - x_2 + \ldots + x_n &= u_2, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \\ x_1 + x_2 + \ldots - x_n &= u_n. \end{aligned}$$

Afin de déterminer cette intégrale, transformons-la en

(*) Voyez le mémoire déjà cité.

une autre, dans laquelle les variables soient précisément $u_1, u_2, \ldots u_n$. Le déterminant Δ que nous devons calculer d'après la règle précédente, est évidemment celui que nous avons trouvé au n° 17 ; de plus, les limites des intégrations sont encore $-\infty$ et $+\infty$; donc

$$\mathrm{A} = \frac{1}{(n-2)\,2^{n-1}} \int_{-\infty}^{+\infty} \ldots e^{-[u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n]}\, du_1 . du_2 . \ldots du_n \,;$$

ou plutôt,

$$\mathrm{A} = \frac{1}{(n-2)\,2^{n-1}} \left(\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-u^2} du\right)^n ;$$

et enfin,

$$\mathrm{A} = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{(n-2)\,2^{n-1}} .$$

Par exemple,

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-(-x+y+z)^2-(x-y+z)^2-(x+y-z)^2}\, dxdydz = \frac{\pi}{4}\sqrt{\pi}.$$

24. Considérons l'intégrale

$$\mathrm{B} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-[u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2]}\, dx_1 . dx_2 \ldots dx_n ,$$

dans laquelle on suppose

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 + \ldots + x_p &= u_1 , \\ x_2 + x_3 + \ldots + x_{p+1} &= u_2 , \\ \ldots \ldots \ldots \ldots & \end{aligned}$$

Si nous prenons pour variables $u_1, u_2, \ldots u_n$, nous aurons, d'après le n° 20, et en supposant n et p *premiers entre eux*,

$$B = \frac{1}{p}\int_{-\infty}^{+\infty} \dots e^{-[u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2]} du_1 . du_2 . \dots du_n ;$$

ou

$$B = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}}{p}.$$

25. Prenons l'intégrale

$$C = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots\dots \frac{dx_1 . dx_2 . \dots dx_n}{(1+u_1^2)(1+u_2^2)\dots(1+u_n^2)},$$

dans laquelle

$$-x_1 + x_2 + \dots + x_n = u_1,$$
$$x_1 - x_2 + \dots + x_n = u_2,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Nous aurons, par les transformations employées plus haut,

$$C = \frac{1}{(n-2)\,2^{n-1}}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du}{1+u^2}\right)^n = \frac{\pi^n}{(n-2)\,2^{n-1}}.$$

26. Pour dernier exemple, prenons l'intégrale

$$D = \int_{-\infty}^{+\infty} \dots\dots \frac{dx_1 . dx_2 \dots dx_n}{[1+u_1^2+u_2^2+\dots+u_n^2]^p},$$

dans laquelle $u_1, u_2, \dots u_n$ représentent les fonctions déjà considérées dans l'intégrale précédente.

Nous aurons d'abord

$$D = \frac{1}{2^{n-1}(n-2)} U_n,$$

en posant

$$U_n = \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots\cdots \frac{du_1 . du_2 \ldots du_n}{[1+u_1^2+u_2^2+\ldots+u_n^2]^p}.$$

Pour réduire cette intégrale, posons

$$u_2 = \alpha_2\sqrt{1+u_1^2},\ u_3 = \alpha_3\sqrt{1+u_1^2}, \ldots u_n = \alpha_n\sqrt{1+u_1^2};$$

d'où

$$U_n = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+u_1^2)^{\frac{n}{2}-p} du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} \cdots\cdots \frac{d\alpha_2 . d\alpha_3 \ldots d\alpha_n}{[1+\alpha_2^2+\ldots+\alpha_n^2]^p};$$

ou plutôt

$$U_n = U_{n-1}\int_{-\infty}^{+\infty} (1+\theta^2)^{\frac{n}{2}-p} d\theta,$$

en représentant par U_{n-1} la fonction que l'on déduit de U_n par le changement de n en $n-1$.

En posant $\theta = \sqrt{\frac{\lambda}{1-\lambda}}$, on transforme le multiplicateur de U_{n-1} en

$$\int_0^1 \lambda^{-\frac{1}{2}} (1-\lambda)^{p-\frac{n+3}{2}} d\lambda.$$

Pour que cette intégrale soit finie, il faut que l'on ait $p > \frac{n+1}{2}$.

Si cette condition est vérifiée,

$$U_n = U_{n-1}\frac{\Gamma(\frac{1}{2})\Gamma\left(p-\frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(p-\frac{n}{2})};$$

d'où

$$U_n = U_1 \frac{[\Gamma(\frac{1}{2})]^{n-1}\,\Gamma\left(p - \frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(p-\frac{1}{2})}$$

D'ailleurs

$$U_1 = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{du_1}{(1+u_1^2)^p} = \frac{\Gamma(\frac{1}{2})\,\Gamma(p-\frac{1}{2})}{\Gamma(p)},$$

donc

$$U_n = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(p - \frac{n+1}{2}\right)}{\Gamma(p)}.$$

Par suite, l'intégrale proposée a pour valeur,

$$D = \frac{\pi^{\frac{n}{2}}\,\Gamma\left(p - \frac{n+1}{2}\right)}{(n-2)2^{n-1}\Gamma(p)}.$$

—

Magnétisme terrestre. (Extrait d'une lettre de M. Lamont, directeur de l'Observatoire royal de Munich, à M. Quetelet.)

..... M. Bravais a eu la bonté de m'envoyer les observations magnétiques qu'il a faites en Suisse et en France pendant l'année 1844 (1) : voici les résultats que j'en ai déduits, en tenant compte des variations telles qu'elles ont été observées à Munich :

(1) Voyez les *Observations des phénomènes périodiques,* page 42, dans le tome XVIII des *Mémoires de l'Académie royale de Bruxelles,* où les mêmes observations, communiquées par M. Bravais, ont été calculées par l'auteur.