Pluralités culturelles et universalité des mathématiques : enjeux et perspectives pour leur enseignement et leur apprentissage

espace mathématique francophone
Alger : 10-14 Octobre 2015

LE DÉVELOPPEMENT DE LA PENSÉE ALGÉBRIQUE : QUELLES DIFFÉRENCES ENTRE LES RAISONNEMENTS MIS EN PLACE PAR LES ÉLÈVES AVANT ET APRÈS L'INTRODUCTION DE L'ALGÈBRE ?

Isabelle DEMONTY – Annick Fagnant - Joëlle VLASSIS.

Résumé – De nombreux curricula préconisent d'enseigner l'algèbre après que les élèves ont acquis une base de connaissance en arithmétique. Cette façon d'organiser les enseignements mathématiques n'est pas en adéquation avec les recherches centrées sur la pensée algébrique : celle-ci se caractérise par une manière particulière de raisonner face à des problèmes, qui peut se développer bien avant les premiers apprentissages du secondaire (Radford, 2014). La communication compare les démarches mises en œuvre par des élèves dans des situations de dénombrement, avant et après l'introduction de l'algèbre. Elle apporte ainsi des informations sur l'évolution de la pensée algébrique des élèves de 11 à 14 ans.

Mots-clefs : développement, pensée algébrique, dénombrement, arithmétique, algèbre

Abstract – A lot of curricula recommend to teach algebra after the students have acquired a deep knowledge in arithmetic. This way of organising the mathematics' teaching is not in adequacy with the researches focused on algebraic thinking: it's more a way of reasoning that can be developed before the first learnings of secondary school (Radford, 2014). The communication compares way of thinking by students in the study of "pattern", before and after the introduction of the algebra. It brings information on the evolution of the algebraic thinking of students from 11 to 14 years old.

Keywords: development, algebraic thinking, pattern, arithmetic, algebra

De nombreux curricula préconisent d'enseigner l'algèbre après que les élèves ont acquis une bonne base de connaissance en arithmétique (Cai & Knuth, 2011 ; Radford, 2014). Les programmes de mathématiques en Belgique francophone vont dans cette direction, en marquant une distinction entre l'arithmétique d'une part, qui relève de la responsabilité de l'instituteur et l'algèbre d'autre part, qui débute au premier degré de l'enseignement secondaire (grades 7 et 8) avec l'introduction du symbolisme algébrique, des procédures associées (calcul algébrique et résolution d'équations). Le document « Socles de compétences », répertoire des compétences à acquérir par les élèves de 5 à 14 ans, précise que « l'analyses de ces phénomènes arithmétiques conduit à établir des preuves et à employer des lettres pour généraliser. Cette étude constitue ainsi un tremplin pour accéder à l'algèbre » (socles de compétences, p. 26).

Cette façon de considérer l'algèbre n'est pas en adéquation avec les recherches centrées sur la pensée algébrique (Kieran, 2007) : la définition même de cette pensée n'est pas directement liée à la capacité à utiliser des écritures mathématiques comportant des lettres. Au contraire, celle-ci relève davantage d'une manière particulière de raisonner face à des problèmes, qui peut se développer dans un cadre numérique, bien avant les premiers apprentissages du secondaire (Radford, 2014).

Malgré cette rupture nette entre l'arithmétique et l'algèbre soutenue par les directives officielles, on retrouve, dans le document « Socles de compétences », une compétence qui autorise le développement de cette pensée algébrique dès les premiers apprentissages mathématiques : il s'agit de la capacité à dénombrer, compétence qui doit être travaillée dès l'école maternelle, approfondie en primaire (en remplaçant le dénombrement par un calcul) et revue à nouveau dans l'enseignement secondaire (où le dénombrement sera exprimé par une formule). L'étude du dénombrement dans le contexte de l'analyse de suites arithmétiques dont chacun terme est représenté par un enchaînement de figures, constitue ainsi un support intéressant pour amener une réflexion sur les caractéristiques de la pensée algébrique des élèves avant et après l'introduction de l'algèbre.

C'est à ce type de situation que notre communication s'intéresse. Elle se centre sur les deux questions suivantes : comment se caractérise la pensée algébrique dans des situations d'analyse de suite arithmétiques? Quelles sont effectivement les démarches mises en œuvre par les élèves selon qu'ils sont à l'école primaire ou au début de l'enseignement secondaire ?

Après une analyse de quelques recherches centrées sur les caractéristiques de la pensée algébrique, la communication présente les résultats d'un test soumis à 156 élèves de grades 6 et 8 issus de 8 classes en Belgique francophone, en vue de mieux cibler les différences qui se dégagent dans les démarches de généralisation mises en œuvre avant l'introduction de l'algèbre et après une année complète d'enseignement de l'algèbre.

1. Fondements théoriques

Cette partie a pour but d'apporter un éclairage théorique à la problématique suivante : comment se caractérise la pensée algébrique dans des situations d'analyse de suites arithmétiques ?

Elle est structurée en 3 parties. La première partie propose une première mise au point sur les caractéristiques principales de la pensée algébrique. La deuxième partie s'intéresse aux situations où l'élève est amené à généraliser un phénomène à travers l'observation de cas particuliers. Nous envisageons à la fois les démarches qu'ils mettent en œuvre pour généraliser et les symbolisations écrites qui permettent de garder trace de leur raisonnement. Enfin, la dernière partie discute des liens entre pensée algébrique et généralisation.

Les caractéristiques de la pensée algébrique

D'après Radford (2008, 2014), l'utilisation de notations symboliques ne constitue pas la meilleure manière de définir l'entrée dans la pensée algébrique. Reprenant les constats de recherches antérieures, la pensée algébrique présente, selon lui, les trois caractéristiques suivantes :

- l'indétermination qui relève de la capacité à exploiter des problèmes qui impliquent des nombres inconnus ;
- la dénotation qui consiste à parvenir à nommer ou symboliser ces nombres inconnus. Cette dénotation peut se faire de différentes manières, à l'aide du code alphanumérique, mais aussi du langage naturel, de gestes ou de signes non conventionnels ;
- le raisonnement analytique. Celui-ci amène à traiter les quantités indéterminées comme si elles étaient connues, et à parvenir à réaliser des opérations sur ces nombres inconnus.

Dans cette définition, la pensée algébrique recouvre des aspects liés d'une part à une certaine forme de pensée (raisonnement analytique) et d'autre part, à la manière de symboliser cette pensée (dénotation).

Les situations de dénombrement : comment les élèves généralisent-ils des phénomènes et comment expriment-ils par écrit leurs démarches ?

Radford (2006, 2008) a largement étudié les démarches de généralisation mises en place par les élèves de 10 à 14 ans, dans le cadre de l'étude de suites arithmétiques représentées par des figures, comme l'illustre la figure 1.

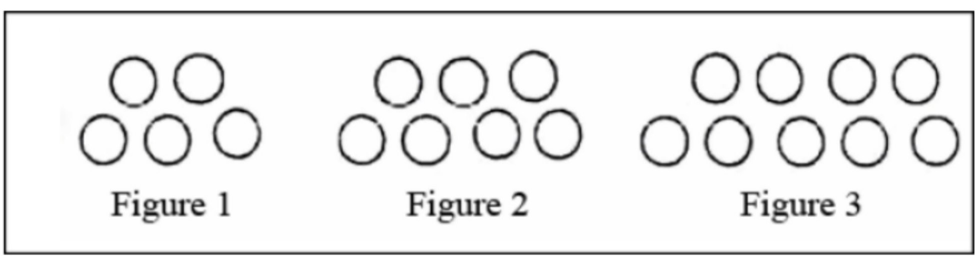


Figure 1 : E*xemple de situation de dénombrement dans le contexte de suite arithmétiques (Radford, 2006, p.5).*

Selon cet auteur, la généralisation présente deux caractéristiques : un aspect phénoménologique d'une part, qui correspond à la démarche mise en œuvre pour généraliser une suite arithmétique et un aspect sémiotique d'autre part, qui correspond à l'expression du raisonnement réalisé. Dans la suite de cette partie, nous envisageons les caractéristiques de ces deux facettes de la généralisation, qui sont en réalité intimement liées.

a) L'aspect phénoménologique de la généralisation : comment les élèves raisonnent-ils pour généraliser ?

Radford (2006 ; 2008) identifie trois types de raisonnements d'élèves face à la généralisation de suites arithmétiques : l'induction naïve, la généralisation arithmétique et la généralisation algébrique.

- L'induction naïve consiste à rechercher un motif inconnu en analysant les caractéristiques d'un seul motif connu. Ces élèves élaborent par exemple des stratégies d'essais-erreurs en tentant d'établir une règle au départ de l'analyse d'un seul terme, sans chercher un point commun entre plusieurs termes de la suite. Une autre stratégie fréquente d'induction naïve relève d'une application erronée du raisonnement proportionnel : bon nombre d'élèves, face à une situation d'agrandissement, font appel à ce raisonnement sans avoir vérifié si ce modèle fonctionnait dans cette situation. Par exemple, pour déterminer le nombre d'objets nécessaires pour réaliser le motif n°6, ces élèves pensent qu'il suffit de multiplier le nombre d'objets constituant le motif 3 par 2.
- Une autre démarche est qualifiée par Radford (2006, 2008) de généralisation arithmétique : dans celle-ci, la personne identifie un point commun à travers l'analyse de plusieurs termes de la suite (il s'agit du fait qu'il y a un accroissement constant entre les termes consécutifs). Cette caractéristique peut être utilisée pour identifier correctement un terme à partir d'un terme proche (par addition successive de la raison). Toutefois, l'élève n'est pas en mesure, dans une telle démarche, de procéder à un raisonnement lui permettant d'utiliser cette caractéristique pour prédire un terme lointain de la suite étudiée.
- Dans la démarche de généralisation algébrique, l'élève identifie une régularité à travers l'analyse de quelques termes de la suite, étend ou généralise cette régularité aux autres termes, et parvient à proposer une expression directe de n'importe quel terme de la suite (Radford, 2006 ; Radford, 2008).

b) L'aspect phénoménologique de la généralisation : comment les élèves expriment-ils leur raisonnements de généralisation ?

Dans ses travaux, Radford (2006 ; 2008 et 2014) propose aux élèves d'exploiter en groupes les situations. Il constate que les canaux de symbolisation des élèves dépassent largement les uniques traces écrites : les gestes, les mots et même les intonations données par les élèves dans leurs explications sont très révélateurs de leur façon de penser et d'exprimer leurs démarches.

Dans le cadre de notre étude, nous ne disposons que des traces écrites. Dans cet article, nous nous centrerons donc sur les caractéristiques de ce canal de communication.

Lorsqu'ils proposent une démarche d'induction naïve ou de généralisation arithmétique, les élèves peuvent exprimer leur raisonnement à l'aide de calculs, de phrases ou même à l'aide d'un substitut symbolique pour identifier le nombre inconnu. Ils peuvent également soutenir ce raisonnement par des annotations écrites sur les dessins présentant les suites (par exemple, ils identifient la raison de la suite en entourant chaque fois les figures qui ont été ajoutées pour passer d'un motif au motif qui le suit directement).

En ce qui concerne la démarche de généralisation algébrique, Radford (2006) constate que les élèves peuvent proposer 3 types de symbolisations écrites, correspondant à 3 types de généralisation algébriques : factuelle, contextuelle et symbolique. Dans la généralisation algébrique factuelle, l'élève symbolise l'inconnue à partir d'un nombre : il choisit un nombre et applique la formule au départ de celui-ci. Dans la généralisation algébrique contextuelle, l'inconnue est symbolisée par un substitut symbolique (point d'interrogation, cadre vide, lettre, …) mais la symbolisation élaborée garde des traces de la situation qui l'a vue naître : par exemple, l'élève utilise des parenthèses pour indiquer l'ordre des opérations à réaliser, sans que cela ne soit nécessaire selon la règle de priorité des opérations. La généralisation algébrique symbolique se détache quant à elle de la situation, pour proposer une écriture tout à fait correcte sur le plan mathématique, qui n'est plus enracinée dans le contexte de la suite.

Plusieurs recherches, réalisées dans le domaine de la mise en équation de problèmes impliquant des équations apportent des éclairages intéressants concernant la symbolisation algébrique. Deux concepts nous paraissent transposables dans le domaine de la symbolisation d'une généralisation.

- Il s'agit d'une part de la nominalisation (Radford, 2002) qui est un processus linguistique à travers lequel un élément est transformé en sujet à partir d'un verbe d'action.

  > Ainsi, par exemple lorsqu'il s'agit de symboliser le fait qu'un enfant a 5 billes de plus qu'un autre, l'élève doit transformer l'information « 5 billes de plus » par « le premier enfant a x billes et le second enfant à 5 + x billes ».

- Le second concept est défini par Duval (2002) et concerne la nécessité, dans la plupart des problèmes impliquant les équations, de choisir une lettre qui permettra de désigner non pas une mais plusieurs quantités exprimées dans l'énoncé. Par exemple, face au problème énoncé ci-dessus, l'élève doit parvenir à utiliser une même lettre pour désigner les parts de deux enfants, la part du second devant être symbolisée en fonction de la part du premier (le premier enfant a x billes et le second a x + 5 billes).

Dans la symbolisation des suites arithmétiques, l'élève est amené à effectuer une démarche de nominalisation : il doit penser à mobiliser dès le départ une quantité inconnue (le n° du motif) et à effectuer des opérations au départ de cette quantité inconnue, celle-ci devant nécessairement apparaitre dans sa formule. En ce qui concerne la nécessité d'exprimer plusieurs inconnues au départ d'une seule, cette démarche ne sera utile que pour formaliser certains raisonnements, faisant intervenir cette particularité, par exemple lorsque l'élève constate qu'il faut additionner deux nombres consécutifs : il va devoir exprimer tant le premier que le deuxième nombre au départ d'une même inconnue.

Ces recherches montrent que l'écriture, à l'aide d'une expression algébrique, de la pensée algébrique est loin d'être simple. Les recherches centrées sur les connaissances des enseignants ont mis en évidence que ceux-ci avaient tendance à sous-estimer ces difficultés de symbolisation. Certains auteurs attribuent ce fait aux connaissances mathématiques des enseignants, qui les ont conduits à automatiser un certain nombre de procédures que les élèves doivent découvrir lors des premiers apprentissages algébriques. A ce propos, Koedinger et Nathan (2004) définissent le concept d'« expert blind spot », pour désigner le fait que les enseignants, de par leur bagage important en mathématiques, évaluent mal la difficulté des tâches de symbolisation algébrique, l'associant même à une simple traduction directe d'un énoncé en symboles mathématiques (Julo, 1995 ; Duval, 2002).

Quels liens peut-on établir entre pensée algébrique et démarche de généralisation ?

D'après les trois caractéristiques de la pensée algébrique rappelées ci-avant (Radford, 2008 et 2014), ni l'induction naïve, ni la généralisation arithmétique ne relèvent de la pensée algébrique. En effet, dans aucune de ces deux démarches, les élèves ne parviennent à élaborer un raisonnement de nature analytique, puisque leurs démarches ne prennent pas appui sur un nombre inconnu. De plus, les seules dénotations concernent des quantités connues.

A l'inverse, les démarches de généralisation algébriques contextuelles et symboliques présentent les trois caractéristiques de la pensée algébrique. Les élèves sont en effet confrontés à l'indétermination, puisqu'ils doivent élaborer un raisonnement qui permette de déterminer n'importe quel terme de la suite, à partir de son rang dans la suite. Ils parviennent également à symboliser ces nombres inconnus, sans nécessairement utiliser le code alphanumérique et enfin, leur raisonnement est de nature analytique, dans la mesure où il s'agit de réaliser des opérations au départ d'un rang quelconque du terme, qui est inconnu.

La démarche de généralisation algébrique factuelle présente à minima deux des trois caractéristiques de la pensée algébrique : le raisonnement est bien de nature analytique et les élèves montrent qu'ils sont capables d'exploiter pleinement des problèmes qui impliquent des nombres inconnus.

En ce qui concerne la dénotation, Radford (2006) précise que « dans la généralisation algébrique factuelle, l'indéterminée n'est pas nommée : la généralisation repose sur des actions réalisées sur des nombres ; les actions sont composées de mots, de gestes et d'activités de perception » (p. 16) [traduction libre][1]. Selon ce point de vue, on peut penser que la dénotation fait défaut à ces élèves puisqu'ils ne parviennent pas à nommer ou symboliser l'inconnue. Toutefois, cette idée n'est pas partagée par d'autres auteurs. En effet, s'appuyant sur les travaux de Dörfler (1991), Squalli (à paraître) exprime le fait qu'« un moment crucial dans le processus de généralisation se produit quand […] la formulation des protocoles ne sert plus uniquement à décrire les cas spécifiques examinés mais aussi à envisager les cas potentiels » (p.7). En suivant cette idée, on peut considérer que l'exemple sur lequel s'appuient les élèves lorsqu'ils proposent une généralisation algébrique factuelle a la valeur d'un cas général qui permet de décrire un processus de calcul plutôt que la réponse effective trouvée (qui à elle seule ne garde pas la trace de la démarche effectuée). Dans ce cas, la dénotation telle que définie dans la pensée algébrique est réalisée (l'inconnue est désignée par un nombre ayant la valeur d'un exemple prototypique) et la généralisation algébrique factuelle présente bien les trois caractéristiques de la pensée algébrique.

2. Problématique de recherche et hypothèses

Selon Radford (2008, 2014), la pensée algébrique peut être rendue accessible aux jeunes élèves, bien avant l'entrée dans l'algèbre. Dans un contexte de suites arithmétiques, lors d'activités savamment orchestrées par l'enseignant, les études menées par Radford et ses collaborateurs montrent que les élèves parviennent à élaborer des raisonnements de nature analytique et à symboliser ceux-ci à l'aide d'un substitut symbolique.

S'il s'avère que les élèves sont capables de développer de tels raisonnements lorsqu'ils sont accompagnés dans leurs démarches par l'enseignant, qu'en est-il de leurs démarches spontanées ? Faut-il vraiment attendre l'entrée dans l'algèbre pour que les élèves parviennent à développer et symboliser un raisonnement de nature algébrique ?

En référence aux travaux de Radford (2006, 2008 et 2014) et de Dörfler (1991), nous émettons la première hypothèse suivante : avant tout enseignement formel de l'algèbre, bon nombre d'élèves sont capables de développer des raisonnements de nature algébrique, même si la manière de symboliser ceux-ci ne relève pas de l'utilisation du code alphanumérique.

Par ailleurs, les enseignants de mathématiques du secondaire ont tendance à surestimer la facilité d'acquérir le langage formel (Koedinger & Nathan, 2004), l'associant souvent à une simple traduction du langage courant en symboles mathématiques (Julo, 1997 ; Duval, 2002). Nous émettons la seconde hypothèse suivante : même après plus d'une année d'utilisation du symbolisme algébrique, les élèves de 14 ans éprouvent de nombreuses difficultés pour formaliser leur raisonnement par le biais de l'écriture algébrique.

[1] In factual generality, indeterminacy remains unnamed; generality rests on actions performed on numbers; actions are made up here of words, gestures and perceptual activity".

3. Méthodologie

Les résultats que nous présentons dans cette communication ont été recueillis suite à la passation d'un test comprenant deux suites arithmétiques, et soumis à un total de 156 élèves issus de 2 années d'étude : grade 6 (6^e primaire) et grade 8 (deuxième secondaire).

La figure 2 reprend le nombre de classes et d'élèves concernés par l'épreuve dans chaque année d'étude.

	Grade 6	Grade 8
Nombre de classes	4	4
Nombre d'élèves	79	77

Figure 2 : *Brève description de l'échantillon.*

Identique dans toutes les classes, le test a été soumis en début d'année scolaire (au mois de novembre).

Puisque nous interrogeons dans cet article la nécessité d'attendre l'entrée dans l'algèbre pour que les élèves parviennent à développer et symboliser un raisonnement de nature algébrique, il nous a semblé nécessaire de comparer les résultats de ces deux groupes d'élèves puisque les uns n'avaient aucune expérience algébrique (groupe de grade 6 et que les autres avaient reçu une année complète d'enseignement de cette matière (groupe de grade 8).

Dans ce test, nous confrontons les élèves à une suite arithmétique symbolisée par des petits carrés.

L'activité soumise aux élèves est présentée dans la figure 3. L'élève dispose au départ d'une représentation visuelle des trois premiers termes de la suite. Sur la base des réflexions de Radford, Miranda, & Demers (2009), nous avons proposé un questionnement en 4 étapes :

- dans un premier temps, l'élève est amené à dessiner le motif n°4 ;
- il lui est ensuite demandé de proposer une description de l'agencement des carrés pour le motif n°7, dans le but de porter son attention sur la disposition spatiale des carrés ;
- l'élève doit ensuite identifier le nombre de carrés nécessaires pour un motif lointain (n°100) ;
- enfin, il s'agit de généraliser en mots une procédure pouvant convenir quel que soit le numéro recherché. Afin d'amener les élèves à donner du sens à la notion de nombre indéterminé dans ce contexte, nous avons formulé la consigne à l'aide d'un petit jeu (voir question 4). Pour les élèves de grade 8, nous demandons d'exprimer ce moyen en utilisant des symboles mathématiques.

Les résultats présentés dans cet article concernent les réponses apportées aux élèves à la quatrième étape du questionnement (question 4). Ce choix s'explique par le fait que, dans cette dernière question, l'élève est réellement amené à généraliser le phénomène sous étude ; les trois autres questions n'impliquent en effet pas de réaliser un raisonnement analytique, mais sont plutôt destinées à aider les élèves, et en particulier les plus jeunes, à entrer progressivement dans l'activité de généralisation évaluée dans cette quatrième question.

Voici une suite de dessins réalisée à l'aide de petits carrés :

Dessin n°1	Dessin n°2	Dessin n°3	Dessin n°4

1) Continue la suite en dessinant le dessin n°4 dans la case vide ci-dessus.

2) Alexandre est un élève d'une autre classe. Il voudrait obtenir le dessin n°7, mais il n'a pas vu les premiers dessins.

   a. Explique-lui comment il doit faire (***attention***, ton explication doit être réalisée uniquement avec des mots).

   b. Finalement, combien de carrés doit-il dessiner ? ....

3) Alexandre aimerait réaliser le dessin n°**100** sur la fenêtre de sa classe avec des post-it. Combien de post-it devra-t-il utiliser ?

4) Dans la classe d'Alexandre, il y a une boite contenant des papiers sur lesquels est chaque fois indiqué un nombre ... Alexandre va choisir un papier au hasard dans la boîte. Le nombre indiqué sur le papier lui donnera le numéro d'un dessin de la suite.

   a) Ecris un message à cet élève pour qu'il sache comment il pourra calculer le nombre de post-it dont il aura besoin pour réaliser le dessin choisi au hasard. ***Attention****, il doit juste savoir combien il lui faudra de post-it : il ne devra pas faire le dessin.*

   b) **Si tu es en 2e secondaire**, écris ce moyen en langage mathématique (utilise des signes d'opérations,...).

Voici une suite de dessins réalisée à l'aide de petits carrés :

Dessin n°1	Dessin n°2	Dessin n°3	Dessin n°4

1) Continue la suite en dessinant le dessin n°4 dans la case vide ci-dessus.

2) Alexandre est un élève d'une autre classe. Il voudrait obtenir le dessin n°7, mais il n'a pas vu les premiers dessins.

   a. Explique-lui comment il doit faire (***attention***, ton explication doit être réalisée uniquement avec des mots).

   b. Finalement, combien de carrés doit-il dessiner ? ....

3) Alexandre aimerait réaliser le dessin n°**100** sur la fenêtre de sa classe avec des post-it. Combien de post-it devra-t-il utiliser ?

4) Dans la classe d'Alexandre, il y a une boite contenant des papiers sur lesquels est chaque fois indiqué un nombre ... Alexandre va choisir un papier au hasard dans la boîte. Le nombre indiqué sur le papier lui donnera le numéro d'un dessin de la suite.

   a) Ecris un message à cet élève pour qu'il sache comment il pourra calculer le nombre de post-it dont il aura besoin pour réaliser le dessin choisi au hasard. ***Attention****, il doit juste savoir combien il lui faudra de post-it : il ne devra pas faire le dessin.*

   b) **Si tu es en 2e secondaire**, écris ce moyen en langage mathématique (utilise des signes d'opérations,...).

Figure 3 *: La situation proposée aux élèves*

4. Résultats

Les résultats apportent des éléments empiriques permettant d'approcher la deuxième problématique au cœur de cet article : Quelles sont effectivement les démarches mises en œuvre par les élèves selon qu'ils sont à l'école primaire ou au début de l'enseignement secondaire ?

Cette partie est structurée en deux parties. Dans un premier temps, nous nous centrerons sur le message formulé par les élèves pour généraliser la suite. L'ensemble des productions sera analysé en référence à la typologie de Radford (2006, 2008) présentée précédemment. Par la suite, nous analyserons plus précisément la symbolisation mathématique des messages réalisée par les élèves de grade 8.

a) Les démarches de généralisation des élèves de 6^e^ et 8^e^ grades.

La figure 4 présente quelques démarches de chaque sorte, permettant d'illustrer le classement réalisé. Etant donné la consigne (rédiger un message), très peu de productions ont pu être classées dans la catégorie « généralisation algébrique symbolique », les élèves n'étant pas incités à symboliser algébriquement leur raisonnement.

	Production de l'élève	**Commentaire**
Induction naïve	Si c'est le dessin 10, il doit prendre 5 fois les carrés qu'il y a sur le dessin 2.	L'élève ici propose d'appliquer le raisonnement proportionnel.
	Tu prends le nombre fois le nombre, puis tu ajoutes 2.	On peut penser ici que l'élève se base sur le motif 3, seul cas pour lequel cette règle fonctionne.
Généralisation arithmétique	Il devra ajouter toujours 3 par rapport au nombre qu'il aura.	Cette production indique que l'élève a repéré l'accroissement constant entre les termes de la suite
	Tu dois regarder le n°1 puis faire une addition de 3 chaque fois jusqu'au numéro que tu as pêché.	Par rapport à la précédente, cette production apporte l'idée supplémentaire du point de départ (5 post-it pour le premier motif).
	Par exemple, il choisit un post-it et que c'est le n°10. Il devra prendre 23 post-it. Si le n°7 contient 14 post-it, il faudra en ajouter 9 (3 par dessin) pour avoir le 10.	On peut penser que cette démarche pourrait évoluer vers une généralisation algébrique, si l'élève identifie que 9, c'est 3 x 3, 3 étant également la différence entre 10 et 7).
Généralisation algébrique	S'il a le 100, il doit faire 5 puis ajouter 99 fois 3, ça fait 302. Si c'est 150, il doit faire 5 puis	Il s'agit ici de deux exemples de généralisation algébrique factuelle : bien que les deux démarches sont exprimées par des

	ajouter 149 fois 3, ça fait 434.	nombres, elles présentent un caractère général qui laisse à penser que la règle pourra être utilisée quel que soit le motif.
	Par exemple ; si le n° est 401, il faudra faire 3 x 401 + 2. C'est la même chose avec tous les autres nombres.	
	On fait le nombre ….. fois 3, plus 2	La généralisation algébrique est, dans ces trois cas, de nature contextuelle : l'ordre des opération est chaque fois renforcé par un mot ou un signe de ponctuation. Les deux dernières démarches témoignent d'une visualisation de la suite décomposée en 3 lignes horizontale.
	Il doit faire le nombre qu'il a péché fois 2 puis rajouter le nombre plus 2.	
	Tu dois faire le nombre que tu as plus 2 pour la ligne horizontale et pour les 2 autres, tu dois faire chaque fois ton nombre. Pour finir, tu additionnes le tout.	
	3n + 2	La généralisation nous parait de nature symbolique : elle utilise de manière correcte le symbolisme algébrique (omission du signe « . » et respect de la priorité des opérations).

***Figure 4 :** Quelques exemples de démarches proposées par les élèves.*

La figure 5 présente la nature des raisonnements mis en œuvre par les élèves, en fonction de leur niveau d'étude.

	6P (N = 79)	**2S** (N = 77)
Induction naïve ● Raisonnement proportionnel	5%	5%
● Démarche valable pour un cas seulement	14%	5%
Généralisation arithmétique	27%	18%

Généralisation algébrique[2] ● Factuelle	19%	12%
● Contextuelle ou symbolique	20%	38%
Inclassable[3]	6%	5%
Omission	9%	17%

Figure 5 - *Démarches de généralisation mises en œuvre par les élèves, selon le niveau d'étude.*

Les résultats de la figure 5 confirment notre première hypothèse : avant tout enseignement formel de l'algèbre, bon nombre d'élèves sont capables de développer des raisonnements de nature algébrique, même si la manière de symboliser ceux-ci ne relève pas toujours de l'utilisation du code alphanumérique : environ 40% des élèves de grade 6 (39%) écrivent un message révélant une « généralisation algébrique », et la moitié d'entre eux parviennent à exprimer leur raisonnement à l'aide d'un substitut symbolique.

Des différences apparaissent toutefois entre les démarches mises en œuvre par les élèves n'ayant pas encore abordé l'algèbre et celles élaborées par les autres.

- la proportion de raisonnements de type « induction naïve » est plus conséquente en primaire que dans les autres années d'étude, la différence la plus marquée concerne la proportion de raisonnements valables pour un cas seulement, laissant penser que les élèves ont axé leur réflexion sur l'analyse d'un seul terme de la suite (14% en grade 6, contre 6% en grade 8), raisonnement très éloigné d'une démarche de nature algébrique : la recherche d'un point commun à au moins deux termes de la suite n'étant pas un élément sur lequel 14% des élèves de grade 6 ont spontanément porté leur attention. La formulation de la question 4 a été réfléchie en référence aux recommandations de Radford Miranda, & Demers (2009) qui ont étudié les façons de faire comprendre au mieux l'enjeu de la tâche aux élèves du primaire, sans les orienter sur une démarche particulière de résolution. Toutefois, on peut émettre l'hypothèse que la formulation de la question « Alexandre va choisir un papier au hasard … » a peut-être induit les élèves de primaire, non familiers avec ce genre d'énoncés, à imaginer la situation dans leur tête, à se concentrer sur un cas particulier et à s'engager ainsi dans une démarche d'induction naïve. Ce problème se pose sans doute moins pour les élèves de grade 8 qui sont plus familiers à ce genre de tâche.
- L'autre différence intéressante concerne la proportion d'élèves qui formalisent leur démarche algébrique par le biais d'un substitut symbolique : 20% des élèves de grade 6 et 38% des élèves de grade 8 parviennent à élaborer des généralisations contextuelles ou symboliques.

[2] Vu la consigne donnée aux élèves (Ecris un message), il ne nous semblait pas pertinent de distinguer les démarches de types généralisation contextuelle ou symbolique.

[3] Certaines démarches témoignaient davantage d'une incompréhension de la consigne que d'une véritable démarche de généralisation.

Lorsque les élèves de grade 6 développent une généralisation de type algébrique, la moitié d'entre eux ne pensent pas spontanément à nommer l'inconnue par un substitut symbolique. On peut penser que la nécessité par écrit leur démarche a peut être limité les élèves de grade 6 dans les possibilités de dénotation de l'inconnue. En effet, les travaux de Radford (2007, 2008, 2013) montrent à quel point le langage oral et gestuel occupe une place importante dans ce type d'activité. Par ailleurs, présentés dans une perspective sémiotique, les travaux qu'il a menés montrent que le dialogue entre élèves et avec l'enseignant est aussi une composante essentielle des productions écrites qui peuvent découler de l'exploitation de telles activités.

b) *Les symbolisations mathématiques développées par les élèves de 14 ans.*

La figure 6 présente les caractéristiques des messages symbolisés mathématiquement par les élèves, après un an d'expérience dans le domaine algébrique

Caractéristique de l'écriture mathématique	Exemples	% de démarches
Symbolisation algébrique correcte respectant les conventions algébriques	3n + 2	4%
Symbolisation algébrique utilisant la lettre, mais comportant des marques du lien à la suite étudiée	(a.3) + 2 n.3 + 2 x-3 < x < x + 3	34%
Symbolisation algébrique correcte n'utilisant pas la lettre, mais un substitut symbolique	…. . 3 + 2 Numéro . 3 + 2	10%
Symbolisation n'impliquant que des nombres et des signes opératoires	. 3 + 2 5 +3 + 3 ...	19%
Symbolisation utilisant deux lettres différentes ou une même lettre pour désigner des nombres différents	n x 2 + n[4] 2a + b	3%
Erreurs de parenthèse	n. 3 (+2) (3n) + (2)	4%
Autres erreurs		1%
Omission[5]		25%

[4] La mise en mots de cette démarche montre que l'élève a analysé la suite de manière horizontale (deux lignes correspondant au n° du dessin, et la dernière en a 2 de plus que le n° du dessin. La symbolisation mathématique semble indiquer ici que l'élève a éprouvé des difficultés à identifier une inconnue à partir d'une autre (n et n+2).

[5] Bon nombre d'élèves qui avaient rédigé en mots une généralisation de type arithmétique ont omis de répondre à cette question.

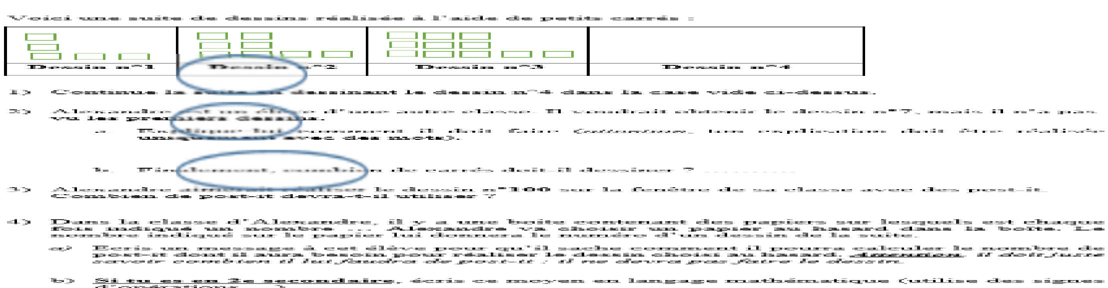
Figure 6 – Caractéristiques des messages symbolisés mathématiquement par les élèves de grade 8

La seconde hypothèse formulée se vérifie également : même après plus d'une année d'utilisation du symbolisme algébrique, les élèves de 14 ans éprouvent de nombreuses difficultés pour formaliser, par le biais de l'écriture algébrique, leur raisonnement. Moins de 40% des élèves de grade 8 parviennent à formuler leur raisonnement à l'aide d'une expression algébrique, même encore ancrée dans le contexte de la suite.

Au total, 10% des élèves sont proches d'une écriture correcte, mis à part le fait qu'ils n'ont pas pensé à utiliser une lettre dans ce contexte (ils utilisent alors un point d'interrogation ou un mot pour symboliser le nombre inconnu).

Deux erreurs nous semblent particulièrement importantes à mettre en évidence.

- Près de 20% des élèves ne symbolisent que des opérations à effectuer (fois 3 plus 2) pour trouver un terme quelconque de la suite. On peut penser, en référence aux travaux de Radford (2002), que ces élèves ne parviennent pas à réaliser le processus de nominalisation, consistant à passer d'une expression verbale (multiplier par 3 puis additionner 2) à une expression nominale (x . 3 + 2).
- Une autre erreur concerne surtout les élèves qui ont tenté d'exprimer algébriquement la règle suivante : « on a le numéro du motif sur les deux lignes du haut et le numéro du motif + 2 sur la ligne du bas».



Bon nombre d'élèves ont éprouvé des difficultés pour exprimer cette règle à l'aide d'une seule inconnue. En référence aux travaux de Duval (2002), ces réponses témoignent de la difficulté qu'ont les élèves à désigner plusieurs objets inconnus à partir d'un seul élément inconnu. Pour contourner ce problème, certains élèves ont utilisé 2 inconnues (a.2 + b ; a représentant le nombre de carrés sur chacune des deux lignes du haut et b, désignant le nombre de carrés sur la ligne du bas), d'autres ont utilisé une même inconnue pour désigner deux nombres différents (x. 2 + x ; le « x » présenté en premier lieu désignant le nombre de carrés sur chacune des deux premières lignes et le « x » présenté en deuxième lieu désignant le nombre de carrés sur la dernière ligne) et d'autres ont symbolisé la deuxième quantité par un nombre (ex : a.2 + 202 – on peut penser ici que l'élève a traduit le calcul 200 . 2 + 202 en langage mathématique, en remplaçant a par 200, et en conservant le 202 dans sa formule).

5. Conclusion

Traditionnellement, la plupart des curricula mathématiques séparent l'étude de l'arithmétique et de l'algèbre, l'arithmétique étant de la responsabilité des apprentissages du primaire alors que l'algèbre est réservée aux élèves de début d'enseignement secondaire. Des recherches récentes s'accordent sur le fait qu'une révision des programmes de primaire en vue de laisser place au développement de la pensée algébrique des élèves peut être bénéfique pour l'approfondissement de leurs connaissances des nombres en général (Cai, Knuth, 2011). Les travaux menés dans ce sens par Radford et ses collaborateurs (2006, 2008, 2009 & 2014) montrent que les situations de dénombrement impliquant des suites arithmétiques sont des environnements propices au développement de cette pensée.

Les programmes de Belgique francophone autorisent l'exploitation de situations de dénombrement, en proposant de les travailler à la fin de l'enseignement primaire (à travers des exploitations numériques) et au début de l'enseignement secondaire (où l'accent sera mis sur l'élaboration d'une formule permettant de généraliser le phénomène à tous les cas possibles).

C'est dans ce contexte que se situe la réflexion présentée ici. Elle présente un certain nombre de limites. Tout d'abord, elle ne concerne 156 élèves de 11 et 14 ans issus 8 classes qui se sont prêté volontairement à l'exploitation, sous la forme d'un test papier-crayon, d'une seule situation impliquant des suites arithmétiques. Ensuite, l'analyse présentée dans cette communication est focalisée sur la manière dont les élèves expriment par écrit un moyen général pour déterminer n'importe quel terme de la suite étudiée. Les travaux menés par les chercheurs en sémiotique ont pourtant montré que les expressions orales et gestuelles des élèves sont également centrales pour exprimer leurs raisonnements (Radford, 2014) : dans cette étude, nous n'avons pas eu accès à ces canaux de communication. Il nous semble évident que les résultats auraient pu être différents si nous avions pu observer les élèves lors de la réalisation de la tâche.

Au-delà de ces limites, une série de constats méritent d'être discutés.

Les résultats nous amène à penser que la rupture introduite par les curricula du primaire et du secondaire est artificielle et ne rend pas compte des véritables capacités, même spontanées, des élèves de 11-12 ans dans ce domaine : dès la fin de la scolarité primaire, environ 40% des élèves parviennent sans aide à développer des raisonnements de nature algébrique, qu'ils peuvent exprimer par écrit. Après plus d'une année d'acquis algébriques, cette proportion s'élève à environ 50%.

Un autre constat important concerne les résultats obtenus par les autres élèves. Même après une année d'expérience algébrique et de travail approfondi sur les techniques qui y sont associées (calcul algébrique, résolution d'équations), près de 30% des élèves élaborent un raisonnement relevant soit de l'induction naïve, soit d'une généralisation arithmétique qui est limitée à la découverte de cas proches de ceux qui sont donnés au départ. Les outils cognitifs dont ces élèves font preuve ici ne leur permettent pas encore de répondre de manière satisfaisante à ces problèmes de dénombrement qui visent à les confronter à la notion d'indéterminée. Comme le confirment de nombreuses études (Kieran, 2007), un travail soutenu par des discussions entre pairs et avec l'enseignant peut permettre à ces élèves de progresser dans leur raisonnement.

Outre cette difficulté à élaborer un raisonnement de nature algébrique, apparaissent des difficultés importantes des élèves débutant en algèbre pour exprimer, à l'aide du formalisme mathématique, leur raisonnement : à peine 1/3 des élèves de grade 8 parvient à symboliser correctement le raisonnement en utilisant spontanément la lettre. Près de 20% des élèves ne parviennent à développer le processus de nominalisation : ils n'expriment à l'aide de l'écriture mathématique que les opérations à réaliser au départ de l'inconnue, cette dernière n'apparaissant nulle part dans leur formule. D'autres élèves éprouvent des difficultés à exprimer une inconnue au départ d'une autre inconnue. Ces deux démarches sont pourtant essentielles dans d'autres domaines abordés au début de l'enseignement secondaire, en particulier lors de la mise d'un problème en équation (Duval, 2002 ; Radford, 2002). Il nous semble que ces problèmes d'écriture doivent faire l'objet d'un enseignement beaucoup plus approfondi, qui mériterait sans doute être amorcé dans un contexte arithmétique, dès l'école primaire (Cai & Knuth, 2011).

Si de nombreux résultats montrent que les activités de réflexion sur les suites arithmétiques peuvent être porteuses pour aider les élèves à développer leur pensée algébrique, un travail important d'information voire même de formation est nécessaire pour amener les enseignants du primaire et du secondaire à poursuivre, chacun avec leurs objectifs spécifiques, cet ambitieux projet auprès de leurs élèves. Des recherches centrées plus spécifiquement sur cette question nous paraissent essentielles pour permettre d'amener in fine davantage d'élèves à maitriser pleinement tant les concepts et procédures algébriques élémentaires.

6. Références

Cai, J., & Knuth, E. (2011). Early algebraization. New York: Springer.

Duval, R. (2002, décembre). *L'apprentissage de l'algèbre et le problème cognitif de la désignation des objets.* Actes du séminaire Franco-italien sur l'enseignement de l'algèbre. Irem de Nice.

Dörfler, W. (1991). Forms and means of generalization in mathematics. In A. J. Bishop, S.Mellin-Olsen and J. Van Dormolen (Eds.), *Mathematical knowledge: its growth through teaching*, Dordrecht, Kluwer Academic Publishers.p. 63-85.

Julo, J. (1996). *Représentation des problèmes et réussite en mathématiques. Un apport de la psychologie cognitive à l'enseignement.* Rennes : Presses universitaires.

Kieran, C. (2007). Learning and teaching algebra at the middle school through college levels: Building meaning for symbols and their manipulation. In F. K. Lester (Ed.), *Second handbook of research on mathematics teaching and learning* (pp. 707-762). Greenwich, CT: Information Age Publishing.

Koedinger, K & Nathan, M. (2004). The real story behind story problems. Effects of representations on quantitative reasoning. *Journal of the Learning Sciences, 13(2),* 129-164.

Radford, L. (2002). On heroes and the collapse of narratives: a contribution to the study of symbolic thinking. Proceedings of the 16th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, PME 26, Anne D. Cockburn and Elena Nardi (eds.), Vol. 4, pp. 81-88.

Radford, L. (2006). Algebraic Thinking and the Generalization of Patterns: A Semiotic Perspective. In S. Alatorre, J. L. Cortina, M. Sáiz, A. Méndez (Eds.), Proceedings of the 28th Conference of the International Group for the Psychology of Mathematics Education, North American Chapter, Mérida: Universidad Pedagógica Nacional, November 9 – 12, Vol. 1, pp. 2-21.

Radford, L. (2008). Iconicity and Contraction: A Semiotic Investigation of Forms of Algebraic Generalizations of Patterns In Different Contexts. ZDM – The International Journal on Mathematics Education. DOI 10.1007/s11858-007-0061-0.

Radford, L. (2014). The progressive development of early embodied algebraic thinking. Mathematics Education Research Journal, 26, 257-277.

Radford, L., Miranda, I., & Demers, S. (2009). Processus d'abstraction en mathématiques. Ottawa: Centre franco-ontarien de ressources pédagogiques, Imprimeur de la Reine pour l'Ontario.

Squalli, H. (à paraitre, octobre). La généralisation algébrique comme abstraction d'invariants essentiels. Actes de l'Espace Mathématique Francophone. Alger.