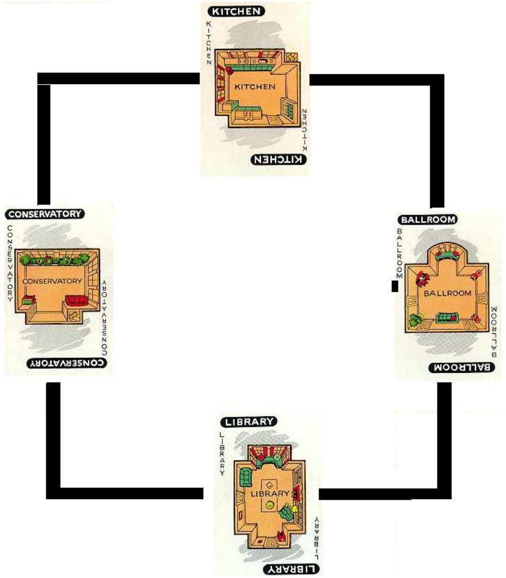
MATHÉMAGIE
L'art de la divination

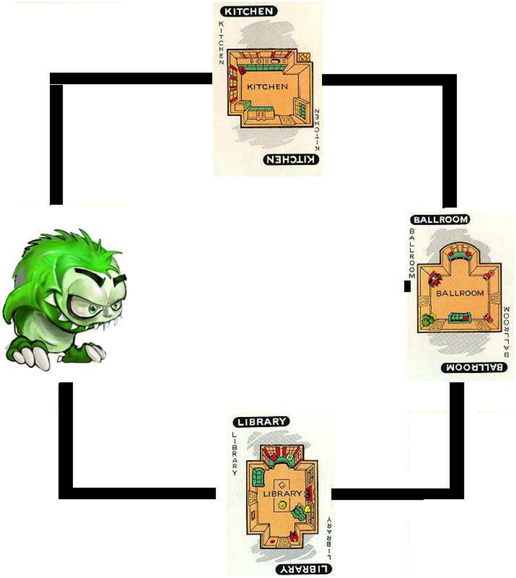
Élise VANDOMME
En collaboration avec Michel RIGO

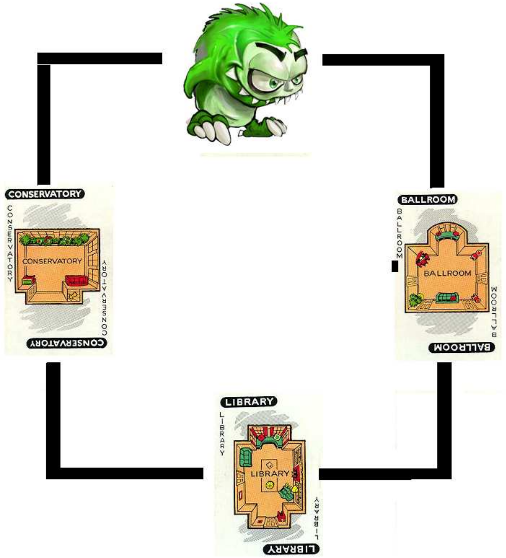
Neufchâteau – Vendredi 22 janvier 2016

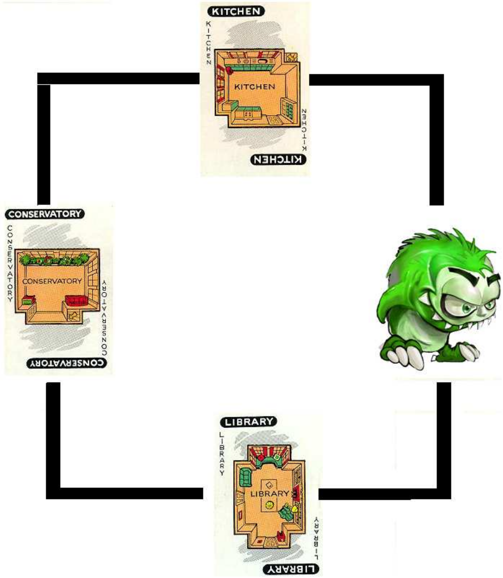
Cluedo

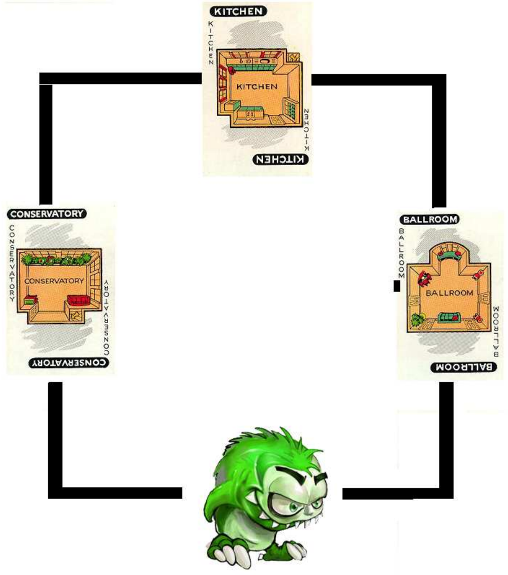
HALL
BIBLIOTHÈQUE
SALLE DE BILLARD
SALLE A MANGER
Cluedo
GRAND SALON
CUISINE
VERANDA
DEPART

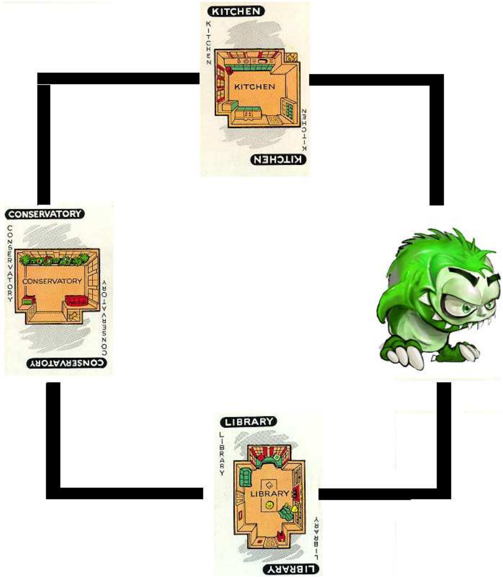

KITCHEN
CONSERVATORY
BALLROOM
LIBRARY

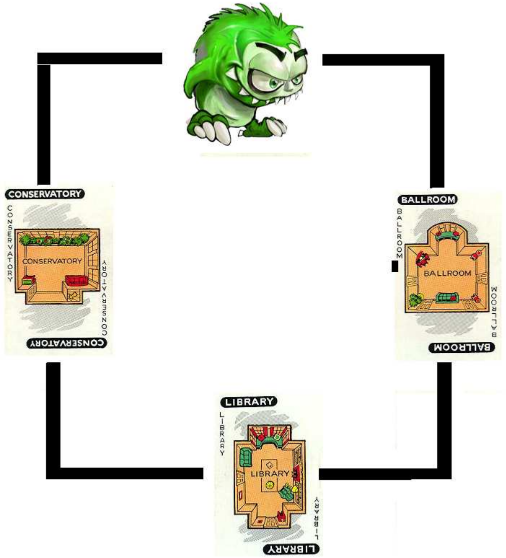

KITCHEN
BALLROOM
LIBRARY

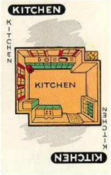

CONSERVATORY
BALLROOM
LIBRARY


KITCHEN
CONSERVATORY
LIBRARY

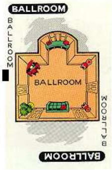

KITCHEN
CONSERVATORY
BALLROOM


KITCHEN
CONSERVATORY
LIBRARY

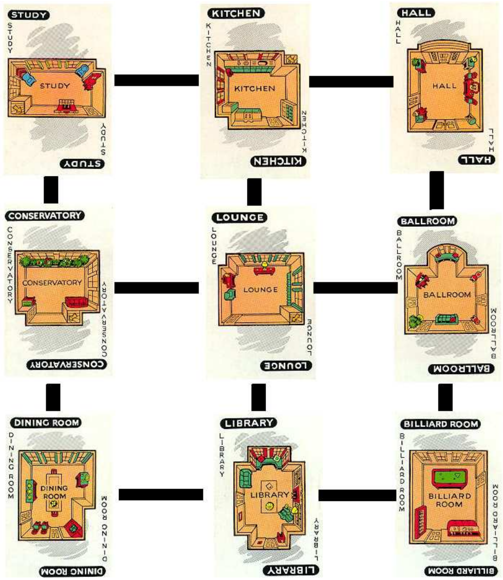

CONSERVATORY
BALLROOM
LIBRARY

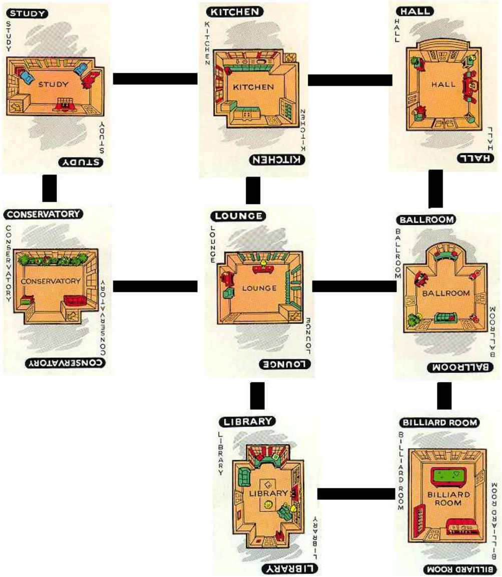

KITCHEN
KITCHEN
KITCHEN

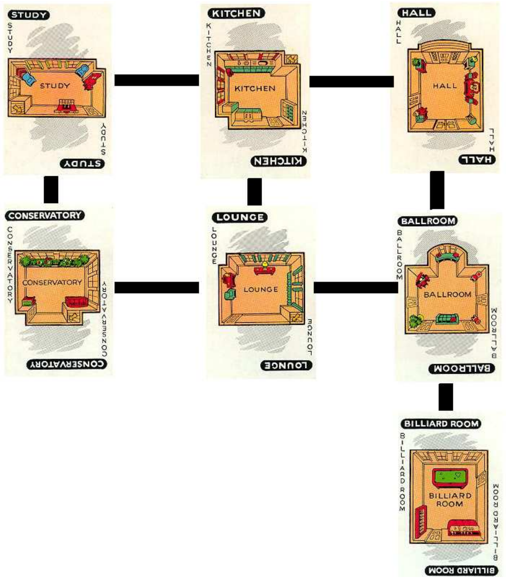

CONSERVATORY
CONSERVATORY
CONSERVATORY

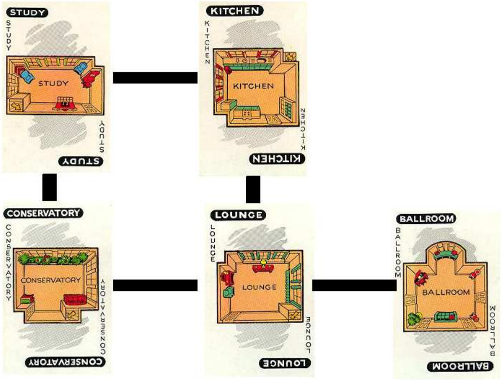

BALLROOM
BALLROOM
BALLROOM

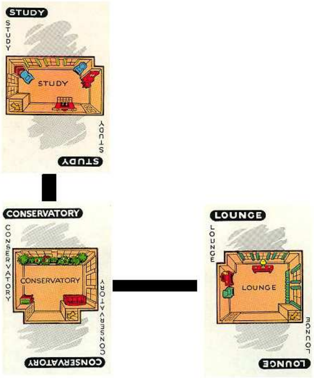

LIBRARY
LIBRARY
LIBRARY


STUDY
KITCHEN
HALL
CONSERVATORY
LOUNGE
BALLROOM
DINING ROOM
LIBRARY
BILLIARD ROOM

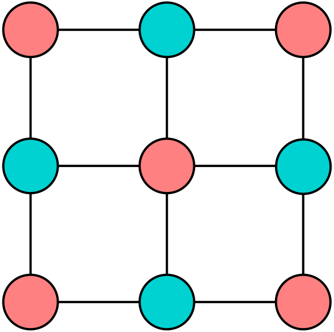

STUDY
KITCHEN
HALL
CONSERVATORY
LOUNGE
BALLROOM
LIBRARY
BILLIARD ROOM


STUDY
KITCHEN
HALL
CONSERVATORY
LOUNGE
BALLROOM
BILLIARD ROOM


STUDY
KITCHEN
CONSERVATORY
LOUNGE
BALLROOM


STUDY
CONSERVATORY
LOUNGE


CONSERVATORY
CONSERVATORY
CONSERVATORY
CONSERVATORY
CONSERVATORY



Applications

- Problème d'assignation optimale
- Ouvriers et tâches à accomplir
- Donneurs d'organes et malades en attente d'une greffe
- Attribution d'adresses sur le réseau

Theorem

Un graphe est 2-colorable si et seulement s'il est biparti.

L'art de la divination

Divination

1) Choisir un nombre de 3 chiffres
   Par exemple : 712
   Le chiffre des unités diffère de celui des centaines

2) Considérer le miroir du nombre choisi
   Par exemple : 217

3) Soustraire : “le plus grand − le plus petit"

4) Additionner le résultat à son miroir

Remarque : Si le résultat n’a que 2 chiffres
Par exemple, 17 = 017, son miroir est 710

5) Se concentrer !

Divination

Pourquoi cela fonctionne-t-il ?

Soient a, b, c entre 0 et 9,

$$abc, \text{ supposons } a > c$$

"le plus grand - le plus petit" = "*abc*-*cba*"

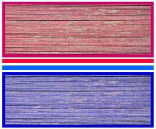
$$\begin{array}{rccc} & a & b+10 & c+10 \\ - & c+1 & b+1 & a \\ \hline & (a-c-1) & 9 & (10+c-a) \end{array}$$

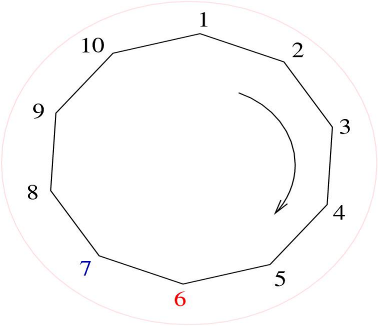
Si maintenant, on ajoute à ce dernier son miroir :

$$\begin{array}{rccc} & & 1 & \\ & (a-c-1) & 9 & (10+c-a) \\ + & (10+c-a) & 9 & (a-c-1) \\ \hline 1 & 0 & 8 & 9 \end{array}$$

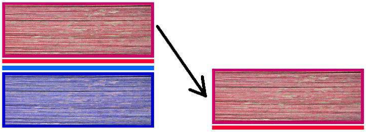
Tour de cartes : les appartements royaux

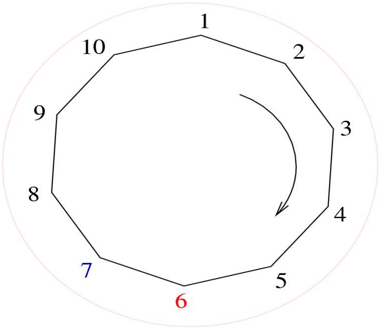
Que se passe-t-il quand on coupe le jeu ?



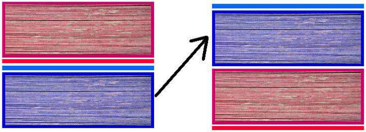


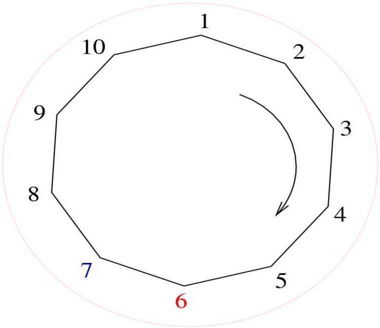
Que se passe-t-il quand on coupe le jeu ?





Que se passe-t-il quand on coupe le jeu ?





Divination

Choisissez un nombre entre 1 et 63.

Divination

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

Divination

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

Divination

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

Divination

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

Divination

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Divination

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

Divination

Ecrire les nombres en base 10

	1000	100	10	1
19			1	9
$\vdots$				

car $19 = 1 \times 10 + 9 \times 1$

Ecrire les nombres en base 2

	32	16	8	4	2	1
5				1	0	1
$\vdots$						
19		1	0	0	1	1
$\vdots$						
45	1	0	1	1	0	1
$\vdots$						

car

$5 = 1 \times 4 + 1 \times 1$

$19 = 1 \times 16 + 1 \times 2 + 1 \times 1$

Divination en base 2

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63

1	11	101	111	1001	1011	1101	1111
10001	10011	10101	10111	11001	11011	11101	11111
100001	100011	100101	100111	101001	101011	101101	101111
110001	110011	110101	110111	111001	111011	111101	111111

$$45 = 1 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$$

Divination en base 2

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63

10	11	110	111	1010	1011	1110	1111
10010	10011	10110	10111	11010	11011	11110	11111
100010	100011	100110	100111	101010	101011	101110	101111
110010	110011	110110	110111	111010	111011	111110	111111

$$45 = 1 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$$

Divination en base 2

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63

100	101	110	111	1100	1101	1110	1111
10100	10101	10110	10111	11100	11101	11110	11111
100100	100101	100110	100111	101100	101101	101110	101111
110100	110101	110110	110111	111100	111101	111110	111111

$$45 = 1 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$$

Divination en base 2

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63

1000	1001	1010	1011	1100	1101	1110	1111
11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111
101000	101001	101010	101011	101100	101101	101110	101111
111000	111001	111010	111011	111100	111101	111110	111111

$$45 = 1 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$$

Divination en base 2

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

10000	10001	10010	10011	10100	10101	10110	10111
11000	11001	11010	11011	11100	11101	11110	11111
110000	110001	110010	110011	110100	110101	110110	110111
111000	111001	111010	111011	111100	111101	111110	111111

$$45 = 1 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$$

Divination en base 2

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

100000	100001	100010	100011	100100	100101	100110	100111
101000	101001	101010	101011	101100	101101	101110	101111
110000	110001	110010	110011	110100	110101	110110	110111
111000	111001	111010	111011	111100	111101	111110	111111

$$45 = 1 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$$

Divination en base 2

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63

100000	100001	100010	100011	100100	100101	100110	100111
101000	101001	101010	101011	101100	101101	101110	101111
110000	110001	110010	110011	110100	110101	110110	110111
111000	111001	111010	111011	111100	111101	111110	111111

$$45 = 1 \times 32 + 0 \times 16 + 1 \times 8 + 1 \times 4 + 0 \times 2 + 1 \times 1$$

$$\mathrm{rep}_2(45) = 101101$$

Divination de Léonardo de Pisa

La suite des nombres de Fibonacci

$$F = (F_i)_{i\geq 0} := (1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, \ldots)$$

est définie par

$$F_0 = 1, F_1 = 2 \text{ et } F_{i+2} = F_{i+1} + F_i \text{ pour tout } i \geq 0.$$

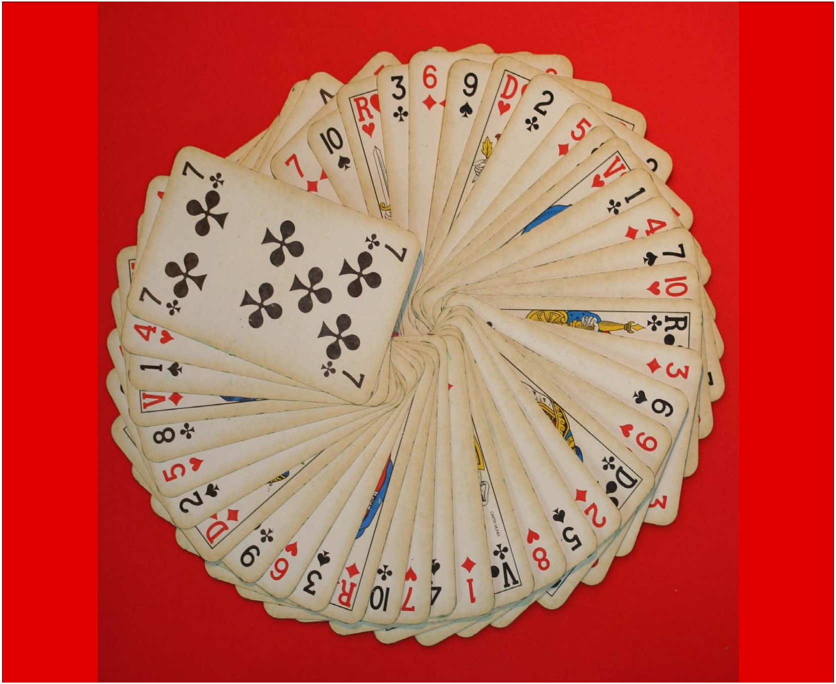
13	8	5	3	2	1	
					ε	0
					1	1
				1	0	2
			1	0	0	3
			1	0	1	4
						$\vdots$
1	0	0	1	0	1	17

$\mathrm{rep}_F(17) = 100101$

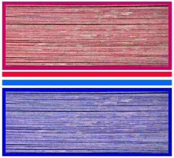
Tours de cartes


Le chapelet
de Si Stebbins ...

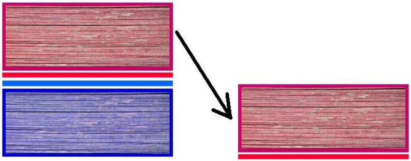

Le chapelet
de Si Stebbins ...



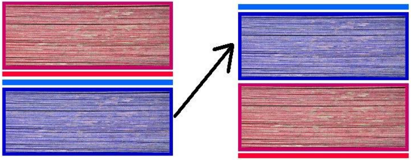
Que se passe-t-il quand on coupe le jeu ?



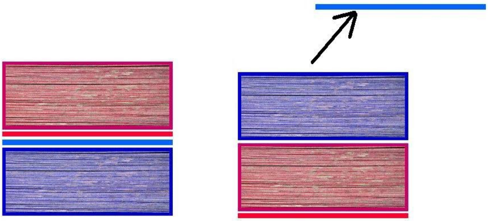
Que se passe-t-il quand on coupe le jeu ?



Que se passe-t-il quand on coupe le jeu ?

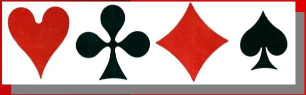


Que se passe-t-il quand on coupe le jeu ?



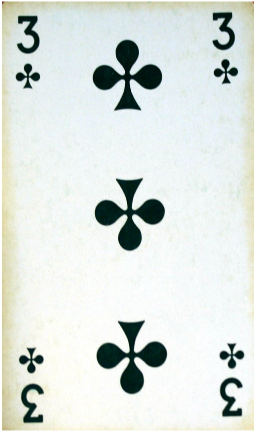
Classer les cartes au préalable !

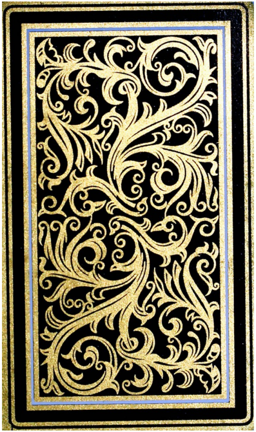
Classer les cartes au préalable !

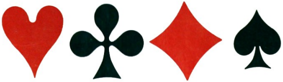


1 – 4 – 7 – 10 – Roi – 3 – 6 – 9 – Dam - 2 – 5 – 8 – Val

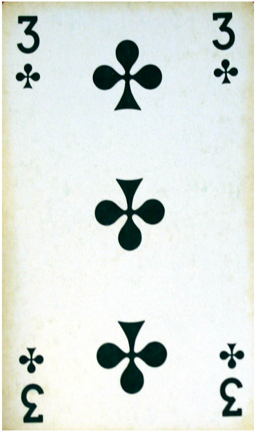
Quelle carte suit ?

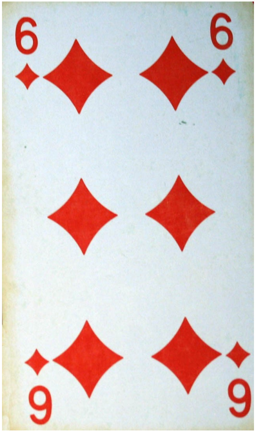


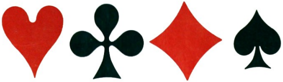




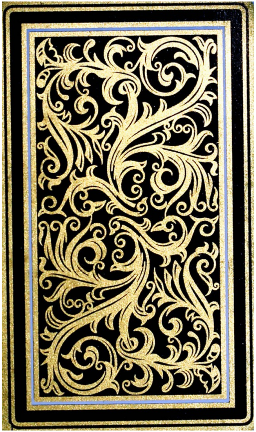
Quelle carte suit ?

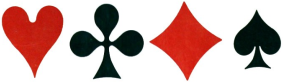




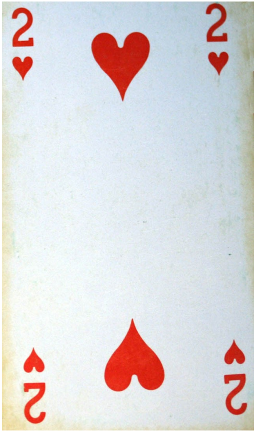


Quelle carte suit ?





Quelle carte suit ?



Le chapelet de de Bruijn ...

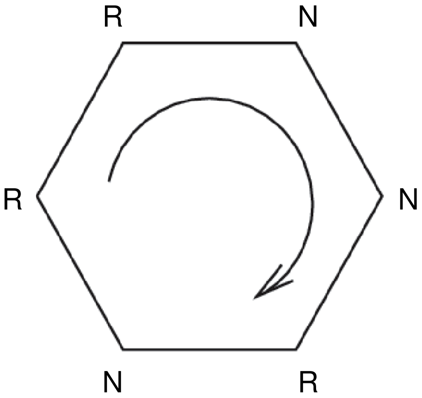

Le chapelet
de de Bruijn ...

Mots circulaires de de Bruijn

Nicolas de Bruijn

Mots circulaires de de Bruijn

RNNRNR - NNRNRR - NRRNNR - . . .



Facteurs

RNNR
NNRN
NRNR
RNRR
NRRN
RRNN

Mots circulaires de de Bruijn

Soient p et $n > 1$.

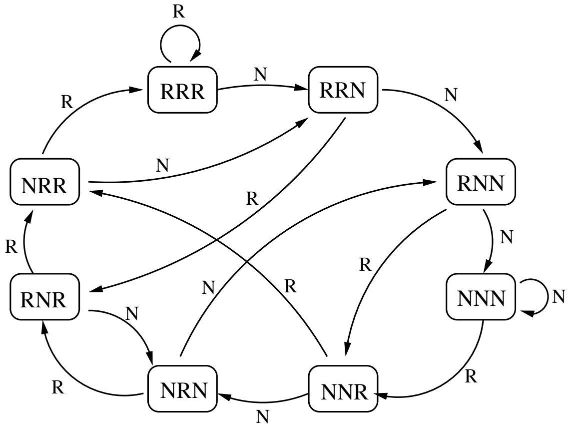
$B(p, n)$: mot circulaire le plus court contenant
tous les p^n facteurs de longueur n
sur un alphabet de p lettres.

Théorème

Pour tous $p, n > 1$, il existe un mot de de Bruijn $B(p, n)$ de longueur p^n.

Mots circulaires de de Bruijn

Exemple : $n = 3$, $p = 2$, $\{\mathrm{R}, \mathrm{N}\}$



Facteurs

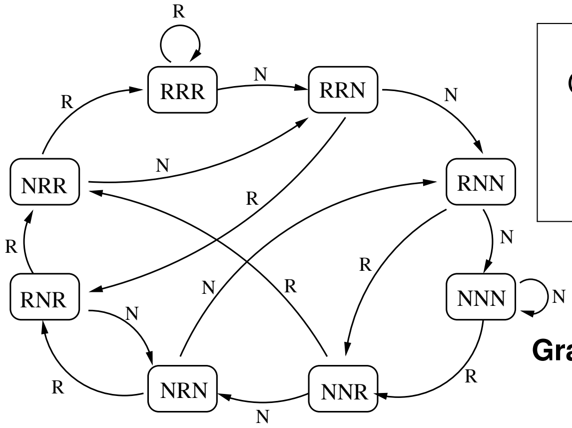
RRR
RRN
RNN
NNN
NNR
NRR
NRN
RNR

Graphe hamiltonien

$B(2,3) =$NNNRNRRR

Mots circulaires de de Bruijn

Exemple : $n = 4$, $p = 2$, $\{\mathrm{R}, \mathrm{N}\}$



Chaque arc donne un unique facteur !

Graphe eulérien

$B(2,4) =$RRRRNRNNRRNNNNRN

Mots circulaires de de Bruijn

Exemple : $n = 5$, $\{\mathrm{R}, \mathrm{N}\}$

RRRRRNNNNNRNNNRR
NNRNRNNRRRNRNRRN

Facteurs

RRRRR
RRRRN
RRRNN
RRNNN
RNNNN
NNNNN
NNNNR
....

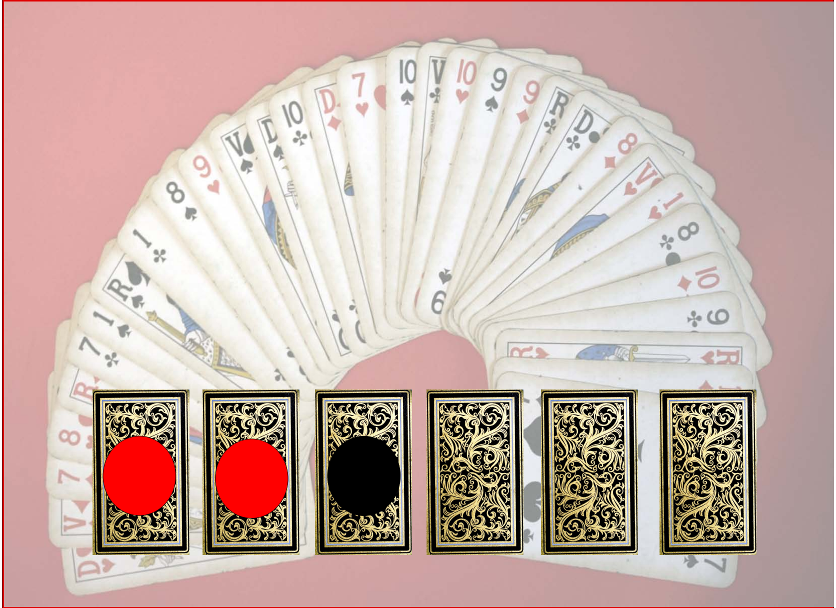
Mots circulaires de de Bruijn

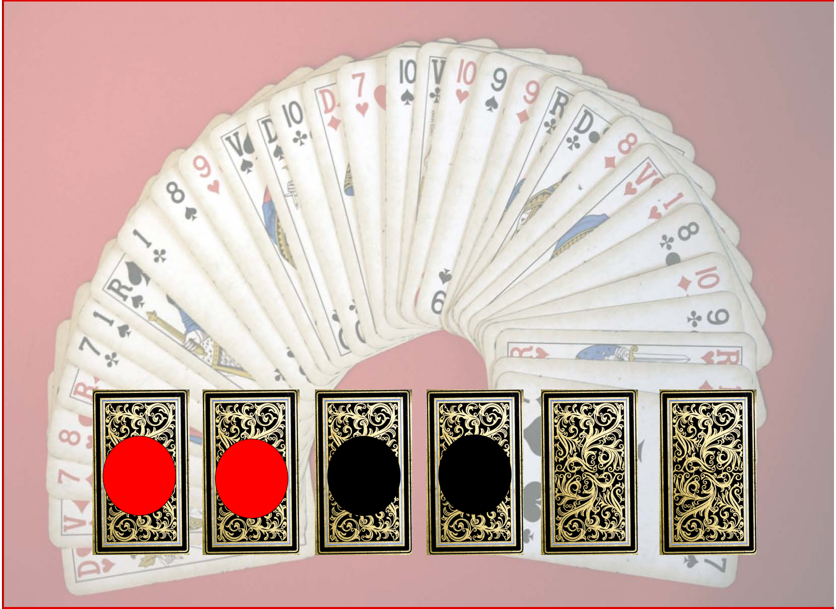
Exemple : $n = 5$, $\{\mathrm{R}, \mathrm{N}\}$

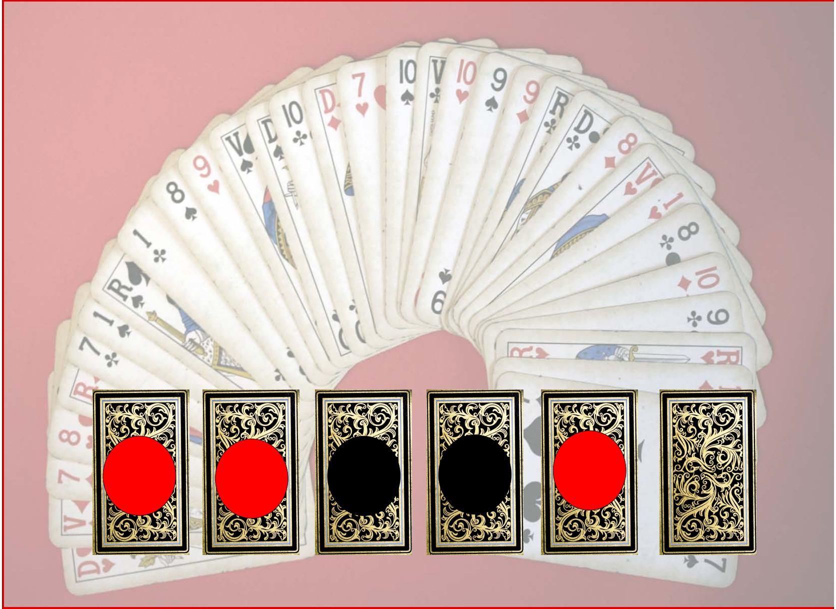
RRRRRNNNNNRNNNRR
NNRNRNNRRRNRNRRN

Facteurs

RRRRR
RRRRN
RRRNN
RRNNN
RNNNN
NNNNN
NNNNR
. . . .







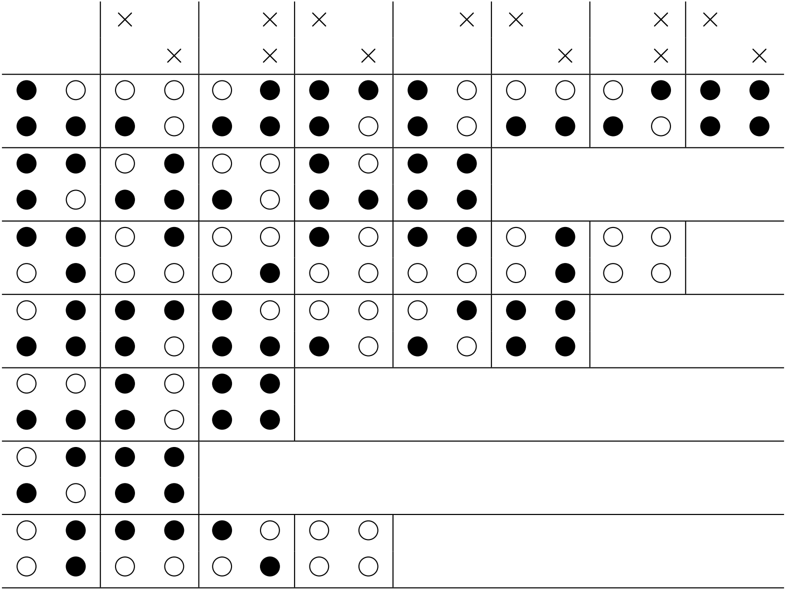
RRRRRNNNNNRNNNRRNNRNRNNRRRNRNRRN

Le barman aveugle avec des gants de boxe

Le challenge

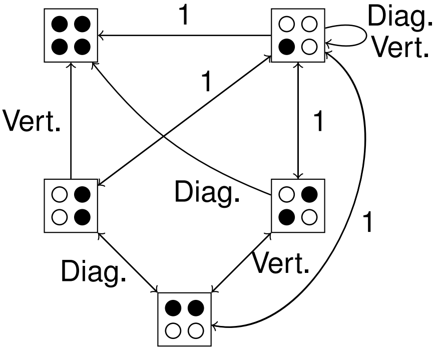
En 7 coups maximum, être capable de mettre les quatre récipients tous dans le même sens. . .

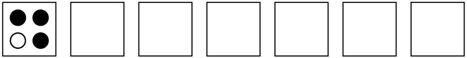
Le barman aveugle avec des gants de boxe



Le barman aveugle avec des gants de boxe

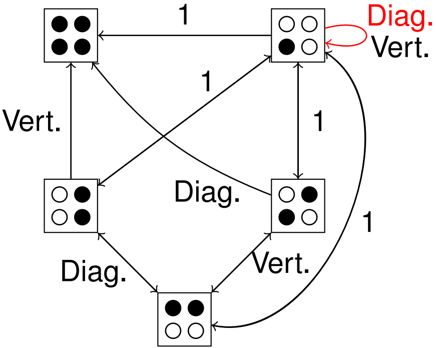
“diagonal - vertical - un seul - diagonal - vertical - diagonal”

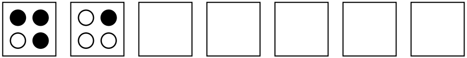




Le barman aveugle avec des gants de boxe

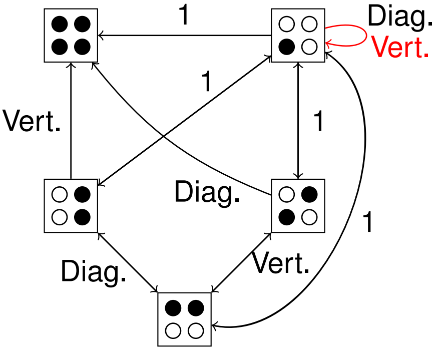
"diagonal - vertical - un seul - diagonal - vertical - diagonal".

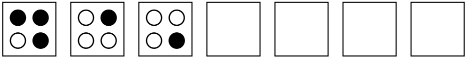




Le barman aveugle avec des gants de boxe

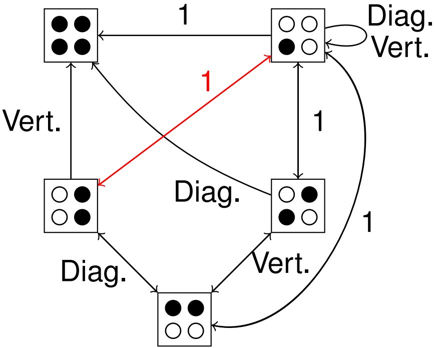
"diagonal - vertical - un seul - diagonal - vertical - diagonal".

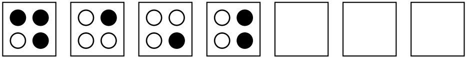




Le barman aveugle avec des gants de boxe

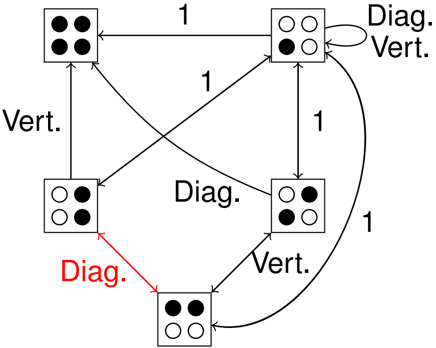
“diagonal - vertical - un seul - diagonal - vertical - diagonal”.

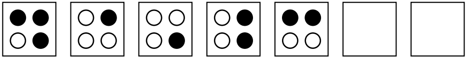




Le barman aveugle avec des gants de boxe

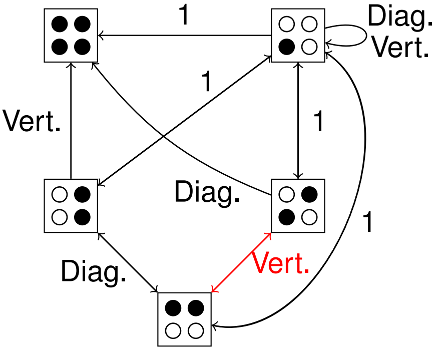
“diagonal - vertical - un seul - diagonal - vertical - diagonal”.

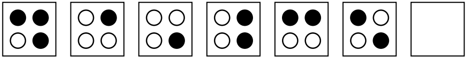




Le barman aveugle avec des gants de boxe

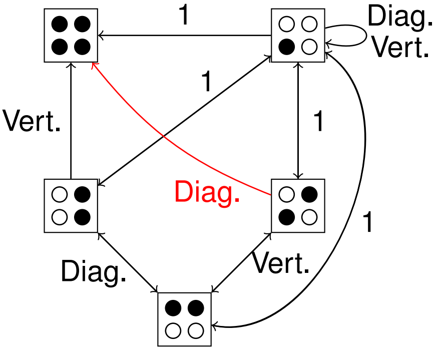
“diagonal - vertical - un seul - diagonal - vertical - diagonal”.

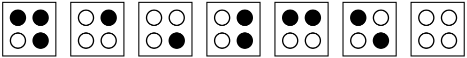




Le barman aveugle avec des gants de boxe

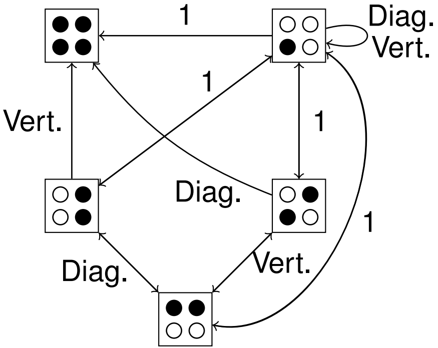
"diagonal - vertical - un seul - diagonal - vertical - diagonal".





Le barman aveugle avec des gants de boxe

“diagonal - vertical - diagonal - un seul - diagonal - vertical - diagonal”.



Le barman aveugle avec des gants de boxe

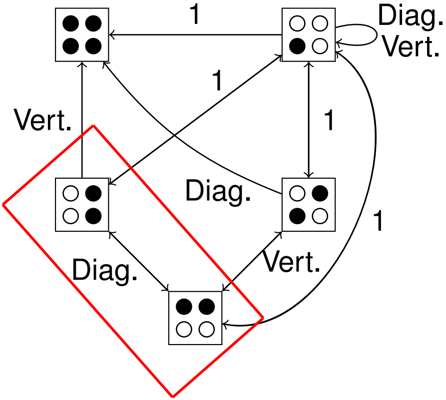
Variante

Faire tourner le plateau de 90° entre les coups.

Le barman aveugle avec des gants de boxe

Variante

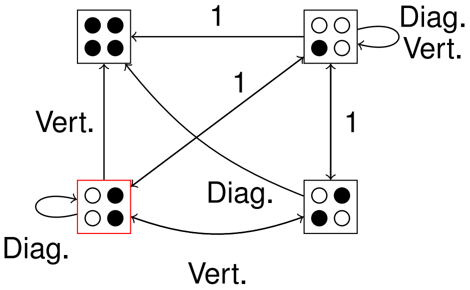
Faire tourner le plateau de 90° entre les coups.



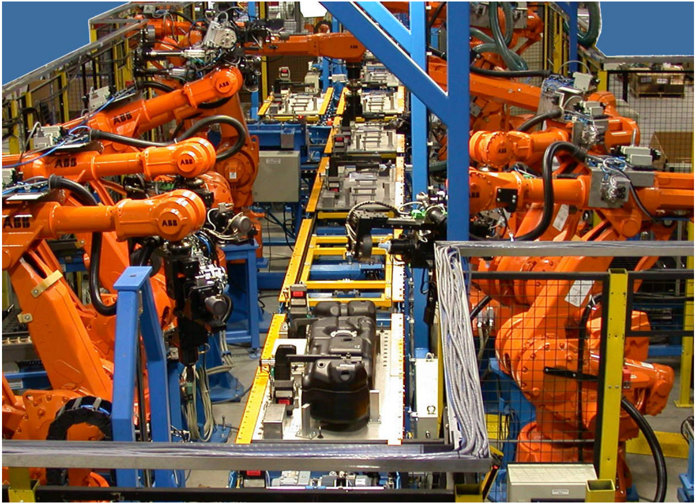
Le barman aveugle avec des gants de boxe

Variante

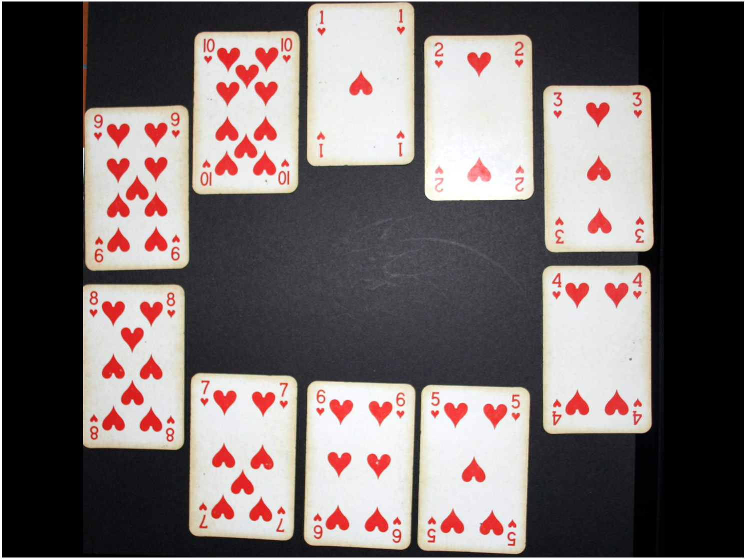
Faire tourner le plateau de 90° entre les coups.

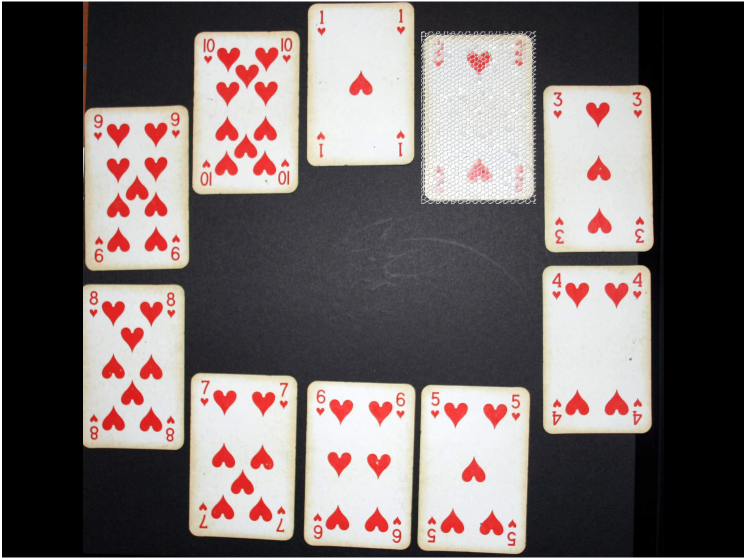


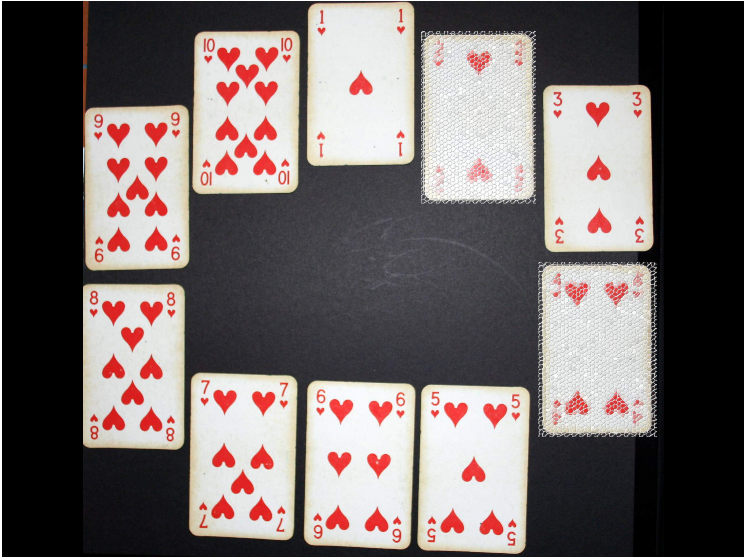
Applications

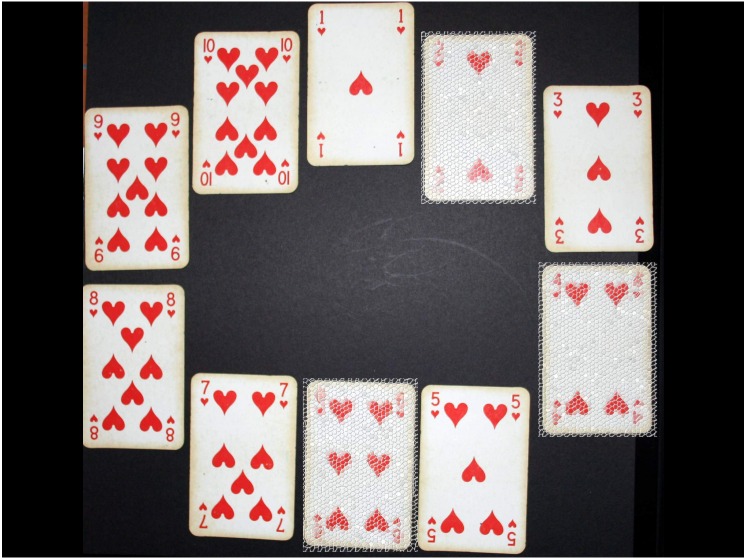


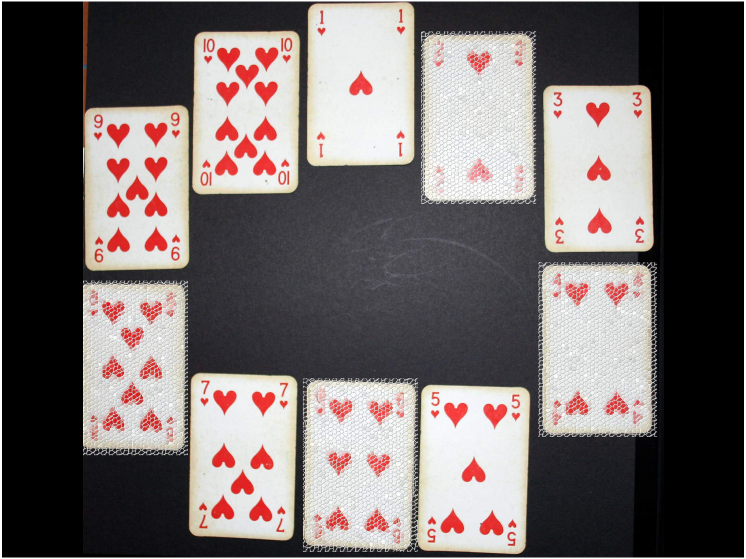
Le problème de Joséphus

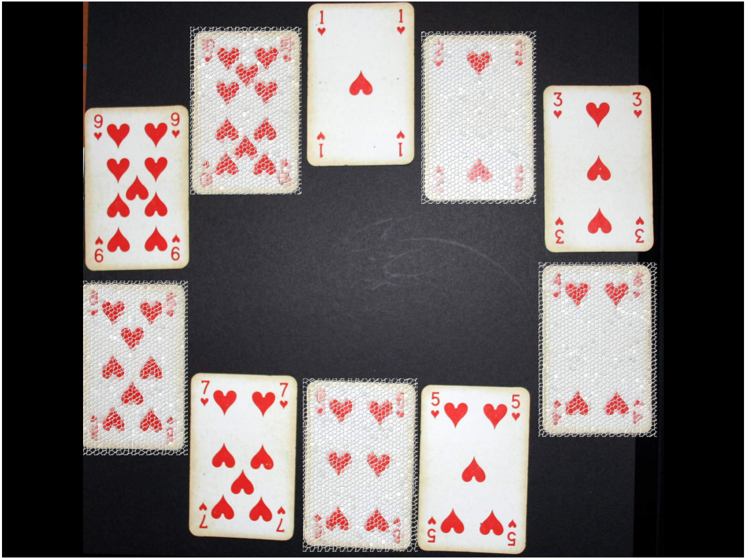


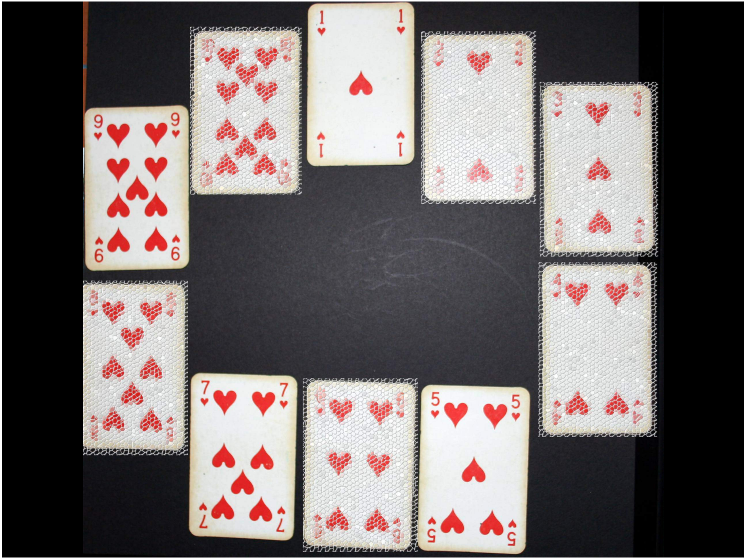


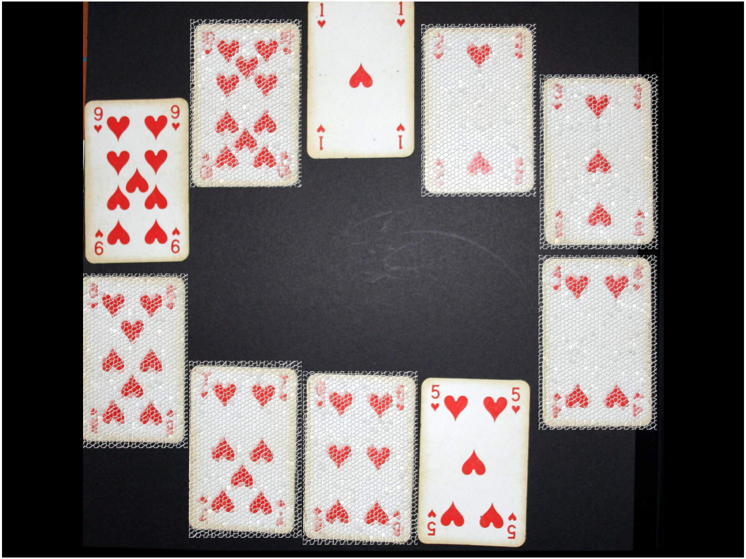


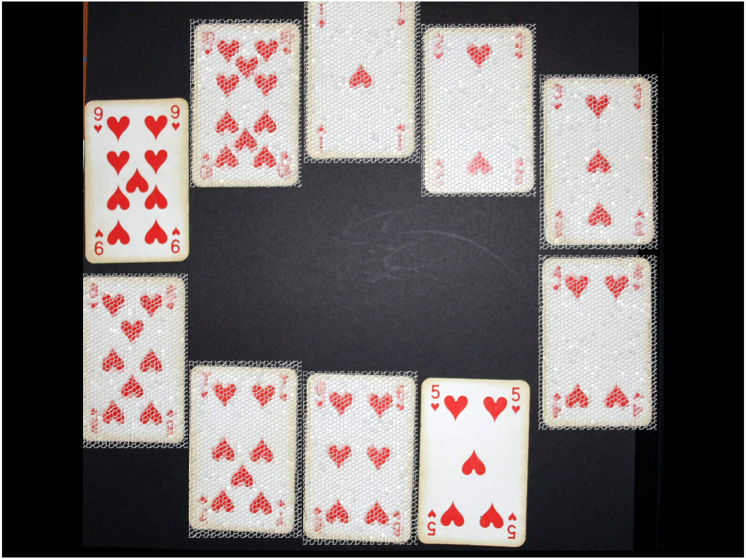


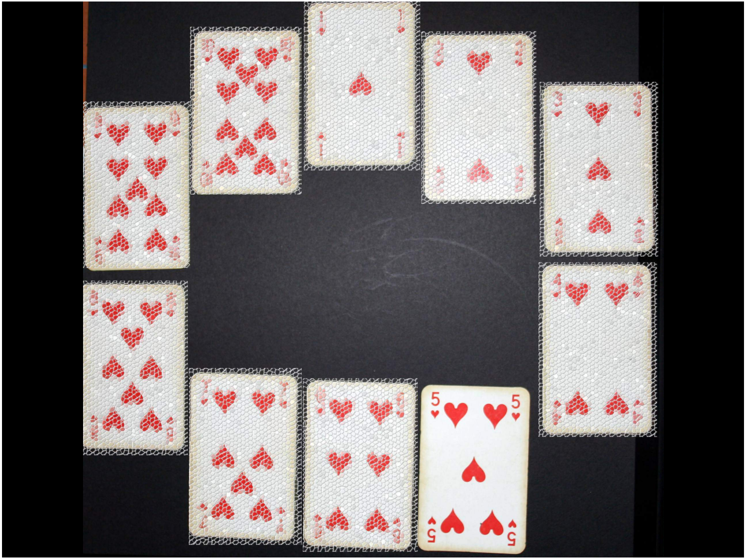





9
1
7
5







Josephus

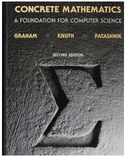
Débutons avec 31 cartes – $\{1, 2, 3, 4, 5, \dots\}$
et supprimons-en une sur deux.
Quelle sera la dernière carte ?

Josephus

Débutons avec 31 cartes – $\{1, 2, 3, 4, 5, \ldots\}$
et supprimons-en une sur deux.
Quelle sera la dernière carte ?

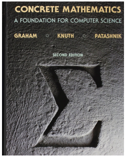
```
josephus.nb * - Wolfram Mathematica 10.2
le  Edit  Insert  Format  Cell  Graphics  Evaluation  Palettes  Window  Help

In[1]:= Needs["Combinatorica`"]

General::compat : Combinatorica Graph and Permutations functionality has been superseded by preloaded
    functionality. The package now being loaded may conflict with this. Please see the Compatibility Guide for details.

In[2]:= ? Josephus

Josephus[n, m] generates the inverse of the permutation defined by executing every mth member in a circle of n members. >>

In[3]:= Josephus[10, 2]

Out[3]= {8, 1, 6, 2, 10, 3, 7, 4, 9, 5}

In[4]:= Josephus[31, 2]

Out[4]= {16, 1, 24, 2, 17, 3, 28, 4, 18, 5, 25, 6, 19, 7,
  30, 8, 20, 9, 26, 10, 21, 11, 29, 12, 22, 13, 27, 14, 23, 15, 31}
```

Une récurrence



$$\begin{cases} J(1) = 1 \\ J(2m) = 2J(m) - 1, \text{ si } m \geq 1 \\ J(2m+1) = 2J(m) + 1, \text{ si } m \geq 1. \end{cases}$$

Une récurrence

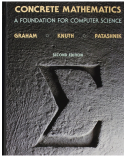


$$\begin{cases} J(1) = 1 \\ J(2m) = 2J(m) - 1, \text{ si } m \geq 1 \\ J(2m+1) = 2J(m) + 1, \text{ si } m \geq 1. \end{cases}$$

Si $n = 2^i + r$ avec $0 \leq r < 2^i$, alors

$$J(n) = J(2^i + r) = 2r + 1.$$

Une récurrence



$$\begin{cases} J(1) = 1 \\ J(2m) = 2J(m) - 1, \text{ si } m \geq 1 \\ J(2m+1) = 2J(m) + 1, \text{ si } m \geq 1. \end{cases}$$

Si $n = 2^i + r$ avec $0 \leq r < 2^i$, alors

$$J(n) = J(2^i + r) = 2r + 1.$$

L'écriture en base 2 à la rescousse :

$$\begin{aligned} \mathrm{rep}_2(n) &= x_i x_{i-1} \cdots x_0 \\ \mathrm{rep}_2(r) &= \quad x_{i-1} \cdots x_0 \\ \mathrm{rep}_2(J(n)) &= x_{i-1} \cdots x_0 1 \\ &= x_{i-1} \cdots x_0 x_i \end{aligned}$$

31	11111	J(31)	11111	31	31-0
30	11110	J(30)	11101	29	30-1
29	11101	J(29)	11011	27	29-2
28	11100	J(28)	11001	25	28-3
27	11011	J(27)	10111	23	27-4
26	11010	J(26)	10101	21	26-5

Un dernier tour pour la route !

Les dossiers de La Recherche Août–Septembre 2013

- Choisissez une carte.

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - V - D - R$$

- Ajoutez la valeur de la carte à celle qui suit immédiatement.
- Multipliez le résultat par 5.
- Ajoutez la valeur de la couleur.

$$\clubsuit = 6 \qquad \diamondsuit = 7 \qquad \heartsuit = 8 \qquad \spadesuit = 9$$

Un dernier tour pour la route !

Les dossiers de La Recherche Août–Septembre 2013

- Choisissez une carte.

$$1 - 2 - 3 - 4 - 5 - 6 - 7 - 8 - 9 - 10 - V - D - R$$

- Ajoutez la valeur de la carte à celle qui suit immédiatement.
- Multipliez le résultat par 5.
- Ajoutez la valeur de la couleur.

$$\clubsuit = 6 \qquad \diamondsuit = 7 \qquad \heartsuit = 8 \qquad \spadesuit = 9$$

$$((v + v + 1) \times 5) + c = 10v + 5 + c = 10(v + 1) + c - 5$$

A vous de jouer !

http://www.discmath.ulg.ac.be