

# Méthodes de calcul des sources pour des bobines non-maillées avec la formulation éléments finis $\mathbf{A} - V$

P. Ferrouillat<sup>1,2</sup>, C. Guérin<sup>2</sup>, G. Meunier<sup>1</sup>, B. Ramdane<sup>1</sup>, P. Dular<sup>3</sup>, P. Labie<sup>1</sup> et D. Dupuy<sup>2</sup>

<sup>1</sup>Université Grenoble Alpes, CNRS, G2Elab, Grenoble, France

<sup>2</sup>CEDRAT, Meylan, France

<sup>3</sup>Université de Liège, Liège, Belgique

E-mail : pauline.ferrouillat@g2elab.grenoble-inp.fr

**Résumé** — Dans cet article, différents calculs du champ électromagnétique source sont décrits pour la formulation éléments finis  $\mathbf{A} - V$  avec des bobines non-maillées. Ces différents calculs sont appliqués sur une machine asynchrone pour définir la meilleure approche. Cette source doit pouvoir ensuite être utilisée sur un domaine réduit fixe ou en mouvement.

## I. INTRODUCTION

Les formulations en  $\mathbf{T} - \phi$  et en  $\mathbf{T} - \phi_r$  sont largement utilisées. Cependant, ces formulations requièrent l'introduction de coupures artificielles [1], contrairement à la formulation en  $\mathbf{A} - V$  [2]. En général, les bobines sont maillées avec la formulation en  $\mathbf{A} - V$ , mais dans cet article, la prise en compte des bobines non-maillées est proposée. Différents calculs de source pour des bobines non-maillées sont décrits pour la formulation en  $\mathbf{A} - V$  [3]. Ces calculs sont étudiés sur une machine asynchrone pour définir la meilleure source. Enfin, cette source est calculée par domaine, fixe ou en mouvement.

## II. FORMULATION EN $\mathbf{A} - V$

Les potentiels vecteur magnétique  $\mathbf{A}$  et scalaire électrique  $V$  sont définis en magnétodynamique tels que [2] :

$$\mathbf{B} = \mathbf{rot} \mathbf{A}, \quad (1)$$

$$\mathbf{E} = -\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{grad} V, \quad (2)$$

avec  $\mathbf{B}$  l'induction magnétique,  $\mathbf{E}$  le champ électrique. Le potentiel  $\mathbf{A}$  est discrétisé avec les éléments d'arêtes, alors que  $V$  est discrétisé avec les éléments nodaux.

Soit le domaine  $\Omega$  de frontière  $\Gamma$ . Soit  $\mathbf{n}$  la normale à  $\Gamma$ . Soit  $\Omega_b$  le domaine des bobines. En appliquant la méthode de Galerkin sur les équations de Maxwell avec les potentiels  $\mathbf{A}$  (1) et  $V$  (2), la formulation en  $\mathbf{A} - V$  en magnétodynamique sur le domaine  $\Omega$  est telle que [3] :

$$\int_{\Omega} \left[ \nu \mathbf{rot} \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} + \sigma \mathbf{W}_k \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} V \right) \right] d\Omega \quad (3a)$$

$$= \int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{H}_s \, d\Omega \quad (3b)$$

$$+ \int_{\Gamma} \mathbf{W}_k \cdot (\mathbf{n} \times \mathbf{H}_s) \, d\Gamma, \quad \forall k = 1 \dots n_a, \quad (3c)$$

$$\int_{\Omega} \sigma \mathbf{grad} N_l \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} V \right) d\Omega = 0, \quad \forall l = 1 \dots n_n, \quad (4)$$

avec  $\mathbf{H}_s$  le champ magnétique source,  $\nu$  la réductivité,  $\sigma$  la conductivité,  $n_n$  et  $n_a$  le nombre de nœuds et d'arêtes

du maillage,  $N_l$  et  $\mathbf{W}_k$  les fonctions de forme nodale et d'arête. Les termes de droite (3b)–(3c) sont déduits de  $\int_{\Omega} \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{J}_s \, d\Omega$ , avec  $\mathbf{J}_s$  la densité de courant source telle que  $\mathbf{J}_s = \mathbf{rot} \mathbf{H}_s$ . Le terme (3c) avec la condition  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_s$  est nul quand  $\Gamma$  est à l'infini. Mais quand il est intégré sur un domaine réduit, il ne s'annule pas.

## III. CALCUL DES TERMES SOURCES

Pour des bobines non-maillées, le champ magnétique source  $\mathbf{H}_s$  et le potentiel vecteur magnétique source  $\mathbf{A}_s$  sont calculés analytiquement avec la loi de Biot-Savart [4] tels qu'avec  $\nu_0$  la réductivité du vide :

$$\mathbf{H}_s = \nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_s. \quad (5)$$

Or,  $\mathbf{A}_s$  et  $\mathbf{H}_s$  doivent être évalués à chaque fois qu'ils sont utilisés. Pour éviter de les recalculer, trois calculs de termes sources sont présentés dans cette partie.

Le champ magnétique source discrétisé  $\mathbf{H}_j$  est interpolé à partir d' $\mathbf{H}_s$  avec la norme de  $\mathbf{L}^2(\Omega)$  telle que [3] :

$$\int_{\Omega} \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{H}_j \, d\Omega = \int_{\Omega} \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{H}_s \, d\Omega. \quad (6)$$

L'espace des éléments d'arêtes est  $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ , et non  $\mathbf{L}^2(\Omega)$ . Cependant, l'interpolation d' $\mathbf{H}_j$  avec la norme ou semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$  nécessite des sources impossibles à calculer analytiquement pour des bobines non-maillées. Dans la suite, le potentiel vecteur source discrétisé  $\mathbf{A}_j$  est interpolé sur le bon espace.

La pré-résolution d' $\mathbf{A}_j$  interpolée à partir d' $\mathbf{A}_s$  et d' $\mathbf{H}_s$  avec la norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$  est telle que [5] :

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}_j \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{A}_j \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\nu_0} \mathbf{rot} \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{H}_s \, d\Omega + \int_{\Omega} \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{A}_s \, d\Omega. \quad (7)$$

Alors que la pré-résolution d' $\mathbf{A}_j$  interpolée à partir d' $\mathbf{H}_s$  avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$  est telle que [3] :

$$\int_{\Omega} \mathbf{rot} \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A}_j \, d\Omega = \int_{\Omega} \frac{1}{\nu_0} \mathbf{rot} \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{H}_s \, d\Omega. \quad (8)$$

Les équations (6)–(7)–(8) sont les pré-résolutions des termes sources. La formulation en  $\mathbf{A} - V$  avec ces termes sources est résolue avec les équations (3)–(4) en remplaçant  $\mathbf{H}_s$  dans le terme (3b)–(3c) par  $\mathbf{H}_j$  ou  $\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j$  (5).

#### IV. CALCUL DE LA SOURCE SUR UN DOMAINE RÉDUIT

Soit  $\Omega_{red}$  un domaine réduit tel que  $\Omega_b \subset \Omega_{red} \subset \Omega$ , avec sa frontière  $\Gamma_{red}$  telle que  $\Omega_b$  n'est pas en contact avec  $\Gamma_{red}$ . En général, les machines ont une partie du domaine en mouvement,  $\Omega_r$ , et une autre fixe,  $\Omega_s$ . Quand  $\Omega_r$  bouge, la continuité des sources doit être assurée à l'interface entre  $\Omega_r$  et  $\Omega_s$ . Pour ne pas l'assurer, la source est calculée sur un domaine réduit  $\Omega_r$  ou  $\Omega_s$ .

Si la source est calculée sur  $\Omega_{red}$ , les termes (3b)–(3c) de la formulation en  $\mathbf{A} - V$  ne sont plus intégrés sur  $\Omega$  et  $\Gamma$ , mais sur  $\Omega_{red}$  et  $\Gamma_{red}$ . La condition  $\mathbf{n} \times \mathbf{H}_s$  du terme (3c) n'est pas nulle, car  $\Gamma_{red}$  n'est pas l'infini. Le terme (3c) est simplifié en une intégrale volumique.

Les fonctions de forme d'arêtes  $\mathbf{W}_k$  sont divisées telles que  $\mathbf{W}_k = \mathbf{W}_{\omega_k} + \mathbf{W}_{\gamma_k}$  avec  $\mathbf{W}_{\omega_k}$  pour les arêtes dans  $\Omega_{red}$  mais pas sur  $\Gamma_{red}$ , et  $\mathbf{W}_{\gamma_k}$  pour les arêtes sur  $\Gamma_{red}$ . En remplaçant  $\mathbf{W}_k$  par  $\mathbf{W}_{\omega_k}$ , le terme (3c) est nul, parce que  $\mathbf{W}_{\omega_k}$  est nulle sur  $\Gamma_{red}$ , le domaine d'intégration de (3c). En remplaçant  $\mathbf{W}_k$  par  $\mathbf{W}_{\gamma_k}$ , les termes (3b)–(3c) sont nuls ensemble, parce que le domaine des bobines  $\Omega_b$  est inclus dans  $\Omega_{red}$  sans contact entre  $\Gamma_{red}$  et  $\Omega_b$ , donc  $\int_{\Omega_{red}} \mathbf{W}_{\gamma_k} \cdot \mathbf{J}_s d\Omega = 0$ .

Finalement, l'équation (3) de la formulation en  $\mathbf{A} - V$  avec le calcul de la source sur  $\Omega_{red}$  devient telle que :

$$\int_{\Omega} \left[ \nu \mathbf{rot} \mathbf{W}_k \cdot \mathbf{rot} \mathbf{A} + \sigma \mathbf{W}_k \cdot \left( \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} + \mathbf{grad} V \right) \right] d\Omega \quad (9a)$$

$$= \int_{\Omega_{red}} \mathbf{rot} \mathbf{W}_{\omega_k} \cdot \mathbf{H}_s d\Omega, \quad \forall k = 1 \dots n_a. \quad (9b)$$

La source  $\mathbf{H}_s$  de l'équation (9) peut être remplacée par les sources de la partie précédente,  $\mathbf{H}_j$  ou  $\nu_0 \mathbf{rot} \mathbf{A}_j$ .

#### V. APPLICATION

Une machine asynchrone est étudiée sur une version non-commerciale du logiciel Flux<sup>®</sup> en régime harmonique avec la formulation en  $\mathbf{A} - V$  (9)–(4), en remplaçant  $\frac{\partial}{\partial t}$  par  $j\omega$ , avec  $\omega$  la pulsation. La géométrie et le maillage sont représentés sur les Fig. 1a et 1b, et détaillés dans [3]. Sur la Fig. 1c, les temps de pré-résolutions des sources avec le gradient conjugué et de la résolution de la formulation en  $\mathbf{A} - V$  avec un solveur direct sont représentés. Sur la Fig. 2, les isovaleurs de  $\mathbf{B}$  sont représentées sur le plan  $xy$  à  $z = 0$  pour deux encoches du stator.

Premièrement, les différents calculs de source sont étudiés sur la machine asynchrone. Sur la Fig. 2a, il y a des taches anormales pour les isovaleurs de  $\mathbf{B}$  au-dessus des encoches du stator. Donc, la source  $\mathbf{H}_j$  (Fig. 2a) donne des mauvais résultats pour les isovaleurs de  $\mathbf{B}$  sur le domaine  $\Omega$ , alors qu'avec  $\mathbf{A}_j$  (Fig. 2b et 2c) elle donne des bons résultats. Sur la Fig. 1c, le plus petit temps de calcul pour la source  $\mathbf{A}_j$  sur  $\Omega$  est celui de l'interpolation avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ , environ 1 heure. Finalement, la meilleure source pour la formulation en  $\mathbf{A} - V$  avec des bobines non-maillées est  $\mathbf{A}_j$  interpolée à partir d' $\mathbf{H}_s$  avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ .

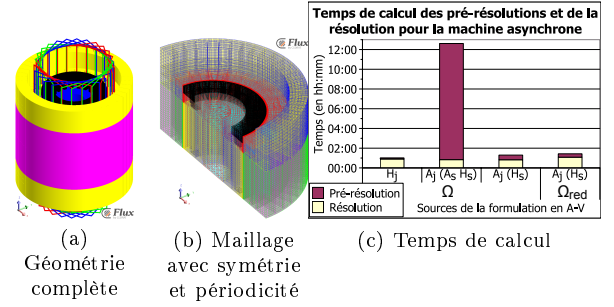


Fig. 1. Géométrie, maillage et temps de calcul pour la machine asynchrone

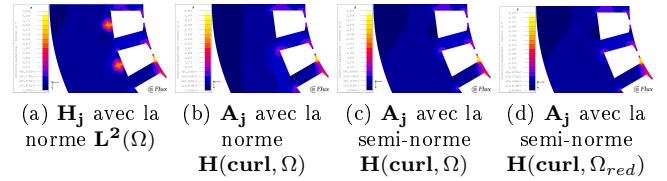


Fig. 2. Isovaleurs de  $\mathbf{B}$  pour la machine asynchrone

Secondement, la meilleure source,  $\mathbf{A}_j$  interpolée avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ , est calculée sur un domaine réduit  $\Omega_{red}$ , égal au stator et à l'air de la machine. Les isovaleurs de  $\mathbf{B}$  sur la Fig. 2 et les temps de calculs sur la Fig. 1c sont similaires que la source  $\mathbf{A}_j$  soit calculée sur  $\Omega$  (Fig. 2d) ou  $\Omega_{red}$  (Fig. 2c). Finalement, la source  $\mathbf{A}_j$  avec la formulation en  $\mathbf{A} - V$  peut être calculée sur  $\Omega_{red}$ , avec des résultats similaires à  $\Omega$ .

#### VI. CONCLUSION

La meilleure source pour la formulation en  $\mathbf{A} - V$  avec des bobines non-maillées est le potentiel vecteur discrétisé  $\mathbf{A}_j$  interpolé avec la semi-norme d' $\mathbf{H}(\mathbf{curl}, \Omega)$ . De plus, il est possible de ne pas calculer la source  $\mathbf{A}_j$  sur le domaine entier  $\Omega$  pour le limiter à un domaine réduit  $\Omega_{red}$ , soit fixe ou en mouvement, sans nécessité d'assurer la continuité d' $\mathbf{A}_j$  à l'interface  $\Gamma_{red}$ . Cette source ne sera pas recalculée à chaque nouvelle position.

#### RÉFÉRENCES

- [1] J.-C. Vérité, "Calculation of multivalued potentials in exterior regions," *IEEE Trans. Magn.*, vol. MAG-23, no. 3, pp. 1881–1887, May 1987.
- [2] O. Biro, K. Preis, and K. R. Richter, "On the use of the magnetic vector potential in the nodal and edge finite element analysis of 3d magnetostatic problems," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 32, no. 3, pp. 651–654, May 1996.
- [3] P. Ferrouillat, C. Guérin, G. Meunier, B. Ramdane, P. Labie, and D. Dupuy, "Computation of source for non-meshed coils with a-v formulation using edge elements," *IEEE Transactions on Magnetics*, En cours de publication.
- [4] L. K. Urankar, "Vector potential and magnetic field of current-carrying finite arc segment in analytical form, part iii : Exact computation for rectangular cross section," *IEEE Trans. Magn.*, vol. MAG-18, no. 6, pp. 1860–1867, November 1982.
- [5] Z. Wang, T. Henneron, N. Nemitz, J.-C. Mipo, and F. Piriou, "Electromagnetic field projection on finite element overlapping domains," *IEEE Trans. Magn.*, vol. 49, no. 4, pp. 1290–1298, April 2013.