Les mathématiques enseignées au secondaire et les mathématiques enseignées à l'université : quelle solidarité ?

Maggy Schneider, Université de Liège

Cripedis, Louvain-la-Neuve, 2 mai 2012

Plan de l'exposé

- Un préliminaire sur l'enseignement des mathématiques et leur intelligibilité
- Une balade du calcul infinitésimal à l'analyse qui illustre deux niveaux d'intelligibilité
- Quelques « pistes »

Un présupposé sur l’objectif majeur de l’enseignement des mathématiques

Favoriser « l’intention rationnelle » chez les élèves ou les étudiants :

« Il faut que l’élève cesse de voir la vérité comme dépendante d’une forme de rapport à autrui. Il faut que, dans sa relation au savoir, il passe de l’obéissance à une règle saisie comme arbitraire à la compréhension de la nécessité […] tant que l’élève croit le maître parce que c’est le maître, c’est que l’intention rationnelle n’est pas établie » (B. Rey)

Un premier présupposé sur l'objectif majeur de l'enseignement des mathématiques

- Il s'agit bien, non d'une compétence, mais d'une intention. Elle est propre à la personne et peut varier en fonction des circonstances
- Et on est loin du compte si l'on en juge par le nombre élevé de questions d'élèves commençant par : « Peut-on … ?» ou « doit-on … ?»
- C'est que cette intention a un prix qu'il n'est pas toujours nécessaire de payer pour réussir à l'école

L’exemple des nombres complexes

- Interviews d’élèves du secondaire suite à un enseignement « classique » des nombres complexes :
- *« Qu’avez-vous appris dans le chapitre relatif aux nombres complexes et comment l’expliqueriez-vous à un élève de l’année précédente ? »*
- Réponse :

L’exemple des nombres complexes

- Interviews d’élèves du secondaire suite à un enseignement « classique » des nombres complexes :
- *« Qu’avez-vous appris dans le chapitre relatif aux nombres complexes et comment l’expliqueriez-vous à un élève de l’année précédente ? »*
- Réponse :

OUFTI !

L'exemple des nombres complexes

- E1 : *« C'était pour résoudre des équations. Il y avait des réels, maintenant les complexes avec une partie imaginaire, inventée »*
- E2 : *« On nous a dit qu'il y avait un nombre imaginaire i dont le carré vaut – 1 »*

L'exemple des nombres complexes

« Cela vous a-t-il étonnés ? »

- E2 : *« Non, ce n'est pas la première fois qu'on nous dit que c'est comme cela. Il faut pouvoir imaginer. C'est comme pour la géométrie dans l'espace »*
- E1 : *« Sauf que là, on a la preuve que c'est bon. Ici, on ne saura jamais; on va toujours tomber sur ce fameux i car les nombres complexes s'écrivent a + bi »*

L'exemple des nombres complexes

« Et les exercices ? »

- E1 : *« Il faut résoudre des équations. Je ne trouve pas cela difficile »*
- E2 : *« Les exercices sont un peu plus difficiles que ceux qu'on faisait en 4ème avec le réalisant, mais ce n'est pas hyper compliqué; c'est plus facile que les sinus et cosinus. Les exercices qu'on fait, c'est parfait »*

Difficultés de sortir du contrat didactique

Les injonctions officielles

En 1990, la commission « Danblon » évoque un **« écueil majeur : la perte de sens »**,

- du côté de l'apprentissage : *« L'accident le plus fréquent dans l'apprentissage des mathématiques est la perte de sens et le repli sur la forme sans contenu : ne plus penser et se contenter d'exécuter des algorithmes selon l'unique procédé permis devient rapidement insoutenable »*
- du côté de l'enseignement : *« Le problème majeur de l'enseignement des mathématiques est sans aucun doute celui du sens »*

La dérive monumentaliste

Les mathématiques, en tant que discipline scolaire, ont appartenu à une ‘aristocratie’. Mais, dans cet ‘âge des privilèges’, *« une discipline scolaire tend […] à prendre la forme d'une visite guidée de savoirs que l'on parcourt à la hâte, à l'instar de vestiges monumentaux autrefois vivants mais dont les raisons d'être, les fonctions vitales ont cessé d'être comprises »*

(Chevallard, 2004)

En bref : on a gardé les réponses mais perdu les questions

La question des questions … n'est pas nouvelle

« Un matin Rabbi David parcourut les rues de la ville en criant : ''J'ai une réponse, j'ai une réponse, qui a une question ?'' »

- Histoire juive en exergue d'une conférence de R. Bkouche en 82
- *« De question en question »*, série de manuels belges sous la direction de N. Rouche, dans les années 90
- *« Faire des mathématiques : le plaisir du sens »* (R. Bkouche, B. Charlot, N. Rouche, 1991)

L’intention rationnelle du secondaire à l’université : comment on en parle

« Je crois que tout simplement dans le secondaire j’ai vu la limite et la dérivée comme des techniques. Je savais très bien dériver, je ne me trompais pas mais la signification profonde de la dérivée, je ne l’avais pas perçue. Je pense que la maturité de l’élève est telle que c’est une notion sur laquelle il faut revenir après. Je ne vois pas de problème à dire : on a donné la définition, on a surtout insisté sur la technique de calcul parce que c’est à la portée des élèves à cet âge-là et puis en premier bac, on revient sur la notion en disant : attention, voilà ce qu’il y a en plus. Même en bio, je reviens dessus en disant : c’est un taux de variation instantané particulier. Et ça, dans le secondaire, on ne l’a pas vu mais il ne fallait peut-être pas le voir. C’est à nous à le faire » (professeur 1er BAC)

L'intention rationnelle du secondaire à l'université : comment on en parle

- ✓ *« Je pense que, dans le secondaire, les élèves n'ont aucun intérêt, aucun désir de maîtriser les dérivées »* (professeur d'université)
- ✓ *« Les élèves qui arrivent du secondaire ne réfléchissent pas : ils appliquent des procédures »* (professeur d'université)
- ✓ *« On nous dit qu'il faut évaluer selon trois compétences : connaître, appliquer et résoudre des problèmes. Mais, il vaut mieux mettre le maximum de points pour la deuxième rubrique si l'on veut ne pas avoir trop d'échecs »* (professeur du secondaire)
- ✓ *« Tout ce qu'on nous demande, c'est de préparer les élèves à bien calculer pour la suite »* (professeur du secondaire)

Mais qu'est-ce que comprendre les mathématiques ?

« Comment se fait-il que tant de gens trouvent les mathématiques obscures alors qu'elles ne font appel qu'aux principes fondamentaux de la logique ? Qu'est-ce que comprendre ? Est-ce examiner successivement chacun des syllogismes et constater qu'il est correct ? Oui, pour quelques-uns; presque tous sont beaucoup plus exigeants, ils veulent savoir non seulement si tous les syllogismes sont corrects, mais pourquoi ils s'enchaînent dans tel ordre plutôt que dans tel autre. Tant qu'ils leur semblent engendrés par le caprice et non par une intelligence consciente du but à atteindre, ils ne croient pas avoir compris et dès lors sont insatisfaits » (Poincaré)

Mais qu'est-ce que comprendre les mathématiques ?

- Mais comprendre les mathématiques, c'est aussi pouvoir rendre des comptes sur la façon de définir les concepts
- L'intelligibilité doit pouvoir se décliner à chaque niveau et il existe une vie mathématiques avant … celle que l'on connaît : exemple des dérivées

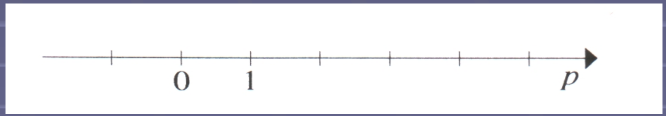
Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

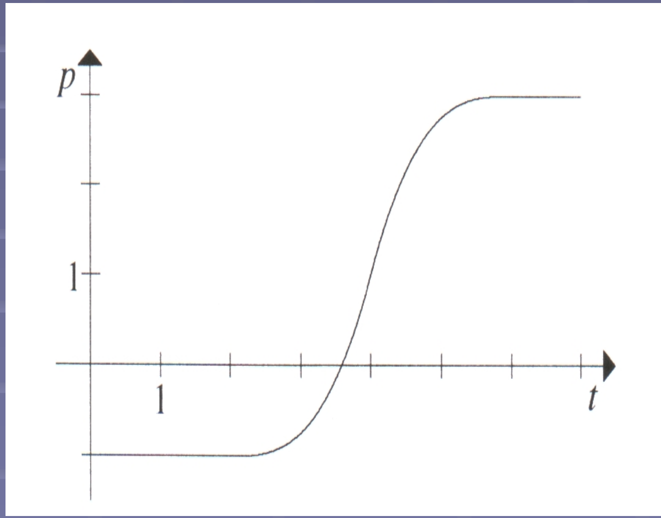
Mise en bouche :

Décrire le mouvement d'un mobile sur une trajectoire rectiligne à partir de sa loi de position

En particulier, lier accélération et sens de la concavité, et d'un point de vue qualitatif, vitesse instantanée et « pente de la courbe »

Définir la vitesse moyenne sur un intervalle de temps (Thèse de Gantois)



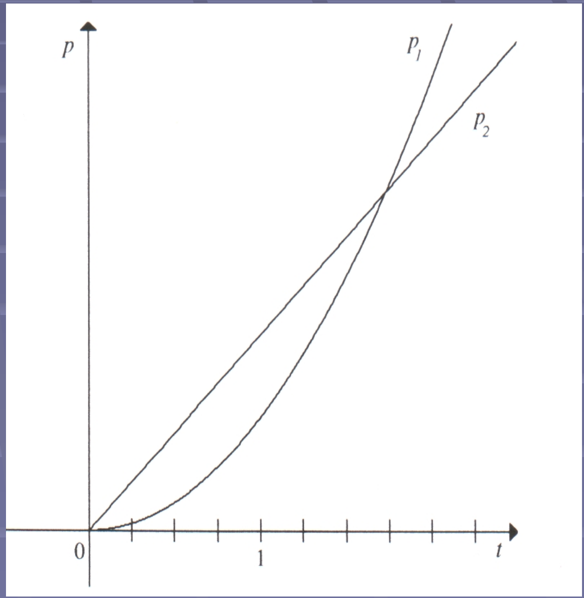


Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

Quand les 2 mobiles ont-ils même vitesse ?

Travail graphique

Travail analytique, d'abord quand le mouvement non uniforme est décrit par une fonction du second degré et puis par une fonction du 3ème degré



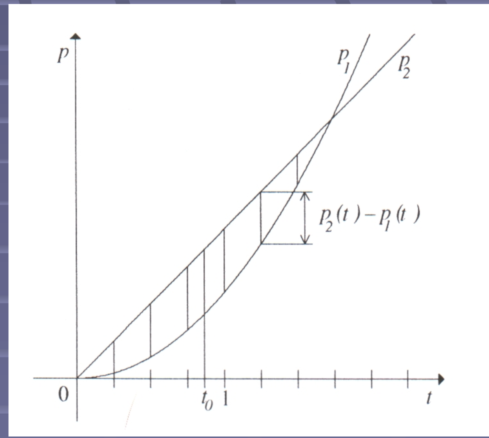
Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

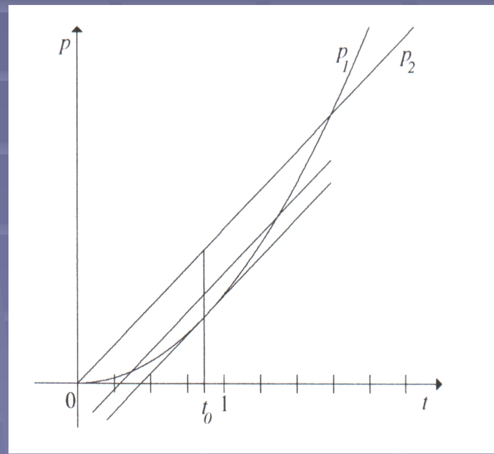
- Stratégie 1

  Déterminer la valeur de *t* pour laquelle l'écart est maximal

- Stratégie 2

  Déterminer l'instant en lequel une droite de même pente que le graphique de p_2 rencontre celui de p_1 en un seul point

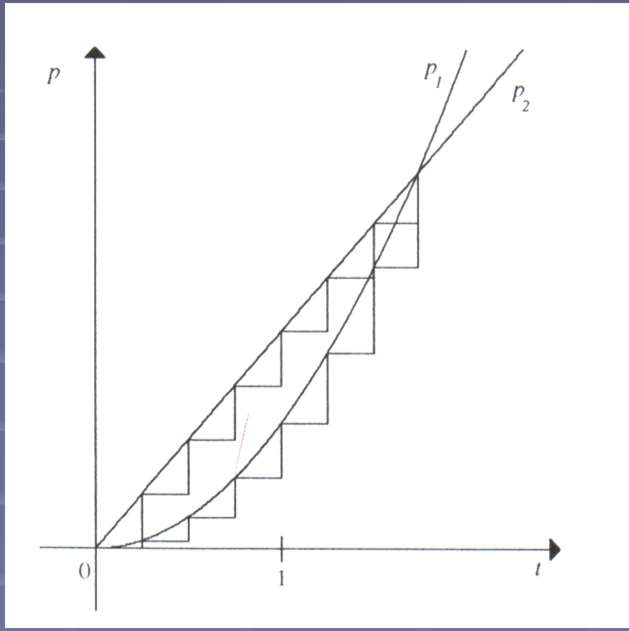




Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

- Stratégie 3

  Déterminer l'intervalle de temps sur lequel les deux mobiles ont même vitesse moyenne et ce, pour des intervalles de temps de plus en plus petits



Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

$$\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = t_2 + t_1$$

$$t_2 + t_1 = \sqrt{3}$$

ou

$$\frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \sqrt{3}$$

$$2t + \Delta t = \sqrt{3}$$

- Où sont les conditions d'existence ?

Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

M1 : Donc $t_2 = \sqrt{3} - t_1$.

E1 : Donc… Oui, et $t_1 = \sqrt{3} - t_2$.

M1 : Oui. Et ça nous fait quoi ?

E1 : Et ça, et ça… Oui, c'est ça, c'est ça le problème : une fois qu'on a ça, on n'a toujours pas l'instant t.

N1 : Mais il faudrait trouver une autre façon… Enfin… encore un autre truc où tu as $t_2 + t_1$ et alors on saurait obtenir un système. Tu vois ce que je veux dire ? S'il y a deux inconnues, il faudrait trouver une autre manière…

E1 : Oui, mais qu'est-ce que tu aurais d'autre comme équation à part ça ?

N1 : Et si… À quel moment… On ne devrait pas juste prendre un seul t et dire : c'est une vitesse instantanée ? On pourrait prendre juste un t vu que c'est un seul moment.

M1 : Oui, mais, limite, ils sont tellement proches, qu'on peut dire que $t_1 = t_2$.

N1 : Oui, c'est ça, en fait.

Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

$$\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = t_2 + t_1$$

$$t_2 + t_1 = \sqrt{3}$$

ou

$$\frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \sqrt{3}$$

$$2t + \Delta t = \sqrt{3}$$

- Au delà des « interdits » et des conditions d'existence : assimiler t_1 à t_2 ou rendre nul Δt pour trouver une réponse exacte
- Un nouveau calcul : celui des dérivées, dans un contexte particulier
- Un calcul jugé suspect

Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

M1 :	Parce qu'en fait, ils sont tellement proches… Tu mets t_2 égale plus ou moins t_1. Et donc, tu n'as qu'à dire : $2t_1 = \sqrt{3}$. Donc $2t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.
E1 :	Ça paraît bizarre d'égaliser t_2 et t_1.
C1 :	C'est un peu fac[ile]… Ça ne met pas vraiment en commun les deux équations.
Prof :	En fait, vous avez fait… Vous avez rendu votre différence de temps…
E1	[qui coupe Prof et continue la phrase de Prof] : … tellement petite que t_2 est égal à t_1…
N1 :	Infiniment petite.
E1 :	Enfin, presque égale.
E1 :	Mais ce n'est pas imprécis, à ce moment-là ?
N1 :	Ben non : c'est logique. Si tu réduis à fond l'intervalle de temps, ça deviendra égal.

Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

- Seule cette stratégie reste valable dans le cas où le mouvement non uniforme est modélisé par une fonction du 3ème degré
- Mais elle a été rendue « crédible » dans le cas d'un MRUA en ce sens qu'elle fournit la même réponse que les deux autres méthodes : validation pragmatique
- On a là l'émergence d'un savoir mathématique sous une forme embryonnaire

Le « concept » de dérivée chez Fermat (1601-1665)

- Couper un segment en deux parties dont les longueurs ont un produit maximal
- Adégaler : $a\ (b - a) \approx (a + e)\ (b - a - e)$

  $be \approx 2ae + e^2$ (diviser par e)

  $b \approx 2a + e$ (supprimer e)

  $b = 2a$

Calcul légitimé par le fait qu'une méthode géométrique (Euclide) donne le même résultat

Double statut de « l'infinitésimal »

Le « concept » de dérivée chez Lagrange (1736-1813)

- P = [f(x+i) - f(x)] / i (apparition du taux d'accroissement)

- *« Or, P étant une nouvelle fonction de x et i, on pourra de même en séparer ce qui est indépendant de i et qui, par conséquent, ne s'évanouit pas lorsque i devient nul. Soit donc p ce que devient P lorsqu'on FAIT i = 0 »*

  Limite définie par un acte de suppression de termes

Du calcul infinitésimal à l'analyse

- Cauchy, considéré comme le « père » de l'analyse moderne pour avoir « coulé » le calcul infinitésimal dans un « moule déductif » afin de respecter la « rigueur des géomètres grecs de l'Antiquité »
- On lui doit le système de preuves classiques, dont on peut exclure toute connotation géométrique, temporelle ou cinématique

  bien que …

Du calcul infinitésimal à l'analyse

- Les démonstrations de Cauchy sont discursives : expressions langagières « contravariantes » de la limite mais absence de symboles « quantificateurs »
- Sa définition est celle de la « limite d'une variable » :

  « Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres »

Du calcul infinitésimal à l'analyse

Essais de formalisation de cette définition par des futurs professeurs :

$\forall \varepsilon > 0 : | x - a | < \varepsilon$ (*« faut-il ajouter ε très petit ? »)*

Cette écriture caractérise ce qu'on appelle, en ANS, des nombres « infiniment proches » mais signifie, dans l'AS, que x = a. Quand on le démontre, les étudiants insistent sur le fait que ε n'est pas nul ou corrigent ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0 : 0 \neq | x - a | < \varepsilon$$

Du calcul infinitésimal à l'analyse

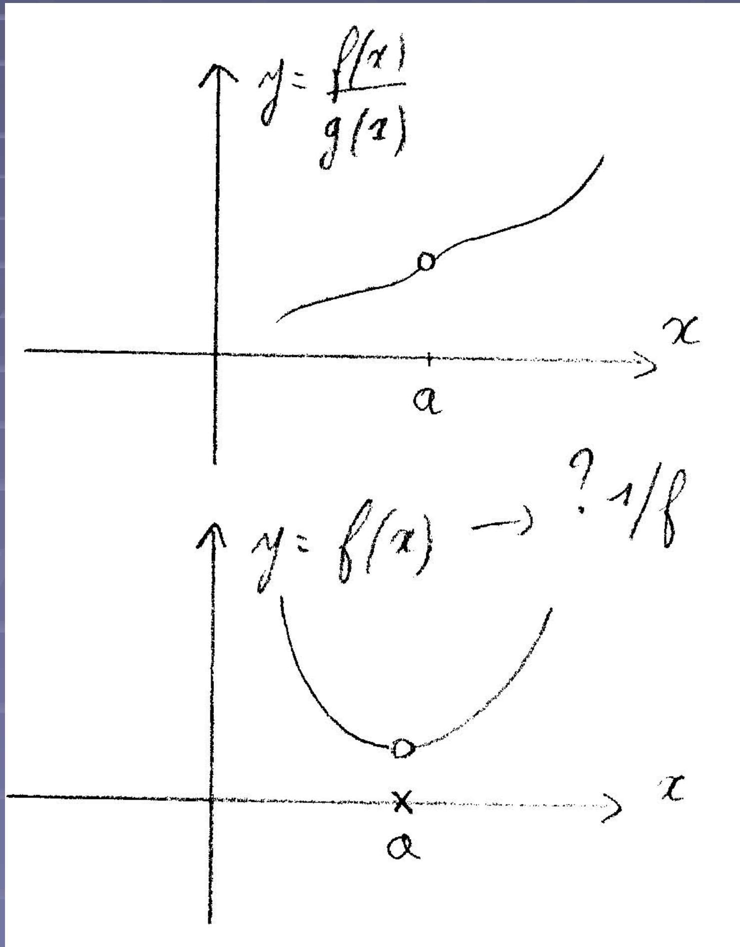
Les apparences sont sauves : on fait intervenir des éléments emblématiques de la théorie enseignée à l'université tout en « coupant la poire en deux » pour ménager un parcours didactique progressif

Observation significative d'un rapport « non lakatosien » aux définitions : celles-ci « décrivent » ce que l'on entend intuitivement par « tendre vers » (voire ont un rôle sténographique) au lieu d'être des « outils de preuve » (thèse de P. Job)

Du calcul infinitésimal à l'analyse

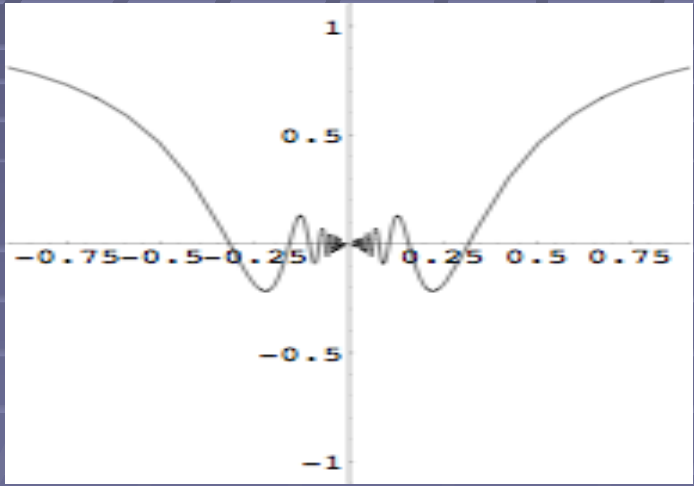
- Approche « lakatosienne » du concept de continuité : étudier les conditions (N et S ?) pour que la droite $x = a$ soit AV d'une fonction-fraction rationnelle
- Réfutations successives des réponses suivantes, par contre-exemples :
  - *« a doit être racine du dénominateur »*
  - *« a doit être racine du dénominateur sans être racine du numérateur »*

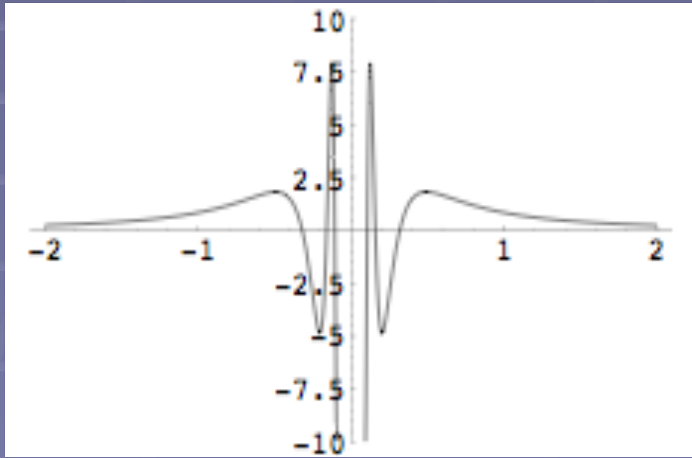
Du calcul infinitésimal à l'analyse



- De l'examen de contre-exemples à l'émergence du concept de continuité : on ne peut rendre, p.ex., *1/f(x)* aussi grand que l'on veut sans rendre *f(x)* aussi proche de *f(a)* que l'on veut, pour des valeurs de *x* suffisamment proches de *a*

Du calcul infinitésimal à l'analyse





- Ce n'est pas encore suffisant : il faut exiger que *f* ait un signe constant dans un voisinage de *a* ou sur un intervalle d'extrémité *a*

Le discours heuristique

- Cet exemple illustre ce que Lakatos appelle le style heuristique : *« Le style heuristique consiste à mettre à l'épreuve la conjecture primitive ou naïve, la preuve-mère, les contre-exemples qui la mettent à l'épreuve, la méthode des preuves et réfutations et les concepts-éprouvettes qui en découlent »*

  (exemple du concept de convergence uniforme né de l'examen du théorème faux de Cauchy et des contre-exemples de Fourier *: Une série de fonctions continues converge vers une fonction continue)*

Le discours déductiviste

« Dans le style déductiviste, on commence par une liste précautionneuse d'axiomes, de lemmes ou de définitions. Les axiomes et les définitions paraissent fréquemment artificiels et d'une complication déroutante. On ne dit jamais comment ces complications sont nées. La liste d'axiomes et de définitions est suivie de théorèmes soigneusement mis en mots, encombrés de conditions pesantes; il semble impossible que quiconque ait jamais pu les inventer » (Lakatos)

Du calcul infinitésimal à l'analyse : inversion didactique

Histoire

- Intégrales (aires, volumes)
- Dérivées (tangentes, vitesses, optimisation)
- Réorganisation autour des concepts de fonction et de limite
- Continuité
- Réels

Enseignement

- Réels
- Continuité
- Théorie des limites
- Dérivées et intégrales
- Applications géométriques, cinématiques ou pratiques

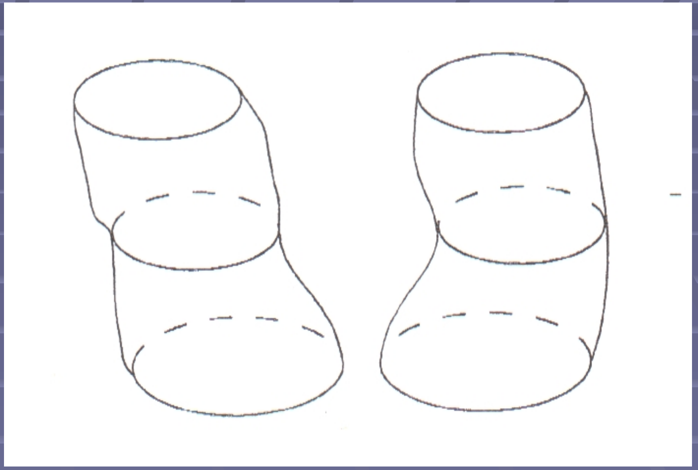
Deux niveaux d'intelligibilité

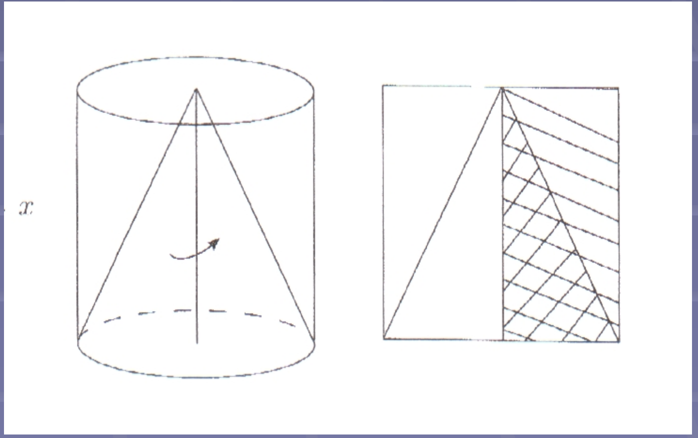
- Un premier niveau : comprendre en quoi les concepts mathématiques constituent des modèles pertinents « d'objets » extra ou intra-mathématiques, ce qui suppose une certaine forme de distanciation entre les objets « réels » et leur modélisation pas évidente étant donné un obstacle épistémologique persistant : le positivisme empirique
- Un second niveau : …

Un rapport non distancié aux objets du réel rend nécessaire ce niveau

Peut-on déduire un rapport entre les volumes de 2 solides de l'invariance du rapport des aires des surfaces qui les « composent » ou qui les « engendrent »?

Pas toujours même si c'est tentant

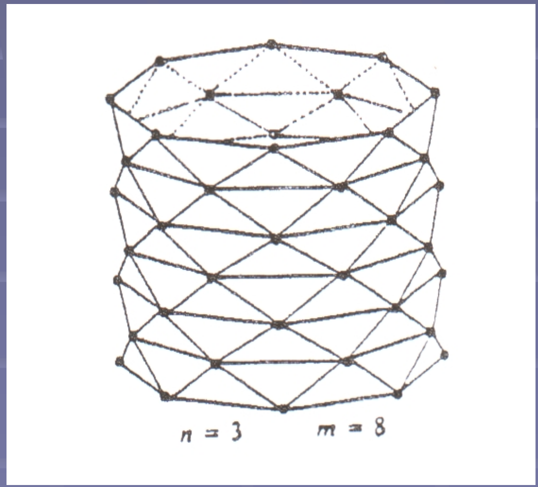




Un rapport non distancié aux objets du réel rend nécessaire ce niveau

La tentation est grande de considérer que les mesures de grandeurs se doivent d’exprimer ce que l’on « voit » des grandeurs elles-mêmes

Définir l’aire d’une surface courbe comme la limite de la somme des aires des triangles d’une surface polyédrale inscrite, jusqu’au contre-exemple de Schwarz en 1883



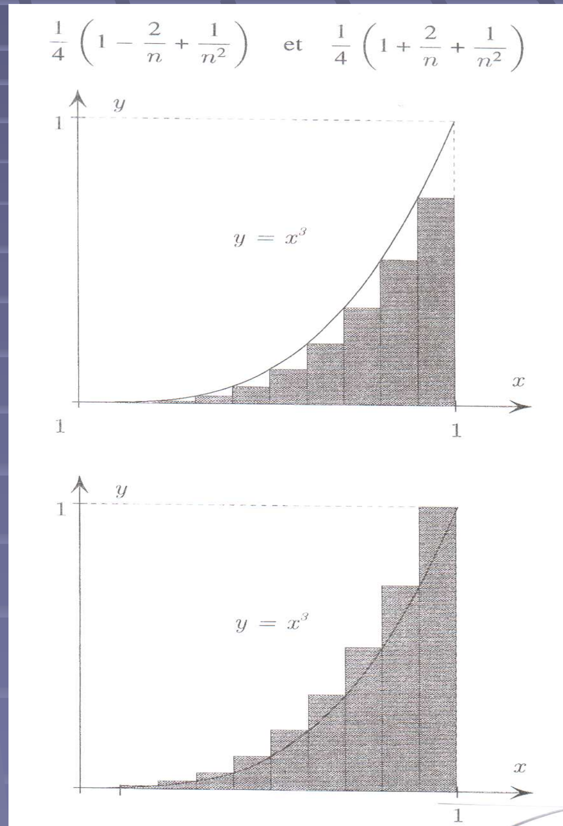
Un rapport non distancié aux objets du réel rend nécessaire ce niveau

Douter que le calcul d'une limite puisse donner la valeur exacte d'une vitesse instantanée qui échappe jusqu'à un certain point aux observations et aux mesures

Penser, voire définir, la tangente comme 'limite' de sécantes, manière d'exprimer ce que l'on voit, sans avoir défini une quelconque topologie sur l'ensemble des droites

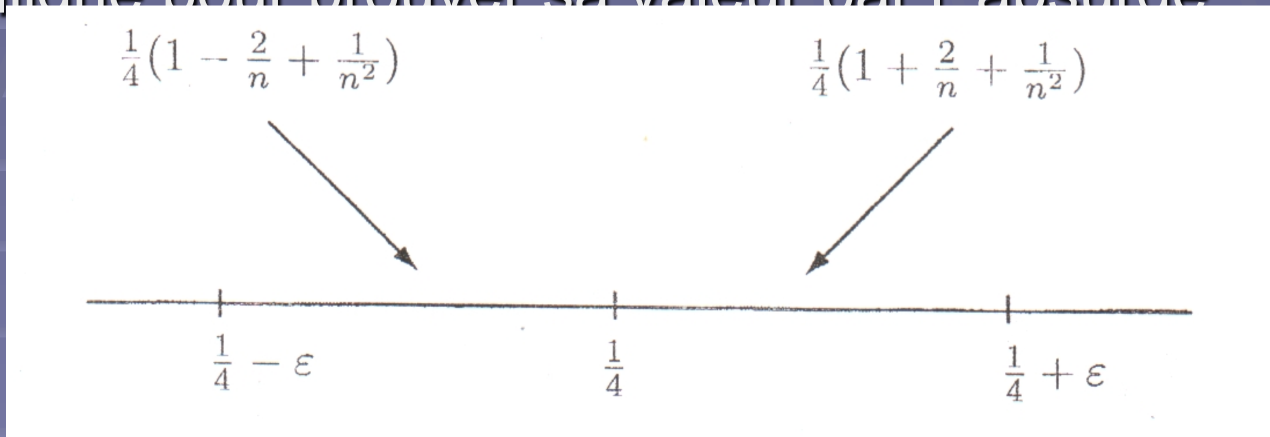
Un rapport non distancié aux objets du réel rend nécessaire ce niveau

Douter que la limite d’une suite de sommes d’aires de rectangles donne la valeur exacte d’une aire curviligne car ces rectangles n’épousent pas parfaitement la surface ou « se réduisent en segments »



Un rapport non distancié aux objets du réel rend nécessaire ce niveau

- On justifie que ce calcul donne bien ce que l'on cherche, au prix d'une « validation » non canonique (intuitions géométriques ou cinématiques, validation pragmatique)
- Par exemple, jouer sur un encadrement d'une aire curviligne pour prouver sa valeur par l'absurde



Vers le second niveau d'intelligibilité

- Un tel discours ne s'apparente pas à un discours théorique standard dans lequel les aires, vitesses, … sont <u>définies</u> par le biais du concept de limite
- Entre la détermination d'aires curvilignes et l'élaboration d'une théorie où les propriétés telles l'additivité par rapport aux intervalles peuvent se démontrer sans embûches, il faut épurer le concept de certaines restrictions comme celle de s'imposer des subdivisions régulières : un domaine d'intégration peut être a priori divisé en deux segments « incommensurables » !

Deux niveaux d'intelligibilité

- Un second niveau : comprendre que les « bonnes » définitions de ces concepts sont, à un moment donné, celles qui donnent prise au raisonnement déductif et qui permettent un agencement déductif « optimal »; à ce stade, ce sont elles qui définissent les objets du réel (aires, vitesses,…) et les formes de validation du niveau précédent n'ont plus aucun intérêt

Quelques pistes pour une solidarité secondaire-université

Remplacer la question : *« à quoi servent les mathématiques ? »* par *« Quelles sont les raisons d'être des savoirs et théories mathématiques ?»*

- Identifier deux niveaux de réponse : la modélisation et l'organisation déductive
- Ne pas se contenter de réponses allusives mais inscrire dans les objectifs attendus des élèves l'intelligibilité des raisons d'être des savoirs mathématiques … pour autant qu'on les leur ait enseignées
- Penser la motivation dans le long terme comme conséquence de l'intelligibilité

Quelques pistes pour une solidarité secondaire-université

Au niveau de la modélisation,

- le rapport mathématiques/autres disciplines est central : ne pas en faire un « attrape-nigauds » mais un des objectifs d'apprentissage
- ne pas prêter aux « activités », « situations-problèmes », … des vertus qu'elles n'ont pas, les réserver à des circonstances bien précises et respecter, pour les construire, des conditions sans lesquelles on ne peut en espérer un apprentissage des élèves
- Les inscrire dans un parcours d'étude plus global où le discours du professeur a toute sa place

Quelques pistes pour une solidarité secondaire-université

Au niveau de l'organisation déductive,

- Y préparer tôt les élèves du secondaire, sur des « objets » à leur portée : îlots déductifs en géométrie
- Montrer, par un discours heuristique, l'intérêt de telle ou telle définition, celui de telle ou telle hypothèse
- Mettre en évidence les sauts conceptuels que suppose le passage du processus de modélisation au projet d'organisation déductive
- Choisir des situations appropriées pour faire comprendre aux élèves les ruptures de contrat inhérentes à la transition secondaire/université et leurs raisons

Quelques pistes pour une solidarité secondaire-université

- Accepter que, dans certains secteurs mathématiques, le niveau modélisation est préférable, pour l'intelligibilité, à une pâle imitation du discours universitaire

  (exemple de la subordination de la géométrie calculatoire à l'algèbre linéaire)

Quelques pistes pour une solidarité secondaire-université

A l'université : la géométrie analytique est subordonnée à l'algèbre linéaire. Dans la théorie standard :

- Les droites et plans sont définis d'emblée comme variétés linéaires ou affines et les vecteurs sont des éléments d'un espace vectoriel.
- Un théorème permet de traduire les écritures vectorielles en termes de coordonnées : *Tout espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps commutatif K est isomorphe à l'espace K^n des coordonnées*

Efficacité de l'algèbre linéaire comme théorie multi-sens

Quelques pistes pour une solidarité secondaire-université

Dans la transposition didactique en vigueur dans le secondaire :

- Le point de départ est toujours vectoriel
- On gomme les points jugés trop difficiles pour les élèves
- On passe du vectoriel au paramétrique (puis au cartésien) sans aucune justification, le déploiement des écritures avec flèches en écritures sur les coordonnées étant perçu comme une « recette »
- On passe du plan à l'espace « sans crier gare »

Quelques pistes pour une solidarité secondaire-université

- L'équation d'une droite serait, en 3D, de la forme : *$ax + by + cz + d = 0$* !
  Equation « étiquette » et non « contrainte »
  Extension à l'espace non « contrôlée »
- Le système *$ax + by = 0$* et *$z = 0$* caractérise le plan *Oxy*
  Les élèves ne savent pas que la liberté ne s'exprime pas
- *« Si on prend le milieu d'un vecteur »*
  Difficultés liées au concept de vecteur
- *« Qui dit que l'addition de deux vecteurs de l'espace ne conduit pas à un « parallélogramme gauche » ?*
  Questionnement sur la pertinence d'un modèle

Quelques pistes pour une solidarité secondaire-université

Beaucoup de difficultés pour peu de retombées en termes d'économie de pensée et d'action : fait-on vraiment de la géométrie calculatoire ?

Quelques pistes pour une solidarité secondaire-université

- Invitation à une réflexion collective sur ces questions
- Pardon pour le côté sentencieux de cette conclusion