**Utiliser les potentialités phénoménotechniques de la TAD : quel prix payer ?**

*Maggy Schneider*

*Texte d’une conférence plénière au 4ème colloque sur la Théorie Anthropologique du Didactique, Toulouse 21-26 avril 2013*

**Résumé**

Le néologisme « phénoménotechnique » de Bachelard est étendu ici au sens d’un qualificatif qui traduit les potentialités a priori d’une théorie didactique à faire apparaître des phénomènes.

Cet exposé s’articule autour de trois dimensions :

La position qui est la mienne sur les ingénieries comme phénoménotechnique à la lumière de la Théorie Anthropologique du Didactique (TAD). L’analyse fera apparaître leur portée en termes de dénaturalisation des transpositions existantes au prix d’un regard institutionnel sur les obstacles et les situations fondamentales.

Les phénomènes que la TAD est susceptible de mettre à jour à l’articulation des Organisations Mathématiques (OM) et des Organisations Didactiques (OD) pourvu que l’on dispose d’un Modèle Epistémologique de Référence (MER) dont la construction respecte certaines conditions. Ces dernières seront mises en évidence à travers deux études de cas relatifs respectivement à l’enseignement de l’algèbre élémentaire au Collège et à celui du théorème de Lagrange à l’Université. Ces exemples sont choisis pour le contraste qu’ils permettent de faire entre un usage phénoménotechnique du concept de MER et un qui ne l’est pas.

Le type de phénomènes que l’on peut mettre à jour en croisant la typologie d’OD de Bosch et Gascon et la distinction que je propose entre OM ‘modélisation’ et OM ‘déduction’. Je m’appuierai pour traiter cet aspect sur des recherches que j’ai menées ou dirigées et mon analyse montrera que la mise en évidence de tels phénomènes est tributaire de l’identification des institutions qui jouent un rôle constituant d’une telle articulation dans chaque cas étudié.

Sommaire

1. Sur l’usage du mot « phénoménotechnique » : p.3

2. Ingénieries et phénomènes didactiques : quelques extensions théoriques : p.3

2.1. Les ingénieries et leurs effets en termes de dénaturalisation : p.3

2.2. Des obstacles d’apprentissage à dimension institutionnelle : p.5

2.3. Une extension du concept de situation fondamentale : p.6

3. La question des articulations entre OM et OD et celle du MER comme phénoménotechnique : p.6

3.1. L’étude d’une « approche heuristique de l’analyse » comme entrée en matière : p.6

3.2. Caractéristiques d’un usage peu phénoménotechnique du concept de MER : à propos du théorème de Lagrange à l’université : p.8

4. Le concept de MER comme phénoménotechnique : p.10

4.1. Un MER phénoménotechnique relatif à l’algèbre élémentaire : p.10

4.2. Des choix inéluctables du chercheur à l’explicitation de son modèle de l’activité mathématique à un haut niveau de l’échelle de co-détermination didactique : p.12

4.3. L’invisibilité de certaines institutions comme obstacle à la phénoménotechnique : p.13

En guise de conclusion : un phénomène à l’articulation des OM et des OD que donne à voir une distinction entre deux niveaux praxéologiques : p.14

**1. Sur l’usage du mot « phénoménotechnique »**

Je reviens, par ce titre de mon exposé, aux origines de ce qu’on a appelé la “didactique fondamentale” au sein de l’école française, en particulier par référence aux ingénieries didactiques à propos desquelles a été fait un parallèle avec la phénoménotechnique de Bachelard. Dans son cours à l’Ecole d’Eté d’Orléans en 1982, Chevallard posait effectivement ainsi la question des rapports entre la recherche en didactique et l’action subséquente sur le système d’enseignement : non pas en termes d’innovation ou de recherche-action mais en termes de mise à l’épreuve de constructions théoriques élaborées par les chercheurs dans des réalisations didactiques qui constituent surtout, en tant que méthodologies de recherche « le lieu de cette étape cruciale de l’activité scientifique à laquelle Bachelard a donné le nom parodique de phénoménotechnique ».

Pour comprendre les enjeux d’un tel point de vue mais aussi les questionner à la lumière de développements plus récents, il convient de situer le travail de Bachelard dans la perspective d’un constructivisme épistémologique qui fait des « phénomènes » non pas des observables que donnerait à voir une réalité supposée indépendante ou « ontologique » mais des construits humains le plus souvent collectifs. Plus précisément, ces phénomènes émergent d’une pensée dialectique entre objets et concepts à la manière du rationalisme appliqué tel que l’entend Bachelard, 1949, qui suppose de ‘passer par le positivisme afin de le dépasser’. Mais, toujours dans cette perspective constructiviste, on s’accorde à penser que les observables, provoqués ou non, ne deviennent phénomènes à proprement parler qu’à la lumière d’une théorie et qu’il n’est pas impérativement besoin pour les faire apparaître comme tels de techniques sophistiquées comme le cyclotron qui permet de mettre en évidence et d’éprouver des phénomènes de mécanique quantique. Par exemple, avant même de pouvoir parler de falsification au sens de Popper, ce sont des expériences de pensée qui amènent Galilée à énoncer les principes de sa théorie physique en particulier sur la relativité des référentiels qui portent son nom. Ces expériences de pensée, en l’occurrence ce qu’on appelle le « bateau de Galilée », constituent alors des situations contrefactuelles suggérées par une hypothèse théorique pour en accroître la crédibilité, ici l’invariance des lois de la mécanique d’un tel référentiel à un autre. En ce sens, je me permettrai d’utiliser le néologisme « phénoménotechnique » de Bachelard aussi au sens d’un qualificatif pour parler, de manière quasiment tautologique, de la portée phénoménotechnique d’une théorie, une théorie didactique en l’occurrence. Il s’agit bien sûr d’une portée potentielle a priori plus ou moins effective dans les usages qu’en font les chercheurs. Et c’est ce que je vais tenter d’illustrer dans la suite.

**2. Ingénieries et phénomènes didactiques : quelques extensions théoriques**

Mais que sont les phénomènes didactiques ? Pour répondre à cette question, je souhaiterais d’abord exposer sommairement ma position sur le rôle des ingénieries en tant que phénoménotechnique telle que je l’ai développée à l’Ecole d’Eté de Clermont-Ferrand (Schneider, 2011) en me cantonnant aux genèses artificielles de concepts même si les phénomènes mis à jour vont bien au-delà. Ensuite, j’expliquerai à quelles extensions théoriques cette position m’a amenée.

**2.1. Les ingénieries et leurs effets en termes de dénaturalisation**

Si l’on veut envisager de telles genèses dans une perspective poppérienne, il faut éviter le risque - qui est grand - de plaidoyers « cachés » en leur faveur et dont les points aveugles sont liés à l’absence de perception des effets de contrat et/ou à la naturalisation excessive de la transposition au sein de laquelle se fait le travail. Pour éviter cet écueil, il est sans doute plus facile de tirer parti des ingénieries qui ne marchent pas - au sens où les analyses a priori et a posteriori ne concordent pas - que de celles qui marchent. Pour autant que l’on prenne la peine, comme dit Artigue (1990), de rechercher « ce que, dans les hypothèses engagées, les distorsions constatées invalident » (c’est moi qui souligne), plutôt que de se borner, comme cela arrive souvent d’après l’auteur, « à proposer des modifications de l’ingénierie visant à les réduire sans s’engager donc véritablement dans une démarche de validation ». Quant à prouver que des ingénieries marchent, cela reste périlleux, même si on peut espérer qu’une analyse a priori serrée permette de distinguer ce qui relève du nécessaire et du contingent. C’est d’autant plus difficile lorsqu’elles concernent des tranches amples d’apprentissage et ce, en particulier, à cause des phénomènes d’obsolescence et de reproductibilité. Et cependant, même dans ce dernier cas, une perspective poppérienne n’est pas exclue. Je l’avais développé à partir de l’exemple des travaux de Douady (1986) sur la dialectique outil-objet et d’une critique dont elle avait fait l’objet par Johsua (1996). Ce dernier, qui se situe lui aussi dans une perspective poppérienne, insiste sur l’importance des résultats de recherche fondés sur l’étude des conditions limites d’une théorie mais exprime aussi un certain scepticisme sur des résultats trop liés à la théorisation retenue. Entre autres exemples, il pointe les conclusions avancées par Douady sur le fait que la dialectique outil-objet « ça marche ». Bien que reconnaissant que l’auteure citée précise les conditions dans lesquelles fonctionne cette dialectique et bien qu’exprimant la nécessité d’examiner de plus près son travail de recherche, Joshua ne peut s’empêcher un propos assez sévère : « Mais on peut faire fond sur un énoncé qui se détache largement des conditions de la recherche : ‘on peut faire, au primaire, de la dialectique outil-objet’. Que cet énoncé, pris au pied de la lettre, soit quelque peu dogmatique, c’est certain. Mais sans cette dîme payée à la dogmatisation, on ne peut guère parler de résultat ». Nonobstant ce propos qui a la tonalité d’une critique, je pense qu’on peut regarder les travaux de Douady comme une forme d’invalidation, en tout cas de mise à l’épreuve à la mode poppérienne, non pas du fonctionnement didactique qu’elle propose, mais de celui a contrario duquel s’est définie la dialectique outil-objet et que résume l’expression « j’apprends, j’applique ». Ce dernier fonctionnement semble reposer sur une conviction non questionnée inspirée d’une conception déductiviste de l’enseignement qui prête une certaine efficacité à un enseignement allant, comme dit Douady, du « général au particulier », du « signifiant au signifié » ou encore de « l’objet à l’outil ». On touche là à une épistémologie spontanée largement répandue chez les enseignants et qui semble occulter la possibilité de toute autre. Or, à l’instar de Brousseau, Douady prouve bien qu’une autre approche est possible, invalidant par là même la conviction du contraire, fût-elle inconsciente. On connaît des conditions nécessaires d’un tel travail : caractère fondamental des questions posées aux élèves, existence d’un milieu permettant leur dévolution, existence d’une niche scolaire où de telles pratiques peuvent se développer, … toutes dimensions dont l’analyse doit permettre d’évaluer si les faits observés ont un caractère nécessaire ou contingent.

Des recherches, comme celle de Douady, qui montrent la faisabilité d’autres manières d’enseigner, participent donc à la dénaturalisation de transpositions didactiques devenues transparentes de par leur standardisation au sein d’institutions scolaires, en somme des « prêts à penser » institutionnels comme les appellerait Mercier (1999). C’est pourquoi, une analyse de la transposition au sein de laquelle s’inscrivent, par exemple, les tâches dévolues aux élèves me paraît incontournable, même pour des recherches portant sur l’enseignement ordinaire, si l’on veut éviter des points aveugles liés aux hypothèses implicites sous-jacentes à cette transposition trop naturalisée.

Mais on peut aller plus loin dans l’usage phénoménotechnique des ingénieries en mettant en évidence d’abord les difficultés d’apprentissage que négligent ces mêmes transpositions, ensuite les formes embryonnaires des savoirs, relativement distantes des formes socialement standardisées, qui peuvent vivre en dehors d’elles. L’ingénierie construite sert alors à faire apparaître des phénomènes jusque-là invisibles. Encore faut-il, bien sûr, montrer que ces difficultés d’apprentissage ne sont pas propres à la transposition dans laquelle s’inscrit l’ingénierie en question mais qu’elles résistent aux transpositions habituelles dont on peut avoir l’illusion qu’elles les traitent alors qu’elles n’y sont pas gérées, les élèves rencontrant leur ignorance, par exemple dans les moments du travail de la technique. Mais il faut aussi montrer que les formes embryonnaires des savoirs en jeu sont des réponses satisfaisantes à des questions de forte portée épistémologique. C’est pourquoi de telles recherches doivent être structurées autour de situations fondamentales, que l’on déterminera avec un regard praxéologique à l’échelle du domaine mathématique et à un niveau d’étude adapté, comme je le développerai plus loin. Car, en effet, il y a lieu de se demander en quelles institutions peuvent vivre de telles formes du savoir, pour quelles raisons et en l’absence de quelles contraintes ? Un regard institutionnel, instruit de la TAD, s’impose donc tant sur les obstacles d’apprentissage que sur les situations.

**2.2. Des obstacles d’apprentissage à dimension institutionnelle**

Dans les travaux que j’ai menés ou dirigés dans la perspective décrite plus haut, une première catégorie de phénomènes est relative à la mise en évidence de ‘préconstruits’ au sens où l’entend Chevallard (1991) dans sa théorie sur la transposition didactique. On y voit, au principe même de ces préconstruits, un rapport empiriste aux « choses » que l’on peut même qualifier, au sens de Bachelard, d’expérience première surtout là où les préconstruits sont relatifs à des grandeurs physiques ou géométriques. C’est ainsi que les élèves doutent du fait que la limite d’une suite d’aires rectilignes puisse être la valeur exacte d’une aire curviligne ou que celle de vitesses moyennes puisse conduire à une vitesse instantanée qui échappe, au-delà d’une certaine précision, au monde des sens et des mesures (Schneider, 1991 et 1992). Cependant, comme l’a montré Job (2011), l’obstacle empiriste perdure bien au-delà de ce contexte puisqu’il permet aussi d’interpréter un rapport « non lakatosien » des élèves aux définitions en fin d’enseignement secondaire : celles-ci, pour eux, sont supposées « décrire » ce que l’on entend « intuitivement » par les « choses » au lieu d’être des modèles de ces choses donnant prise au raisonnement dit déductif.

Les ingénieries, croisées si possible avec d’autres méthodes, ont alors pour fonction première de mettre en évidence ces préconstruits ainsi que les conditions - formulées en termes de variables didactiques des tâches soumises aux élèves – qui en permettent la reprise collective dans des formes de savoirs embryonnaires comme par exemple une vitesse instantanée définie par un calcul de limite « en acte » consistant à supprimer les termes en Dt de l’expression de la vitesse moyenne algébriquement réduite.

Bien sûr, ce que nous apprend la TAD, à travers le regard institutionnel auquel elle engage fortement, c’est que ces préconstruits ne naissent pas ex nihilo et que les obstacles épistémologiques trouvent des racines profondes dans la culture, ainsi que l’avait écrit Radford en 1997, au point de nécessiter leur analyse souvent en remontant très haut dans l’échelle de co-détermination didactique. Dans le cas présent, l’obstacle empiriste peut être interprété à la lumière du modernisme de nos sociétés occidentales, encore sous l’influence du positivisme d’Auguste Comte, où la science « moderne » se présente comme un « acte de lecture de la nature », en vue d’en comprendre les lois intrinsèques et de les maîtriser au service de l’entreprise industrielle de la bourgeoisie. Il en résulte une idéologie des savoirs « certains » et de lois « immuables » découvertes par LA « bonne » méthode. Et il n’est pas innocent sans doute de rapprocher de cette idéologie celle contemporaine du « juste milieu » représentative d’une bourgeoisie bien pensante qui, comme l’ont montré les travaux de Chevallard et Wozniak (2003), pèse sur la non prise en compte de la variabilité à un moment donné des théories statistiques, tout écart à la moyenne étant perçu comme une erreur. A un niveau institutionnel plus bas sur l’échelle, il convient de penser que l’expérience première peut être tout simplement un premier rapport personnel conforme au rapport institutionnel à un objet mathématique tel qu’il peut être, à un certain niveau de scolarité, en décalage avec le nouveau rapport attendu. Un exemple typique est celui de la tangente défini d’une certaine manière dans le cas du cercle, manière qui sera en contradiction flagrante avec ce qu’on appellera en analyse la tangente en un point d’une courbe (Schneider, 1988 ; Castela, 1995). Ou, toujours dans les institutions didactiques, on peut invoquer, comme Mercier (2008), un rapport empiriste au monde comme les effets néfastes du phénomène d’ostention dominant dans les pratiques enseignantes ou regarder ce dernier à son tour comme un fait de civilisation. Cet exemple illustre donc que cette échelle peut et doit être regardée non de manière unidirectionnelle mais comme un ensemble de niveaux qui peuvent, à un moment donné, être rapprochés pour formuler et mettre à l’épreuve plusieurs hypothèses interprétatives d’un phénomène donné. Mais que la prise en compte a priori de niveaux élevés de cette échelle se doit toujours d’être envisagée.

**2.3. Une extension du concept de situation fondamentale**

Ce regard institutionnel sur les ingénieries et les obstacles m’a conduite (Schneider, 2008) à élargir le concept de situation fondamentale de la Théorie des Situations Didactiques (TSD) à des cas où l’enjeu majeur est moins la construction d’un savoir particulier par les élèves que leur entrée dans une nouvelle institution à savoir que l’on cherche avant tout à rendre adéquat au rapport institutionnel leur rapport personnel à certains objets de savoir identifiés par cette institution. Et il m’a plu de voir, dans la situation des médiatrices d’un triangle de Brousseau, au-delà de l’apprentissage d’un résultat mathématique qui est leur concourance, l’évolution, du collège au Lycée, du rapport personnel des élèves à la géométrie, laquelle « ne consiste pas à décrire ce qu’on voit mais à établir ce qui doit être vu » (Brousseau, 2000). Ce regard m’a amenée également à distinguer, à l’instar d’autres chercheurs, le concept de situation fondamentale et l’une de ses déclinaisons en situation adidactique et de miser grandement sur des premières rencontres « culturelles-mimétiques », outillées, par le biais de media appropriés, de discours « heuristiques » adaptés au niveau praxéologique : soit ’modélisation’, soit ‘déduction’ en un sens que je préciserai plus loin.

Comme l’ont montré les travaux de Job (2011) sur l’analyse mathématique et ceux que nous codirigeons sur l’algèbre linéaire (Job et Schneider, à paraître), avec des concepts comme ceux de limite et de l’algèbre linéaire en général, on touche en effet aux limites de l’opérationnalité de la notion de situation fondamentale au sens strict d’un savoir S entendue comme tâche pour laquelle S constituerait une réponse optimale. Effectivement, le développement et l’adoption de tels savoirs sont en partie le fruit d’un consensus au sein de l’institution qui les a vus naître. Concernant le concept de limite, par exemple, on sait actuellement que l’analyse non standard propose une alternative viable au concept de limite comme fondation de l’analyse en donnant un corps cohérent aux conceptions infinitésimales autrefois bannies pour servir de sous-bassement. Les limitations de cet entendement de la notion de situation fondamentale font ressortir avec force la relativité institutionnelle des savoirs et mettent de ce fait l’approche préconisée par la TAD au cœur même de la TSD.

**3. La question des articulations entre OM et OD et celle du MER comme phénoménotechnique**

**3.1. L’étude d’une « approche heuristique de l’analyse » comme entrée en matière**

Mon premier véritable usage de la TAD remonte à 2001. Il s’agissait de l’analyse didactique d’une ‘approche heuristique de l’analyse mathématique’ (groupe AHA, 1999 a et b) qui était caractérisée, d’une part, par des références constructivistes utilisées plutôt mais pas uniquement sur le mode idéologique et, d’autre part, par des organisations mathématiques assez particulières « plus proches d’un traitement d’exemples que d’une théorie » ou, du moins, dirais-je plutôt aujourd’hui, par des OM qui ne s’apparentent pas à une théorie mathématique standardisée telle qu’elle a pu faire l’objet d’un consensus social dans des institutions mathématiques. Mon but aujourd’hui n’est pas de renier l’analyse que j’avais faite à l’époque du projet en question qui souffre effectivement de plusieurs faiblesses mais d’épingler les phénomènes didactiques sous-jacents que j’ai formulés ultérieurement et sur lequel je vais revenir après un petit détour. Pour l’instant, je me contente de préciser que, en ce qui concerne le projet AHA, j’avais pris la peine d’analyser en quoi il relevait du constructivisme que ce soit, en référence à la théorie de Brousseau, par l’étude des moments d’adidacticité ou, par rapport à l’épistémologie constructiviste de Lakatos, en analysant sa structure globale, ses enjeux affichés, le discours qui y était effectivement privilégié et les medias utilisés. Je pouvais donc attester de sa filiation partiellement assumée à un certain paradigme constructiviste, en même temps que je mettais en évidence des particularités de l’OD sous-jacente à ce projet qui, dans une première phase importante, était en rupture avec un expose déductif de l’analyse. Ce projet me permettait ainsi de poser une question à l’articulation d’une OD et d’une OM particulières :

*« Quel poids accorder au constructivisme ? Le prix peut-il en être des praxéologies mathématiques non canoniques […] ? »* (Schneider, 2001).

Au-delà de ce projet particulier, j’avais défendu l’idée que la TAD était, contrairement à ce que pensaient d’aucuns à l’époque, une théorie d’enseignement-apprentissage en ce sens qu’elle spécifiait les moments d’étude dont on ne peut faire l’économie sans risquer d’hypothéquer les apprentissages et j’avais posé la question plus globale de l’articulation des OM et des OD tout en regrettant que la TAD était, à l’époque, plus explicite sur les critères d’évaluation (de description ?) des premières que sur celles des secondes :

*« Au-delà de la description des praxéologies mathématiques et didactique sous-jacentes à des leçons ou à des projets d’enseignement, c’est leur articulation qui devrait permettre de mettre en évidence les ressorts des pratiques enseignantes […] Nul doute cependant que les didacticiens attentent impatiemment de plus longs développements sur l’évaluation d’une organisation didactique. ».* (Schneider, 2001).

Depuis a été formalisée par Bosch et Gascon une typologie des OD se caractérisant :

*« par le fait d’attribuer une grande importance à quelques-uns des moments de l’étude au détriment de tous les autres – qui sont alors généralement sous la seule responsabilité de l’élève ou de l’étudiant ».* (Bosch et Gascon, 2002).

On parle donc aujourd’hui d’OD théoricistes, technicistes, modernistes, ainsi que d’OD classiques, empiristes ou constructivistes. Mais, comme le soulignent Bosch et Gascon, l’usage de cette typologie suppose une « référence » qui lui est extérieure :

*« […] si une OD peut être décrite, en première approximation, à partir de sa structuration en termes de moments, il n’en reste pas moins que les moments ne suffisent pas à une telle description : car l’explicitation des différents moments de l’étude va partir, avant tout, de ce donné qu’est l’OM à mettre en place, qu’il va falloir être capable d’analyser en éléments ni « trop gros » ni « trop fins » pour le pas tuer sa « structure vitale », tout en montrant comment se réalise ou pourrait se réaliser sa « recomposition »* (Bosch et Gascon, 2002)

Le concept de « Modèle Epistémologique de Référence » (MER) est-il cette référence précisément ? Quels types de phénomènes donne-t-il à voir au niveau de l’articulation entre OM et OD ? Quel prix payer pour le construire de manière à ce qu’il puisse jouer le rôle de phénoménotechnique à ce niveau ?

En particulier, comment caractériser les OM auxquelles peut conduire un dispositif didactique à consonance ‘constructiviste’, à l’image du projet AHA ? Et quels critères utiliser pour évaluer, par exemple, les technologies associées ? Est-ce pertinent de regarder si « les formes de justification utilisées sont proches des formes canoniques en mathématiques » ? (Chevallard, 1999). A quoi renvoie le ‘en mathématiques’ ? Et, d’ailleurs, quelle est la fonction de tels critères au niveau de la recherche ? J’y reviendrai plus loin après avoir analysé et contrasté deux usages du concept de MER.

**3.2. Caractéristiques d’un usage peu phénoménotechnique du concept de MER : à propos du théorème de Lagrange à l’université**

Un premier usage du concept de MER m’apparaît, après analyse approfondie, peu voire pas du tout phénoménotechnique. Il s’agit d’un MER autour du théorème de Lagrange pour étudier des enseignements universitaires dans une filière mathématique et une filière économique (Xhonneux, 2011 ou Xhonneux et Henry, à paraître). Ce MER est relatif au théorème de Lagrange et est constitué de cinq familles de tâches autour desquelles sont définies cinq OMi locales. Les trois premières familles de tâches : « Chercher des candidats à être extremum d’un problème d’optimisation sous contraintes d’égalité », « Résoudre un problème d’optimisation sous contraintes d’égalité » et « Exploiter la signification du théorème de Lagrange » sont qualifiées de ‘procédurales’ en référence à la théorie de Sfard (1991) complétée de la dialectique ‘outil-objet’ de Douady (1986). Les deux autres familles de tâches sont alors appelées ‘structurales’ : il s’agit de « Construire les éléments théoriques relatifs au Théorème de Lagrange » et de « Construire les éléments théoriques relatifs au multiplicateur de Lagrange ». Ce MER est ensuite « affiné » c’est-à-dire structuré en plusieurs niveaux : OM1 et OM2 formant un niveau qui correspond à ce que Sfard nomme les processus ‘d’intériorisation’ et de ‘condensation’ du théorème de Lagrange tandis que les autres OM représentent la ‘réification’, au sens de Sfard, stade où le « concept » - je cite les auteurs - n’est plus le théorème mentionné mais les multiplicateurs de Lagrange. A ce moment, la TAD est mentionnée dans l’usage qu’en fait Winslow (2006) pour montrer que, d’un niveau d’étude à l’autre, la théorie peut se transformer en tâches.

Force m’a été de constater que ne se dégage pas vraiment de phénomène, ni dans le corps de la thèse ni dans les conclusions partielles ou finale, même pas pour caractériser ce que d’aucuns renomment un « décalage institutionnel ». Or que ce travail comporte une somme imposante d’informations relatives à l’enseignement du théorème de Lagrange. Ce n’était faute pourtant d’avoir pris connaissance, comme la bibliographie l’indique, des importants travaux d’Artaud (1993) sur une problématique proche qui auraient pu induire l’une ou l’autre hypothèse susceptible d’être mise à l’épreuve.

Mais, au-delà de la critique, il m’importe ici de souligner quelques caractéristiques de cette recherche qui pourraient expliquer où le bât blesse. J’y observe, entre autres,

* Un fort métissage « théorique » : outre la théorie de Sfard et la TAD, on y trouve référence aux travaux de Barbin sur les différentes fonctions de la démonstration : expliquer ou vérifier, à ceux de Douady sur les cadres et la dialectique outil-objet, à la théorie de la représentation selon Duval à propos des registres et de la différence entre preuve et argumentation, … Si le métissage théorique peut être fécond comme l’a montré Artigue (2009) à propos de la complémentarité de la TAD et de l’ergonomie cognitive instrumentale pour l’étude du rôle des technologies numériques dans les apprentissages, il ne peut l’être qu’au prix d’analyses qui en permettent l’articulation. Dans le cas étudié ici, le recours à la théorie de Sfard permet au contraire d’éviter au chercheur de décrire, à la lumière de la TAD et du regard articulé qu’elle autorise sur les OM et les OD, par quel processus les « blocs technologico-théoriques » des praxéologies OM1 et OM2 sont transformées en tâches. L’absence de phénomènes est alors masquée par le recours à une surenchère de critères d’origines et de natures multiples que ce soit pour parler de diverses démonstrations du thèorème de Lagrange mais aussi d’OM ou d’OD observées. Par exemple pour l’analyse des démonstrations, Xhonneux (2011) utilise aussi bien la distinction de Poincaré entre « intuition (qualifiée de réelle) » et « rigueur » (formelle), les fonctions de la démonstration de Barbin, … mais aussi le fait que la démonstration utilise ou non la fonction lagrangienne ou se base ou non sur le théorème des fonctions implicites. En ce qui concerne les OM et les OD, Xhonneux ajoute aux critères formulés par Chevallard pour les unes et à la définition des autres par Bosch et Gascon, beaucoup d’autres critères tels que la présence ou l’absence d’éléments du praxis ou du logos de chacune des OM identifiées dans le MER, la « cohérence » ou la « rigueur » ou encore le caractère déductif ou inductif des manuels suivant que ceux-ci « séparent ou lient le procédural au structural », etc. Ces critères sont alors utilisés comme les critères de grilles d’évaluation qui ne peuvent être utilisées sans tenir compte de l’appréciation personnelle de l’évaluateur qui doit juger, par exemple, du caractère « intuitif » ou « formel » d’une démonstration.
* Un MER présenté assez abruptement, que ce soit dans la version affinée ou l’autre, étant « fabriqué empiriquement à partir des praxéologies à enseigner et des textes ‘savants’ comme les articles mathématiques, les manuels ou les supports de cours universitaires » (Xhonneux et Henry, à paraître), sans analyser ce qui relève des institutions ‘savantes’ ou des institutions ‘didactiques’ ou d’institutions ‘professionnelles’ … En effet, en ce qui concerne le premier aspect, Xhonneux, tout en estimant que le théorème de Lagrange est « une petite pièce d’un grand puzzle », ne décrit jamais le puzzle en question et renvoie à la théorie « la plupart du temps implicite et à chercher au sein d’un autre chapitre du syllabus, d’un autre cours ou d’une autre institution ». Quant aux « pratiques de l’économiste ou du mathématicien », elles sont évoquées comme pouvant influencer le savoir à enseigner mais ne sont pas étudiées, « vu la complexité du sujet ». On sait pourtant, et les travaux de Rouy (2007) sur le concept de tangente l’illustrent, que la forme donnée à un théorème ou à un concept dépend d’un projet institutionnellement situé, qu’il s’agisse d’institutions savantes, didactiques ou professionnelles.
* Un MER construit autour d’un théorème plutôt que d’être pensé au niveau d’un domaine, ici celui de l’optimisation sous contraintes. Par exemple, Xhonneux y exclut la méthode des multiplicateurs de Carathéodory pourtant utilisée dans un cours observé, sans justification et sans doute parce qu’il la situe en dehors du thème « théorème de Lagrange ». Quant au recours à l’un ou l’autre théorème susceptible d’être utilisé pour démontrer le théorème de Lagrange, par exemple, le théorème des fonctions implicites, il ne peut être jaugé - mais ce n’est pas fait dans cette thèse - qu’à la lumière d’une économie mathématique plus globale. Et c’est bien ainsi que Rouy (2007) avait pu évaluer la place du théorème de Lagrange dans l’étude des fonctions de R dans R, en lien avec celle de leur dérivée. Tout se passe, dans Xhonneux (2011), comme si le MER devait rendre compte de la liste exhaustive des tâches observées dans des institutions savantes ou didactiques à propos du thème « Théorème de Lagrange » sans argumentation et sans se situer au niveau du sous-domaine mathématique qu’est l’optimisation sous contraintes ou même à celui d’un univers mathématique plus large.

Ce MER est alors utilisé en tant que description d’une OM dont « dépendra l’analyse des OD » liées au théorème de Lagrange pour analyser le savoir enseigné, soit en termes d’OM pour ce qui est du savoir à enseigner à partir de l’analyse de manuels, soit en termes d’OD, pour ce qui est du savoir enseigné, à partir de cours observés. Mais, en l’absence d’analyses proprement didactiques ces OM et OD sont partiellement superposées sans être vraiment articulées. Or, comme dit plus haut, l’usage de la typologie des OD que donnent Bosch et Gascon (2002) par l’insistance attribuée à certains moments de l’étude, demande à être outillée, au cas par cas, d’analyses didactiques comme celles que j’avais faites du projet AHA pour étudier en quoi il relevait vraiment du paradigme constructiviste à la lumière d’un MER argumenté sur le plan épistémologique. J’y reviendrai.

Je contrasterai aussi plus loin ce travail de Xhonneux où les potentialités phénoménotechniques de la TAD sont peu exploitées avec deux analyses du TAF faites, l’une par Rouy, et l’autre, par Bourgade (à paraître), où deux formes complémentaires d’allégeance à l’institution mathématique permettent de mettre à jour des phénomènes didactiques et leurs raisons d’être. Mais, l’analyse faite à la section 3.2. m’engage à revenir aux sources du concept de MER comme outil qui permet au chercheur d’articuler OM et OD. Et il m’a paru utile, à cette fin, de revenir à la réflexion faite par Gascon en 1993 sur l’algèbre élémentaire et sur le fonctionnement du concept de MER qui y est à l’œuvre.

**4. Le concept de MER comme phénoménotechnique**

C’est la posture de dénaturalisation typique de la TAD qui est à l’origine du concept de MER. Voici en effet en quels termes Gascon (1993) caractérise l’ouverture de la didactique sur le savoir mathématique : « On peut considérer qu’il existe, dans toute institution didactique où l’on enseigne des mathématiques, des modèles implicites des différents domaines du savoir mathématique enseigné, d’où émerge par extension un modèle implicite de la nature même du savoir mathématique ».

Comme l’illustre Gascon à propos de l’algèbre élémentaire, ce modèle agit comme un système de conditions et de contraintes sur les pratiques, en « permettant l’existence de certaines d’entre elles et en empêchant que d’autres puissent apparaître ». Et, conformément à la TAD, ce modèle implicite se doit d’être dénaturalisé et pris comme « objet d’étude, c’est-à-dire comme faisant partie des faits didactiques qui constituent la base ‘empirique’ de la recherche ». Gascon poursuit en insistant sur la nécessité que le chercheur dispose d’un « modèle alternatif du domaine d’activité mathématique enseigné qui lui serve de cadre de référence pour interpréter le modèle dominant dans l’institution qu’il étudie », ce modèle devant lui-même être situé dans un « modèle global de l’activité mathématique qui restera, selon les cas, plus ou moins explicité par le chercheur ».

Mais, ainsi que je vais l’illustrer, la constitution même du modèle épistémologique de référence a une histoire qu’il est intéressant de connaître, pour tout autre chercheur, afin de pouvoir y identifier les choix inéluctables au principe même de la définition de ce modèle duquel dépendent, en définitive, les phénomènes qui seront donnés à voir et leur interprétation.

**4.1. Un MER phénoménotechnique relatif à l’algèbre élémentaire**

Le modèle implicite qui prévaut dans l’enseignement de l’algèbre est celui étudié par Chevallard en France et par Gascon en Espagne. On l’appelle le modèle de l’arithmétique généralisée qui « met l’accent sur le ‘symbolisme algébrique’ et l’oppose à un supposé ‘langage arithmétique’ que le premier est censé élargir et généraliser » ce qui, parmi plusieurs caractéristiques, conduit, d’une part, à la « désarticulation » du corpus de problèmes en résolutions d’équations ou d’inéquations, de manipulation d’identités et de fonctions élémentaires, d’application de formules et de résolution de problèmes ‘concrets’ et, d’autre part, à l’interprétation des difficultés d’acquisition du langage algébrique trop exclusivement référée au cadre arithmétique, comme la modification du sens des signes +, =, -, x, … d’un langage à l’autre.

Si un tel modèle a pu être explicité et caractérisé, c’est à la lumière d’un modèle alternatif décrit et argumenté par Gascon (1993) en plusieurs étapes que je résume ci-dessous.

Se situant explicitement dans la perspective anthropologique de Chevallard, Gascon présente le patron d’Analyse-Synthèse comme une macro-technique constituée d’un raisonnement régressif qui remonte de l’objet inconnu aux données du problème auquel fait suite un raisonnement progressif faisant chemin inverse. Son exemple est une construction géométrique se résolvant par ce que Polya (1967) a systématisé sous le nom de « méthode des deux lieux » et que je résume ainsi dans sa version élémentaire : la construction d’une figure satisfaisant à des contraintes se ramène à celle d’un point que l’on détermine à l’intersection de lieux, ceux-ci étant des ensembles de points possibles satisfaisant alternativement une partie des contraintes puis l’autre. Gascon illustre ensuite que le patron A/S est une aide à la résolution de problèmes autres que des constructions géométriques, un problème arithmétique en l’occurrence, mais que, parmi d’autres limitations, il ne produit pas de forme générale de résolution de problèmes isomorphes pas plus qu’il ne donne les conditions d’existence de ces solutions.

Là intervient son analyse épistémologique de l’algèbre, non pas basée comme ce qui se fait d’habitude, sur la genèse de l’algèbre dans l’école d’Alexandrie où des « valeurs indéterminées » sont représentées par des lettres à la place des nombres, mais sur la « nouvelle algèbre » de Viète ainsi que sur la « méthode » de Descartes qui permettent de rendre « analytique » le patron A/S. Il montre ainsi un problème de construction géométrique où les lieux qui déterminent le « point clé » ne sont pas, à ses yeux, constructibles directement à partir des données du problème mais dans lequel les contraintes peuvent s’exprimer par des équations formant un système que doit vérifier ce point-clé. Il résout également, de manière analytique, une variante du problème arithmétique initial qui rend impraticable une analyse réductive permettant de décomposer la résolution en une chaîne de résultats intermédiaires calculables à partir des précédents. Enfin, Gascon illustre que le fait de représenter les données également par des lettres, que l’on appelle paramètres, permet de s’intéresser à la structure des problèmes, au-delà de la seule obtention de l’inconnue, et de produire de nouvelles connaissances sur le système modélisé, relatives par exemple aux conditions d’existence des solutions, à leur interprétation dans le contexte y compris dans des cas particuliers de l’énoncé …

De cette analyse a résulté un modèle épistémologique de référence relatif à l’algèbre et qui s’est précisé peu à peu vers la formulation donnée par Bosch et Gascon en 2002 : « l’algèbre élémentaire n’apparaît pas initialement comme une OM au même niveau que les autres organisations qui s’étudient à l’école […]. [C’est] un instrument mathématique d’étude d’organisations mathématiques : un instrument didactique […] A la question « qu’est-ce que l’algèbre élémentaire ? » nous ne répondons pas en termes d’OM, mais en termes de processus de modélisation d’OM par d’autres OM ». Les OM à modéliser algébriquement sont premières et diversifiées : par exemple, les problèmes de constructions géométriques, les problèmes de ‘dénombrement simple’, … En outre, c’est le processus de modélisation lui-même qui est central, avant de laisser place à des OM « totalement algébrisées » où l’outil algébrique est étudié en tant qu’objet. Dans cette perspective, les paramètres jouent un rôle fondamental et font apparaître des formules qui peuvent être interprétées comme des fonctions à plusieurs variables L’analyse de leur complexité conduit alors les auteurs à formuler des indicateurs du « degré d’algébrisation ». Ce modèle épistémologique de référence a servi à leurs auteurs à mieux comprendre les pratiques empiriques liées à l’arithmétique généralisée. En particulier l’abandon des paramètres dans l’algèbre enseignée qui lui est contemporain a conduit, entre autres, à la séparation excessive entre différents secteurs de l’algèbre : équations, formules, fonctions, … Mais ce modèle a aussi donné l’idée d’ingénieries alternatives qui prennent la forme de PER organisés autour de thèmes tels que « la vente de t’shirts » ainsi que d’une succession de questions qui supposent de complexifier les modèles algébriques dont on a besoin. Ces PER posent des questions de nature écologique dont Bosch a rendu compte à l’Ecole d’Eté de Clermont-Ferrand.

Mais, surtout, le concept de MER fonctionne ici comme une véritable phénoménotechnique car il sert d’abord à dénaturaliser des modèles implicites devenus transparents. Et, cette propriété du MER découle bien du pas de côté épistémologique fait par rapport aux pratiques empiriques dont il n’en est pas issu. Cependant, on ne peut éviter, comme illustré dans la section suivante, le parti-pris du chercheur, étant donné les contraintes a priori qui pèsent sur sa réflexion et les institutions auxquelles il est assujetti. Ce qui rend d’autant plus nécessaire l’explicitation la plus précise possible de ses choix et de ses arguments. C’est ce qu’illustre la section 4.2.

**4.2. Des choix inéluctables du chercheur à l’explicitation de son modèle de l’activité mathématique à un haut niveau de l’échelle de co-détermination didactique**

Comme montré dans la section précédente, la construction par Gascon de son modèle relatif à l’algèbre élémentaire suppose le traitement de questions fondamentales telles que « Qu’est-ce que faire de l’algèbre ? ». Mais son élaboration ne peut éviter des choix du chercheur lui-même qui sont plus ou moins explicites. Pour développer cela, je voudrais montrer, qu’à partir de mêmes référents, on peut construire un autre modèle alternatif. Il se fait, en effet, que, dans le même temps, j’avais analysé avec des professeurs du secondaire ce que Polya (1967) appelle des « modèles » de résolution de problèmes qu’il classe en 4 catégories : le modèle des deux lieux, le modèle cartésien, la récurrence et la superposition. Bien qu’on puisse faire des recoupements d’un modèle à l’autre pour résoudre certains problèmes, je ne parlerai que des deux premiers en soulignant que notre objectif premier n’était pas de réfléchir sur l’enseignement de l’algèbre mais plutôt sur celui de la géométrie au collège et, en particulier, sur les transformations du plan auxquelles nous voulions rendre une instrumentalité mathématique qu’elles n’avaient pas dans l’enseignement. Et, c’est sur la méthode des deux lieux que nous nous sommes focalisés en illustrant largement, à l’instar de Petersen (1880) que les transformations permettent d’élargir le modèle de Polya dans les problèmes où les deux lieux à l’intersection desquels on va déterminer le point clé de la construction ne sont pas immédiatement « accessibles ». En effet, dans un nombre assez important de problèmes, un des lieux recherchés au moins est l’image du lieu d’un autre point dont le point clé est l’image par une transformation géométrique. C’est le cas d’ailleurs du problème sur lequel s’appuie Gascon (1993) pour montrer l’intérêt d’une modélisation algébrique : en fait, sa déclaration sur l’impossibilité de construire, dans ce problème, les lieux qui déterminent le « point clé » directement à partir des données est toute relative en ce sens qu’elle dépend des outils géométriques qu’on s’autorise à un moment donné du curriculum.

Mais, au-delà de sa portée géométrique, nous avions développé l’intérêt de la méthode des deux lieux dans d’autres domaines mathématiques, tout comme le fait Polya d’ailleurs, en parlant de l’extension de ce modèle à propos de la détermination d’une fonction trigonométrique par une équation différentielle et des conditions initiales. Et, dans un article pourtant le titre militant « Plaidoyer en faveur de la méthode des deux lieux » (COJEREM, 1995 a et b), nous avions développé des exemples multiples où le modèle des lieux (deux lieux voire plus) trouve une expression très générale qui s’applique tant en analyse et en algèbre qu’en géométrie et qui met en évidence un autre rôle des paramètres que nous avions résumé ainsi en substance : il s’agit de trouver un objet qui satisfait à plusieurs conditions (une figure géométrique, une fonction, ou, pourquoi pas une maison d’habitation, …). L’écueil consiste à choisir d’emblée une solution qui répond à la première condition ou même à quelques-unes mais qui ne les respecte pas toutes. Pour ne pas être ainsi « coincé », il convient de s’offrir, d’entrée de jeu, des « degrés de liberté » en cherchant d’abord non pas un seul objet qui correspond à la première condition par exemple, mais une classe d’objets suffisamment vaste pour la restreindre ensuite en faisant jouer tour à tour, dans un ordre « efficace », toutes les conditions imposées. Dans la recherche d’une fonction, ce sont les paramètres qui constituent ces degrés de liberté et c’était là, pour nous, un de leurs rôles importants parmi d’autres. Au détour donc de cette réflexion sur l’enseignement de la géométrie et à partir également de travaux plus anciens (Schneider, 1980, 1988) sur l’intérêt d’un regard fonctionnel précoce, nous avions ébauché un autre MER pour l’algèbre qui a trouvé un mode d’expression dans le projet AHA et sur lequel Krysinska (2007) a travaillé avec des élèves en début et en fin de secondaire. Dans ce MER, le travail proprement algébrique (équations, inéquations, identités) est subordonné à l’étude des classes paramétrées de fonctions en lien avec des domaines d’application privilégiés (par exemple, la classe des fonctions sinusoïdales en lien avec l’étude de phénomènes harmoniques), étude qui constituerait alors un des fils conducteurs curriculaires de l’enseignement des mathématiques dans le secondaire (voir aussi Krysinska et Schneider, 2010).

Mais il n’y a pas lieu de militer pour un MER ou pour un autre, dont la construction est soumise à des contraintes et des possibilités institutionnelles externes, surtout lorsque du développement est lié à la recherche. Pourvu que, comme souligné plus haut, un pas de côté fondé épistémologiquement soit fait par rapport aux pratiques enseignantes ordinaires et que, pour le chercheur, la construction d’au moins un modèle de référence spécifique permette de rendre visibles des phénomènes didactiques qui ne l’étaient pas, permettre leur description et autoriser des tentatives d’explication. En ce sens, un MER constitue une phénoménotechnique pour autant que, et Gascon le précise bien, qu’on soit conscients qu’il détermine fortement les phénomènes qu’il permet de mettre à jour et d’étudier. Dans le cas du MER sur l’algèbre décrit par Bosch et Gascon (2002), c’est « un élément théorique central d’une OD hypothétique (non empirique) de niveau régional » par rapport auquel le chercheur va pouvoir situer des OD empiriques dont celle précisément de l’arithmétique généralisée. Mais, comme illustré plus haut, un autre MER de l’algèbre élémentaire peut être envisagé, non contradictoire avec le précédent mais s’inscrivant dans un focus curriculaire plus large.

La question devient alors celle du spectre à travers lequel le chercheur envisage son MER en même temps que celle des niveaux de l’échelle de co-détermination didactique auxquels se réfère son modèle plus général de l’activité mathématique. Comme Gascon (1993), je pense que le concept de situation fondamentale demeure ici une référence incontournable que ce soit dans un sens strict ou au sens large donné plus haut. Mais les recherches que j’ai menées ou dirigées m’ont engagée (Schneider, 2008) à expliciter mon propre modèle de l’activité mathématique, en me polarisant sur l’idée que les mathématiques enseignées se doivent d’être et d’apparaître comme une économie de pensée car elles permettent de « tuer » les problèmes mais aussi en distinguant deux niveaux praxéologiques sur lesquels je reviendrai. Le premier de ces niveaux cependant ne peut être identifié qu’au prix d’une certaine indépendance par rapport à « l’institution mathématique » laquelle demeure souvent invisible. Or, l’invisibilité de certaines institutions est un frein réel à la constitution d’un MER comme illustré ci-dessous.

**4.3. L’invisibilité de certaines institutions comme obstacle à la phénoménotechnique**

Comme déjà évoqué, Job (2011) a étudié le rapport empiriste à la notion de définition comme obstacle à l’acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite. Il a étayé cette hypothèse par une analyse a priori épistémologique et institutionnelle et par une ‘situation fondamentale de mise à l’épreuve’, pour le chercheur, de cette interprétation, et, pour les étudiants, de leur posture première face aux définitions. Pour mener à bien cette entreprise, il a été amené à débusquer des institutions « cachées », c’est-à-dire invisibles même pour des chercheurs qui se sont penchés sur des sujets de recherche connexes. Par exemple, l’institution des « formalistes » pour lesquels, un raisonnement correct en analyse serait forcément « caractérisé par l’emploi d’un langage formalisé syntaxiquement correct où apparaissent les quantificateurs universel et existentiel dans le respect de l’application d’inférences valides », institution aux yeux desquels Cauchy devrait apparaître comme mauvais élève de la classe alors que les historiens s’accordent à le voir comme le fondateur de l’analyse moderne. De manière souterraine également joue aussi une autre institution dont Job & Schneider (à paraître) montrent en quoi elle peut faire barrage à ce qu’ils appellent un discours heuristique, à savoir l’institution des mathématiciens dont l’épistémologie serait platonicienne.

Ce n’est pas un hasard sans doute que Rouy (2007) et Bourgade (à paraître) ont, de manières différentes mais non contradictoires et plutôt complémentaires, analysé le Théorème des accroissements finis (TAF) à la lumière de l’institution des mathématiciens. La première a étudié ce théorème comme élément d’une OM standardisée dans l’enseignement des mathématiques à l’université, OM qui demeure un « phare » emblématique des mathématiques rigoureuses pour les enseignants du secondaire. Dans cette OM, le TAF est un maillon entre les propriétés topologiques des réels et la validation du lien entre la positivité de la dérivée d’une fonction de R dans R et sa croissance. Faute de pouvoir imaginer une démonstration qui, comme dans le projet AHA, s’appuie sur le patron A/S pour court-circuiter une OM imposante dont la rentabilité ne peut être explicitée au niveau secondaire et faute de pouvoir exposer cette OM avec l’ensemble de ses démonstrations, le TAF permet alors aux enseignants de s’offrir une « bouffée de rigueur » (Rouy, Ib.) car sa démonstration à partir du théorème de Rolle ne nécessite qu’une astuce technique. Quant aux démonstrations impliquant les propriétés topologiques des réels, elles sont évitées et les résultats font l’objet de gestes d’ostension. Rouy parle, dans ce cas, de praxéologies ‘à trous’. Quant à Bourgade (à paraître), il développe que, dans les « prépa des INP », c’est aussi le « désir de rigueur [qui] conduit à énoncer ce théorème sous ses hypothèses minimales et à le démontrer dans ce cadre », alors que ses « applications réalistes […] ne font appel qu’à des conditions de validité moins larges ». Son analyse épistémologique du théorème de Rolle l’incite effectivement à souligner « le lien consubstantiel qui se crée progressivement entre l’exigence de rigueur et la minimalité des hypothèses d’un théorème ».

De manière plus générale l’institution qui se définit par un rapport emblématique aux mathématiques dans leur forme standardisée fait écran à un niveau praxéologique pourtant incontournable dans l’éducation mathématique. Ce sera l’objet de ma conclusion.

**En guise de conclusion : un phénomène à l’articulation des OM et des OD que donne à voir une distinction entre deux niveaux praxéologiques**

Je reviens à mon analyse d’une « approche heuristique de l’analyse mathématique » pour y souligner une spécificité révélatrice d’un phénomène qu’il me paraît intéressant d’analyser à la lumière de la théorie de la transposition didactique telle qu’elle était formulée à ses origines. Il faut d’abord remarquer que ce projet relève d’un MER explicite composé de deux « boucles d’enseignement » comme les appellent les auteurs. La première est elle-même composée de deux pôles : d’une part, la modélisation de grandeurs géométriques ou physiques comme les aires curvilignes et les vitesses et, d’autre part, l’étude de classes paramétrées de fonctions au sens où j’en ai parlé tout à l’heure. Quant à la deuxième boucle, elle se devait de négocier une transition entre, d’une part, ce qu’on pourrait appeler le calcul infinitésimal amarré à des questions de géométrie et de physique et, d’autre part, l’analyse constituée comme théorie mathématique autonome.

Comme je l’avais écrit, il y a un important logos dans cet ouvrage mais il ne s’apparente pas à une théorie mathématique standardisée, en particulier mais pas uniquement dans la première boucle citée. J’en reprends ici quelques caractéristiques : un exposé qui reste fort proche d’un traitement d’exemples choisis pour leur caractère paradigmatique, un choix momentané de techniques dont la portée est limitée mais qui conservent le sens de la démarche, comme des calculs « artisanaux » de dérivées avant toute étude des propriétés de l’opérateur de dérivation mais aussi des discours technologiques validant la modélisation mathématique d’un système et des propriétés qu’un certain sens commun lui prête. Par exemple, on y prouve que la limite de suites d’aires rectilignes est la valeur exacte d’une aire curviligne en jouant, par une double réduction par l’absurde, sur une conviction géométrique relative à l’ordre des aires de surfaces emboîtées. Plus généralement, on justifie que le calcul créé (de limite, de dérivée ou de primitive) donne bien ce que l’on cherche, au prix d’une ‘validation’ non canonique basée sur des intuitions géométriques ou cinématiques, des expériences mentales, l’examen de cas extrêmes, … ou encore au prix d’une validation pragmatique qui consiste à rendre crédible une nouvelle technique, sujette à caution, en montrant qu’elle permet de retrouver des résultats déjà acquis par d’autres méthodes.

Evidemment, par rapport au critère d’évaluation de Chevallard considéré en un sens premier : *les formes d’évaluation sont-elles standard ?* je me dois d’être sévère mais je peux aussi considérer un tel critère comme un élément, parmi d’autres, permettant de caractériser certaines OM. Et je ne m’en suis pas privée ayant théorisé de telles OM comme des OM « modélisation » qu’il est intéressant, à mes yeux, de contraster avec des OM « déduction ». Ces deux niveaux, je les envisage à la fois comme processus pour décrire deux facettes de l’activité mathématique et comme produits de ces processus en termes d’organisations mathématiques. Ils concernent tout autant les institutions didactiques que celles qui sont à l’origine du savoir savant que ce soit de nos jours ou dans des temps révolus. Pour un développement plus ample, je renvoie le lecteur à Schneider (2008 et 2011) et me contenterai de dire ici que, dans les praxéologies ‘modélisation’, on cherche à modéliser des objets non définis mathématiquement, existant par le truchement d’une désignation, mais dont on a une certaine connaissance : ce sont des ‘préconstruits’ au sens de Chevallard (1991). Dans les praxéologies ‘déduction’, on construit une organisation déductive des éléments du modèle ainsi construit, les objets étant définis par les techniques qui les modélisent rendant ainsi nulle et non avenue toute question relative au bien-fondé de la modélisation initiale.

Il me serait facile de faire un plaidoyer en faveur de l’existence des praxéologies de type ‘modélisation’ en me référant aux nombreux observables récoltés par mes thésards et moi-même sur le fait que les élèves se questionnent sur la pertinence des modèles que ce soit en raison d’une vision empiriste ou d’une rupture par rapport à des acquis scolaires antérieurs. Mais là n’est pas mon but ici. Le phénomène que je voudrais pointer ici est la non visibilité des praxéologies ‘modélisation’ à certains niveaux de l’enseignement et en certaines institutions. Je m’en tiendrai ici à l’enseignement secondaire, niveau auquel les enseignants – et, plus particulièrement, ceux du Lycée, identifient difficilement ce niveau praxéologique tant les praxéologies ‘déduction’ sont, à leurs yeux, un ‘phare’ emblématique du travail mathématique qu’ils ne peuvent jouer pleinement compensant alors par des gestes d’ostension, comme décrit plus haut. On est là dans une forme d’articulation entre les OM et les OD où c’est la prégnance de certaines OM qui contraignent les OD dont elles empêchent certaines formes. Et, pour mettre à jour d’autres phénomènes de ce type à l’articulation des OM et des OD, il me semble que la distinction faite ici entre OM ‘modélisation’ et OM ‘déduction’ est un pendant utile à la typologie d’OD que proposent Boch et Gascon.

Sans doute faudrait-il interpréter le phénomène décrit plus haut en retournant aux sources mêmes de la théorie de la transposition didactique. En effet, rendre une épaisseur épistémologique au texte du savoir en reconnectant le « cœur théorico-technologique de l’œuvre avec ses applications » pour reprendre les mots de Chevallard avant même que ce texte n’existe pour les élèves, que ce soit par des jeux adidactiques comme les appellent Schneider & Mercier (2008) et/ou par un type de discours que Job & Schneider (à paraître) qualifient d’heuristique, c’est transgresser une « transmission scolaire bureaucratique » que Verret identifie par les processus de dépersonnalisation et de désyncrétisation du savoir délimité en savoirs partiels pouvant s’exprimer dans un langage autonome et se prêtant à une programmabilité de leur acquisition Tâche périlleuse s’il en est …

**Bibliographie**

Artaud, M. (1993). *La mathématisation en économie comme problème didactique : une étude exploratoire*. Thèse doctorale en didactique des mathématiques. Université de Provence.

Artigue, M. (1990). Ingénierie didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 9(3), 281-308.

Artigue, M. (2009). Rapports et articulations entre cadres théoriques : le cas de la théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 29(3), 305-334.

Bachelard, G. (1949). *Le rationalisme appliqué*. Presses universitaires de France.

Bosch, M. & Gascon, J. (2002). *Les praxéologies didactiques : Organiser l’étude. 2. Théories et empiries*. Dorier, J.-L., Artaud, M., Artigue, M., Berthelot, R., Floris, R. (eds). Actes de la 11e Ecole d’Eté de Didactique des Mathématiques. Cédérom. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Bourgade, J.-P. (à paraître). *Le théorème des accroissements finis comme question curriculaire*. Actes du 4ème congrès sur la théorie anthropologique du didactique, Toulouse 21-26 avril 2013.

Brousseau G. (2000). Les propriétés didactiques de la géométrie élémentaire, *Actes du Séminaire de Didactique des Mathématiques de l’Université de Crète,* Rethymon.

Castela, C. (1995). Apprendre avec et contre ses connaissances antérieures. *Recherches en Didactique des Mathématiques,* 15/1, 7-48.

Chevallard, Y. (1991). *La transposition didactique – du savoir savant au savoir enseigné*. Grenoble, France : La Pensée Sauvage.

Chevallard, Y. (1992). Concepts fondamentaux de la didactique : perspectives apportées par une approche anthropologique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 12(1), 73-112.

Chevallard, Y. (1999). Analyse des pratiques enseignantes et didactique des mathématiques en théorie anthropologique du didactique. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 19(2), 221-265.

Chevallard, Y., Wozniak, F. (2003). *Enseigner la statistique au secondaire – Entre genre prochain et différence spécifique,* Cours donné à la XIIe école d’été de didactique des mathématiques (Corps, 20-29 août 2003). <http://yves.chevallard.free.fr/spip/spip/article.php3?id_article=58>.

Cojerem (1995a). *Des situations pour enseigner la géométrie*, (1er/4ème guide méthodologique), Bruxelles : De Boeck-Wesmael.

Cojerem (1995b). *Géométrie en situations* (1er/4ème notions pour l’élève), Bruxelles : De Boeck-Wesmael.

Douady, R. (1986). Jeux de cadre et dialectique outil-objet. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 7(2), 5-31.

Gascon J. (1993). Un nouveau modèle de l’algèbre élémentaire comme alternative à l’« arithmétique généralisée », *Petit x* 37, 43-63.

Groupe AHA (1999a). *Vers l’infini pas à pas*, manuel pour l’élève, Bruxelles : De Boeck-Wesmael.

Groupe AHA (1999b). *Vers l’infini pas à pas*, guide méthodologique, Bruxelles : De Boeck-Wesmael.

Job, P. (2011). *Étude du rapport à la notion de définition comme obstacle à l'acquisition du caractère lakatosien de la notion de limite par la méthodologie des situations fondamentales/adidactiques*. Thèse de doctorat. Université de Liège.

Job, P., Schneider, M. (à paraître). *A propos de l’écologie du discours heuristique*. Actes du 4ème congrès sur la théorie anthropologique du didactique, Toulouse 21-26 avril 2013.

Joshua, S. (1996). Qu’est-ce qu’un « résultat » en didactique des mathématiques ? *Recherches en Didactique des Mathématiques, 16/2, 197-220.*

Krysinska, M. (2007). *Emergence de modèles fonctionnels comme outils de catégorisation de phénomènes divers : repères épistémologiques et didactiques.* Thèse de doctorat. Université de Namur.

Krysinska, M., Schneider, M. (2010). *Emergence de modèles fonctionnels,* Presses universitaires de Liège.

Mercier, A. (1999). Sur l’espace-temps didactique. Habilitation à diriger des recherches. Université de Provence.

Mercier, A. (2008). *Pour une lecture anthropologique du programme didactique*. Education et Didactique (revue électronique), 2(1).

Petersen, J. (1880). *Méthodes et théories pour la resolution des problèmes de constructions géométriques*. Editions Jacques Gabay.

Polya, G. (1967). *La découverte des mathématiques*, Dunod, Paris.

Radford, L. (1997). On Psychology, Historical Epistemology, and the Teaching of Mathematics : Towards a Socio-Cultural History of Mathematics, *For the Learning of Mathematics* 17, 1, FLM Publishing association, Vancouver, British Columbia, Canada.

Rouy, E. (2007). *Formation initiale des professeurs et changements de posture vis-à-vis de la rationalité mathématique*. Thèse de doctorat. Université de Liège.

Schneider, M. (1980). *Les fonctions trigonométriques et exponentielles : connaissances disponibles si leur apprentissage s'accompagne d'un travail de mathématisation*. Namur : FUNDP.

Schneider, M. (1988). *Des objets mentaux aires et volumes au calcul des primitives*. Thèse défendue à l’Université catholique de Louvain.

Schneider, M. (1991). Un obstacle épistémologique soulevé par des « découpages infinis » des surfaces et des solides. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 11(2.3), 241-294.

Schneider, M. (1992). A propos de l’apprentissage du taux de variation instantané, *Educational Studies in Mathematics*, 23, 317-350.

Schneider, M. (2001). Praxéologies didactiques et praxéologies mathématiques, A propos d’un enseignement des limites au secondaire, *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 21(1.2), 7-56.

Schneider, M. (2008). *Traité de Didactique des Mathématiques*. Presses universitaires de Liège.

Schneider, M. (2011). Ingénieries didactique set situations fondamentales. Quel niveau praxéologique ? In Margolinas, C., Abboud-Blanchard, M., Bueno-Ravel L., Douek, N. , Fluckiger, A., Gibel, P. et al. (Eds). *En amont et en aval des ingéniéries didactiques*. Grenoble : La Pensée Sauvage, 175-206.

Schneider, M., Mercier, A (2008), Situation adidactique, situation didactique, situation-problème : circulation de concepts entre théorie didactique et idéologies pour l’enseignement. *Actes du Colloque « Didactiques : quelles références épistémologiques ?*», Bordeaux, mai 2005.

Sfard, A. (1991). On the dual nature of mathematical conceptions : reflections on processes and objects as different sides of the same coin. *Educational Studies in Mathematics*, 22(1), 1-36.

Xhonneux, S. (2011). *Regard institutionnel sur la transposition didactique du Théorème de Lagrange en mathématiques et en économie*. Thèse défendue à l’Université de Namur.

Xhonneux, S., Henry, V. (à paraître). *Le théorème de Lagrange en mathématiques et en économie : une étude didactique du savoir enseigné*. Actes EMF2012-GT5.

Winslow, C. (2006). Transformer la théorie en tâches : La transition du concret à l’abstrait en analyse réelle. A. Rouchier, I. Bloch (eds.), *Actes de la 13e Ecole d’Eté de Didactique des Mathématiques*, Grenoble, France : La Pensée Sauvage.