Une balade à travers la didactique de l'analyse mathématique

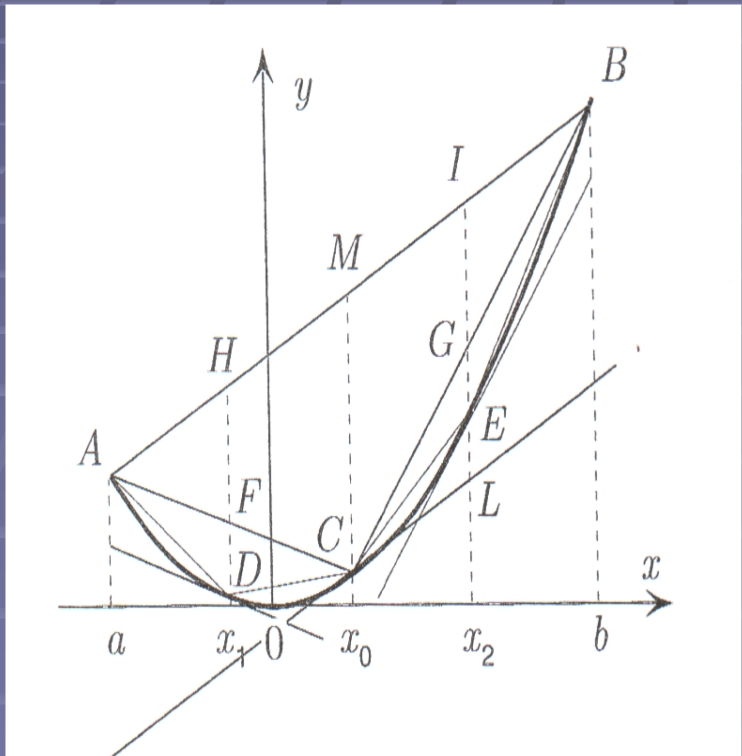
Maggy Schneider, Université de Liège

Marseille, 23 mai 2012
Master à finalité recherche en
Didactique des Mathématiques

Concepts « unificateurs et généralisateurs » : fonctions et limites de fonctions

Le concept de fonction peut être vu comme concept unificateur au niveau des fondements des mathématiques, c’est-à-dire dans une « praxéologie-déduction », mais aussi, à un niveau plus « élémentaire », comme outil de catégorisation de phénomènes extra ou intra-mathématiques et donc dans une « praxéologie-modélisation » : l’exemple du calcul intégral

Des problèmes qui relèvent de la même catégorie fonctionnelle



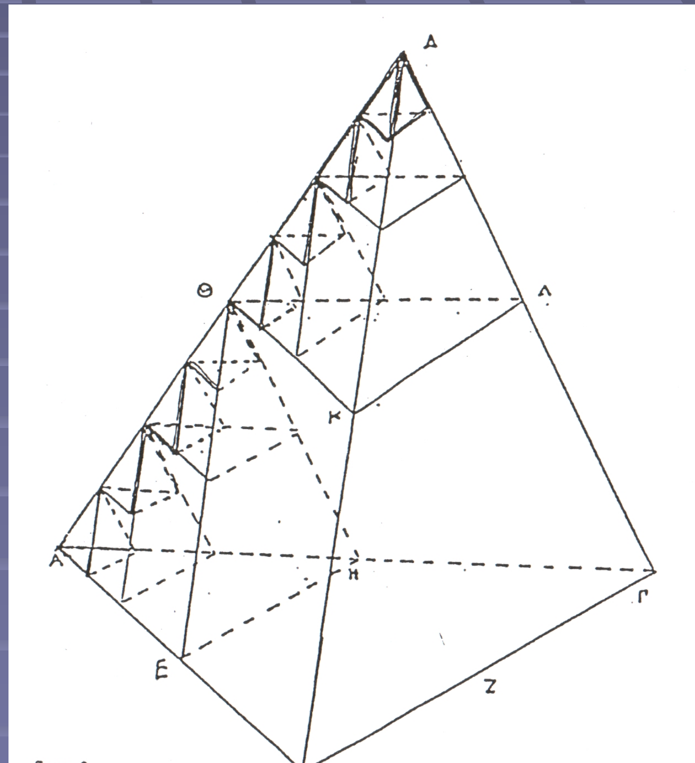


figure 3

Les fonctions sont des outils de classement des problèmes

Pour Archimède, ces problèmes sont distincts même s'ils relèvent tous deux de la méthode d'exhaustion

Pour nous, c'est le même problème : primitive d'une fonction du second degré ou limite de sommes de Riemann de même structure

« Mais pour qu'on ait le droit de voir là un " calcul intégral ", il faudrait y mettre en évidence, à travers la multiplicité des apparences géométriques, quelque ébauche de classification des problèmes suivant la nature de " l'intégrand " sous-jacent. Au XVII^e^ siècle, nous allons le voir, la recherche d'une telle classification devient peu à peu l'un des principaux soucis des géomètres » (Bourbaki)

Les fonctions sont des outils de classement des problèmes

- Une classification algébrique de modèles fonctionnels paramétrés qui donnera prise aux techniques de dérivation et de primitivation…
- Possibilité d'une initiation à un tel regard dès les premières années de collège : cf. l'ingénierie relative aux problèmes de suites de nombres figurés (Thèse de Krysinska)
- Rôle des ostensifs algébriques, en amont d'une définition générale du concept de fonction dans un projet de fondement

Les fonctions dans un projet de fondement des mathématiques

- Organisation déductive de toutes les mathématiques à partir des notions d'ensembles et de relations entre ensembles
- Elargissement du concept de fonction pour prendre en compte les relations fonctionnelles dans tous les domaines mathématiques
- Apparition, à des fins didactiques, de représentations sans grande valeur instrumentale et d'exemples de peu d'intérêt

Le concept de limite et le calcul associé

- A quel(s) type(s) de questions répond le calcul des limites ?
- Pourquoi formaliser le concept de limite en termes de quantificateurs et d'inégalités ?

Détermination de grandeurs ou d'objets géométriques

Réponse donnée, à la 1ère question, par J. Stewart dans le cadre d'un cours de « mathématiques générales » :

- ✓ Un aperçu du calcul différentiel et intégral
  - ✓ Le problème de l'aire
  - ✓ Le problème de la tangente
  - ✓ La vitesse
  - ✓ La limite d'une suite (paradoxe de Zénon)
  - ✓ La somme d'une série
- ✓ Les limites et dérivées
  - ✓ Les problèmes de tangente et de vitesse
  - ✓ La limite d'une fonction

Détermination de grandeurs ou d'objets géométriques

- ✓ Emergence du concept de limite dans l'histoire :
  - ✓ Aires et volumes « curvilignes » (intégrale)
  - ✓ Tangentes (dérivée)
  - ✓ Vitesses variables (dérivée)
  - ✓ Optimisation (dérivée)

- ✓ Praxéologies « grandeurs » : l'analyse n'a pas pour seul but d'étudier les fonctions

Praxéologies « grandeurs »

- Tâches : déterminer des grandeurs (aires, vitesses, …)
- Techniques : calcul de limites (suites et taux d'accroissement), calcul de dérivées et de primitives (où les fonctions jouent un rôle majeur)
- Discours technologique : justifier que ces calculs donnent bien la valeur exacte de ce qui est cherché
- Théorie : peut-on présenter les concepts et techniques sans le formalisme classique associé aux limites ?

Praxéologie « modélisation fonctionnelle » ou « étude de graphiques »

- Tâches : étudier des fonctions ou des classes paramétrées de fonctions pour pouvoir modéliser des phénomènes; ce qui suppose de faire des liens, dans les deux sens, entre graphiques et expressions analytiques
- Techniques : racines, signe, calcul de limites, de dérivées, …
- Discours technologique : à construire

Étude de graphiques ou modélisation fonctionnelle ?

- Un objectif commun : établir des liens entre des expressions analytiques et des types de graphiques
- Des accents différents :

  sens du parcours privilégié dans les exercices : de l'expression vers le graphique ou le contraire, étude complète des fonctions une par une ou étude des principales classes paramétrées en privilégiant les outils les plus adaptés à chaque classe
- Importance des paramètres

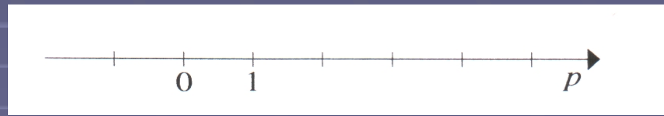
Praxéologie « grandeurs » : un premier niveau d'intelligibilité des mathématiques ?

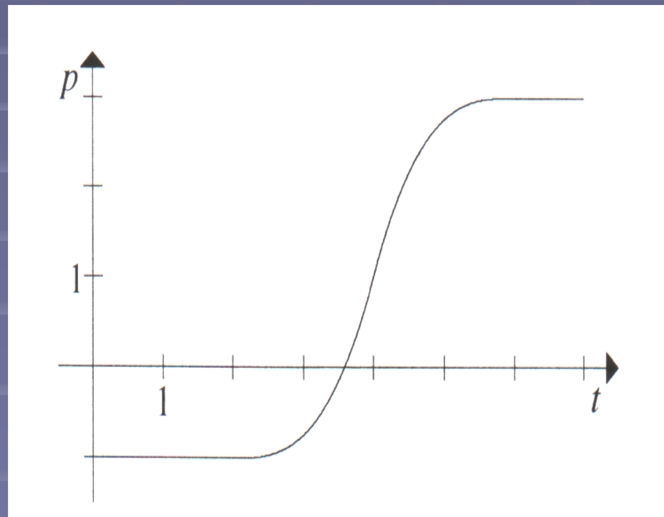
- Comprendre les mathématiques, c'est pouvoir rendre des comptes sur la façon de définir les concepts
- L'intelligibilité doit pouvoir se décliner déjà à ce niveau et il existe une vie mathématiques avant … celle que l'on connaît : exemple des dérivées

Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

Mise en bouche :

Décrire le mouvement d'un mobile sur une trajectoire rectiligne à partir de sa loi de position





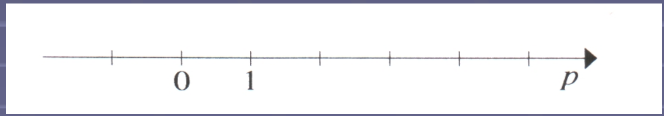
Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

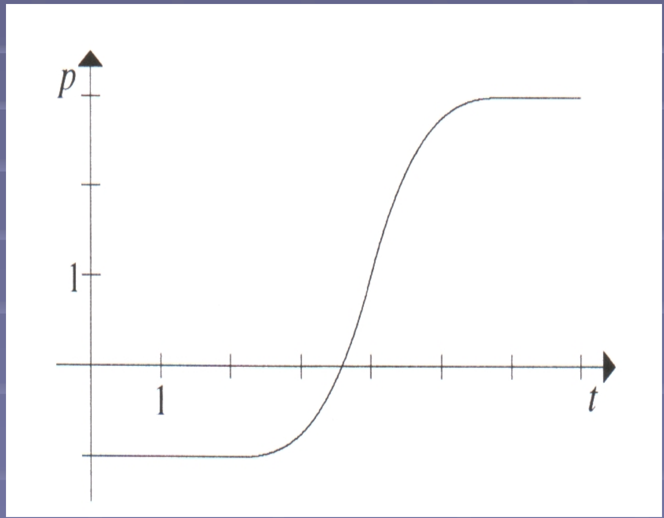
Mise en bouche :

Décrire le mouvement d'un mobile sur une trajectoire rectiligne à partir de sa loi de position

En particulier, lier accélération et sens de la concavité, et d'un point de vue qualitatif, vitesse instantanée et « pente de la courbe »

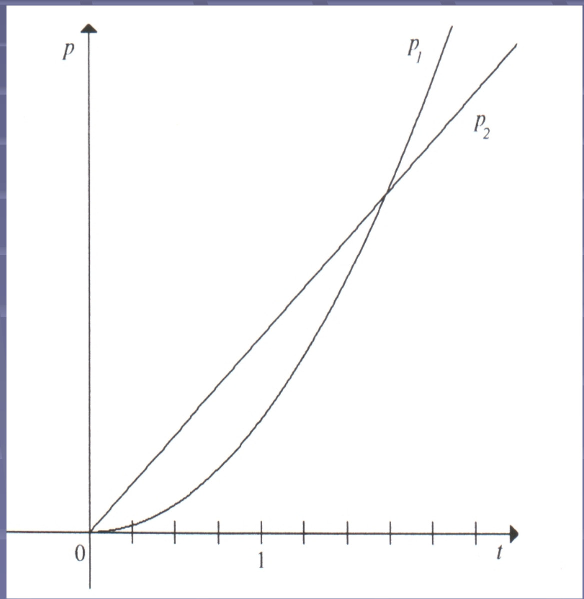
Définir la vitesse moyenne sur un intervalle de temps (Thèse de Gantois)





Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

- Quand les 2 mobiles ont-ils même vitesse ?
- Travail graphique
- Travail analytique, d'abord quand le mouvement non uniforme est décrit par une fonction du second degré et puis par une fonction du 3ème degré



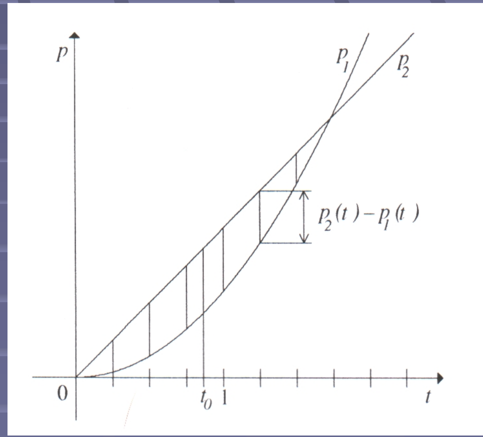
Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

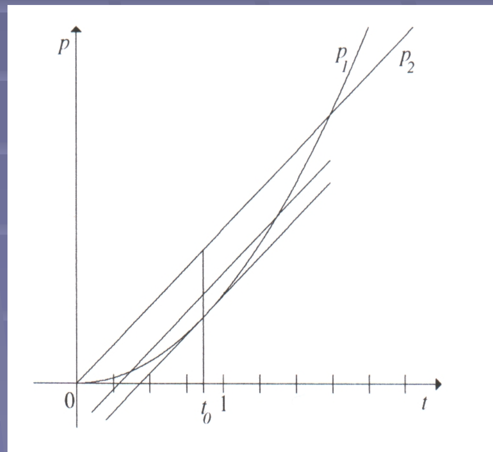
- Stratégie 1

  Déterminer la valeur de t pour laquelle l'écart est maximal

- Stratégie 2

  Déterminer l'instant en lequel une droite de même pente que le graphique de p_2 rencontre celui de p_1 en un seul point

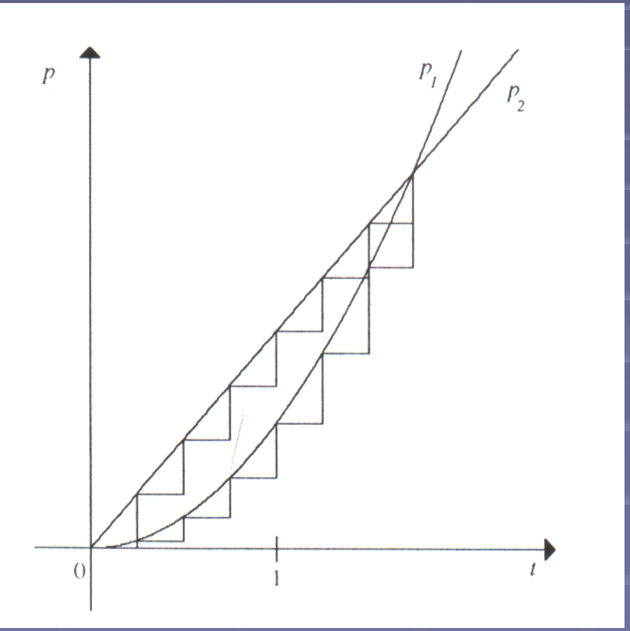




Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

- Stratégie 3

  Déterminer l'intervalle de temps sur lequel les deux mobiles ont même vitesse moyenne et ce, pour des intervalles de temps de plus en plus petits



Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

$$\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = t_2 + t_1$$

$$t_2 + t_1 = \sqrt{3}$$

ou

$$\frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \sqrt{3}$$

$$2t + \Delta t = \sqrt{3}$$

- Où sont les conditions d'existence ?

Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

M1 : Donc $t_2 = \sqrt{3} - t_1$.

E1 : Donc… Oui, et $t_1 = \sqrt{3} - t_2$.

M1 : Oui. Et ça nous fait quoi ?

E1 : Et ça, et ça… Oui, c'est ça, c'est ça le problème : une fois qu'on a ça, on n'a toujours pas l'instant t.

N1 : Mais il faudrait trouver une autre façon… Enfin… encore un autre truc où tu as $t_2 + t_1$ et alors on saurait obtenir un système. Tu vois ce que je veux dire ? S'il y a deux inconnues, il faudrait trouver une autre manière…

E1 : Oui, mais qu'est-ce que tu aurais d'autre comme équation à part ça ?

N1 : Et si… À quel moment… On ne devrait pas juste prendre un seul t et dire : c'est une vitesse instantanée ? On pourrait prendre juste un t vu que c'est un seul moment.

M1 : Oui, mais, limite, ils sont tellement proches, qu'on peut dire que $t_1 = t_2$.

N1 : Oui, c'est ça, en fait.

Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

$$\frac{t_2^2 - t_1^2}{t_2 - t_1} = t_2 + t_1$$

$$t_2 + t_1 = \sqrt{3}$$

ou

$$\frac{(t + \Delta t)^2 - t^2}{\Delta t} = \sqrt{3}$$

$$2t + \Delta t = \sqrt{3}$$

- Au delà des « interdits » et des conditions d'existence : assimiler t_1 à t_2 ou rendre nul Δt pour trouver une réponse exacte
- Un nouveau calcul : celui des dérivées, dans un contexte particulier
- Un calcul jugé suspect

Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

M1 : Parce qu'en fait, ils sont tellement proches… Tu mets t_2 égale plus ou moins t_1. Et donc, tu n'as qu'à dire : $2t_1 = \sqrt{3}$. Donc $2t_1 = \frac{\sqrt{3}}{2}$.

E1 : Ça paraît bizarre d'égaliser t_2 et t_1.

C1 : C'est un peu fac[ile]… Ça ne met pas vraiment en commun les deux équations.

Prof : En fait, vous avez fait… Vous avez rendu votre différence de temps…

E1 [qui coupe Prof et continue la phrase de Prof] : … tellement petite que t_2 est égal à t_1…

N1 : Infiniment petite.

E1 : Enfin, presque égale.

E1 : Mais ce n'est pas imprécis, à ce moment-là ?

N1 : Ben non : c'est logique. Si tu réduis à fond l'intervalle de temps, ça deviendra égal.

Exemple : émergence et validation pragmatique du calcul des dérivées

- Seule cette stratégie reste valable dans le cas où le mouvement non uniforme est modélisé par une fonction du 3ème degré
- Mais elle a été rendue « crédible » dans le cas d’un MRUA en ce sens qu’elle fournit la même réponse que les deux autres méthodes : validation pragmatique
- On a là l’émergence d’un savoir mathématique sous une forme embryonnaire

Le « concept » de dérivée chez Fermat (1601-1665)

- Couper un segment en deux parties dont les longueurs ont un produit maximal
- Adégaler : $a (b - a) \approx (a + e) (b - a - e)$

  $be \approx 2ae + e^2$ (diviser par e)

  $b \approx 2a + e$ (supprimer e)

  $b = 2a$

Calcul légitimé par le fait qu'une méthode géométrique (Euclide) donne le même résultat

Double statut de « l'infinitésimal »

Le « concept » de dérivée chez Lagrange (1736-1813)

- P = [f(x+i) - f(x)] / i (apparition du taux d'accroissement)

- *« Or, P étant une nouvelle fonction de x et i, on pourra de même en séparer ce qui est indépendant de i et qui, par conséquent, ne s'évanouit pas lorsque i devient nul. Soit donc p ce que devient P lorsqu'on FAIT i = 0 »*

Limite définie par un acte de suppression de termes

Un 2ème niveau d'intelligibilité : du calcul infinitésimal à l'analyse

- Cauchy, considéré comme le « père » de l'analyse moderne pour avoir « coulé » le calcul infinitésimal dans un « moule déductif » afin de respecter la « rigueur des géomètres grecs de l'Antiquité »
- On lui doit le système de preuves classiques, dont on peut exclure toute connotation géométrique, temporelle ou cinématique

  bien que …

Du calcul infinitésimal à l'analyse

- Les démonstrations de Cauchy sont discursives : expressions langagières « contravariantes » de la limite mais absence de symboles « quantificateurs »
- Sa définition est celle de la « limite d'une variable » :

  « Lorsque les valeurs successivement attribuées à une même variable s'approchent indéfiniment d'une valeur fixe, de manière à finir par en différer aussi peu que l'on voudra, cette dernière est appelée la limite de toutes les autres »

Du calcul infinitésimal à l'analyse

Essais de formalisation de cette définition par des futurs professeurs :

$\forall \varepsilon > 0 : |x - a| < \varepsilon$ (*« faut-il ajouter ε très petit ? »*)

Cette écriture caractérise ce qu'on appelle, en ANS, des nombres « infiniment proches » mais signifie, dans l'AS, que x = a. Quand on le démontre, les étudiants insistent sur le fait que ε n'est pas nul ou corrigent ainsi :

$$\forall \varepsilon > 0 : 0 \neq |x - a| < \varepsilon$$

Du calcul infinitésimal à l'analyse

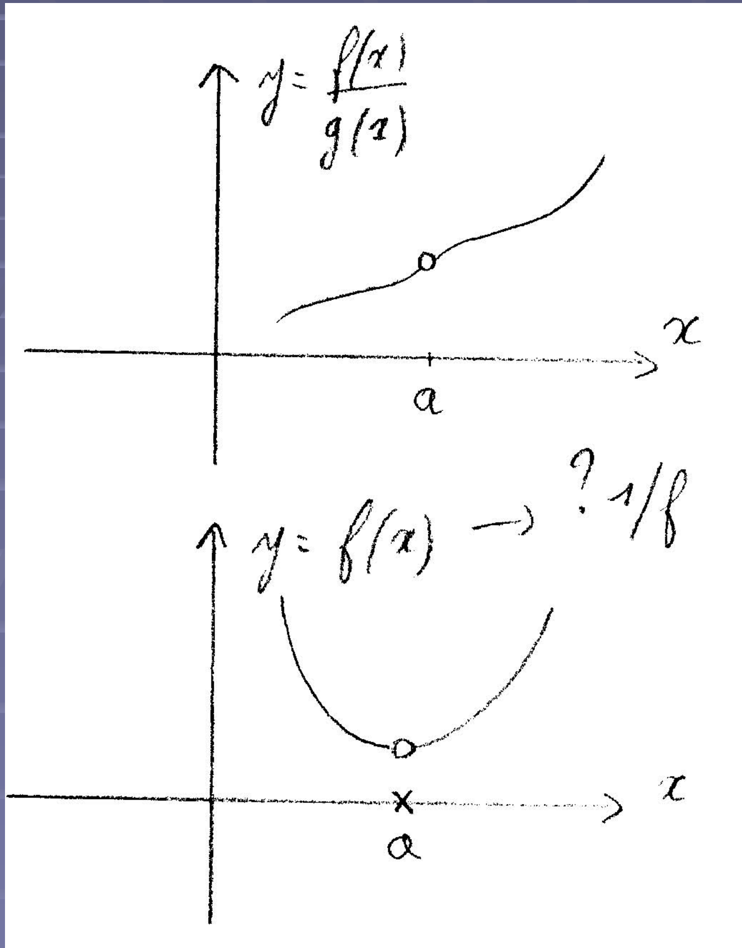
Les apparences sont sauves : on fait intervenir des éléments emblématiques de la théorie enseignée à l'université tout en « coupant la poire en deux » pour ménager un parcours didactique progressif

Observation significative d'un rapport « non lakatosien » aux définitions : celles-ci « décrivent » ce que l'on entend intuitivement par « tendre vers » (voire ont un rôle sténographique) au lieu d'être des « outils de preuve » (thèse de P. Job)

Du calcul infinitésimal à l’analyse

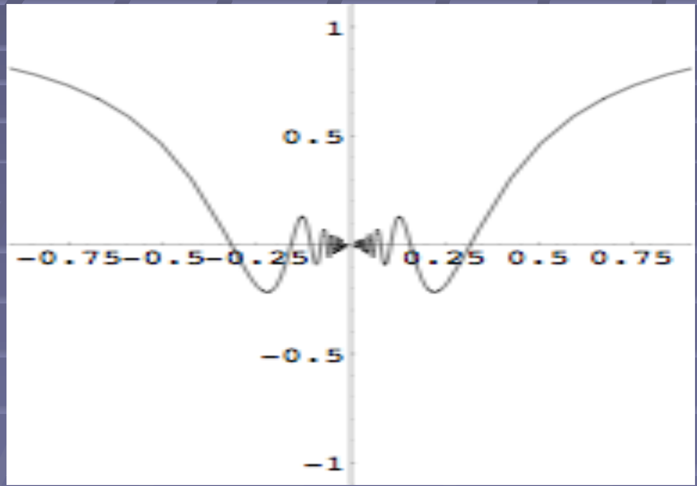
- Approche « lakatosienne » du concept de continuité : étudier les conditions (N et S ?) pour que la droite $x = a$ soit AV d’une fonction-fraction rationnelle
- Réfutations successives des réponses suivantes, par contre-exemples :
  - *« a doit être racine du dénominateur »*
  - *« a doit être racine du dénominateur sans être racine du numérateur »*

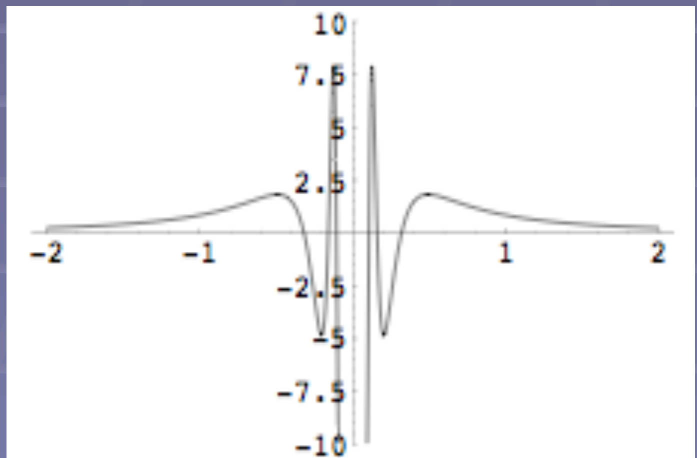
Du calcul infinitésimal à l’analyse



- De l’examen de contre-exemples à l’émergence du concept de continuité : on ne peut rendre, p.ex., *1/f(x)* aussi grand que l’on veut sans rendre *f(x)* aussi proche de *f(a)* que l’on veut, pour des valeurs de *x* suffisam-ment proches de *a*

Du calcul infinitésimal à l'analyse





- Ce n'est pas encore suffisant : il faut exiger que *f* ait un signe constant dans un voisinage de *a* ou sur un intervalle d'extrémité *a*

Le discours heuristique

- Cet exemple illustre ce que Lakatos appelle le style heuristique : *« Le style heuristique consiste à mettre à l'épreuve la conjecture primitive ou naïve, la preuve-mère, les contre-exemples qui la mettent à l'épreuve, la méthode des preuves et réfutations et les concepts-éprouvettes qui en découlent »*

  (exemple du concept de convergence uniforme né de l'examen du théorème faux de Cauchy et des contre-exemples de Fourier *: Une série de fonctions continues converge vers une fonction continue)*

Le discours déductiviste

« Dans le style déductiviste, on commence par une liste précautionneuse d'axiomes, de lemmes ou de définitions. Les axiomes et les définitions paraissent fréquemment artificiels et d'une complication déroutante. On ne dit jamais comment ces complications sont nées. La liste d'axiomes et de définitions est suivie de théorèmes soigneusement mis en mots, encombrés de conditions pesantes; il semble impossible que quiconque ait jamais pu les inventer » (Lakatos)

Du calcul infinitésimal à l'analyse : inversion didactique

Histoire

- Intégrales (aires, volumes)
- Dérivées (tangentes, vitesses, optimisation)
- Réorganisation autour des concepts de fonction et de limite
- Continuité
- Réels

Enseignement

- Réels
- Continuité
- Théorie des limites
- Dérivées et intégrales
- Applications géométriques, cinématiques ou pratiques

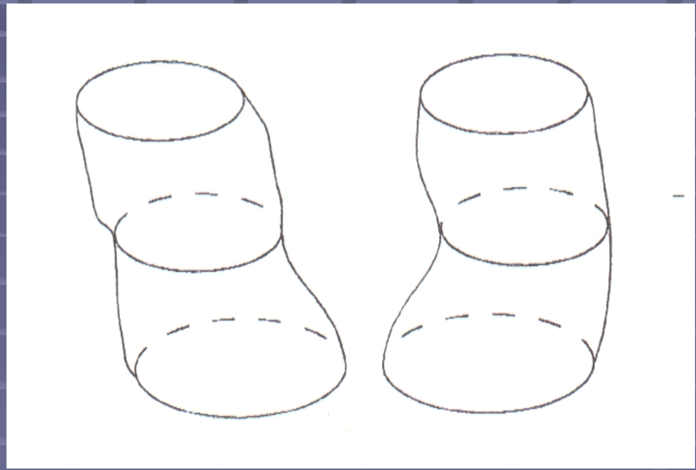
Deux niveaux d'intelligibilité

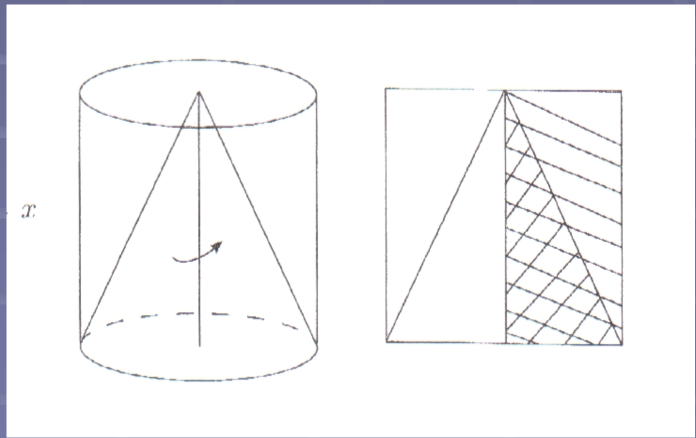
- Un premier niveau nécessaire : comprendre en quoi les concepts mathématiques constituent des modèles pertinents « d'objets » extra ou intra-mathématiques, ce qui suppose une certaine forme de distanciation entre les objets « réels » et leur modélisation pas évidente étant donné un obstacle épistémologique persistant : le positivisme empirique
- Un second niveau : …

Un rapport non distancié aux objets du réel rend nécessaire ce niveau

Peut-on déduire un rapport entre les volumes de 2 solides de l'invariance du rapport des aires des surfaces qui les « composent » ou qui les « engendrent »?

Pas toujours même si c'est tentant

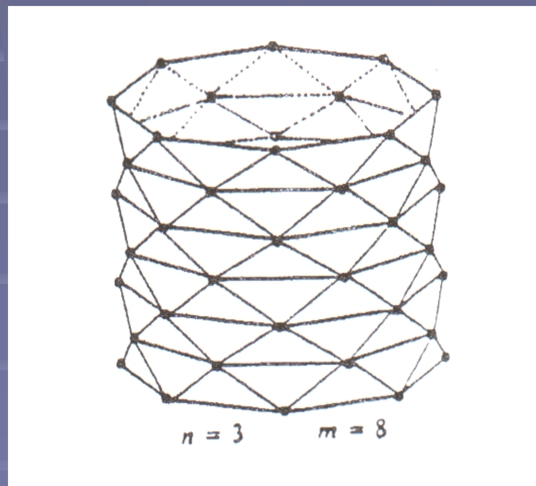




Un rapport non distancié aux objets du réel rend nécessaire ce niveau

La tentation est grande de considérer que les mesures de grandeurs se doivent d'exprimer ce que l'on « voit » des grandeurs elles-mêmes

Définir l'aire d'une surface courbe comme la limite de la somme des aires des triangles d'une surface polyédrale inscrite, jusqu'au contre-exemple de Schwarz en 1883



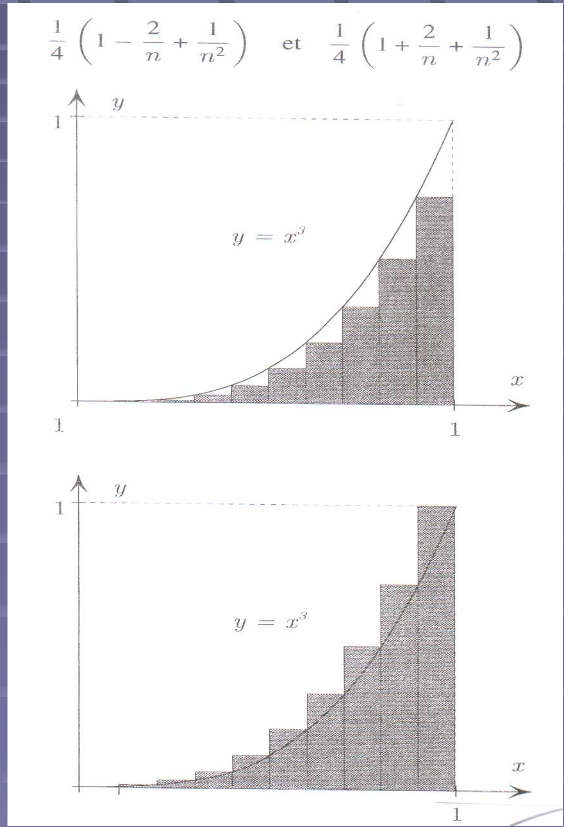
Un rapport non distancié aux objets du réel rend nécessaire ce niveau

Douter que le calcul d’une limite puisse donner la valeur exacte d’une vitesse instantanée qui échappe jusqu’à un certain point aux observations et aux mesures

Penser, voire définir, la tangente comme ‘limite’ de sécantes, manière d’exprimer ce que l’on voit, sans avoir défini une quelconque topologie sur l’ensemble des droites

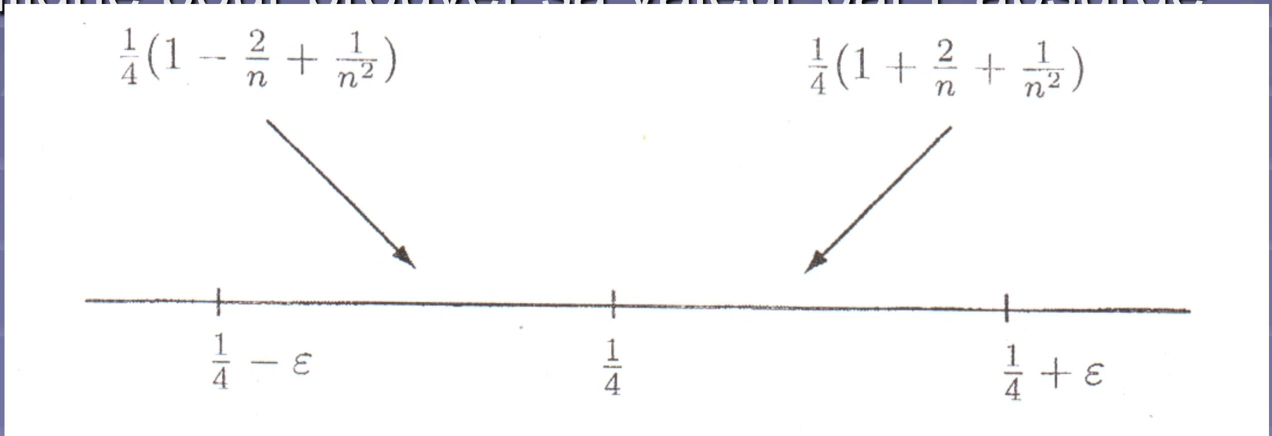
Un rapport non distancié aux objets du réel rend nécessaire ce niveau

Douter que la limite d'une suite de sommes d'aires de rectangles donne la valeur exacte d'une aire curviligne car ces rectangles n'épousent pas parfaitement la surface ou « se réduisent en segments »



Un rapport non distancié aux objets du réel rend nécessaire ce niveau

- On justifie que ce calcul donne bien ce que l'on cherche, au prix d'une « validation » non canonique (intuitions géométriques ou cinématiques, validation pragmatique)
- Par exemple, jouer sur un encadrement d'une aire curviligne pour prouver sa valeur par l'absurde



Un obstacle épistémologique : le positivisme empirique

- Les réactions précédentes sont traces d'un positivisme empirique : il existe une « vraie vision scientifique » et les lois et concepts scientifiques sont un « reflet exact du monde »
- A contrario, selon l'épistémologie socio-constructiviste, les théories et concepts sont des créations de l'esprit humain, adoptés provisoirement pour leur efficacité à réaliser un projet donné ou à interpréter des phénomènes et rejetés lorsque cette efficacité sera mise à mal : il ne s'agit pas d'y croire mais d'en tester les limites

Vers le second niveau d'intelligibilité

- Un second niveau : comprendre que les « bonnes » définitions de ces concepts sont, à un moment donné, celles qui donnent prise au raisonnement déductif et qui permettent un agencement déductif « optimal »; à ce stade, ce sont elles qui définissent les objets du réel (aires, vitesses,…) et les formes de validation du niveau précédent n'ont plus aucun intérêt
- Entre la détermination d'aires curvilignes et l'élaboration d'une théorie où les propriétés telles l'additivité par rapport aux intervalles peuvent se démontrer sans embûches, il faut épurer le concept de certaines restrictions comme celle de s'imposer des subdivisions régulières : un domaine d'intégration peut être a priori divisé en deux segments « incommensurables » !

Deux niveaux praxéologiques

Processus pour décrire deux facettes de l'activité mathématique et produits de ces processus en termes d'organisations mathématiques

- ✓ Praxéologies « modélisation » : on cherche à modéliser des objets non définis mathématiquement mais dont on a une certaine connaissance (ce sont des 'préconstruits' au sens de Chevallard et ils fonctionnent comme des 'objets mentaux' au sens de Freudenthal)
- ✓ Praxéologies « déduction » : on construit une organisation déductive des éléments du modèle ainsi construit, les objets étant définis par les techniques qui les modélisent

Deux niveaux praxéologiques

L'absence d'identification du premier niveau praxéologique est suggérée par les investigations de Rouy auprès de plusieurs publics : élèves-professeurs, professeurs d'université, enseignants du secondaire

Qu'en est-il de la visibilité du 2ème niveau pour les élèves ou étudiants ?

Les praxéologies « déduction » sont souvent présentées sous une forme achevée, le travail heuristique étant gommé, même par « îlots »

Or, il y a là sans doute des opportunités de situations fondamentales ?

Deux niveaux praxéologiques

- Comment s'articulent ces deux niveaux praxéologiques?
- Séquentiellement ou simultanément; au sein d'une même institution ou non
- L'enseignement universitaire gère essentiellement les praxéologies « déduction ». La transposition en vigueur dans le secondaire se calque sur le discours universitaire, emprunte sa structure, des éléments « emblématiques » et édulcore le discours des endroits plus délicats

Exemple de la géométrie analytique 3D

Subordination de la géométrie analytique à l'algèbre linéaire

Dans la théorie standard :

- Les droites et plans sont définis d'emblée comme variétés linéaires ou affines. Les vecteurs sont des éléments d'un espace vectoriel et des vecteurs colinéaires sont définis à partir de la notion de partie liée
- Un théorème permet de traduire les écritures vectorielles en termes de coordonnées : *Tout espace vectoriel E de dimension finie n sur un corps commutatif K est isomorphe à l'espace K^n des coordonnées*

Dans la transposition didactique en vigueur dans le secondaire :

- Le point de départ est toujours vectoriel
- On passe du vectoriel au paramétrique (puis au cartésien) sans aucune justification

Problèmes didactiques soulevés par la subordination de la géométrie analytique 3D à l'algèbre linéaire

Schéma standard :

- on définit la droite et le plan de manière vectorielle
- on en « déduit » une écriture paramétrique, puis une écriture cartésienne

Plusieurs observations montrent que ce schéma soulève des difficultés d'apprentissage habituellement non gérées (Lebeau) et que les registres cartésien et paramétrique doivent être travaillés pour eux-mêmes

Problèmes didactiques soulevés par la subordination de la géométrie analytique 3D à l'algèbre linéaire

- *L'équation y - 2x - 1 = 0 est celle d'une droite. Or, on cherche l'équation d'un plan. Où est l'erreur de calcul ?*
- *Pourquoi faut-il deux équations cartésiennes pour une droite ? On pourrait n'en faire qu'une seule*
- *« x = 3 » est la solution d'une équation et pas une équation*
- *Je n'ai pas les mêmes équations paramétriques que mon voisin. Qui a juste ?*
- *On ne comprend pas ce que faites pour vérifier la coplanarité de 4 points*
- *Qui dit que l'addition de 2 vecteurs de l'espace ne conduit pas à un « parallélogramme gauche » ?*

Imaginer des transpositions non standardisées
Lesquelles et pourquoi ?

Un tel travail de modélisation permet :

- de prendre en compte les questions des élèves sur la pertinence des modèles mathématiques
- de leur faire travailler des erreurs ‘résistantes’ à la variabilité transpositionnelle
- de préparer une entrée dans les praxéologies « déduction »

Est-on prêt à reconnaître ces praxéologies « modélisation » où le travail déductif est édulcoré et où les modes de validation sont autres comme un travail mathématique en dépit de son caractère non standard ?