Quelle fonctionnalité pour l'algèbre au niveau de l'enseignement secondaire ? La piste de la modélisation fonctionnelle

M. Schneider

Université de Liège, Belgique

Paris le 16 janvier 2012

Exposé préparatoire à la Conférence Nationale sur l'Enseignement des Mathématiques à l'Ecole obligatoire

Quelques écueils *a priori*

Des énoncés d'exercices supposant des « connaissances de contrat » :

Précise si le résultat du calcul suivant est un périmètre, une aire, un volume ou aucun des trois :

3a + 5a

Simplifie en utilisant toutes les règles algébriques vues:

(5 - 2a) 3d (2 - b)

Quelques écueils *a priori*

Que vous inspirent ces trois lignes ?

$$\frac{3a+6}{3} = a+2$$
$$\frac{3a+6}{3} = a+6$$
$$\frac{3a+6}{3} = 3a+2$$

Lecture en termes d'erreurs de calcul formel plutôt qu'en termes de statuts différents d'égalités : identité, équation avec ou sans solution

Quelques écueils *a priori*

Au lycée, il ne s'agit plus de respecter une règle ou une consigne mais d'assumer un certain degré d'incertitude et des prises de décision

Ainsi, suivant les circonstances, il faudra choisir parmi ces expressions équivalentes :

$2x^2 - 3x + 1$

$2\,(x - 1)\,(x - 1/2)$

$x^2\,(2 - 3/x + 1/x^2)$

Quelques écueils *a priori*

Ce changement de contrat est une cause majeure d'échec : *« A l'issue du collège, la manipulation des expressions algébriques n'est tendue vers aucun but extérieur au calcul algébrique, lequel doit trouver en lui-même la source de ses propres exigences. Aussi, les « règles » de cette manipulation sont-elles immotivées, purement formelles, s'exprimant par des consignes elles-mêmes standardisées (développer, factoriser) »*

Chevallard)

Cette absence de fonctionnalité de l'algèbre conduit à :

Quelques écueils a *priori*

- La pseudo-algorithmicité :

  « D'une manière générale, l'enseignement usuel tend à diminuer l'incertitude inhérente à l'activité mathématique en fournissant à l'élève un code de conduite, nulle part explicité comme tel, mais extrêmement prégnant, qui engendre un quasi déterminisme des pratiques mathématiques scolaires, ce que nous nommerons la pseudo-algorithmicité » (Chevallard)

  On a un carré $(1 + \cos 2x)^2$, DONC on le développe

  On a 2 en facteur commun dans $2 + 2\cos 2x$, DONC on factorise : $2 + 2\cos 2x = 2(1 + \cos 2x)$

Quelques écueils *a priori*

- Un malaise à propos de la validation des règles algébriques : règles de « conformité », théorèmes « élèves », théorèmes « professeurs » (Mercier, IREM Montpellier)
- Une ignorance de la dénotation :
  - ✓ *Une expression comme y (2x + y) a une valeur numérique qui dépend des valeurs de x et de y et qui n'est pas modifiée par les transformations conformes aux règles algébriques* (Sackur et al.)
  - ✓ Expressions analytiques des fonctions vues comme « étiquettes » et non comme contraintes (Schneider)

Quelques écueils *a priori*

- Dans plusieurs recherches anglo-saxonnes, on s'ingénie à trouver une cohérence, au cas par cas, aux erreurs algébriques habituelles (p.ex. 2a + 5a +3 b = 10 ab) que l'on peut les interpréter toutes en termes de contrat didactique : respect de la complexité ostensive de l'expression initiale et conception de ce qu'est une réponse en arithmétique.
- Faire des catégories d'erreurs relevant du « non sens » a-t-il un intérêt ? L'important n'est pas tant de les passer en revue mais de constater qu'après 2 ans de collège, les élèves (belges) ne savent pas ce que signifie : vérifier que 2 est solution de l'équation $3x - 6 = 0$ (Vlassis et Demonty)

Quelle fonctionnalité pour l'algèbre ?

- Géométrie analytique
- Calcul de grandeurs
- L'analyse et l'étude des fonctions en particulier
- La programmation linéaire
- L'algèbre financière
- …

Quelle fonctionnalité pour l’algèbre ? La piste de la modélisation fonctionnelle

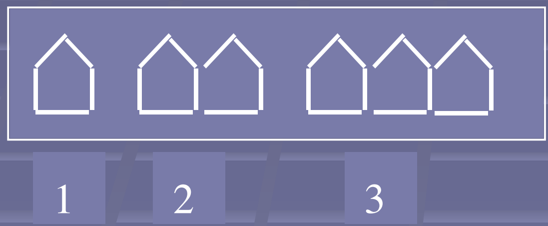
- L’idée est d’intégrer l’algèbre d’entrée de jeu dans une perspective de modélisation fonctionnelle; ce qui n’exclut pas d’autres fonctionnalités
- Elle est proche et différente à la fois du point de vue adopté par Bosch et Gascon pour qui l’algèbre est une Organisation Mathématique au service des autres, les OM_{arithm} (programmes de calcul) et $OM_{(in)éqn}$ laissant place à la modélisation fonctionnelle au lycée

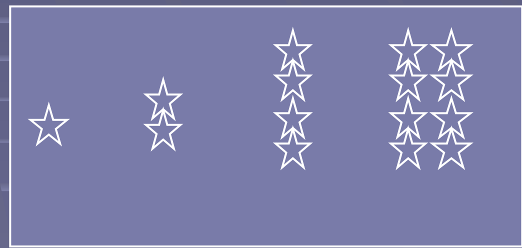
Quelle fonctionnalité pour l'algèbre ? La piste de la modélisation fonctionnelle

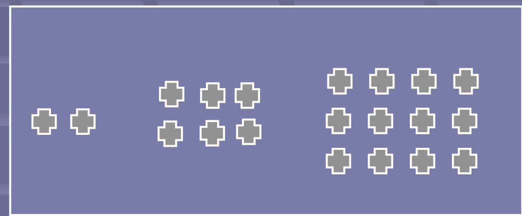
- Négociation dans la commission des programmes dès le milieu des années 80, expérimentations « sauvages » et formations
- Introduction modeste dans les textes officiels dès 1990
- Reprise de cette piste dans l'idéologie des « activités »
- Une recherche qui procure quelques référents en la matière

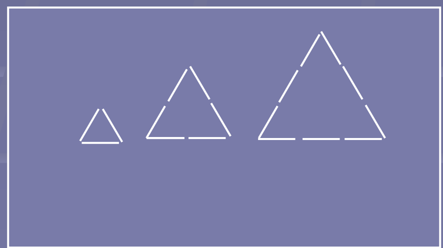
Quelle fonctionnalité pour l'algèbre ?
La piste de la modélisation fonctionnelle

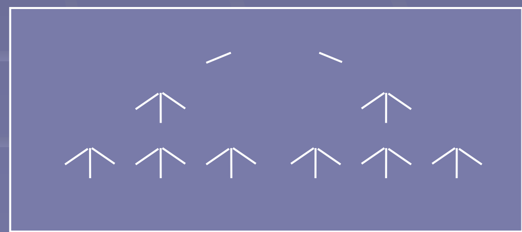
Problèmes de dénombrement en 1ère
Suites d'objets proposées aux élèves











Quelle fonctionnalité pour l'algèbre ? La piste de la modélisation fonctionnelle

- ✓ Question sur le nombre d'objets à une étape éloignée, à n'importe quelle étape
- ✓ Question sur le numéro d'étape à laquelle on a un nombre donné d'objets
- ✓ Exemples qui se prêtent à plusieurs « programmes de calcul » équivalents
- ✓ Question sur les similitudes et regroupement d'exemples

Permet de distinguer d'emblée équation, identité, modèle fonctionnel y compris paramétré

Quelle fonctionnalité pour l'algèbre ? La piste de la modélisation fonctionnelle

Quelques résultats expérimentaux en 1ère année de collège-12 ans (Krysinska) :

- Progressions arithmétiques et géométriques facilement identifiables car possibilité de double lecture, itérative et fonctionnelle, validée par la définition du produit comme addition répétée et de la puissance comme multiplication répétée
- Faisabilité d'un classement qui se peut se traduire par un paramétrage
- Une institutionnalisation des PA et des PG serait donc possible à ce stade. L'étude de quelques autres relations fonctionnelles permettrait alors d'élargir l'horizon futur

Etape	1	2	3	4	…	n
Nombre	1	1+4	1+4+9	1+4+9+16	…	$1+2^2+\ldots+n^2$

Etape	1	2	3	4	…	n
Nombre	1	8	27	64	…	n^3

Etape	1	2	3	4	…	n
Nombre	5	5+4	$5+2\times4$	$5+3\times4$	…	$5+(n-1)\times4$

Etape	1	2	3	4	…	n
Nombre	2	2×3	2×3^2	2×3^3	…	$2\times3^{n-1}$

Quelle fonctionnalité pour l'algèbre ?
La piste de la modélisation fonctionnelle

- Les problèmes de dénombrement amènent la question de l'équivalence de deux programmes de calcul
- La dénotation autorise une falsification des règles algébriques non « conformes » et le contexte du problème rend plausibles et intelligibles les autres
- … dont certaines rendent compte de propriétés du calcul des grandeurs

Quelle fonctionnalité pour l'algèbre ? La piste de la modélisation fonctionnelle

A ce stade, les règles algébriques acceptées sont celles qui permettent de transformer une expression en une autre que l'on reconnaît d'avance comme équivalente pour des raisons plutôt pragmatiques

Avant de devenir les règles qui permettent de démontrer l'équivalence de deux expressions

Des suites de nombres figurés aux modèles fonctionnels paramétrés

Il s'agira ensuite de densifier les premières suites rencontrées en jouant sur une dialectique numérique/ algébrique

- Ainsi l'extension à tous les points d'une même droite d'une même relation $y = ax$ ou $y = ax + b$ ou le regroupement de toutes les droites du plan en un seul et même ostensif imposent des règles relatives aux opérations sur les relatifs que ceux-ci soient des variables ou des paramètres. C'est l'algébrique qui commande ici au numérique puisqu'il s'agit de prolonger un même calcul littéral des naturels aux relatifs en définissant en conséquence l'extension des opérations

Des suites de nombres figurés aux modèles fonctionnels paramétrés

- Autre exemple : construction progressive du sens de l'ostensif 2^x pour des x appartenant à des ensembles de plus en plus vastes : jusqu'à l'axiome des intervalles emboîtés et la continuité numérique
- Les modèles fonctionnels sont alors construits comme solutions d'équations fonctionnelles (ici, $f(x+y) = f(x)f(y)$ puis $f'(x) = kf(x)$) et l'unicité d'une fonction engendrée par des programmes de calcul équivalents est gérée dans ce cadre

- 2		0	1/2	1	?	2	3	4	4,6
?		1	?	2	3	2^2	2^3	2^4	?

Des suites de nombres figurés aux modèles fonctionnels paramétrés

- Dans ce parcours, les fonctions constituent le principal objet d'étude
- L'étude des équations et inéquations est subordonnée à celle des fonctions
- Les identités sont des outils de transformations de fonctions liées à des besoins particuliers : factoriser pour obtenir les racines, …
- Les sophistications techniques sont liées au choix des modèles et à la manière de les introduire

Etude des fonctions par classes paramétrées

- Le but est de privilégier la modélisation fonction-nelle et de restreindre les dits « exercices de variation de fonctions »
- Les fonctions sont étudiées par classes para-métrées, les paramètres étant les degrés de liberté permettant d'ajuster le modèle aux spécificités du problème étudié
- Les modèles sont choisis et étudiés en réfé-rence à des applications standard

Etude des fonctions par classes paramétrées

- Dans cette étude, les fonctions de référence et leurs composées avec certaines affinités sont centrales
- On peut y accéder assez tôt dans le cursus au prix d'un discours technologique hybride qui permet d'aller au-delà des seules constatations mais qui n'est pas forcément calqué d'une théorie standardisée :
  - Des axiomes « graphiques » toutefois étayés de considérations numériques
  - Du travail relevant de la géométrie analytique :

$$y = x^2$$
$$\begin{cases} y' = y \\ x' = x + 3 \end{cases}$$
$$y' = (x' - 3)^2$$

Etude des fonctions par classes paramétrées

- Toute tâche ou technique algébrique peut être jaugée à l'aune d'un tel parcours tout comme

$$f(x) = \frac{x+3}{x+2}.$$

Démontrer que $f(x) = 1 + \dfrac{1}{x+2}$.

Démontrer que f est décroissante sur $]-2;+\infty[$.

- Sans oublier que la péjoration dont l'algèbre fait l'objet a souvent, dans le contexte scolaire, un parfum d'élitisme

En guise de conclusion

Ce parcours se heurte effectivement aux pratiques enseignantes

Si l'algèbre apporte une grande économie de pensée, on craint d'en faire profiter les élèves en cherchant une certaine complexité là où c'est sans doute moins justifié que dans d'autres domaines mathématiques

Quatrième exemple : les nombres relatifs

« Justifier » les règles de multiplication dans les relatifs par le souhait d'avoir une seule formule :

Temps : t	–7	...	–3	–2	–1	0	1	2	...	5	...	10
Position sur la droite graduée : p	-21		-9	-6	-3	0	3	6		15		30

x 3

$$P = 3\,t$$

Temps : t	–7	...	–3	–2	–1	0	1	2	...	5	...	10
Position sur la droite graduée : p	21		9	6	3	0	-3	-6		-15		-30

x(-3)

$$P = -\,3\,t$$

Quatrième « enseignement » : savoir lire (entre les lignes) du programme

Programme de 6ème :

Organisation et gestion de données. Fonctions

- La résolution de problèmes de proportionnalité est déjà travaillée à l’école primaire. […] Elle fait l’objet d’un apprentissage continu et progressif sur les 4 années du collège. […] A l’école primaire , les élèves ont été mis en situation de prendre de l’information à partir de tableaux, de diagrammes ou de graphiques. Le travail se poursuit au collège […] en liaison avec d’autres disciplines
- Propriété de linéarité et tableau de proportionnalité en lien avec un contexte

Quatrième « enseignement » : savoir lire (entre les lignes) du programme

<u>Programme de 5ème :</u>

Organisation et gestion de données. Fonctions

- La *résolution de problèmes* a pour objectifs […] d'initier les élèves au repérage sur une droite graduée ou dans le plan muni d'un repère, […]
- Compléter un tableau de nombres représentant une situation de proportionnalité […]
- Il est possible d'envisager, dans une formule, des variations d'une grandeur en fonction d'une autre grandeur mais toute définition de la notion de fonction est exclue.
- Utiliser une expression littérale. De nombreux thèmes du programme, notamment dans le domaine des grandeurs et mesures, conduisent à utiliser des expressions littérales (formules)
- Activités graphiques : […] repérage dans le plan à relier avec des situations de la vie quotidienne. Le vocabulaire n'est pas un objet d'apprentissage pour lui-même

Quatrième « enseignement » : savoir lire (entre les lignes) du programme

Programme de 5ème :

Nombres et Calculs

- La notion de nombre relatif est introduite à partir d'un problème qui en montre la nécessité […] Une relation est faite avec la possibilité de graduer entièrement la droite, puis de repérer dans le plan

Programme de 4ème :

Grandeurs et mesures et résolution de problèmes

- Les notions de mouvement uniforme et de vitesse ont été travaillées en classe de 5ème dans le cadre de la proportionnalité. La notion de vitesse en tant que grandeur quotient est abordée pour la 1ère fois en classe de 4ème.
- Grandeurs quotients courantes. Calculer des distances parcourues, des vitesses moyennes et des durées de parcours en utilisant l'égalité $d = vt$