Estimation de spectres de singularités par des techniques de grandes déviations basées sur les ondelettes

Céline ESSER
celine.esser@univ-lille1.fr

Université Lille 1 – Laboratoire Paul Painlevé

15ème Forum des Jeunes Mathématicien-ne-s
Lille – 26 novembre 2015

Travail en collaboration avec
F. BASTIN, T. KLEYNTSSENS, S. NICOLAY (Liège)
S. JAFFARD (Paris Est – Créteil)

Introduction

- On souhaite caractériser la régularité ponctuelle d'une fonction f

Definition

Soient $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}$ et $\alpha \in [0,1]$. La fonction f appartient à l'espace de Hölder $C^\alpha(x_0)$ s'il existe un voisinage V de x_0 et une constante $C > 0$ tels que

$$|f(x) - f(x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha \quad \forall x \in V.$$

Introduction

- On souhaite caractériser la régularité ponctuelle d'une fonction f

Definition

Soient $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \geq 0$. La fonction f appartient à l'espace de Hölder $C^{\alpha}(x_0)$ s'il existe un voisinage V de x_0, une constante $C > 0$ et un polynôme P de degré plus petit que α tels que

$$|f(x) - P(x)| \leq C|x - x_0|^{\alpha} \quad \forall x \in V.$$

Introduction

- On souhaite caractériser la régularité ponctuelle d'une fonction f

Definition

Soient $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \geq 0$. La fonction f appartient à l'espace de Hölder $C^\alpha(x_0)$ s'il existe un voisinage V de x_0, une constante $C > 0$ et un polynôme P de degré plus petit que α tels que

$$|f(x) - P(x)| \leq C|x - x_0|^\alpha \quad \forall x \in V.$$

L'exposant de Hölder de f en x_0 est défini par

$$h_f(x_0) := \sup\left\{\alpha \geq 0 : f \in C^\alpha(x_0)\right\}.$$

Introduction

- On souhaite caractériser la régularité ponctuelle d'une fonction f

Definition

Soient $f \in L^\infty_{loc}(\mathbb{R})$, $x_0 \in \mathbb{R}^n$ et $\alpha \geq 0$. La fonction f appartient à l'espace de Hölder $C^\alpha(x_0)$ s'il existe un voisinage V de x_0, une constante $C > 0$ et un polynôme P de degré plus petit que α tels que

$$|f(x) - P(x)| \leq C|x - x_0|^\alpha \quad \forall x \in V.$$

L'exposant de Hölder de f en x_0 est défini par

$$h_f(x_0) := \sup \left\{ \alpha \geq 0 : f \in C^\alpha(x_0) \right\}.$$

- $h_f(x)$ peut varier considérablement d'un point à l'autre
- les points avec un exposant de Hölder donné peuvent être situés sur des ensembles fractals

$\longrightarrow$ détermination de leur dimension de Hausdorff

Dimension de Hausdorff

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ et $s > 0$. On pose

$$\mathcal{H}^s_\delta(B) = \inf \left\{ \sum_{j\in\mathbb{N}} \operatorname{diam}(B_j)^s \ : \ (B_j)_{j\in\mathbb{N}} \ \delta - \text{recouvrement de } B \right\}.$$

et on définit la mesure extérieure de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ par

$$\mathcal{H}^s(B) = \sup_{\delta>0} \mathcal{H}^s_\delta(B) = \lim_{\delta\to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(B)$$

Il existe une valeur critique pour laquelle $s \mapsto \mathcal{H}^s(B)$ “saute” de l'infini à 0. La dimension de Hausdorff $\dim_{\mathcal{H}}(B)$ de B est définie par

$$\boxed{\dim_{\mathcal{H}}(B) = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(B) = \infty\}}$$

Dimension de Hausdorff

Soit $B \subset \mathbb{R}^n$ et $s > 0$. On pose

$$\mathcal{H}^s_\delta(B) = \inf \left\{ \sum_{j \in \mathbb{N}} \mathrm{diam}(B_j)^s \ : \ (B_j)_{j \in \mathbb{N}} \ \delta - \text{recouvrement de } B \right\}.$$

et on définit la mesure extérieure de Hausdorff $\mathcal{H}^s$ par

$$\mathcal{H}^s(B) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}^s_\delta(B) = \lim_{\delta \to 0^+} \mathcal{H}^s_\delta(B)$$

Il existe une valeur critique pour laquelle $s \mapsto \mathcal{H}^s(B)$ “saute” de l'infini à 0. La dimension de Hausdorff $\dim_{\mathcal{H}}(B)$ de B est définie par

$$\boxed{\dim_{\mathcal{H}}(B) = \sup\{s \geq 0 : \mathcal{H}^s(B) = \infty\}}$$

Definition

Le spectre de singularités d'une fonction $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R})$ est la fonction

$$d_f : h \mapsto \dim_{\mathcal{H}}\{x \in \mathbb{R} : h_f(x) = h\}.$$

$\longrightarrow d_f$ fournit une description géométrique de la répartition des singularités de f

Un formalisme multifractal est une méthode qui permet d'estimer le spectre de singularités d'une fonction à partir de quantités "globales" qui sont numériquement calculables.

Plan de l'exposé.

1. Ondelettes et exposant de Hölder
2. Wavelet leaders method
3. Leaders profile method
4. Comparaison des formalismes et illustrations

Definition

Le spectre de singularités d'une fonction $f \in L^{\infty}_{loc}(\mathbb{R})$ est la fonction

$$d_f : h \mapsto \dim_{\mathcal{H}}\{x \in \mathbb{R} : h_f(x) = h\}.$$

$\longrightarrow d_f$ fournit une description géométrique de la répartition des singularités de f

Un formalisme multifractal est une méthode qui permet d'estimer le spectre de singularités d'une fonction à partir de quantités "globales" qui sont numériquement calculables.

Plan de l'exposé.

1. Ondelettes et exposant de Hölder

2. Wavelet leaders method

3. Leaders profile method

4. Comparaison des formalismes et illustrations

Ondelettes et exposant de Hölder

Base d'ondelettes de $L^2([0,1])$. On considère une mère d'ondelette $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et on pose

$$\psi_{j,k}(x) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi(2^j(x-l)-k), \quad j \in \mathbb{N},\, k \in \left\{0,\dots,2^j-1\right\}.$$

Avec la fonction constante égale à 1, les fonctions $\psi_{j,k}$ forment une base orthogonale de $L^2([0,1])$.

Les coefficients d'ondelettes d'une fonction $f \in L^2([0,1])$ sont définis par

$$c_{j,k} := 2^j \int_0^1 f(x)\psi_{j,k}(x)\,dx$$

$\longrightarrow c_{j,k}$ donne une information sur le comportement de f au voisinage de

$$\lambda = \lambda(j,k) := \left\{x \in \mathbb{R} : 2^j x - k \in [0,1[\right\} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right[$$

Ondelettes et exposant de Hölder

Base d'ondelettes de $L^2([0,1])$. On considère une mère d'ondelette $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ et on pose

$$\psi_{j,k}(x) := \sum_{l \in \mathbb{Z}} \psi(2^j(x-l)-k), \quad j \in \mathbb{N},\, k \in \left\{0, \ldots, 2^j - 1\right\}.$$

Avec la fonction constante égale à 1, les fonctions $\psi_{j,k}$ forment une base orthogonale de $L^2([0,1])$.

Les coefficients d'ondelettes d'une fonction $f \in L^2([0,1])$ sont définis par

$$c_{j,k} := 2^j \int_0^1 f(x)\psi_{j,k}(x)\, dx$$

$\longrightarrow c_{j,k}$ donne une information sur le comportement de f au voisinage de

$$\lambda = \lambda(j,k) := \left\{x \in \mathbb{R} : 2^j x - k \in [0,1[\right\} = \left[\frac{k}{2^j}, \frac{k+1}{2^j}\right[$$

Notations.

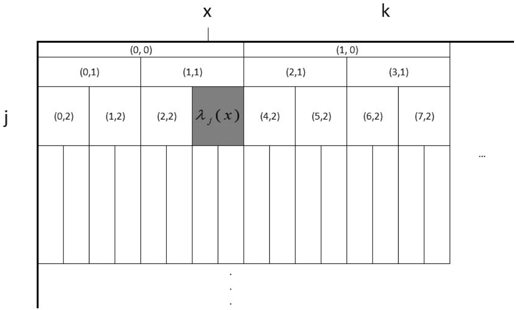
- Si $j \in \mathbb{N}$, on note Λ_j l'ensemble des intervalles dyadiques de $[0,1[$ de taille 2^{-j}
- Si $\lambda = \lambda(j,k)$, on utilise la notation $c_{j,k}$ ou c_λ pour les coefficients d'ondelettes

Definition

Les coefficients dominants / wavelet leaders de f sont définis par

$$d_{j,k} = d_\lambda := \sup_{\lambda' \subset 3\lambda} |c_{\lambda'}|, \quad \lambda \in \Lambda_j, \; j \in \mathbb{N}.$$

- Si $x \in [0,1[$, on note $\lambda_j(x)$ l'unique intervalle de Λ_j qui contient x, et $d_j(x) := d_{\lambda_j(x)}$ le coefficient dominant associé.

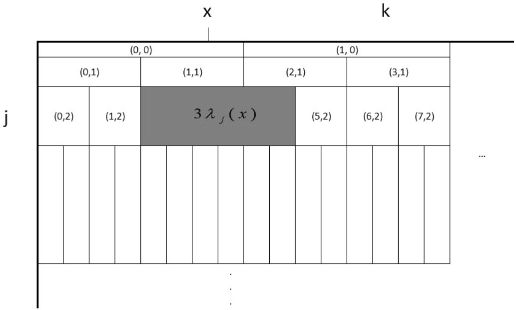


Régularité Höldérienne et coefficients dominants

Si f est uniformément Hölderienne, alors l'exposant de Hölder de f en x est donné par

$$h_f(x) = \liminf_{j \to \infty} \frac{\log d_j(x)}{\log 2^{-j}}.$$

Interprétation. $d_j(x) \sim 2^{-h_f(x)j}$

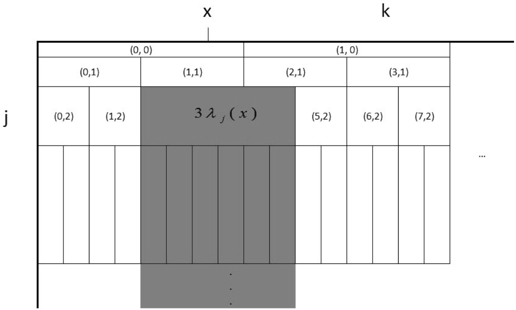


Régularité Höldérienne et coefficients dominants

Si f est uniformément Hölderienne, alors l'exposant de Hölder de f en x est donné par

$$h_f(x) = \liminf_{j\to\infty} \frac{\log d_j(x)}{\log 2^{-j}}.$$

Interprétation. $d_j(x) \sim 2^{-h_f(x)j}$

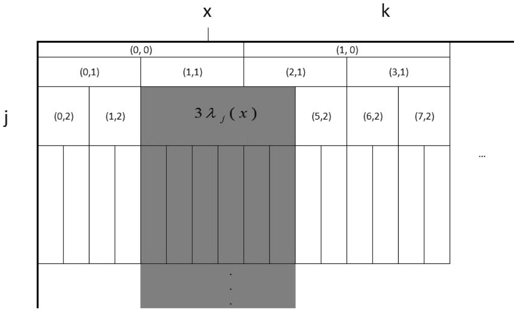


Régularité Höldérienne et coefficients dominants

Si f est uniformément Hölderienne, alors l'exposant de Hölder de f en x est donné par

$$h_f(x) = \liminf_{j\to\infty} \frac{\log d_j(x)}{\log 2^{-j}}.$$

Interprétation. $d_j(x) \sim 2^{-h_f(x)j}$



Régularité Höldérienne et coefficients dominants

Si f est uniformément Hölderienne, alors l'exposant de Hölder de f en x est donné par

$$h_f(x) = \liminf_{j\to\infty} \frac{\log d_j(x)}{\log 2^{-j}}.$$

Interprétation. $d_j(x) \sim 2^{-h_f(x)j}$

Wavelet leaders method

On considère la fonction d'échelle η_f définie par

$$\eta_f(q) := \liminf_{j \to +\infty} \frac{\log 2^{-j} \sum^*_{\lambda \in \Lambda_j} d_\lambda^q}{\log 2^{-j}}.$$

Le spectre de singularités de f est alors estimé par la fonction

$$\boxed{L_f : h \mapsto \inf_q \{hq - \eta_f(q)\} + 1}$$

Propriétés.

- L_f est indépendant de la base d'ondelettes choisie
- Si f est uniformément Höldérienne, $d_f(h) \leq L_f(h)$ pour tout $h \geq 0$
- L_f est concave $\rightarrow$ Limites du formalisme!

Wavelet leaders method

On considère la fonction d'échelle η_f définie par

$$\eta_f(q) := \liminf_{j\to+\infty} \frac{\log 2^{-j} \sum^*_{\lambda\in\Lambda_j} d_\lambda^q}{\log 2^{-j}}.$$

Le spectre de singularités de f est alors estimé par la fonction

$$\boxed{L_f : h \mapsto \inf_q \{hq - \eta_f(q)\} + 1}$$

Propriétés.

- L_f est indépendant de la base d'ondelettes choisie
- Si f est uniformément Höldérienne, $d_f(h) \leq L_f(h)$ pour tout $h \geq 0$
- L_f est concave $\to$ Limites du formalisme!

Leaders profile method

On considère la fonction

$$\rho_f(h) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \#\left\{\lambda \in \Lambda_j : 2^{-(h+\varepsilon)j} \leq d_\lambda < 2^{-(h-\varepsilon)j}\right\}}{\log 2^j}.$$

Interprétation. Il y a approximativement $2^{\rho_f(h)j}$ coefficients de taille 2^{-hj}.

Argument heuristique. Considérons les points x tels que $h_f(x) = h$.

- $d_j(x) \sim 2^{-hj}$ et il y a environ $2^{\rho_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} de ce type.
- En utilisant la définition de la dimension de Hausdorff, il y a environ $2^{d_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} qui recouvrent les points x tels que $h_f(x) = h$.

$$\boxed{\Longrightarrow \rho_f(h) = d_f(h)}$$

Leaders profile method

On considère la fonction

$$\rho_f(h) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \#\left\{\lambda \in \Lambda_j : 2^{-(h+\varepsilon)j} \leq d_\lambda < 2^{-(h-\varepsilon)j}\right\}}{\log 2^j}.$$

Interprétation. Il y a approximativement $2^{\rho_f(h)j}$ coefficients de taille 2^{-hj}.

Argument heuristique. Considérons les points x tels que $h_f(x) = h$.

- $d_j(x) \sim 2^{-hj}$ et il y a environ $2^{\rho_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} de ce type.
- En utilisant la définition de la dimension de Hausdorff, il y a environ $2^{d_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} qui recouvrent les points x tels que $h_f(x) = h$.

$$\boxed{\Longrightarrow \rho_f(h) = d_f(h)}$$

Leaders profile method

On considère la fonction

$$\rho_f(h) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \#\left\{\lambda \in \Lambda_j : 2^{-(h+\varepsilon)j} \leq d_\lambda < 2^{-(h-\varepsilon)j}\right\}}{\log 2^j}.$$

Interprétation. Il y a approximativement $2^{\rho_f(h)j}$ coefficients de taille 2^{-hj}.

Argument heuristique. Considérons les points x tels que $h_f(x) = h$.

- $d_j(x) \sim 2^{-hj}$ et il y a environ $2^{\rho_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} de ce type.
- En utilisant la définition de la dimension de Hausdorff, il y a environ $2^{d_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} qui recouvrent les points x tels que $h_f(x) = h$.

$$\boxed{\Longrightarrow \rho_f(h) \geq d_f(h)}$$

Leaders profile method

On considère la fonction

$$\rho_f(h) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \limsup_{j\to+\infty} \frac{\log \#\left\{\lambda \in \Lambda_j : 2^{-(h+\varepsilon)j} \leq d_\lambda < 2^{-(h-\varepsilon)j}\right\}}{\log 2^j}.$$

Interprétation. Il y a approximativement $2^{\rho_f(h)j}$ coefficients de taille 2^{-hj}.

Argument heuristique. Considérons les points x tels que $h_f(x) = h$.

- $d_j(x) \sim 2^{-hj}$ et il y a environ $2^{\rho_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} de ce type.
- En utilisant la définition de la dimension de Hausdorff, il y a environ $2^{d_f(h)j}$ intervalles dyadiques de taille 2^{-j} qui recouvrent les points x tels que $h_f(x) = h$.

$$\boxed{\Longrightarrow \rho_f(h) \geq d_f(h)}$$

Problème. ρ_f peut dépendre de la base d'ondelettes choisie!

On considère les fonctions

$$\nu_f^+(h) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \limsup_{j\to+\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : d_\lambda \geq 2^{-(h+\varepsilon)j}\}}{\log 2^j}$$

et

$$\nu_f^-(h) = \lim_{\varepsilon\to 0^+} \limsup_{j\to+\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : d_\lambda \leq 2^{-(h+\varepsilon)j}\}}{\log 2^j}.$$

Le spectre de singularités de f est alors estimé par la fonction

$$\boxed{\nu_f := \min\{\nu_f^+, \nu_f^-\}}$$

Propriétés.

- ν_f^+ est l'enveloppe croissante de ρ_f, ν_f^- est l'enveloppe décroissante de ρ_f
- ν_f est indépendant de la base d'ondelettes choisie
- Si f est uniformément Höldérienne, $d_f(h) \leq \nu_f(h)$ pour tout $h \geq 0$

On considère les fonctions

$$\nu_f^+(h) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : d_\lambda \geq 2^{-(h+\varepsilon)j}\}}{\log 2^j}$$

et

$$\nu_f^-(h) = \lim_{\varepsilon \to 0^+} \limsup_{j \to +\infty} \frac{\log \#\{\lambda \in \Lambda_j : d_\lambda \leq 2^{-(h+\varepsilon)j}\}}{\log 2^j}.$$

Le spectre de singularités de f est alors estimé par la fonction

$$\boxed{\nu_f := \min\{\nu_f^+, \nu_f^-\}}$$

Propriétés.

- ν_f^+ est l'enveloppe croissante de ρ_f, ν_f^- est l'enveloppe décroissante de ρ_f
- ν_f est indépendant de la base d'ondelettes choisie
- Si f est uniformément Höldérienne, $d_f(h) \leq \nu_f(h)$ pour tout $h \geq 0$

Comparaison théorique des formalismes

Proposition

Si ν_f prend la valeur $-\infty$ en dehors d'un compact de $[0, +\infty[$, alors

$$d_f(h) \leq \nu_f(h) \leq L_f(h)$$

pour tout $h \in \mathbb{R}$ et L_f est l'enveloppe concave de ν_f.

Idée. Montrer que

$$\eta_f(q) = \inf_h \{hq - \nu_f(h)\} + 1, \quad \forall q$$

Or, par définition

$$L_f(h) = \inf_q \{hq - \eta_f(q)\} + 1, \quad \forall h$$

$\longrightarrow$ Utiliser les propriétés de la transformation de Legendre

Comparaison théorique des formalismes

Proposition

Si ν_f prend la valeur $-\infty$ en dehors d'un compact de $[0, +\infty[$, alors

$$d_f(h) \leq \nu_f(h) \leq L_f(h)$$

pour tout $h \in \mathbb{R}$ et L_f est l'enveloppe concave de ν_f.

Idée. Montrer que

$$\eta_f(q) = \inf_h \{hq - \nu_f(h)\} + 1, \quad \forall q$$

Or, par définition

$$L_f(h) = \inf_q \{hq - \eta_f(q)\} + 1, \quad \forall h$$

$\longrightarrow$ Utiliser les propriétés de la transformation de Legendre

Illustrations numériques

1. Mouvement Brownien fractionnaire.

Presque sûrement, l'exposant de Hölder d'un mouvement Brownien fractionnaire de paramètre de Hurst $H \in]0,1[$ est constant et égal à H. Les méthodes présentées permettent donc d'obtenir une estimation du paramètre du Hurst.

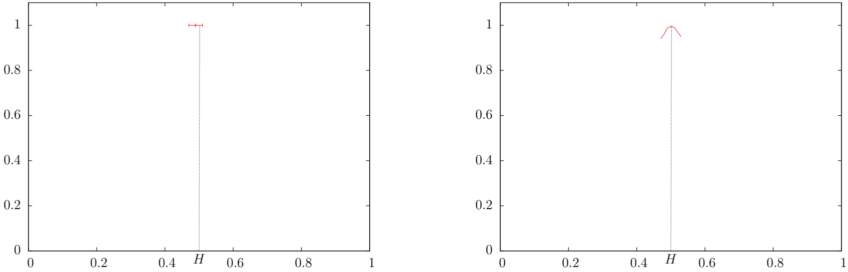


Figure : Estimation du spectre d'un mouvement Brownien par la *wavelet leaders method* à gauche et la *leaders profile method* à droite.

2. Processus de Lévy

Si le processus de Lévy X ne possède pas de partie Brownienne, le spectre des singularités est presque sûrement donné par

$$d_X(h) = \beta h, \quad \forall h \in [0, 1/\beta]$$

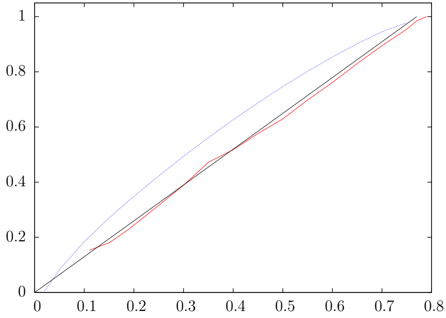


Figure : Spectre d'un processus de Lévy sans partie Brownienne. En bleu, estimation par la *wavelet leaders method*. En rouge, estimation par la *leaders profile method*.

Si le processus de Lévy a une partie Brownienne, le spectre des singularités est presque sûrement donné par

$$d_X(h) = \begin{cases} \beta h & \text{if} \quad h \in [0, 1/2[\\ 1 & \text{if} \quad h = 1/2 \end{cases}$$

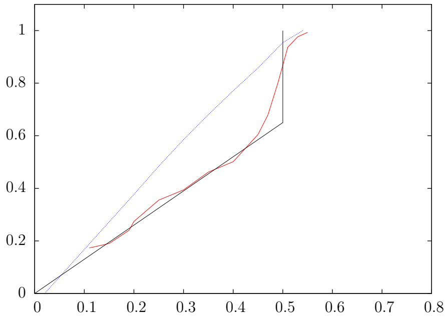


Figure : Spectre d'un processus de Lévy avec partie Brownienne. En bleu, estimation par la *wavelet leaders method*. En rouge, estimation par la *leaders profile method*.

Références I

F. Bastin, C. Esser, and S. Jaffard.
Large deviation spectra based on wavelet leaders.
Accepted for publication in Rev Iberoamericana.

I. Daubechies.
Ten Lectures on Wavelets.
CBMS-NSF Regional Conference Series in Applied Mathematics, 1992.

C. Esser, T. Kleyntssens, and S. Nicolay.
A multifractal formalism for non-concave and non-increasing spectra: the leaders profile method.
Submitted for publication.

S Jaffard.
The multifractal nature of Lévy processes.
Probab. Theory Relat. Fields, 114:207–227, 1999.

S. Jaffard.
Wavelet techniques in multifractal analysis, fractal geometry and applications: A jubilee of Benoit Mandelbrot.
Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, 72:91–151, 2004.

Références II

J.-P. Kahane.
Some Random Series of Functions.
Cambridge University Press, 1993.

P.G. Lemarié and Y. Meyer.
Ondelettes et bases hilbertiennes.
Revista Math.Iberoamericana, 1:1–18, 1986.

S. Mallat.
A Wavelet Tour of Signal Processing.
Academic Press, 1999.

Y. Meyer.
Ondelettes et opérateurs.
Hermann, 1990.

G. Parisi and U. Frisch.
On the singularity structure of fully developed turbulence.
Turbulence and Predictability in Geophysical Fluid Dynamics, pages 84–87, 1985.