



UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
Faculté des Sciences  
Département de Mathématique  
Promoteurs : Émilie CHARLIER, Michel RIGO

# Comportement asymptotique des morphismes et théorème de Cobham pour les morphismes effaçants

---

Manon STIPULANTI

Année académique  
2014 - 2015

Travail présenté en vue de l'obtention  
du grade de Master en Sciences  
Mathématiques, à finalité approfondie



## Remerciements

Je souhaite tout d'abord remercier chaleureusement le professeur Michel Rigo d'avoir accepté de travailler avec moi sur ce mémoire. Je le remercie surtout pour sa grande disponibilité, son infinie patience et le soin avec lequel il a toujours répondu à mes nombreuses questions.

Je tiens également à remercier Émilie Charlier pour sa disponibilité, ses conseils et son aide précieuse.

J'ai énormément appris aux côtés de mes deux promoteurs et je les remercie sincèrement du temps qu'ils m'ont consacré.

Je remercie Julien Leroy du temps qu'il m'a accordé pour répondre à mes questions.

Je souhaite aussi remercier Sébastien Labbé, Julien Raskin, Sophie Klenkenberg et Élise Vandomme pour toutes les astuces et améliorations qu'ils m'ont proposées lors de l'élaboration et la rédaction de ce travail.

Je remercie également mon papa de m'avoir donné la possibilité de réaliser les études que j'aime dans un environnement serein.

Je voudrais par ailleurs adresser un remerciement tout particulier à Vassili Koumparoulis pour le soutien qu'il m'a apporté tout au long de ce travail.

Enfin, je remercie toutes les personnes que je n'ai pas citées, dont ma famille et mes amis, qui m'ont aidée à mener à bien ce travail en m'apportant un soutien moral ou mathématique.



# Table des matières

<b>Introduction</b>	<b>vii</b>
<b>1 Morphismes, matrices et graphes</b>	<b>1</b>
1.1 Les morphismes . . . . .	1
1.2 La théorie de Perron–Frobenius . . . . .	4
1.2.1 Concepts de spectre et de rayon spectral . . . . .	5
1.2.2 Irréductibilité et primitivité . . . . .	5
1.2.3 Le théorème de Perron–Frobenius . . . . .	8
1.3 Deux formes particulièrement utiles pour les matrices carrées positives . . . . .	11
1.3.1 Les matrices de permutation . . . . .	12
1.3.2 Lien entre les matrices carrées positives et les graphes . . . . .	13
1.3.3 Première forme pour les matrices carrées positives . . . . .	17
1.3.4 Notion de période d’une matrice irréductible . . . . .	20
1.3.5 Seconde forme pour les matrices carrées positives . . . . .	30
1.4 Conséquences . . . . .	32
1.4.1 Première conséquence . . . . .	32
1.4.2 Deuxième conséquence . . . . .	33
1.4.3 Troisième conséquence . . . . .	36
1.4.4 Quatrième conséquence . . . . .	36
1.4.5 En guise de résumé... . . . .	37
<b>2 Comportement asymptotique</b>	<b>39</b>
2.1 Quelques résultats préliminaires . . . . .	39
2.2 Premier résultat sur le comportement asymptotique . . . . .	40
2.3 Deuxième résultat sur le comportement asymptotique . . . . .	48
2.4 Troisième résultat sur le comportement asymptotique . . . . .	51
2.5 Quatrième résultat sur le comportement asymptotique . . . . .	55
<b>3 Un théorème de Cobham pour les morphismes effaçants</b>	<b>61</b>
3.1 Quelques définitions élémentaires . . . . .	61
3.2 Les mots morphiques . . . . .	63
3.2.1 Distance et convergence . . . . .	63
3.2.2 Les morphismes prolongeables . . . . .	64
3.3 Éviter les morphismes effaçants . . . . .	69
3.3.1 Première étape . . . . .	69
3.3.2 Seconde étape . . . . .	79
3.3.3 Un algorithme répondant à la question . . . . .	81
3.3.4 Nécessité des seconds morphismes dans la version morphique du théorème de Cobham . . . . .	84
3.3.5 Comparaison des types de croissance par rapport aux lettres initiales . . . . .	85

---

<b>Conclusion</b>	<b>87</b>
<b>Annexes</b>	<b>89</b>
A Compléments aux lemmes 1.3.35 et 1.3.37 . . . . .	89
B Quelques résultats préliminaires à la preuve du lemme 2.2.2 . . . . .	92
C Compléments à la preuve du lemme 2.2.2 . . . . .	94
C.1 Complément à l'exemple . . . . .	94
C.2 Complément au cas général . . . . .	95
D Complément à la preuve du lemme 3.3.7 . . . . .	97
E Dilatation de matrices . . . . .	99
E.1 Définition et exemple . . . . .	99
E.2 Comparaison entre le spectre d'une matrice carrée réelle et celui de ses dilatées	102
E.3 Lien avec la version morphique du théorème de Cobham . . . . .	105
<b>Bibliographie</b>	<b>107</b>
<b>Liste des figures</b>	<b>109</b>
<b>Liste des tableaux</b>	<b>111</b>
<b>Errata</b>	<b>113</b>

# Introduction

Depuis les travaux d’Axel Thue au début du siècle précédent [3], la combinatoire des mots a pris un réel essor. Dans de nombreux contextes issus entre autres de la logique [8], de la théorie des systèmes de numération [2, 6], de la théorie des codes [4] ou encore de la dynamique symbolique [5, 20], il est en effet naturel d’étudier des propriétés combinatoires et structurelles de suites infinies de symboles appartenant à un alphabet fini : apparition de répétitions, évitabilité de certains motifs, étude des facteurs finis et de leur possible fréquence d’apparition, récurrence, complexité abélienne, etc. À titre d’exemple, si l’on définit le mot de Thue–Morse  $\mathbf{t} = abbabaab \cdots$  comme étant le point fixe du morphisme de Thue–Morse

$$\sigma : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^* : \begin{cases} a & \mapsto ab, \\ b & \mapsto ba \end{cases}$$

et commençant par la lettre  $a$ , ce mot possède la propriété remarquable qu’il ne contient aucun cube, c’est-à-dire aucun facteur de la forme  $uuu$  avec  $u$  un mot non vide sur  $\{a, b\}$ . On peut même montrer [25] que ce mot infini est sans chevauchement de la forme  $lulul$  où  $l$  est une lettre de  $\{a, b\}$  et  $u$  un mot sur  $\{a, b\}$ .

Une classe de mots infinis très largement utilisée est formée de mots morphiques. Un mot infini sur l’alphabet  $\Sigma$  est dit *pur morphique* s’il est point fixe d’un morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  étendu de manière naturelle à l’ensemble  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  des mots infinis sur  $\Sigma$ . On dit aussi que le mot infini en question est *engendré*<sup>1</sup> par  $f$ . Ainsi, d’un point de vue algorithmique, un tel mot infini est construit de façon succincte par le morphisme qui l’engendre et le symbole initial choisi. Pour le mot de Thue–Morse, appliquer  $n \in \mathbb{N}$  fois le morphisme  $\sigma$  à partir de la lettre  $a$  fournit un préfixe de  $\mathbf{t}$  de longueur  $2^n$ . De plus, un mot infini sur l’alphabet  $\Sigma$  est dit *morphique* s’il est l’image, par un morphisme, d’un mot pur morphique. Il est finalement bien connu que l’ensemble des mots purs morphiques est un sous-ensemble strict de l’ensemble des mots morphiques définis sur le même alphabet<sup>2</sup>.

Ce mémoire traite principalement d’un théorème de Cobham et se situe à l’intersection de trois domaines : la combinatoire des mots, l’algèbre linéaire et la théorie des graphes.

Pour énoncer ce théorème d’intérêt, nous avons besoin de préciser la notion de morphisme prolongeable, évoquée un peu plus haut. Nous dirons que le morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  est *prolongeable* en une lettre  $a \in \Sigma$  si les deux conditions suivantes sont remplies :  $f(a) = au$  avec  $u$  un mot fini sur  $\Sigma$  et la suite  $(|f^n(a)|)_{n \in \mathbb{N}}$  des longueurs des itérés tend vers l’infini avec  $n$ . Dans ce cas, la suite  $(f^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers un mot infini limite noté  $f^\omega(a)$  et point fixe de  $f$ . Dans ce travail, nous donnons, à la dernière section du chapitre 3, une preuve constructive du théorème de Cobham pour les mots morphiques :

**Théorème 1.** *Soient  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme prolongeable en une lettre  $a$  et  $g : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  un morphisme, ces morphismes pouvant être effaçants, i.e. l’image d’une lettre rend le mot vide.*

---

1. Si  $\mathbf{w}$  est un mot infini pur morphique engendré par  $f$  et commence par la lettre  $a \in \Sigma$ , alors il doit exister un mot  $u \in \Sigma^*$  tel que  $f(a) = au$ . Puisque  $\mathbf{w}$  est infini, on est conduit à la notion de morphisme prolongeable dont nous parlerons un peu plus loin dans cette introduction.

2. Voir par exemple la section 3 de l’article [9] où les auteurs construisent explicitement des exemples de mots morphiques qui ne sont pas purs morphiques.

Si  $g(f^\omega(a))$  est un mot infini, alors il existe un alphabet  $\Pi$ , un morphisme non effaçant  $\sigma : \Pi^* \rightarrow \Pi^*$ , une lettre  $a' \in \Pi$  en laquelle  $\sigma$  est prolongeable et un codage  $\tau : \Pi^* \rightarrow \Gamma^*$  tels que

$$\tau(\sigma^\omega(a')) = g(f^\omega(a)).$$

Dans la littérature, on trouve plusieurs démonstrations de ce résultat. Par exemple, J.-P. Allouche et J. Shallit en ont donné une preuve dans [2]; J. Cassaigne et F. Nicolas dans [9]; J. Honkala dans [19]. L'approche suivie ici est basée sur un article toujours en cours de rédaction : *Asymptotic properties of free monoid morphisms* [10]. Travailler à partir d'une telle source n'a pas toujours été simple, mais cela m'a permis d'avoir des discussions intéressantes avec mes promoteurs, ainsi qu'un aperçu de la vie de chercheur. Dès lors, le texte présenté ici pourra différer de l'article final. La motivation principale des auteurs de cet article est d'étudier le spectre et les propriétés asymptotiques des itérées des matrices carrées associées aux morphismes  $f$  et  $\sigma$  avant et après application du théorème 1.

En effet, à un morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ , on associe naturellement un graphe orienté dont l'ensemble des sommets est  $\Sigma$  et l'arc  $(a, b)$  joint les lettres  $a$  et  $b$  dans le graphe si  $b$  apparaît dans le mot  $f(a)$ . On considère même un multi-graphe si une lettre apparaît plusieurs fois dans la même image. On introduit alors la matrice d'adjacence de ce graphe. Autrement dit, pour un morphisme  $f$ , l'élément  $(M_f)_{a,b}$  compte le nombre de  $b$  apparaissant dans  $f(a)$ . Notons que la tradition veut que, en combinatoire des mots, l'on considère la transposée de cette matrice. De cette façon, on voit facilement<sup>3</sup> que, pour tout mot fini  $w$  sur  $\Sigma$ ,  $M_f^\top \psi(w) = \psi(f(w))$  où  $\psi$  est le vecteur de Parikh comptant le nombre de lettres. Remarquons dès à présent qu'étudier le comportement de  $M_f^n$  revient à s'intéresser au nombre de chemins de longueur  $n$  joignant deux sommets quelconques du graphe associé.

Détaillons le contenu du présent travail. Dans le premier chapitre, après avoir rappelé les définitions usuelles sur les morphismes, nous sommes amenés à étudier les matrices carrées associées. Puisque ces matrices ont des coefficients naturels, nous développons la théorie de Perron–Frobenius des matrices carrées à coefficients positifs ou nuls. En termes de graphe, cela revient à considérer les composantes fortement connexes du graphe et à identifier les longueurs des cycles présents.

Une fois la théorie de Perron–Frobenius bien établie, le deuxième chapitre traite de façon détaillée du comportement asymptotique des éléments  $(M_f^n)_{a,b}$  pour tout couple de lettres  $(a, b)$  de  $\Sigma \times \Sigma$ . Ce comportement dépend fortement des blocs irréductibles rencontrés et de leurs périodes, i.e. des longueurs des cycles apparaissant dans les composantes fortement connexes du graphe correspondant. Si l'on s'intéresse au morphisme associé, puisque  $|f^n(a)| = \sum_{b \in \Sigma} |f^n(a)|_b$  pour toute lettre  $a$ , il est naturel d'examiner le comportement de la somme des éléments d'une ligne de  $M_f^n$ . Nous montrons que ce dernier est du type  $\Theta(n^d \lambda^n)$  où  $\lambda$  est une valeur propre de la matrice  $M_f$  et  $d$  un naturel.

Enfin, dans le troisième chapitre, nous présentons une preuve constructive du théorème 1. Ayant à notre disposition les outils d'algèbre linéaire développés dans les deux chapitres précédents, nous pouvons définir le type de croissance d'un mot infini pur morphique pour ensuite étudier les matrices carrées obtenues avant et après application du théorème 1.

En guise de conclusion, nous donnons un prolongement possible. En effet, le présent travail devrait servir de point de départ à la généralisation d'un autre théorème de Cobham aux systèmes de numération abstraits.

---

3. Voir la proposition 1.1.9 au premier chapitre de ce travail.



# Chapitre 1

## Morphismes, matrices et graphes

Ce chapitre a pour but de fixer les définitions et résultats basiques qui permettent d'obtenir les résultats importants de notre travail. Comme son nom l'indique, il lie les différentes notions que sont les morphismes, les matrices et les graphes. Dans la première section, nous donnons les définitions usuelles concernant les morphismes et nous établissons leur lien avec les matrices. Ensuite, une section entière est consacrée au rappel de la théorie de Perron–Frobenius. Dans la troisième section, nous fixons le lien entre les matrices carrées positives, i.e. dont toutes les composantes sont des réels positifs ou nuls, et les graphes pour obtenir deux résultats clé. Enfin, dans une quatrième section, nous donnons quelques conséquences des résultats établis dans ce chapitre.

### 1.1 Les morphismes

Cette section rappelle des définitions et des résultats élémentaires concernant les mots construits sur un alphabet (fini) et les morphismes de monoïdes.

**Définition 1.1.1.** Un *alphabet*  $\Sigma$  est un ensemble non vide de symboles, généralement appelés *lettres* de cet alphabet. Dans tout ce texte, nous supposons travailler au moyen d'alphabets finis.

Un *mot fini* sur l'alphabet  $\Sigma$  est la concaténation d'un nombre fini de lettres de  $\Sigma$ . Le *mot vide*  $\varepsilon$  est l'unique mot ne contenant aucune lettre. L'ensemble des mots finis sur  $\Sigma$  se note  $\Sigma^*$ . Muni de l'opération de concaténation, cet ensemble est alors un monoïde, i.e. un ensemble doté d'une opération binaire, interne, partout définie et associative et d'un (unique) élément neutre, et est appelé le *monoïde libre engendré par*  $\Sigma$ . Dans ce cas, le neutre est le mot vide  $\varepsilon$ .

La longueur d'un mot  $w \in \Sigma^*$ , notée  $|w|$ , est le nombre de lettres le constituant ; le nombre d'occurrences d'une lettre  $a \in \Sigma$  dans  $w$  se note  $|w|_a$ . Nous posons  $\Sigma^+ = \Sigma^* \setminus \{\varepsilon\}$  l'ensemble des mots finis sur  $\Sigma$  de longueur strictement positive.

Un *mot infini* sur l'alphabet  $\Sigma$  est une application  $\mathbf{w} : \mathbb{N} \rightarrow \Sigma$ . Un tel mot est communément noté  $\mathbf{w} = w_0w_1w_2 \cdots$  où  $w_n$  est une lettre de  $\Sigma$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Nous notons indifféremment  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  ou  $\Sigma^\omega$  l'ensemble des mots infinis sur  $\Sigma$  et, pour différencier les mots finis des mots infinis, nous écrivons ces derniers en gras.

Dans la définition suivante, nous introduisons la notion de morphisme de monoïdes.

**Définition 1.1.2.** Considérons  $(A, \circ)$  et  $(B, \nabla)$  deux monoïdes de neutres respectifs  $e_A$  et  $e_B$ . Une application  $f : A \rightarrow B$  est un *morphisme de monoïdes* (ou encore *homomorphisme de monoïdes*) si les deux conditions suivantes sont respectées :

- (i) pour tous  $x, y \in A$ ,  $f(x \circ y) = f(x) \nabla f(y)$  ;
- (ii)  $f(e_A) = e_B$ .

**Remarque 1.1.3.** Dans le cas d'un homomorphisme de groupes, la condition (ii) est une conséquence directe de la condition (i) et de l'existence d'inverse au sein des groupes. Par contre, dans le cas des monoïdes, la condition (ii) doit réellement faire partie de la définition.

Nous rappelons que, pour définir un morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ , il suffit de donner ses valeurs sur chacune des lettres de l'alphabet  $\Sigma$ . De plus, les morphismes définis sur les mots finis peuvent naturellement être étendus aux mots infinis de la manière suivante.

**Définition 1.1.4.** Soit  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  un morphisme. Si  $\mathbf{w} = w_0w_1w_2\cdots$  est un mot infini de  $\Sigma^{\mathbb{N}}$  où  $w_n \in \Sigma$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , alors nous définissons  $f(\mathbf{w})$  par le mot fini ou infini  $f(w_0)f(w_1)f(w_2)\cdots$  de  $\Gamma^* \cup \Gamma^{\mathbb{N}}$ .

Ainsi, si nous restreignons le morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  aux mots infinis, nous avons une application  $f : \Sigma^{\mathbb{N}} \rightarrow (\Gamma^* \cup \Gamma^{\mathbb{N}})$ , mais nous n'avons plus un morphisme puisque nous ne disposons plus d'une opération bien définie (concaténer deux mots infinis n'a pas de sens). Nous sommes maintenant en mesure d'établir la correspondance entre les morphismes et les matrices.

**Définition 1.1.5.** Soient  $\Sigma$  un alphabet avec  $\#\Sigma = d \in \mathbb{N}_0$  et  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme. La *matrice d'incidence* de  $f$  est la matrice  $\text{Mat}_f \in \mathbb{N}_d^d$  définie<sup>1</sup> par

$$(\text{Mat}_f)_{a,b} = |f(b)|_a$$

pour tous  $a, b \in \Sigma$ . Pour tout sous-ensemble non vide  $\Gamma$  de  $\Sigma$ , aussi appelé *sous-alphabet* de  $\Sigma$ , nous notons  $(\text{Mat}_f)_\Gamma$  la sous-matrice carrée de  $\text{Mat}_f$  obtenue en sélectionnant les lignes et les colonnes de  $\text{Mat}_f$  correspondant aux lettres de  $\Gamma$ .

**Remarque 1.1.6.** Si l'alphabet  $\Sigma$  est de cardinal  $d \in \mathbb{N}_0$  et ordonné, nous pouvons le considérer comme un  $d$ -uple  $(a_1, \dots, a_d)$ . Dans ce cas, la matrice d'incidence de n'importe quel morphisme de  $\Sigma$  se remplit en fonction de l'ordre sur  $\Sigma$ . En général, il s'agit de l'ordre sur les naturels ou de l'ordre du dictionnaire.

Nous donnons maintenant un exemple du lien entre les morphismes et les matrices.

**Exemple 1.1.7.** Considérons le morphisme de Thue–Morse  $t : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  défini par  $t(0) = 01$  et  $t(1) = 10$ . Alors

$$(\text{Mat}_t)_{0,0} = |t(0)|_0 = 1, (\text{Mat}_t)_{0,1} = |t(1)|_0 = 1, (\text{Mat}_t)_{1,0} = |t(0)|_1 = 1 \text{ et } (\text{Mat}_t)_{1,1} = |t(1)|_1 = 1.$$

Dans ce cas, la matrice  $\text{Mat}_t$  est égale<sup>2</sup> à

$$\begin{array}{c} 0 \quad 1 \\ 0 \quad \left( \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \\ 1 \end{array}$$

Considérons maintenant le morphisme  $f : \{0, 1, 2\}^* \rightarrow \{0, 1, 2\}^*$  défini par  $f(0) = 012$ ,  $f(1) = 1202$  et  $f(2) = 2$ . Sa matrice d'incidence est donnée par

$$\text{Mat}_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Si  $\Gamma = \{0, 1\} \subseteq \{0, 1, 2\}$ , on voit que  $(\text{Mat}_f)_\Gamma = \text{Mat}_t$ .

Nous allons établir que la matrice d'incidence d'une itération d'un morphisme est obtenue comme la puissance naturelle correspondante de la matrice d'incidence du morphisme de départ<sup>3</sup>. Avant de passer à la démonstration de ce résultat, nous avons besoin d'un lemme.

1. Remarquons que nous avons perdu l'information sur l'ordre d'apparition des lettres et que nous avons considéré, comme l'introduction l'annonçait, la matrice carrée que l'on remplit colonne par colonne.

2. Dans la suite, nous n'écrivons plus explicitement l'ordre que nous prenons sur les lettres de l'alphabet pour remplir les matrices d'incidence. Si l'alphabet est composé de lettres  $a, b, c, \dots$  (resp. de naturels  $0, 1, 2, \dots$ ), nous travaillons implicitement au moyen de l'ordre du dictionnaire (resp. sur  $\mathbb{N}$ ) sauf indication du contraire.

3. La preuve de ce résultat est inspirée de la page 249 de [2].

**Lemme 1.1.8.** Soit  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_d\}$  un alphabet avec  $d \in \mathbb{N}_0$ . Considérons un morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ . Alors, pour tout mot  $w \in \Sigma^*$ ,

$$|f(w)|_{a_i} = \sum_{j=1}^d |f(a_j)|_{a_i} |w|_{a_j}$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ .

*Démonstration.* Soit  $w$  un mot construit sur  $\Sigma$ . Si  $w$  est le mot vide, alors le résultat est vrai. Nous pouvons donc supposer que  $w \neq \varepsilon$ . Alors il existe un naturel  $n \in \mathbb{N}_0$  tel que  $w = b_1 \cdots b_n$  où  $b_j \in \Sigma$  pour tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ . Fixons maintenant  $i \in \{1, \dots, d\}$ . On a

$$|f(w)|_{a_i} = |f(b_1 \cdots b_n)|_{a_i} = |f(b_1) \cdots f(b_n)|_{a_i} = |f(b_1)|_{a_i} + \cdots + |f(b_n)|_{a_i}. \quad (1.1)$$

Par définition, le nombre d'occurrences d'un terme  $|f(b_j)|_{a_i}$  avec  $j \in \{1, \dots, n\}$  dans la somme précédente est donné par le nombre de fois que la lettre  $b_j$  apparaît dans  $w$ , à savoir  $|w|_{b_j}$ . Par conséquent, si l'on désigne par  $m \in \{1, \dots, d\}$  le nombre de lettres différentes de  $w$  et par  $c_1, \dots, c_m$  ces lettres, l'égalité (1.1) devient

$$|f(w)|_{a_i} = |f(c_1)|_{a_i} |w|_{c_1} + \cdots + |f(c_m)|_{a_i} |w|_{c_m}. \quad (1.2)$$

Or, pour toute lettre  $a \in \Sigma$ , on a

$$|w|_a \begin{cases} = 0 & \text{si la lettre } a \text{ n'apparaît pas dans } w, \\ > 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Dès lors, nous pouvons compléter le membre de droite de l'égalité (1.2) par les lettres de  $\Sigma$  qui n'apparaissent pas dans  $w$  puisque nous ne faisons qu'ajouter à cette somme des termes nuls. Ainsi, en complétant, nous obtenons

$$|f(w)|_{a_i} = |f(a_1)|_{a_i} |w|_{a_1} + \cdots + |f(a_d)|_{a_i} |w|_{a_d} = \sum_{j=1}^d |f(a_j)|_{a_i} |w|_{a_j}. \quad \square$$

**Proposition 1.1.9.** Soit  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_d\}$  un alphabet avec  $d \in \mathbb{N}_0$ . Considérons un morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ . Alors, pour tout mot  $w \in \Sigma^*$ ,

$$\begin{pmatrix} |f(w)|_{a_1} \\ \vdots \\ |f(w)|_{a_d} \end{pmatrix} = \text{Mat}_f \begin{pmatrix} |w|_{a_1} \\ \vdots \\ |w|_{a_d} \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* Soit  $w$  un mot construit sur  $\Sigma$ . Alors, pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ , en utilisant le lemme 1.1.8 et la définition du produit matriciel,

$$|f(w)|_{a_i} = \sum_{j=1}^d |f(a_j)|_{a_i} |w|_{a_j} = \sum_{j=1}^d (\text{Mat}_f)_{a_i, a_j} \left( \begin{pmatrix} |w|_{a_1} \\ \vdots \\ |w|_{a_d} \end{pmatrix} \right)_{a_j} = \left( \text{Mat}_f \begin{pmatrix} |w|_{a_1} \\ \vdots \\ |w|_{a_d} \end{pmatrix} \right)_{a_i}. \quad \square$$

Nous pouvons enfin passer à la proposition qui nous intéresse liant les puissances naturelles de la matrice d'incidence d'un morphisme aux matrices d'incidence des itérations de ce morphisme.

**Proposition 1.1.10.** Pour tout alphabet  $\Sigma$ , tout morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  et tout naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,  $\text{Mat}_{f^n} = \text{Mat}_f^n$ .

*Démonstration.* Soient  $\Sigma$  un alphabet et  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme. Puisque nous travaillons avec des alphabets finis, nous pouvons supposer que  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_d\}$  avec  $d \in \mathbb{N}_0$ . Nous procédons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ . Les cas de base correspondant à  $n = 0$  et  $n = 1$  sont vérifiés. Passons à l'induction. Supposons que le résultat est vrai pour tout  $m \in \{0, \dots, n\}$  avec  $n \geq 1$  et montrons-le pour  $m = n + 1$ . Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ , en utilisant l'hypothèse de récurrence et le lemme 1.1.8,

$$\begin{aligned} (\text{Mat}_f^{n+1})_{a_i, a_j} &= \sum_{k=1}^d (\text{Mat}_{f^n})_{a_i, a_k} (\text{Mat}_f)_{a_k, a_j} = \sum_{k=1}^d |f^n(a_k)|_{a_i} \underbrace{|f(a_j)|_{a_k}}_{\in \Sigma^*} = |f^{n+1}(a_j)|_{a_i} \\ &= (\text{Mat}_{f^{n+1}})_{a_i, a_j}. \end{aligned} \quad \square$$

**Corollaire 1.1.11.** *Soit  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_d\}$  un alphabet avec  $d \in \mathbb{N}_0$ . Considérons un morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ . Alors, pour tout mot  $w \in \Sigma^*$  et tout naturel  $n \in \mathbb{N}$ ,*

$$\begin{pmatrix} |f^n(w)|_{a_1} \\ \vdots \\ |f^n(w)|_{a_d} \end{pmatrix} = \text{Mat}_f^n \begin{pmatrix} |w|_{a_1} \\ \vdots \\ |w|_{a_d} \end{pmatrix}.$$

*Démonstration.* Soient  $w \in \Sigma^*$  un mot et  $n \in \mathbb{N}$  un naturel. Alors, en utilisant d'abord la proposition 1.1.9 puis la proposition 1.1.10,

$$\begin{pmatrix} |f^n(w)|_{a_1} \\ \vdots \\ |f^n(w)|_{a_d} \end{pmatrix} = \text{Mat}_{f^n} \begin{pmatrix} |w|_{a_1} \\ \vdots \\ |w|_{a_d} \end{pmatrix} = \text{Mat}_f^n \begin{pmatrix} |w|_{a_1} \\ \vdots \\ |w|_{a_d} \end{pmatrix}. \quad \square$$

Enfin, nous démontrons que la matrice d'incidence de la composition de deux morphismes définis sur un même alphabet est égale au produit des matrices d'incidence de ces morphismes.

**Proposition 1.1.12.** *Soient  $\Sigma$  un alphabet,  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  et  $g : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  deux morphismes. Alors  $\text{Mat}_{f \circ g} = \text{Mat}_f \text{Mat}_g$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $\Sigma = \{a_1, \dots, a_d\}$  avec  $d \in \mathbb{N}_0$ . Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, d\}$ , d'une part,

$$(\text{Mat}_f \text{Mat}_g)_{a_i, a_j} = \sum_{k=1}^d (\text{Mat}_f)_{a_i, a_k} (\text{Mat}_g)_{a_k, a_j} = \sum_{k=1}^d |f(a_k)|_{a_i} |g(a_j)|_{a_k}$$

et, d'autre part, grâce au lemme 1.1.8,

$$(\text{Mat}_{f \circ g})_{a_i, a_j} = |f(\underbrace{g(a_j)}_{\in \Sigma^*})|_{a_i} = \sum_{k=1}^d |f(a_k)|_{a_i} |g(a_j)|_{a_k}. \quad \square$$

Nous poursuivons la relation entre les morphismes et les matrices dans la section suivante concernant la théorie de Perron–Frobenius.

## 1.2 La théorie de Perron–Frobenius

Dans cette section, nous rappelons la théorie de Perron–Frobenius et nous approfondissons le lien déjà établi entre les morphismes et les matrices. Nous définissons successivement les concepts de spectre et de rayon spectral et nous démontrons un résultat les concernant. Ensuite, nous abordons les notions d'irréductibilité et de primitivité d'une matrice carrée positive et d'un morphisme. Elles jouent un rôle clé dans le fameux théorème de Perron–Frobenius. Nous ne démontrons pas ce théorème, mais nous l'illustrons en fin de section.

### 1.2.1 Concepts de spectre et de rayon spectral

**Définition 1.2.1.** Soit  $M$  une matrice carrée. Le *spectre* de  $M$  est le multi-ensemble<sup>4</sup> de ses valeurs propres répétées selon leur multiplicité algébrique<sup>5</sup>. Cet ensemble se note  $\text{Spec}(M)$ . Le *rayon spectral* de  $M$  est le réel défini par

$$\rho(M) = \max \{|\lambda| \mid \lambda \in \text{Spec}(M)\}.$$

Puisque nous connaissons le lien entre les morphismes et les matrices, nous avons aussi une notion de valeur propre, de spectre et de rayon spectral pour ceux-ci.

**Définition 1.2.2.** Soient  $\Sigma$  un alphabet et  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme. Les *valeurs propres* et le *spectre* de  $f$  sont respectivement définis comme étant les valeurs propres et le spectre de la matrice  $\text{Mat}_f$ . Le spectre de  $f$  se note  $\text{Spec}(f)$ . De plus, nous définissons le *rayon spectral* de  $f$ , noté  $\rho(f)$ , comme étant le rayon spectral de la matrice  $\text{Mat}_f$ .

Donnons un exemple de ces définitions.

**Exemple 1.2.3.** Poursuivons l'exemple 1.1.7. Il est facile de voir que les valeurs propres de la matrice  $\text{Mat}_t$  sont les naturels 0 et 2. De plus, on voit que ces valeurs propres sont simples. Ainsi,  $\text{Spec}(t) = \text{Spec}(\text{Mat}_t) = \{0, 2\}$  et  $\rho(t) = \rho(\text{Mat}_t) = 2$ .

D'autres exemples de spectre et de rayon spectral de morphismes sont donnés à la sous-section suivante. Nous établissons maintenant le lien concernant le spectre d'une matrice réelle  $M$  de dimension<sup>6</sup>  $m$  et celui de la matrice  $S^{-1}MS$  pour n'importe quelle matrice carrée inversible  $S$  de même dimension  $m$ .

**Proposition 1.2.4.** Soient  $M$  et  $S$  deux matrices de  $\mathbb{R}_m^m$  telles que  $S$  est inversible. Alors  $\text{Spec}(M) = \text{Spec}(S^{-1}MS)$ .

*Démonstration.* Grâce à la loi du produit relative au déterminant<sup>7</sup>, nous avons  $\chi_{S^{-1}MS}(\mu) = \chi_M(\mu)$  et nous voyons que les polynômes  $\chi_M$  et  $\chi_{S^{-1}MS}$  ont exactement les mêmes zéros (avec les mêmes multiplicités). Ainsi, les matrices  $M$  et  $S^{-1}MS$  ont aussi exactement les mêmes valeurs propres (avec les mêmes multiplicités) et cette constatation mène à l'égalité des spectres.  $\square$

### 1.2.2 Irréductibilité et primitivité

Cette sous-section se divise en deux parties : la première est consacrée à l'irréductibilité et à la primitivité des matrices carrées tandis que la seconde est dédiée aux notions analogues pour les morphismes. Puisque les caractères irréductible et primitif ne sont définis que pour les matrices carrées dites positives, nous donnons tout d'abord le sens de cette positivité.

**Définition 1.2.5.** Une matrice réelle  $M$  est dite *positive* (resp. *nulle*, resp. *strictement positive*) si toutes les composantes de  $M$  sont positives ou nulles (resp. nulles, resp. strictement positives). Nous utilisons la notation  $M \geq 0$  (resp.  $M = 0$ , resp.  $M > 0$ ) pour dire que la matrice  $M$  est positive (resp. nulle, resp. strictement positive).

4. Un multi-ensemble est un ensemble au sein duquel un même élément peut se répéter plus d'une fois.

5. Un complexe  $\lambda$  est une valeur propre d'une matrice carrée  $M \in \mathbb{R}_m^m$  si, et seulement si,  $\lambda$  est un zéro du polynôme caractéristique  $\chi_M(\mu) = \det(M - \mu I)$  de  $M$  où  $I \in \mathbb{R}_m^m$  désigne la matrice identité. De plus, sa multiplicité algébrique est égale à sa multiplicité comme zéro de ce polynôme. Consulter la page 220 de [23].

6. La dimension d'une matrice  $M \in \mathbb{R}_n^m$  se note  $m \times n$  avec  $m, n \in \mathbb{N}_0$ . Si  $m = n$ , alors la matrice  $M$  est carrée et nous notons simplement  $m$  (ou  $n$ ) sa dimension. Lorsque nous écrivons qu'une matrice est de dimension  $m$ , nous sous-entendons donc qu'elle est carrée.

7. Cette loi stipule simplement que le déterminant d'un produit est égal au produit des déterminants. Voir [23] à la page 86.

**Définition 1.2.6.** Une matrice positive  $M \in \mathbb{R}_m^m$  est dite *irréductible* si, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , il existe un entier  $k(i, j) \geq 0$  dépendant de  $i, j$  tel que  $(M^{k(i,j)})_{i,j} > 0$ . Sinon, cette matrice est dite *réductible*.

**Remarque 1.2.7.** Au vu de cette définition, la matrice nulle de dimension 1, notée  $(0)_{1 \times 1}$ , est irréductible. En effet, cette matrice étant de dimension 1, il suffit de prendre  $k(1, 1) = 0$ . Cependant, les matrices nulles de dimension plus grande ou égale à 2 sont clairement réductibles.

Nous donnons ci-après des exemples moins triviaux de matrices irréductible et réductible.

**Exemple 1.2.8.** La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

est irréductible. En effet, pour  $(i, j) \in \{(1, 1), (2, 2)\}$ , nous pouvons prendre  $k(i, j) = 0$  et, pour  $(i, j) \in \{(1, 2), (2, 1)\}$ ,  $k(i, j) = 1$ .

**Exemple 1.2.9.** Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

On peut montrer par récurrence que les éléments  $(M^n)_{1,2}$  et  $(M^n)_{1,3}$  sont nuls pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $j \in \{2, 3\}$ , il n'existe donc pas d'entier  $k(1, j) \geq 0$  tel que  $(M^{k(1,j)})_{1,j} > 0$ . Ainsi,  $M$  est réductible.

Nous passons à la définition d'une matrice primitive.

**Définition 1.2.10.** Une matrice positive  $M \in \mathbb{R}_m^m$  est dite *primitive* s'il existe un entier  $k$  strictement positif tel que, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , nous avons  $(M^k)_{i,j} > 0$ .

**Remarque 1.2.11.** Au vu de cette définition, la matrice nulle de dimension 1 n'est pas primitive. En effet, pour tout  $k \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\left( (0)_{1,1}^k \right)_{1,1} = 0.$$

Ainsi, la condition de la définition précédente n'est jamais remplie. Il s'agit donc d'un premier exemple de matrice irréductible, mais non primitive.

Nous donnons un exemple de matrice primitive.

**Exemple 1.2.12.** La matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

est primitive. En effet, l'entier  $k = 2 > 0$  convient pour conclure au caractère primitif de  $M$ .

La proposition suivante caractérise d'une autre façon les matrices primitives.

**Proposition 1.2.13.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive. Alors  $M$  est une matrice primitive si, et seulement si, il existe  $N \in \mathbb{N}_0$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $M^n$  est une matrice strictement positive.

*Démonstration.* La condition suffisante est triviale. Montrons la condition nécessaire et supposons que  $M$  est primitif. Alors, par définition, il existe  $N \in \mathbb{N}_0$  tel que  $M^N > 0$ . Dans ce cas, toutes les colonnes de  $M$  possèdent au moins un élément strictement positif. Sinon,  $M$  possède une colonne nulle et, puisque le produit matriciel se fait ligne par colonne, on voit que  $M^n$  a au moins une colonne nulle pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ . Ceci est bien sûr impossible puisque  $M^N > 0$ . Pour chaque colonne

d'indice  $j \in \{1, \dots, m\}$  de  $M$ , notons  $M_{i_j, j}$  un élément strictement positif de cette colonne avec  $i_j \in \{1, \dots, m\}$ . Si  $M^k > 0$ , alors  $M^{k+1} > 0$  car, pour tous  $\ell, j \in \{1, \dots, m\}$ , on a

$$(M^{k+1})_{\ell, j} = \sum_{t=1}^m (M^k)_{\ell, t} M_{t, j} \geq \underbrace{(M^k)_{\ell, i_j}}_{>0} \underbrace{M_{i_j, j}}_{>0} > 0.$$

De proche en proche, on voit que, si  $A^k > 0$ , alors  $A^{k+n} > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Comme  $A^N > 0$ , on a la conclusion.  $\square$

Nous pouvons remarquer la propriété suivante.

**Proposition 1.2.14.** *Toute matrice primitive est en particulier irréductible.*

*Démonstration.* Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive et primitive. Il existe alors un entier  $k > 0$  tel que  $M^k > 0$ . Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , choisir  $k(i, j) = k$  convient pour prouver l'irréductibilité de  $M$ .  $\square$

Cependant, le contraire n'est pas vrai comme nous l'avons déjà vu à la remarque 1.2.11. Ci-après, nous donnons un autre exemple un peu moins trivial d'une matrice irréductible, mais non primitive.

**Exemple 1.2.15.** Reprenons l'exemple 1.2.8. Nous pouvons montrer par récurrence que  $M^{2n+1} = M$  et  $M^{2n} = I$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Par conséquent, nous ne pouvons trouver aucun entier  $k > 0$  tel que  $(M^k)_{i, j} > 0$  pour tous  $i, j \in \{1, 2\}$  et la matrice  $M$  n'est pas primitive.

Puisque nous connaissons le lien entre les morphismes et les matrices, nous avons aussi une notion d'irréductibilité et de primitivité pour ceux-ci.

**Définition 1.2.16.** Soit  $\Sigma$  un alphabet. Un morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  est dit *irréductible* (resp. *réductible*, resp. *primitif*) si sa matrice d'incidence  $\text{Mat}_f$  est irréductible (resp. réductible, resp. primitive).

**Remarque 1.2.17.** Explicitons le caractère irréductible ou primitif d'un morphisme. Si  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  est un morphisme irréductible, alors, pour toutes lettres  $a, b \in \Sigma$ , il existe  $k(a, b) \in \mathbb{N}$  tel que

$$\left( \text{Mat}_f^{k(a, b)} \right)_{a, b} > 0.$$

Or la matrice  $\text{Mat}_f^{k(a, b)}$  est la matrice d'incidence du morphisme  $f^{k(a, b)} : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ . Par définition,  $f^{k(a, b)}(b)$  contient alors au moins une fois la lettre  $a$ . Pour tout couple de lettres  $(a, b) \in \Sigma \times \Sigma$  fixé, il est alors possible de trouver une itération  $f^k$  de  $f$  pour laquelle  $f^k(b)$  contient au moins une fois la lettre  $a$ .

Par un raisonnement similaire, si  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  est un morphisme primitif, alors il existe  $k \in \mathbb{N}_0$  tel que  $(\text{Mat}_f^k)_{a, b} > 0$  pour tous  $a, b \in \Sigma$ . Par définition,  $f^k(b)$  contient alors au moins une fois la lettre  $a$  et ce, pour toutes lettres  $a, b \in \Sigma$ . Il existe donc une itération  $f^k$  de  $f$  telle que, pour tout  $b \in \Sigma$ ,  $f^k(b)$  contient au moins une fois toutes les lettres de  $\Sigma$ .

Donnons un exemple de morphisme irréductible.

**Exemple 1.2.18.** Considérons le morphisme  $E : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$  défini par  $E(a) = b$  et  $E(b) = a$  (on le note  $E$  d'après son nom anglais « exchange morphism »). Sa matrice d'incidence est donnée par la matrice de l'exemple 1.2.8. Nous savons dès lors que  $E$  est irréductible, mais non primitif (se souvenir de l'exemple 1.2.15). De plus,

$$E^0(a) = a, E(a) = b, E^0(b) = b \text{ et } E(b) = a.$$

Ainsi, si nous fixons deux lettres de  $\{a, b\}$ , il est possible de trouver une itération de  $E$  qui, évaluée en la première lettre, contient au moins une fois la seconde. Enfin,  $\text{Spec}(E) = \{-1, 1\}$  et  $\rho(E) = 1$ .

Si la matrice d'incidence d'un morphisme est la matrice nulle de dimension au moins 2, alors ce morphisme est clairement réductible. Nous fournissons un exemple moins trivial d'un tel morphisme.

**Exemple 1.2.19.** Considérons le morphisme  $f : \{a, b, c\}^* \rightarrow \{a, b, c\}^*$  défini par  $f(a) = b$ ,  $f(b) = c$  et  $f(c) = b$ . Sa matrice d'incidence est donnée par la matrice de l'exemple 1.2.9. Puisqu'elle est réductible, le morphisme  $f$  l'est aussi. De plus,  $\text{Spec}(f) = \{-1, 0, 1\}$  et donc  $\rho(f) = 1$ .

Pour achever cette sous-section, nous donnons deux exemples de morphismes primitifs, l'un assez simple, l'autre un peu moins.

**Exemple 1.2.20.** Continuons l'exemple 1.2.3. La matrice  $\text{Mat}_t$  étant clairement primitive, le morphisme  $t$  l'est donc aussi. L'itération  $t^k$  pour  $k = 1$  remplit les conditions de la remarque 1.2.17 puisque  $t(0)$  et  $t(1)$  contiennent au moins une fois chacune des lettres 0 et 1.

**Exemple 1.2.21.** Définissons le morphisme  $f : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$  par  $f(a) = bb$  et  $f(b) = ab$ . Sa matrice d'incidence est donnée par la matrice de l'exemple 1.2.12. Dès lors,  $f$  est primitif. Comme  $f^2(a) = abab$  et  $f^2(b) = bbab$ , l'entier  $k = 2$  convient pour la remarque 1.2.17. De plus,  $\text{Spec}(f) = \{-1, 2\}$  et  $\rho(f) = 2$ .

### 1.2.3 Le théorème de Perron–Frobenius

L'irréductibilité et la primitivité d'une matrice carrée positive entraînent des propriétés fortes, comme celles données dans le célèbre théorème de Perron–Frobenius. Comme annoncé, nous ne démontrons pas ce théorème puisque sa preuve, fort longue, n'apporte rien à notre propos<sup>8</sup>. Nous nous contentons de l'énoncer et de l'illustrer.

**Théorème 1.2.22 (Perron–Frobenius).** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive, irréductible et différente de  $(0)_{1 \times 1}$ .

- (i) Le nombre réel  $\rho(M)$  donné dans la définition 1.2.1 est une valeur propre de  $M$  de multiplicité algébrique égale à 1. De plus, il existe un vecteur propre  $\overrightarrow{v_{\rho(M)}}$  de valeur propre  $\rho(M)$  de  $M$  dont toutes les composantes sont strictement positives.
- (ii) Il existe un entier  $p_M \geq 1$  tel que les autres valeurs propres de module égal à  $\rho(M)$  sont exactement les complexes  $\rho(M)e^{\frac{2ir\pi}{p_M}}$  pour  $r = 1, \dots, p_M - 1$ .
- (iii) Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , il existe un unique  $r = r(i, j) \in \{0, \dots, p_M - 1\}$  tel que  $(M^{np_M+r})_{i,j}$  est non nul pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand et, pour tout  $s \not\equiv r \pmod{p_M}$  et tout naturel  $n \geq 0$ ,  $(M^{np_M+s})_{i,j} = 0$ . De plus,  $r(i, j) + r(j, i) \equiv 0 \pmod{p_M}$ .
- (iv) Si  $M$  est primitif, alors  $p_M = 1$ , i.e. chaque valeur propre  $\alpha \in \mathbb{C}$  de  $M$  telle que  $\alpha \neq \rho(M)$  vérifie  $|\alpha| < \rho(M)$ .
- (v) Si  $M$  est primitif, alors, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , il existe une constante réelle  $c_{i,j} > 0$  telle que le quotient  $\frac{(M^n)_{i,j}}{\rho(M)^n}$  converge vers  $c_{i,j}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.
- (vi) La valeur propre  $\rho(M)$  satisfait aux inéquations suivantes :

$$\min_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m M_{i,j} \leq \rho(M) \leq \max_{1 \leq i \leq m} \sum_{j=1}^m M_{i,j} \quad \text{et} \quad \min_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m M_{i,j} \leq \rho(M) \leq \max_{1 \leq j \leq m} \sum_{i=1}^m M_{i,j}.$$

**Remarque 1.2.23.** Si  $M \in \mathbb{R}_m^m$  est une matrice positive, irréductible et différente de  $(0)_{1 \times 1}$ , alors aucune ligne (resp. aucune colonne) de  $M$  ne peut être entièrement nulle. En effet, si une ligne (resp. une colonne) est nulle, alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $M^n$  a une ligne (resp. une colonne) nulle, ce qui contredit le caractère irréductible de la matrice  $M$ . Par conséquent, au vu du point (vi) du théorème de Perron–Frobenius, nous avons  $\rho(M) > 0$ .

8. Nous renvoyons par exemple le lecteur intéressé à [2, 18, 31] pour plus d'informations.



**Remarque 1.2.24.** Si  $M$  est la matrice irréductible nulle de dimension 1, alors on pose  $p_M = \infty$ . En fait, il s’agit d’un cas limite. Pour cette matrice, l’unique valeur propre est 0 et il n’y en a pas d’autre. Dans ce cas, pour que les complexes

$$\rho(M) e^{\frac{2ir\pi}{p_M}}$$

avec  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$  soient tous égaux à  $\rho(M) = 0$ , nous choisissons de prendre  $p_M = \infty$ . De plus, il est clair que le rayon spectral de  $M$  est l’unique valeur propre de  $M$  et que cette valeur propre est bien de multiplicité 1.

**Définition 1.2.25.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive, irréductible et différente de  $(0)_{1 \times 1}$ . Par définition du rayon spectral, si  $\alpha \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de  $M$ , alors  $|\alpha| \leq \rho(M)$ . Nous voyons donc que toute valeur propre  $\alpha \in \mathbb{C}$  de  $M$  vérifie  $|\alpha| \leq \rho(M)$ . Pour cette raison et grâce au théorème de Perron–Frobenius qui affirme que  $\rho(M)$  est une valeur propre de  $M$ , la valeur propre  $\rho(M)$  de  $M$  est appelée la *valeur propre dominante* ou encore *valeur propre de Perron* (ou de *Perron–Frobenius*) de  $M$ . De plus, l’entier  $p_M$  dont il est question dans le théorème précédent se nomme la *période de Perron–Frobenius* de la matrice  $M$ .

**Remarque 1.2.26.** Si la matrice irréductible  $M$  est la matrice  $(0)_{1 \times 1}$ , alors  $\rho(M) = 0$  est aussi une valeur propre de  $M$ . Par extension, nous dirons que  $\rho(M)$  est la *valeur propre dominante* ou encore *valeur propre de Perron* (ou de *Perron–Frobenius*) de  $M$ . De plus,  $p_M = \infty$  est également appelé la *période de Perron–Frobenius* de  $M$ .

Encore une fois, puisque les morphismes et les matrices sont liés, nous pouvons donner une définition similaire en ce qui concerne ceux-ci.

**Définition 1.2.27.** Soit  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme irréductible. Puisque la matrice d’incidence  $\text{Mat}_f$  de  $f$  est positive et irréductible, la valeur propre  $\rho(f) = \rho(\text{Mat}_f)$  de  $f$  est appelée la *valeur propre dominante* de  $f$  et l’entier  $p_{\text{Mat}_f}$  est appelé la *période de Perron–Frobenius* de  $f$ , notée  $p_f$ .

Nous allons maintenant donner deux exemples du théorème de Perron–Frobenius. Le premier illustre les points (i) à (iii) et le point (vi) du théorème dans le cas irréductible.

**Exemple 1.2.28.** Reprenons l’exemple 1.2.18. Nous y avons établi que  $\rho(M) = \rho(E) = 1$  et que 1 est une valeur propre simple de  $M$ . En considérant le vecteur

$$\vec{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix},$$

nous voyons que  $M\vec{v}_1 = \vec{v}_1$ . Ainsi, le point (i) du théorème est rempli. De plus,  $p_M = p_E = 2$  convient pour le point (ii) du théorème. En effet,  $-1$  est obtenu comme  $\rho(M) e^{\frac{2ir\pi}{2}}$  pour  $r = 1$ . De plus,  $p_M = 2$  permet d’obtenir exactement les deux valeurs propres de  $M$  de module 1. Illustrons maintenant le point (iii). Par l’exemple 1.2.15, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons que  $M^{np_M} = M^{2n} = I$ . Pour  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\} = \{0, 1\}$ , nous obtenons  $M^{np_M+r} = M^{2n+r} = M^r$ . Fixons  $i, j \in \{1, 2\}$ . Si  $i = j$ , l’unique  $r(i, i) \in \{0, 1\}$  qui convient est donné par  $r(i, i) = 0$  car  $(M^{2n+r(i,i)})_{i,i} = I_{i,i}$  est non nul pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand. De plus, si  $s = 1$ ,  $(M^{2n+s})_{i,i} = M_{i,i} = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Nous avons aussi que  $r(i, i) + r(i, i) \equiv 0 \pmod{2}$ . Si maintenant  $i \neq j$ , l’unique  $r(i, j) \in \{0, 1\}$  qui convient est donné par  $r(i, j) = 1$  car alors  $(M^{2n+r(i,j)})_{i,j} = M_{i,j}$  est non nul pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand. De plus, si  $s = 0$ ,  $(M^{2n+s})_{i,j} = I_{i,j} = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Nous avons aussi que  $r(i, j) + r(j, i) \equiv 0 \pmod{2}$ . Le point (iii) est donc rempli. Le point (vi) est lui aussi satisfait car

$$\sum_{j=1}^2 M_{1,j} = 1, \quad \sum_{j=1}^2 M_{2,j} = 1, \quad \sum_{i=1}^2 M_{i,1} = 1 \quad \text{et} \quad \sum_{i=1}^2 M_{i,2} = 1.$$

Voici une illustration des points (iv) et (v) du théorème de Perron–Frobenius dans le cas primitif.

**Exemple 1.2.29.** Définissons le morphisme de Fibonacci  $f : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  par  $f(0) = 01$  et  $f(1) = 0$ . Sa matrice d'incidence est donnée par

$$\text{Mat}_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Elle est primitive puisque  $\text{Mat}_f^2 > 0$ . Nous sommes donc dans les conditions du théorème de Perron–Frobenius. Les valeurs propres de  $\text{Mat}_f$  sont  $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$ . Ainsi,  $\rho(\text{Mat}_f) = \rho(f) = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  et, pour toute autre valeur propre  $\alpha$  de  $\text{Mat}_f$  distincte de  $\rho(\text{Mat}_f)$ , on a bien que  $|\alpha| < \rho(\text{Mat}_f)$ . On en tire que  $p_{\text{Mat}_f} = p_f = 1$  et le point (iv) est rempli. Nous devons encore expliciter le point (v). Pour plus de facilité, posons  $\varphi = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$  et  $\varphi' = \frac{1 - \sqrt{5}}{2}$ . Nous remarquons que  $\varphi' = -\frac{1}{\varphi}$ . Considérons la suite  $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$  des nombres de Fibonacci définie comme étant la suite des naturels obtenue par la relation de récurrence linéaire  $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  avec les conditions initiales  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$ . Cette suite commence par les naturels 0, 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, 34, etc. Nous pouvons démontrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\text{Mat}_f^n = \begin{pmatrix} F_{n+1} & F_n \\ F_n & F_{n-1} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

Ainsi, pour tous  $i, j \in \{1, 2\}$  et tout  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\frac{(\text{Mat}_f^n)_{i,j}}{\rho(\text{Mat}_f)^n} = \begin{cases} \frac{F_{n+1}}{\varphi^{n+1}} & \text{si } i = j = 1, \\ \frac{F_n}{\varphi^n} & \text{si } i = j = 2, \\ \frac{F_n}{\varphi^n} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Nous allons examiner le comportement de ces trois quotients lorsque  $n$  tend vers l'infini. Posons<sup>9</sup>

$$S = \begin{pmatrix} \varphi' & \varphi \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Alors,

$$S^{-1} \text{Mat}_f S = \begin{pmatrix} \varphi' & 0 \\ 0 & \varphi \end{pmatrix}.$$

De là, après quelques calculs, nous obtenons

$$\text{Mat}_f^n = S \begin{pmatrix} \varphi'^n & 0 \\ 0 & \varphi^n \end{pmatrix} S^{-1} = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1} & \varphi^n - \varphi'^n \\ \varphi^n - \varphi'^n & \varphi \varphi'^n - \varphi' \varphi^n \end{pmatrix}$$

et, en se rappelant que  $\varphi' = -\frac{1}{\varphi}$ , on a

$$\text{Mat}_f^n = \frac{\sqrt{5}}{5} \begin{pmatrix} \varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1} & \varphi^n - \varphi'^n \\ \varphi^n - \varphi'^n & \varphi^{n-1} - \varphi'^{n-1} \end{pmatrix}. \quad (1.4)$$

En combinant les égalités (1.3) et (1.4), pour la suite de Fibonacci de conditions initiales  $F_0 = 0$  et  $F_1 = 1$ , nous avons finalement

$$F_n = \frac{\sqrt{5}}{5} (\varphi^n - \varphi'^n)$$

9. Nous reprenons ici le développement proposé dans [24] à la page 118.

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Cette expression est en fait une formule close pour  $F_n$  avec  $n \in \mathbb{N}$ , i.e. une formule permettant d'écrire  $F_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et ne faisant intervenir que des fonctions élémentaires bien connues<sup>10</sup>. Les trois quotients deviennent donc

$$\begin{aligned}\frac{(F_{n+1})}{\varphi^n} &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\varphi^{n+1} - \varphi'^{n+1}}{\varphi^n} = \frac{\sqrt{5}}{5} \left( \varphi - \frac{\varphi'^{n+1}}{\varphi^n} \right), \\ \frac{(F_{n-1})}{\varphi^n} &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\varphi^{n-1} - \varphi'^{n-1}}{\varphi^n} = \frac{\sqrt{5}}{5} \left( \frac{1}{\varphi} - \frac{\varphi'^{n-1}}{\varphi^n} \right), \\ \frac{(F_n)}{\varphi^n} &= \frac{\sqrt{5}}{5} \cdot \frac{\varphi^n - \varphi'^n}{\varphi^n} = \frac{\sqrt{5}}{5} \left( 1 - \frac{\varphi'^n}{\varphi^n} \right).\end{aligned}$$

Or, comme  $0 < |\varphi'| < 1 < \varphi$ , nous savons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{|\varphi'|}{\varphi} \right)^n = 0.$$

On en tire<sup>11</sup> que la suite  $\left( \left( \frac{\varphi'}{\varphi} \right)^n \right)_{n \in \mathbb{N}}$  converge elle aussi vers 0. Par conséquent,

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(F_{n+1})}{\varphi^n} = \frac{\sqrt{5}}{5} \varphi, \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(F_{n-1})}{\varphi^n} = \frac{\sqrt{5}}{5} \frac{1}{\varphi} \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(F_n)}{\varphi^n} = \frac{\sqrt{5}}{5}.$$

En considérant finalement les quatre constantes

$$c_{1,1} := \frac{\sqrt{5}}{5} \varphi, \quad c_{1,2} := \frac{\sqrt{5}}{5}, \quad c_{2,1} := \frac{\sqrt{5}}{5} \frac{1}{\varphi} \quad \text{et} \quad c_{2,2} := \frac{\sqrt{5}}{5} \frac{1}{\varphi},$$

nous voyons que  $c_{i,j} > 0$  pour tous  $i, j \in \{1, 2\}$  et nous avons bien sûr que le quotient  $\frac{(\text{Mat}_f^n)_{i,j}}{\rho(\text{Mat}_f)^n}$  converge vers  $c_{i,j}$  lorsque  $n$  tend vers l'infini. Ceci termine l'illustration du théorème de Perron-Frobenius.

### 1.3 Deux formes particulièrement utiles pour les matrices carrées positives

Dans cette section, comme son nom l'indique, nous allons obtenir deux formes particulières pour les matrices carrées positives. Nous introduisons tout d'abord le concept de matrice de permutation que nous étudions brièvement. Il nous permettra d'établir deux propositions clé de cette section, chacune renfermant une des deux formes voulues. La première de ces deux propositions stipule que, si nous disposons d'une matrice carrée positive  $M$ , alors, à une matrice de permutation près, il est possible de la rendre triangulaire inférieure par blocs avec des blocs diagonaux irréductibles. La seconde montre qu'il existe une matrice de permutation  $P$  de même dimension que  $M$  et un naturel non nul  $p$  pour lesquels  $P^{-1}M^pP$  est une matrice triangulaire inférieure par blocs où les blocs diagonaux sont soit primitifs, soit nuls de dimension 1. Les preuves de ces deux propositions utilisant la théorie des graphes, nous fixons la relation entre les matrices carrées positives et les graphes avant de les démontrer. De plus, pour démontrer le second résultat, nous verrons que la notion de période d'une matrice irréductible (au sens que nous lui donnerons un peu plus loin) joue un rôle important. Une sous-section est donc consacrée à ce concept avant de démontrer le second résultat voulu.

10. Voir [24] à la page 111.

11. Une suite de réels  $(r_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0 si, et seulement si, la suite des modules  $(|r_n|)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers 0. Pour une démonstration de ce résultat, consulter par exemple [30] à la page 50.

### 1.3.1 Les matrices de permutation

**Définition 1.3.1.** Une *matrice de permutation* est une matrice carrée pour laquelle chaque ligne et chaque colonne contiennent exactement un unique 1, les autres composantes étant nulles.

Une telle matrice symbolise une permutation. En effet, si  $P$  est une matrice de permutation de dimension  $m$ , alors, pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , il existe un unique<sup>12</sup>  $j_{(i)} \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $P_{i,j_{(i)}} = 1$ . La permutation  $\sigma_P : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$  associée est alors définie par  $\sigma_P(i) = j_{(i)}$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . De même, si  $\sigma$  est une permutation de l'ensemble  $\{1, \dots, m\}$ , alors la matrice de permutation  $P_\sigma$  associée est une matrice de dimension  $m$  définie, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , par

$$(P_\sigma)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } \sigma(i) = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

En fait, il existe une correspondance biunivoque entre les matrices de permutation de  $\mathbb{R}_m^m$  et les permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, m\}$ . Cette bijection implique que les matrices de permutation sont inversibles et que les inverses des matrices de permutation sont encore des matrices de permutation.

**Exemple 1.3.2.** La matrice  $P$  définie par

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

est une matrice de permutation. Elle symbolise la permutation  $\sigma_P : \{1, \dots, 5\} \rightarrow \{1, \dots, 5\}$  définie par

$$\sigma_P(1) = 1, \sigma_P(2) = 3, \sigma_P(3) = 4, \sigma_P(4) = 5 \text{ et } \sigma_P(5) = 2.$$

Nous montrons deux résultats : le premier concerne la matrice de permutation associée à un produit de deux matrices de permutation et le second concerne la matrice de permutation associée à l'inverse d'une matrice de permutation.

**Proposition 1.3.3.** Soient  $A$  et  $B$  deux matrices de permutation de dimension  $m$ . Notons  $\alpha$  (resp.  $\beta$ ) la permutation que  $A$  (resp.  $B$ ) symbolise. Alors  $AB$  est une matrice de permutation de dimension  $m$  associée<sup>13</sup> à la permutation  $\beta \circ \alpha$ .

*Démonstration.* Supposons que la matrice  $AB$  est une matrice de permutation associée à la permutation  $\tau$ . Soient  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . Alors l'élément

$$(AB)_{i,j} = \sum_{k=1}^m A_{i,k} B_{k,j}$$

est non nul et vaut 1 uniquement si  $k = \alpha(i)$  et  $j = \beta(k)$ , ce qui signifie que  $j = (\beta \circ \alpha)(i)$ . Ainsi,

$$(AB)_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{si } (\beta \circ \alpha)(i) = j, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

On en tire que  $\tau = \beta \circ \alpha$ . Par conséquent, la matrice  $AB$  est bien une matrice de permutation et est associée à la permutation  $\beta \circ \alpha$ .  $\square$

12. Il est aussi possible d'associer une permutation à une matrice de permutation en procédant plutôt sur les colonnes que sur les lignes. On fixe alors  $j \in \{1, \dots, m\}$  et on trouve un unique  $i_{(j)} \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $P_{i_{(j)},j} = 1$ .

13. Remarquons que, si nous avons choisi l'autre façon d'associer les matrices de permutation et les permutations, la matrice de permutation  $AB$  de dimension  $m$  serait associée à la permutation  $\alpha \circ \beta$ .

**Proposition 1.3.4.** *Soit  $P$  une matrice de permutation de dimension  $m$ . Notons  $\sigma$  la permutation qu'elle symbolise. Si  $\tau$  est la permutation symbolisée par  $P^{-1}$ , alors  $\tau = \sigma^{-1}$ .*

*Démonstration.* Par la proposition précédente, nous savons que la matrice de permutation  $PP^{-1}$  (resp.  $P^{-1}P$ ) est associée à la permutation  $\tau \circ \sigma$  (resp.  $\sigma \circ \tau$ ). Puisque la matrice identité de dimension  $m$  est associée à la permutation identité notée  $\text{id} : \{1, \dots, m\} \rightarrow \{1, \dots, m\}$ , nous obtenons  $\tau \circ \sigma = \text{id}$  et  $\sigma \circ \tau = \text{id}$ . Ces deux égalités impliquent que  $\tau = \sigma^{-1}$ .  $\square$

Nous allons montrer que multiplier à gauche (resp. à droite) une matrice carrée par une matrice de permutation de même dimension revient à échanger les lignes (resp. les colonnes) de cette matrice conformément à la permutation (resp. la permutation inverse) associée à la matrice de permutation.

**Proposition 1.3.5.** *Soient  $M, P \in \mathbb{R}_m^m$  deux matrices parmi lesquelles  $P$  est une matrice de permutation. Notons  $\sigma$  la permutation associée à la matrice  $P$ . Alors, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,*

$$(PM)_{i,j} = M_{\sigma(i),j} \text{ et } (MP)_{i,j} = M_{i,\sigma^{-1}(j)}$$

*En particulier,  $(P^{-1}MP)_{i,j} = M_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)}$  pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ .*

*Démonstration.* Soient  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . D'une part, nous avons

$$(PM)_{i,j} = \sum_{\ell=1}^m P_{i,\ell} M_{\ell,j} = P_{i,\sigma(i)} M_{\sigma(i),j} = M_{\sigma(i),j}$$

puisque  $P_{i,\ell}$  est non nul et vaut 1 si, et seulement si,  $\sigma(i) = \ell$ . Ainsi, en multipliant  $M$  à gauche par  $P$ , nous avons échangé les lignes de  $M$  conformément à  $\sigma$ . D'autre part, en procédant de la même façon, on a  $(MP)_{i,j} = M_{i,\sigma^{-1}(j)}$ . Par conséquent, en multipliant  $M$  à droite par  $P$ , nous avons échangé les colonnes de  $M$  conformément à  $\sigma^{-1}$ . En particulier, nous avons

$$(P^{-1}MP)_{i,j} = (MP)_{\sigma^{-1}(i),j} = M_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)}. \quad \square$$

### 1.3.2 Lien entre les matrices carrées positives et les graphes

Pour donner explicitement la relation existant entre les matrices carrées positives et les graphes, nous devons d'abord définir la notion de matrice plafond. Grâce à celle-ci, nous associons un graphe à n'importe quelle matrice carrée positive. Ensuite, nous fixons une relation d'équivalence sur les graphes qui mène à la notion de forte connexité et nous définissons le concept de condensé d'un graphe. Ce condensé est un graphe assez simple dont nous pouvons réarranger les sommets selon un tri particulier. C'est grâce à ce tri spécifique que nous pourrions mettre une matrice carrée positive sous la première forme dont nous parlions dans l'introduction de cette section. Commençons tout de suite par la définition de la matrice plafond.

**Définition 1.3.6.** Soit  $M \in \mathbb{R}_n^m$  une matrice. La matrice *plafond* de  $M$  est la matrice  $[M] \in \mathbb{N}_n^m$  définie par

$$([M])_{i,j} = \lceil M_{i,j} \rceil$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  et tout  $j \in \{1, \dots, n\}$ , où  $\lceil r \rceil$  désigne le plafond de  $r \in \mathbb{R}$ , i.e. le plus petit entier supérieur ou égal à  $r$ .

**Lemme 1.3.7.** *Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,*

$$([M]^n)_{i,j} = 0 \Leftrightarrow (M^n)_{i,j} = 0.$$

*Démonstration.* Nous procédons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $n = 0$ , on a  $\lceil M \rceil^0 = I = M^0$  où  $I$  est la matrice identité de dimension  $m$  et on obtient le résultat. Pour  $n = 1$ , on a

$$(\lceil M \rceil^1)_{i,j} = 0 \Leftrightarrow (M^1)_{i,j} = 0$$

pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  puisque, si  $r \in \mathbb{R}_{\geq 0}$ , alors  $\lceil r \rceil = 0$  si, et seulement si,  $r = 0$ . Nous pouvons passer à l'induction. Pour cela, supposons que, pour tout  $k \in \{0, \dots, n\}$  avec  $n \in \mathbb{N}_0$  et tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , on a

$$(\lceil M \rceil^k)_{i,j} = 0 \Leftrightarrow (M^k)_{i,j} = 0$$

et montrons que, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , on a

$$(\lceil M \rceil^{n+1})_{i,j} = 0 \Leftrightarrow (M^{n+1})_{i,j} = 0.$$

Fixons  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . Alors

$$\begin{aligned} (\lceil M \rceil^{n+1})_{i,j} = 0 &\Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^m (\lceil M \rceil^n)_{i,\ell} (\lceil M \rceil)_{\ell,j} = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{pour tout } \ell \in \{1, \dots, m\}, (\lceil M \rceil^n)_{i,\ell} (\lceil M \rceil)_{\ell,j} = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{pour tout } \ell \in \{1, \dots, m\}, (\lceil M \rceil^n)_{i,\ell} = 0 \text{ ou } (\lceil M \rceil)_{\ell,j} = 0. \end{aligned}$$

Puisque  $i, j, \ell \in \{1, \dots, m\}$ , en utilisant l'hypothèse de récurrence, on a

$$\begin{aligned} (\lceil M \rceil^{n+1})_{i,j} = 0 &\Leftrightarrow \text{pour tout } \ell \in \{1, \dots, m\}, (M^n)_{i,\ell} = 0 \text{ ou } M_{\ell,j} = 0 \\ &\Leftrightarrow \text{pour tout } \ell \in \{1, \dots, m\}, (M^n)_{i,\ell} M_{\ell,j} = 0 \\ &\Leftrightarrow \sum_{\ell=1}^m (M^n)_{i,\ell} M_{\ell,j} = 0 \\ &\Leftrightarrow (M^{n+1})_{i,j} = 0. \quad \square \end{aligned}$$

**Corollaire 1.3.8.** *Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive. Alors  $M$  est irréductible (resp. primitif) si, et seulement si,  $\lceil M \rceil$  est irréductible (resp. primitif).*

*Démonstration.* Occupons-nous du cas irréductible de l'énoncé, le cas primitif étant sensiblement le même.

Supposons tout d'abord que  $M$  est irréductible. Soient  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . Alors il existe un entier  $k(i, j) \geq 0$  tel que  $(M^{k(i,j)})_{i,j} > 0$ . Dans ce cas,  $(\lceil M \rceil^{k(i,j)})_{i,j} > 0$  sinon, par le lemme 1.3.7,  $(M^{k(i,j)})_{i,j} = 0$ , ce qui est impossible. Par conséquent,  $\lceil M \rceil$  est irréductible. Supposons maintenant que  $\lceil M \rceil$  est irréductible. En procédant exactement de la même façon, on montre que  $M$  est irréductible.  $\square$

Comme annoncé au début de cette section, la notion de matrice plafond permet d'associer un graphe orienté à n'importe quelle matrice carrée positive de la façon suivante.

**Définition 1.3.9.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive. Si  $M$  est une matrice naturelle, le *graphe associé* à  $M$ , noté  $G(M)$ , est le graphe orienté défini de la façon suivante. Ses sommets sont les naturels  $1, \dots, m$ . Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $M_{i,j}$  désigne le nombre d'arcs joignant le sommet  $i$  au sommet  $j$  dans  $G(M)$ . Si, par contre,  $M$  est une matrice positive non naturelle, alors le *graphe associé* à  $M$  est le graphe associé à la matrice plafond  $\lceil M \rceil$ , i.e.  $G(M) := G(\lceil M \rceil)$ .

**Remarque 1.3.10.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive. Si les indices  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  sont tels que  $(\lceil M \rceil)_{i,j} \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , alors on parle d'*arcs multiples* de  $i$  vers  $j$  dans le graphe  $G(M)$ . Plusieurs possibilités de construction du graphe  $G(M)$  s'offrent à nous. Supposons qu'il y a au moins un arc du sommet  $i$  vers le sommet  $j$  avec  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , i.e.  $(\lceil M \rceil)_{i,j} = n \in \mathbb{N}_0$ . Nous pouvons décider d'inscrire dans le graphe  $G(M)$  soit les  $n$  arcs de  $i$  vers  $j$ , soit un unique arc de  $i$  vers  $j$  à proximité duquel est indiqué le naturel  $n$ . Dans la construction d'un même graphe, il faut choisir l'une ou l'autre méthode sans les mélanger. Elles sont illustrées dans les exemples 1.3.11 et 1.3.15.

Illustrons le lien entre les matrices carrées positives et les graphes.

**Exemple 1.3.11.** Considérons la matrice carrée positive

$$M = \begin{pmatrix} 0 & \pi & 1 \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1,2 \end{pmatrix}.$$

Cette matrice n'étant pas à coefficients naturels, nous devons prendre sa matrice plafond pour déterminer son graphe associé  $G(M)$  conformément à la définition 1.3.9. Puisque

$$\lceil M \rceil = \begin{pmatrix} 0 & 4 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix},$$

le graphe  $G(M)$  associé à la matrice  $M$  est donné à la figure 1.1.

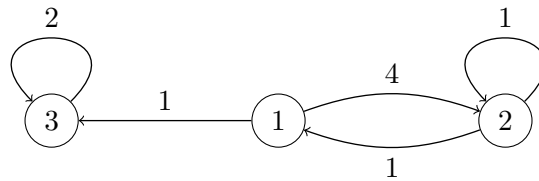


FIGURE 1.1 – Graphe  $G(M)$  associé à la matrice carrée non naturelle positive  $M$ .

**Remarque 1.3.12.** Le chemin inverse associant une matrice carrée positive à un graphe orienté est lui aussi possible : il s'agit de la notion de matrice d'adjacence. En fait, toute matrice  $M \in \mathbb{N}_m^m$  peut être interprétée comme la *matrice d'adjacence* d'un graphe orienté à  $m$  sommets, notés  $1, \dots, m$ . Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , la composante  $M_{i,j}$  de  $M$  est le nombre d'arcs joignant le sommet  $i$  au sommet  $j$  dans le graphe considéré. En particulier, un résultat élémentaire de la théorie des graphes montre que  $(M^n)_{i,j}$  est exactement le nombre de chemins de longueur  $n \in \mathbb{N}$  joignant le sommet  $i$  au sommet  $j$  dans le graphe en question<sup>14</sup>. Finalement, la définition que nous venons de prendre permet de remplir la matrice d'adjacence ligne par ligne<sup>15</sup>.

Nous allons maintenant définir une relation d'équivalence sur les graphes.

**Définition 1.3.13.** Soient  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive et  $G(M)$  son graphe associé. Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , on notera  $i \rightarrow j$  si  $(M^n)_{i,j} > 0$  pour un entier  $n \geq 0$ . Cette condition équivaut à demander que  $(\lceil M \rceil^n)_{i,j} > 0$  pour un entier  $n \geq 0$  ou encore, en termes de graphe, qu'il existe au moins un chemin de longueur  $n$  joignant le sommet  $i$  au sommet  $j$  dans  $G(M)$  pour un entier  $n \geq 0$ . Nous remarquons directement que  $i \rightarrow i$  puisque nous avons toujours que  $(M^0)_{i,i} = 1$ .

Nous dirons que  $i$  et  $j$  sont *fortement connectés* si  $i \rightarrow j$  et  $j \rightarrow i$ , ce que l'on notera  $i \leftrightarrow j$ . Nous voyons dès lors que la relation « être fortement connecté » est une relation d'équivalence. Celle-ci partitionne les sommets  $1, \dots, m$  de  $G(M)$  en classes d'équivalence appelées *composantes fortement connexes* (ou *f. connexes*) de  $G(M)$ . Une telle composante est alors un ensemble maximal de sommets de  $G(M)$  tel que chacun des sommets de la classe est fortement connecté aux autres sommets de celle-ci. Si le graphe  $G(M)$  ne possède qu'une seule composante fortement connexe, nous dirons que  $G(M)$  est *fortement connexe* (ou *f. connexe*).

14. Voir [26] à la page 72.

15. Il est aussi possible de définir la matrice d'adjacence de la façon suivante. Si  $G$  est un graphe orienté dont les sommets sont  $1, \dots, m$ , alors la matrice d'adjacence de  $G$  est définie par la matrice  $M' \in \mathbb{N}_m^m$  dont l'élément  $(M')_{i,j}$  désigne le nombre d'arcs joignant le sommet  $j$  au sommet  $i$  dans  $G$ . Dans ce cas, nous voyons que les matrices des deux définitions sont transposées l'une de l'autre. En général, la définition que nous avons choisie est la plus classique des deux.

En fait, les matrices irréductibles et les graphes orientés fortement connexes sont liés de la manière suivante<sup>16</sup>.

**Proposition 1.3.14.** *Soient  $M \in \mathbb{N}_m^m$  une matrice et  $G(M)$  son graphe associé. Alors  $M$  est irréductible si, et seulement si,  $G(M)$  est fortement connexe.*

Dans l'exemple qui suit, nous déterminons les composantes fortement connexes du graphe associé à une matrice carrée positive.

**Exemple 1.3.15.** Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le graphe  $G(M)$  associé à cette matrice est donné par la figure 1.2. Ici, les composantes fortement connexes sont  $C_1 = \{4\}$ ,  $C_2 = \{2, 5\}$ ,  $C_3 = \{7\}$  et  $C_4 = \{1, 3, 6\}$ .

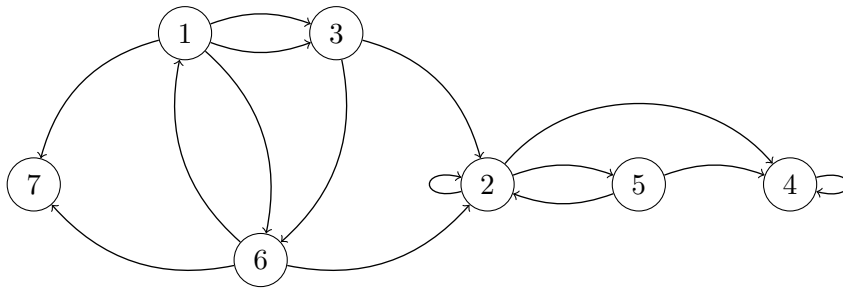


FIGURE 1.2 – Graphe  $G(M)$  associé à la matrice carrée positive  $M$ .

Nous rappelons la notion de condensé d'un graphe orienté.

**Définition 1.3.16.** Soit  $G$  un graphe orienté. Nous pouvons créer un nouveau graphe orienté  $\mathcal{H}_G$ , appelé le *condensé* (ou encore *graphe acyclique des composantes*) de  $G$ , dont les sommets sont les composantes fortement connexes<sup>17</sup> de  $G$ . Un arc joint deux composantes fortement connexes différentes  $C$  et  $C'$  de  $G$  s'il existe  $c \in C$  et  $c' \in C'$  tels que  $c \rightarrow c'$ .

Nous avons besoin d'une classe de graphes orientés particuliers, les graphes simples, pour pouvoir donner plus d'informations sur le condensé d'un graphe orienté.

**Définition 1.3.17.** Un graphe orienté est un *multi-graphe* si l'ensemble de ses arcs est un multi-ensemble. Autrement dit, il peut exister plus d'un arc reliant deux sommets donnés. Un graphe orienté est *simple* s'il n'est pas un multi-graphe et ne possède pas de boucle.

**Exemple 1.3.18.** Le graphe  $G(M)$  de la figure 1.2 de l'exemple 1.3.15 est un multi-graphe.

**Proposition 1.3.19.** *Le condensé d'un graphe orienté est un graphe simple sans cycle.*

*Démonstration.* C'est vrai par définition. □

16. Pour une preuve, voir par exemple [26] à la page 73.

17. La relation de forte connexité abordée ici est la même que celle donnée dans la définition 1.3.13. En fait, nous retirons simplement l'information sur les matrices.



Dans l'introduction de cette sous-section, nous parlions d'un tri des sommets du graphe associé à une matrice carrée positive qui permet de la rendre triangulaire inférieure par blocs avec des blocs diagonaux irréductibles. Ce tri particulier est introduit dans la remarque suivante.

**Remarque 1.3.20.** Puisque le condensé  $\mathcal{H}_G$  d'un graphe orienté  $G$  ne possède pas de cycle, il est possible d'ordonner ses sommets<sup>18</sup>. Si le condensé possède  $n \in \mathbb{N}_0$  sommets, alors nous décidons d'associer un indice de numérotation  $i \in \{1, \dots, n\}$  à chaque sommet du condensé, i.e. à chaque composante fortement connexe du graphe de départ, de la façon suivante. Si  $C$  et  $C'$  sont deux composantes fortement connexes de  $G$  et s'il existe un arc entre le sommet  $C$  et le sommet  $C'$  dans  $\mathcal{H}_G$ , alors l'indice de numérotation de  $C$  est strictement plus grand que celui de  $C'$ . Une telle numérotation des sommets rappelle la notion de tri topologique, mais est légèrement différente<sup>19</sup>.

Une numérotation des sommets du type considéré n'est pas forcément unique. Par exemple, si  $C$ ,  $C'$  et  $C''$  sont des composantes fortement connexes de  $G$  et s'il existe un arc d'un sommet  $C$  vers deux autres sommets  $C'$  et  $C''$  dans  $\mathcal{H}_G$  et si  $C$  porte le numéro  $n \in \mathbb{N} \setminus \{0, 1\}$ , alors nous pouvons indifféremment numéroter  $C'$  par  $n - 1$  et  $C''$  par  $n - 2$  ou  $C'$  par  $n - 2$  et  $C''$  par  $n - 1$ . Finalement, nous avons choisi cette numérotation des sommets parce qu'elle permet d'obtenir des matrices triangulaires inférieures, tandis que le tri topologique, lui, conduit à des matrices triangulaires supérieures. Nous le montrons plus loin<sup>20</sup>.

De plus, puisque le condensé est sans cycle, il est impossible que tous les sommets du condensé possèdent une flèche sortante (resp. entrante). Dans ce cas, il existe au moins un sommet de celui-ci qui ne possède pas de flèche sortante (resp. entrante); on parle de *puits* (resp. *source*).

Nous donnons un exemple de condensé d'un graphe orienté.

**Exemple 1.3.21.** Poursuivons l'exemple 1.3.15. Le condensé du graphe  $G(M)$  est donné par la figure 1.3. Nous voyons que les composantes fortement connexes  $C_1$  et  $C_3$  sont des puits, tandis que  $C_4$  est une source.

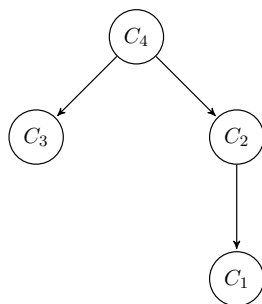


FIGURE 1.3 – Condensé du graphe  $G(M)$  de la figure 1.2.

### 1.3.3 Première forme pour les matrices carrées positives

Fort de tous ces concepts et résultats, nous passons maintenant à la démonstration de la première proposition annoncée dans l'introduction de cette section.

**Proposition 1.3.22.** *Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive. Alors il existe une matrice de permutation  $P$  de dimension  $m$  telle que  $P^{-1}MP$  est une matrice triangulaire inférieure par blocs où les blocs diagonaux sont des matrices carrées irréductibles.*

18. Voir [26] à la page 49.

19. Soit  $G$  un graphe simple orienté à  $n \in \mathbb{N}_0$  sommets. Un *tri topologique* de  $G$  est une numérotation  $v_1, \dots, v_n$  des sommets de  $G$  telle que, s'il existe un arc de  $v_i$  vers  $v_j$ , alors  $i < j$ .

20. Pour plus d'informations sur les tris, consulter par exemple [26] aux pages 46 à 49.

*Démonstration.* Si  $M$  est irréductible, le résultat est immédiat. Supposons donc que  $M$  est réductible. Considérons  $G(M)$  son graphe associé comme dans la définition 1.3.9. Supposons que  $G(M)$  possède  $s \in \mathbb{N}_0$  composantes fortement connexes. En utilisant la remarque 1.3.20, nous pouvons les réorganiser de sorte que l'ordre  $C_1, \dots, C_s$  des composantes fortement connexes de  $G(M)$  est tel que, s'il existe un arc de  $C_k$  vers  $C_\ell$  dans le condensé  $\mathcal{H}_{G(M)}$  de  $G(M)$ , alors  $k > \ell$ . En triant de cette façon les sommets de  $\mathcal{H}_{G(M)}$  et en prenant l'ordre naturel sur  $\mathbb{N}$  au sein de chacun des ensembles  $C_1, \dots, C_s$ , nous réordonnons en fait les sommets de  $G(M)$ . Par conséquent, il existe une matrice de permutation  $P$  telle que

$$P^{-1}[M]P = \begin{pmatrix} C_1 & \cdots & C_s \\ c_{1,1} & \cdots & c_{1,s} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{s,1} & \cdots & c_{s,s} \end{pmatrix} \begin{matrix} C_1 \\ \vdots \\ C_s \end{matrix} \quad (1.5)$$

où, pour tous  $k, \ell \in \{1, \dots, s\}$ ,  $c_{k,\ell}$  désigne une matrice de dimension  $\#C_k \times \#C_\ell$  résumant le nombre d'arcs liant les sommets de  $C_k$  aux sommets de  $C_\ell$  dans le graphe  $G(M)$ . En effet, considérons  $k, \ell \in \{1, \dots, s\}$ ,  $i \in C_k$  et  $j \in C_\ell$ . Puisque nous n'avons fait que réordonner les sommets du graphe  $G(M)$ , nous avons  $(c_{k,\ell})_{i,j} = ([M])_{i,j}$  si l'on confond le sommet avec sa position au sein de l'ensemble. Ainsi, les matrices  $c_{k,\ell}$  se remplissent en fonction des composantes de la matrice  $[M]$ . De plus, si  $([M])_{i,j} = n \in \mathbb{N}$ , cela signifie que, dans  $G(M)$ , il y a un arc de label  $n$  du sommet  $i$  de  $C_k$  vers le sommet  $j$  de  $C_\ell$ . On en conclut que les composantes de la matrice  $c_{k,\ell}$  sont égales au nombre d'arcs liant les sommets de  $C_k$  à ceux de  $C_\ell$  dans  $G(M)$ .

Nous pouvons dès lors simplifier l'égalité (1.5) en se rappelant que, si  $k > \ell$  (resp.  $k < \ell$ ) avec  $k, \ell \in \{1, \dots, s\}$ , la matrice  $c_{k,\ell}$  peut être non nulle (resp. est nulle)<sup>21</sup>. En effet, grâce à la numérotation des composantes fortement connexes, nous savons que, si  $k < \ell$ , il n'existe pas d'arc de  $C_k$  vers  $C_\ell$  dans  $\mathcal{H}_{G(M)}$ . Dans ce cas, la matrice  $c_{k,\ell}$  est nulle puisqu'elle résume les liens des sommets de  $C_k$  vers ceux de  $C_\ell$  dans  $G(M)$ . Si elle ne l'est pas, cela signifie qu'un sommet de  $C_k$  est lié à un sommet de  $C_\ell$  par au moins un arc dans  $G(M)$ , ce qui contredit le tri que nous avons choisi. Si  $k > \ell$ , deux cas se présentent : il existe ou il n'existe pas un arc de  $C_k$  vers  $C_\ell$  dans  $\mathcal{H}_{G(M)}$ . Dans le second cas, comme  $C_k$  n'est lié à  $C_\ell$  par aucun arc dans  $\mathcal{H}_{G(M)}$ , alors la matrice  $c_{k,\ell}$  est nulle. Si elle ne l'est pas, alors un arc joint un sommet de  $C_k$  à un sommet de  $C_\ell$  dans  $G(M)$ , ce qui est impossible par hypothèse. Dans le premier cas, il existe un sommet  $i \in C_k$  et un sommet  $j \in C_\ell$  tels que  $i$  est lié à  $j$  par au moins un arc dans  $G(M)$ , ce qui signifie que  $(c_{k,\ell})_{i,j} = ([M])_{i,j} > 0$ . On en tire que la matrice  $c_{k,\ell}$  est non nulle. Lorsque  $k = \ell$ , nous obtenons en fait une matrice naturelle  $c_{k,k} = M'_k$  de dimension  $\#C_k$  résumant les liens entre les sommets de la composante fortement connexe  $C_k$  dans  $G(M)$ . Au final, nous avons

$$P^{-1}[M]P = \begin{pmatrix} M'_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & M'_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & M'_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & M'_s \end{pmatrix}$$

où chaque  $*$  désigne une matrice (pas forcément carrée) de dimension adéquate.

Considérons les sous-graphes  $G_k$ ,  $k \in \{1, \dots, s\}$ , de  $G(M)$  dont les sommets sont les éléments de  $C_k$  et dont les arcs sont ceux de  $G(M)$  dont les extrémités se trouvent dans  $C_k$ . Pour chaque  $k \in \{1, \dots, s\}$  fixé, le graphe  $G_k$  est fortement connexe par définition des composantes fortement connexes. La matrice d'adjacence de  $G_k$  étant  $M'_k$ , cette dernière est irréductible vu la proposition 1.3.14. Ainsi, à une matrice de permutation près, nous avons montré que  $[M]$  s'écrit sous la forme d'une matrice triangulaire inférieure par blocs où les blocs diagonaux sont irréductibles.

21. Remarquons que c'est ici que le choix de la numérotation des sommets intervient. En effet, si nous avions choisi le tri topologique, alors, si  $k > \ell$  (resp.  $k < \ell$ ), la matrice  $c_{k,\ell}$  est nulle (resp. peut être non nulle). Dans ce cas, nous obtenons une matrice triangulaire supérieure comme nous l'avions annoncé à la remarque 1.3.20.

Pour obtenir la forme voulue de la matrice  $M$  de départ, il suffit de reprendre la même matrice de permutation  $P$  et d'utiliser le lemme 1.3.7 et le corollaire 1.3.8.  $\square$

**Remarque 1.3.23.** En termes de graphe, les blocs diagonaux irréductibles de  $P^{-1}MP$  correspondent aux composantes fortement connexes du graphe  $G(M)$ . Les blocs diagonaux nuls de dimension 1 de  $P^{-1}MP$  correspondent aux sommets de  $G(M)$  qui n'appartiennent à aucun cycle. En effet, les blocs diagonaux nuls de dimension 1 correspondent aux sommets isolés et sans boucle du graphe  $G(M)$ . Si un tel sommet appartient à un cycle, le cycle en question doit donc passer par d'autres composantes fortement connexes. On crée dès lors des composantes fortement connexes plus grosses, ce qui n'est pas autorisé. D'un autre côté, si le graphe  $G(M)$  possède un sommet qui n'appartient à aucun cycle, ce sommet doit être isolé et sans boucle et correspond à un bloc diagonal nul de dimension 1 dans  $P^{-1}MP$ .

Sur la diagonale de  $P^{-1}MP$ , il y a donc deux types de blocs irréductibles : les blocs nuls de dimension 1 et les blocs non nuls de dimension  $k \in \mathbb{N}_0$ . Nous avons déjà caractérisé les blocs du premier type. Les blocs du second type correspondent, quant à eux, soit à des sommets isolés avec au moins une boucle, soit à un ensemble contenant au moins deux sommets et pour lequel deux éléments quelconques parmi les siens sont fortement connectés dans  $G(M)$ .

Cependant, il est possible que la matrice d'adjacence du graphe orienté possède un bloc diagonal nul de dimension  $k \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ . Par exemple, si le graphe considéré est celui de la figure 1.4, alors sa matrice d'adjacence  $M$  est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous obtenons la forme voulue de  $M$  en prenant la matrice de permutation identité de dimension 4 et nous voyons qu'il y a effectivement un bloc nul de dimension 2 sur la diagonale de  $M$ . Dans ce cas, puisque nous souhaitons avoir des blocs diagonaux irréductibles, nous devons considérer ce bloc de dimension  $k$  comme  $k$  sous-blocs de dimension 1.

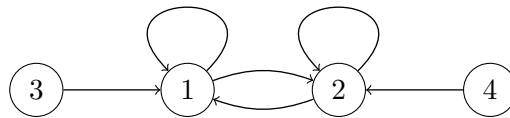


FIGURE 1.4 – Graphe ayant plusieurs sommets isolés et sans boucle.

Nous illustrons maintenant la proposition que nous venons de démontrer.

**Exemple 1.3.24.** Poursuivons l'exemple 1.3.21. En choisissant l'ordre  $C_1, C_2, C_3, C_4$  et l'ordre naturel sur  $\mathbb{N}$  au sein de chacun de ces ensembles, il existe une matrice de permutation  $P$  telle que  $P^{-1}MP$  est égal à

$$\begin{array}{l}
 C_1 \{ \\
 C_2 \{ \\
 C_3 \{ \\
 C_4 \{
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 4 \\
 2 \\
 5 \\
 1 \\
 3 \\
 6
 \end{array}
 \begin{pmatrix}
 & \overbrace{C_1} & \overbrace{C_2} & \overbrace{C_3} & \overbrace{C_4} \\
 & 4 & 2 & 5 & 7 & 1 & 3 & 6 \\
 \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & \boxed{0} & 0 & 0 & 0 & 0 \\
 0 & 0 & 0 & 1 & \boxed{0} & \boxed{2} & \boxed{1} & \\
 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\
 0 & 1 & 0 & 1 & \boxed{1} & 0 & 0 & 
 \end{pmatrix}.$$

Les blocs situés sur la diagonale sont irréductibles puisqu'ils correspondent aux matrices d'adjacence des composantes fortement connexes du graphe de départ (il s'agit du graphe de la figure 1.2). Explicitons la forme que la matrice  $P$  doit prendre. Nous savons que multiplier à gauche (resp. à droite) par une matrice de permutation échange les lignes (resp. les colonnes) selon la permutation (resp. la permutation inverse) associée à la matrice de permutation par laquelle on multiplie. Concrètement, si nous notons  $\sigma$  la permutation associée à  $P$ ,  $P^{-1}M$  échange les lignes de  $M$  selon  $\sigma^{-1}$  tandis que  $(P^{-1}M)P$  échange les colonnes de  $P^{-1}M$  selon  $\sigma^{-1}$ . Ici, nous souhaitons que l'ordre des sommets de  $G(M)$  soit le suivant : 4, 2, 5, 7, 1, 3 et 6. Par conséquent, nous devons définir  $\sigma^{-1}$  par

$$\sigma^{-1}(1) = 4, \sigma^{-1}(2) = 2, \sigma^{-1}(3) = 5, \sigma^{-1}(4) = 7, \sigma^{-1}(5) = 1, \sigma^{-1}(6) = 3 \text{ et } \sigma^{-1}(7) = 6,$$

ce qui implique que

$$\sigma(1) = 5, \sigma(2) = 2, \sigma(3) = 6, \sigma(4) = 1, \sigma(5) = 3, \sigma(6) = 7 \text{ et } \sigma(7) = 4.$$

Ainsi, nous devons choisir

$$P = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et nous pouvons vérifier, en utilisant par exemple le logiciel R ou le logiciel Sage, que  $P^{-1}MP$  a la forme précédente.

### 1.3.4 Notion de période d'une matrice irréductible

Rappelons le second but de cette section : si  $M$  est une matrice carrée positive, nous voulons montrer qu'il existe une matrice de permutation  $P$  de même dimension que  $M$  et un naturel non nul  $p$  pour lesquels  $P^{-1}M^pP$  est une matrice triangulaire inférieure par blocs où les blocs diagonaux sont soit primitifs, soit nuls de dimension 1. Comme annoncé dans l'introduction de cette section, nous allons voir que la notion de période d'une matrice irréductible joue un rôle important dans la preuve du résultat. Cette sous-section est divisée en deux parties. Nous parlons tout d'abord de la période d'une matrice irréductible au sens que nous allons tout de suite lui donner et nous illustrons la recherche de cette période. Ensuite, nous démontrons l'égalité des deux types de période, l'un donné par le théorème de Perron–Frobenius et l'autre donné dans la présente sous-section.

**Définition 1.3.25.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive. Pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ ,  $i$  est appelé *état* de  $M$ . S'il existe  $N \in \mathbb{N}_0$  pour lequel  $(M^N)_{i,i} > 0$ , la *période* de l'état  $i \in \{1, \dots, m\}$ , notée  $\text{per}(i)$ , est le plus grand commun diviseur des entiers  $n \geq 1$  pour lesquels  $(M^n)_{i,i} > 0$ . Si un tel entier  $N$  n'existe pas, alors on pose  $\text{per}(i) = \infty$ .

**Remarque 1.3.26.** Le plus grand commun diviseur d'un ensemble infini d'entiers

$$X = \{x_1 < x_2 < \dots\} \subseteq \mathbb{N}$$

est le plus grand entier  $p \in \{1, 2, \dots, x_1\}$  tel que, pour tout  $k \in \mathbb{N}_0$ ,  $p$  divise  $x_k$ .

**Remarque 1.3.27.** La définition précédente est donnée en termes de matrice, mais elle possède un équivalent en termes de graphe<sup>22</sup>. Si  $M \in \mathbb{R}_m^m$  est une matrice positive, alors on fait correspondre à  $M$  un graphe orienté  $G_M$  ayant pour ensemble de sommets les états de  $M$  et il existe un arc de

22. Cette remarque provient de la page 79 de [26].

$i \in \{1, \dots, m\}$  vers  $j \in \{1, \dots, m\}$  dans  $G_M$  si, et seulement si,  $M_{i,j} > 0$ . Par conséquent, pour trouver la période d'un état  $i \in \{1, \dots, m\}$  de  $M$ , on doit chercher le plus grand commun diviseur de l'ensemble des entiers  $n$  pour lesquels il existe au moins un cycle de longueur  $n$  passant par le sommet  $i$  dans  $G_M$ . En fait, puisque le graphe  $G_M$  peut être obtenu à partir du graphe  $G(M)$  en ne gardant qu'un arc parmi les arcs multiples (s'ils existent), nous pouvons aussi opérer la recherche de la période d'un état de  $M$  sur le graphe  $G(M)$ .

Lorsqu'une matrice est irréductible, il est possible d'en dire plus sur la période de ses états<sup>23</sup>.

**Proposition 1.3.28.** *Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive. Si  $M$  est irréductible, alors toutes les périodes  $\text{per}(i)$  avec  $i \in \{1, \dots, m\}$  sont identiques.*

Par conséquent, il est licite de parler de la période d'une matrice irréductible au sens de la définition 1.3.25. Nous pouvons dès lors donner la définition suivante.

**Définition 1.3.29.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive et irréductible. Alors  $M$  est *cyclique de période*  $p > 1$  si  $\text{per}(i) = p$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Sinon,  $\text{per}(i) = 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  et  $M$  est dit *acyclique* ou *apériodique*. Dans ce dernier cas, la période de  $M$  est 1.

**Exemple 1.3.30.** Soit  $M$  la matrice nulle de dimension  $m$ . Fixons  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Alors il n'existe aucun naturel  $n \in \mathbb{N}_0$  tel que  $(M^n)_{i,i} > 0$ . Dans ce cas, la période de n'importe quel état de  $M$  est infinie. La matrice  $M$  est irréductible uniquement lorsque  $m = 1$  et, dans ce cas, sa période est infinie.

**Exemple 1.3.31.** Considérons la matrice

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Le graphe  $G(M)$  associé à cette matrice est donné à la figure 1.5. Grâce à celui-ci, nous voyons que deux sommets sont fortement connectés et que la matrice  $M$  est par conséquent irréductible. Pour trouver la période de chaque état  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  de  $M$ , il faut regarder la longueur de chaque cycle sur ce sommet  $i$  dans  $G(M)$ . On voit que tous les cycles sont de longueur multiple de 3 et que le plus petit cycle sur chaque sommet est de longueur 3. Par conséquent,  $\text{per}(i) = 3$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3, 4, 5\}$  et  $M$  est de période  $p = 3$ .

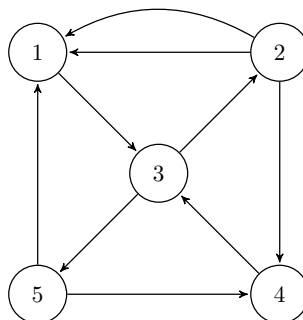


FIGURE 1.5 – Graphe  $G(M)$  associé à la matrice carrée positive  $M$ .

Nous pouvons dès lors remarquer le fait utile suivant.

23. Pour une preuve, voir par exemple [26] à la page 80.

**Remarque 1.3.32.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive et irréductible. Alors  $\lceil M \rceil$  est elle aussi irréductible par le corollaire 1.3.8 et la recherche de sa période a bien un sens. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\begin{cases} (\lceil M \rceil^n)_{i,j} = 0 \Leftrightarrow (M^n)_{i,j} = 0, \\ (\lceil M \rceil^n)_{i,j} > 0 \Leftrightarrow (M^n)_{i,j} > 0 \end{cases}$$

par le lemme 1.3.7. Par conséquent, les matrices  $M$  et  $\lceil M \rceil$  ont la même période au sens de la définition 1.3.29.

Il est alors possible de démontrer les deux résultats suivants<sup>24</sup>. Le premier résultat montre que, pour une matrice positive, irréductible de période  $p \geq 1$  et non nulle, à partir d'un certain moment, tous les multiples de  $p$  sont rencontrés comme longueur de cycle sur un sommet dans le graphe correspondant à la matrice en question. Le second caractérise la période des matrices primitives.

**Proposition 1.3.33.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive, irréductible de période  $p \geq 1$  au sens de la définition 1.3.29 et différente de  $(0)_{1 \times 1}$ . Pour tout état  $i \in \{1, \dots, m\}$  de  $M$ , il existe un entier  $N_i \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N_i$ ,  $(M^{np})_{i,i} > 0$ .

**Proposition 1.3.34.** Une matrice positive irréductible est acyclique si, et seulement si, elle est primitive.

À ce stade, le lecteur peut se demander si les deux notions de période, celle donnée par le théorème de Perron–Frobenius et celle définie précédemment, coïncident. En fait, elles sont heureusement égales comme nous allons le montrer un peu plus loin. Avant de pouvoir affirmer qu'elles le sont, nous établissons deux lemmes.

**Lemme 1.3.35.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive, irréductible de période  $p \geq 1$  au sens de la définition 1.3.29 et différente de  $(0)_{1 \times 1}$ . À une matrice de permutation près,  $M$  peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} 0 & B_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{p-2} \\ B_{p-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

où les blocs  $B_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  sont des matrices positives (pas forcément carrées), de dimension adéquate et non nulles.

*Démonstration.* Si  $p = 1$ , le lemme est démontré. Nous pouvons donc supposer ne pas être dans ce cas. En particulier, il ne peut pas exister de boucle au sein du graphe  $G(M)$ . Puisque la matrice  $M$  est irréductible, on sait qu'il existe un chemin dans  $G(M)$  entre le sommet<sup>25</sup> 1 et le sommet  $j \in \{1, \dots, m\}$  et ce, pour tout  $j$ . Pour tout sommet  $j \in \{1, \dots, m\}$ , considérons un chemin liant 1 à  $j$  de longueur minimale<sup>26</sup> dans  $G(M)$  et notons  $k_j$  cette longueur. Considérons alors les ensembles<sup>27</sup>

$$C_0 = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid k_j \equiv 0 \pmod{p}\}, \dots, C_{p-1} = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid k_j \equiv p-1 \pmod{p}\}.$$

Nous allons tout d'abord montrer que ces ensembles forment une partition de  $\{1, \dots, m\}$ .

24. Voir [26] aux pages 81 et 82.

25. Il peut sembler que le sommet 1 joue un rôle particulier dans cette preuve, mais il n'en est rien. En effet, le lemme 1.4 à la page 19 de [31] stipule que les ensembles obtenus ne dépendent pas du choix du sommet initial et que le choix d'un autre sommet initial permute l'ordre des ensembles. Voir l'annexe A pour s'en convaincre.

26. Un algorithme permettant de trouver efficacement les plus courts chemins est celui de Dijkstra : voir [26] à la page 25. Il est possible d'obtenir plusieurs chemins de longueur minimale. Dans ce cas, nous en choisissons un.

27. Dans [31], l'auteur donne une autre définition des ensembles  $C_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . Elle est basée sur le troisième point du théorème de Perron–Frobenius. Comme nous n'avons pas encore démontré l'équivalence entre les deux notions de période, nous préférons la caractérisation donnée ici.

**Les ensembles  $C_r$  sont deux à deux disjoints.** Pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $k_j$  est unique et il existe un unique  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  tel que  $k_j \equiv r \pmod{p}$ , i.e.  $j \in C_r$ .

**Les ensembles  $C_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  sont tous non vides.** Nous savons déjà que  $C_0 \neq \emptyset$  puisque  $1 \in C_0$ . Nous avons

$$\begin{aligned} M \text{ irréductible} &\Leftrightarrow [M] \text{ irréductible} \Leftrightarrow \underbrace{G([M])}_{=G(M) \text{ par déf.}} \text{ est fortement connexe} \\ &\Leftrightarrow G(M) \text{ est fortement connexe} \end{aligned}$$

où la deuxième équivalence est obtenue parce que  $[M]$  est à coefficients naturels. Puisque  $G(M)$  est fortement connexe<sup>28</sup>, nous savons qu'il existe un cycle dans  $G(M)$  passant par chaque sommet de  $G(M)$ . Considérons maintenant un cycle sur 1 dans  $G(M)$  de longueur strictement positive et minimale. Par définition de la période, nous savons que ce cycle est de longueur  $np$  pour  $n \in \mathbb{N}_0$  et donc au moins de longueur  $p$ . Par minimalité de la longueur du cycle, il passe par  $np$  sommets différents. En effet, si un sommet se répète dans le cycle, on peut alors trouver un cycle plus court sur 1 dans  $G(M)$ , ce qui contredit la minimalité du premier cycle. En empruntant ce cycle, nous pouvons trouver un sommet  $j_1 \in \{2, \dots, m\}$  qui se trouve à distance 1 du sommet 1. Ensuite, nous pouvons trouver un sommet  $j_2 \in \{2, \dots, m\}$  avec  $j_2 \neq j_1$  qui se trouve à distance 2 de 1. En continuant de la sorte et puisque  $np \geq p$ , nous pouvons trouver  $p$  sommets deux à deux distincts qui se situent à distance respective  $0, 1, \dots, p-1$  de 1. On en tire alors que  $C_r \neq \emptyset$  pour tout  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ .

**Partition.** Avec les deux points précédents, nous sommes en mesure d'affirmer que les ensembles  $C_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  forment une partition de l'ensemble  $\{1, \dots, m\}$ .

**Arc entre deux ensembles  $C_r$  et  $C_{r'}$ .** Nous allons maintenant montrer que, s'il existe un arc entre les ensembles  $C_r$  et  $C_{r'}$  avec  $r, r' \in \{0, \dots, p-1\}$  dans  $G(M)$ , i.e. s'il existe  $i \in C_r$  et  $j \in C_{r'}$  tels que  $i$  est lié à  $j$  par un arc dans  $G(M)$ , alors  $r' \equiv r+1 \pmod{p}$ . Supposons que de tels  $i, j$  existent. Puisque  $M$  est irréductible, nous savons qu'il existe un chemin de  $j$  vers 1 dans  $G(M)$ . Notons-le  $c$  et  $k$  sa longueur. Puisque  $j \in C_{r'}$ , nous savons que 1 est lié à  $j$  par un chemin  $c'$  de longueur  $k_j$  dans  $G(M)$ . La situation est décrite<sup>29</sup> à la figure 1.6a.

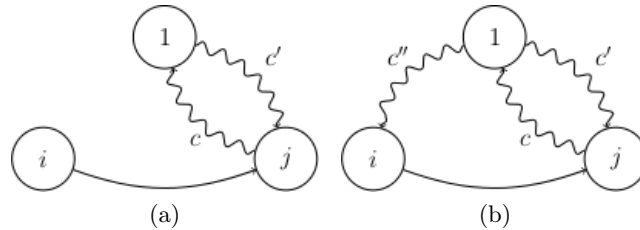


FIGURE 1.6 – Arc entre deux ensembles  $C_r$  et  $C_{r'}$ .

Par conséquent, en empruntant le chemin  $c'$  suivi du chemin  $c$ , on obtient un cycle de longueur  $k_j + k$  sur 1 dans  $G(M)$ . Par définition de la période, on en tire que

$$k + k_j \equiv 0 \pmod{p} \quad \Rightarrow \quad k \equiv -r' \pmod{p}.$$

Maintenant, comme  $i \in C_r$ , nous savons qu'il existe un chemin  $c''$  de longueur  $k_i$  de 1 vers  $i$  dans  $G(M)$ . Cette situation est illustrée à la figure 1.6b. En empruntant le chemin  $c''$ , puis l'arc de  $i$  vers

28. Les sommets appartenant à un cycle maximal, i.e. un cycle auquel on ne peut adjoindre de nouveaux sommets, constituent une composante f. connexe. Ainsi, un multi-graphe orienté  $G$  est f. connexe si, et seulement si, il existe un cycle passant par chaque sommet de celui-ci. Consulter la page 24 de [26].

29. Nous prenons la convention suivante dans tout ce travail : les arcs sont représentés par des flèches classiques, alors que les chemins de longueur plus grande ou égale à 2 sont symbolisés par des flèches ondulées.

$j$  et enfin le chemin  $c$ , nous obtenons un cycle de longueur  $k_i + 1 + k$  sur 1 dans  $G(M)$ . En utilisant encore une fois la définition de la période, on voit que

$$k_i + 1 + k \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow r + 1 - r' \equiv 0 \pmod{p} \Rightarrow r' \equiv r + 1 \pmod{p}.$$

**Conclusion.** En choisissant l'ordre naturel sur  $\mathbb{N}$  au sein de chaque ensemble  $C_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ , alors nous pouvons réarranger les sommets  $1, \dots, m$  de  $G(M)$  selon l'ordre  $C_0, \dots, C_{p-1}$  de sorte qu'il ne peut exister d'arcs que de  $C_r$  vers  $C_{r+1}$  pour  $r \in \{0, \dots, p-2\}$  et de  $C_{p-1}$  vers  $C_0$  dans  $G(M)$ . Par conséquent, il existe une matrice de permutation  $P$  telle que

$$P^{-1}[M]P = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & C_2 & \cdots & C_{p-1} \\ 0 & B'_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B'_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B'_{p-2} \\ B'_{p-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{p-2} \\ C_{p-1} \end{matrix}$$

où les blocs  $B'_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  sont des matrices naturelles (pas forcément carrées), de dimension adéquate et non nulles. Si un des blocs  $B'_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  est nul, alors la « grosse » ligne  $r$  correspondant à ce bloc  $B'_r$  dans la matrice  $P^{-1}[M]P$  est nulle. Cela signifie que les sommets de  $C_r$  ne sont liés à aucun autre sommet de  $G(M)$  et la matrice  $[M]$  n'a aucune chance d'être irréductible, ce qui contredit l'hypothèse. En ce qui concerne la matrice  $M$  de départ, il suffit de reprendre la même matrice de permutation  $P$ .  $\square$

Illustrons ce lemme.

**Exemple 1.3.36.** Reprenons l'exemple 1.3.31. Puisque  $p = 3$ , nous devons déterminer les ensembles  $C_0, C_1, C_2$ . Tout d'abord, par définition,  $1 \in C_0$ . Puisque 1 est lié à 3 par un arc,  $k_3 = 1$  et donc  $3 \in C_1$ . Ensuite, puisque 1 est lié à 2 et à 5 par un chemin de longueur 2,  $k_2 = k_5 = 2$  et donc  $2, 5 \in C_2$ . Enfin, on voit que 1 est lié à 4 par un chemin de longueur 3. Ainsi,  $k_4 = 3$  et  $4 \in C_0$ . Au total,  $C_0 = \{1, 4\}$ ,  $C_1 = \{3\}$  et  $C_2 = \{2, 5\}$ . Par conséquent, si nous choisissons l'ordre  $C_0, C_1, C_2$  et l'ordre naturel sur  $\mathbb{N}$  au sein de chacun de ces ensembles, nous permutons simplement 2 et 4. En prenant comme matrice de permutation la matrice

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

alors la matrice  $P^{-1}MP$  est égale à

$$\begin{matrix} & & \underbrace{C_0} & \underbrace{C_1} & \underbrace{C_2} \\ & & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ C_0 \left\{ \begin{array}{l} 1 \\ 4 \end{array} \right. & \left( \begin{array}{cccccc} 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boxed{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boxed{1} & \boxed{1} \\ \boxed{2} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \\ \boxed{1} & \boxed{1} & 0 & 0 & 0 \end{array} \right) \\ C_1 \left\{ \begin{array}{l} 3 \end{array} \right. & \\ C_2 \left\{ \begin{array}{l} 2 \\ 5 \end{array} \right. & \end{matrix}$$

et a bien la forme prescrite par le lemme précédent avec les blocs positifs non nuls<sup>30</sup>

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B_1 = (1 \ 1) \text{ et } B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

30. Ici, les blocs sont même strictement positifs, mais ce n'est pas toujours le cas. Voir l'exemple à la page 20 de [31].



Nous établissons maintenant le second lemme utile pour conclure à l'égalité des périodes.

**Lemme 1.3.37.** *Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive, irréductible de période  $p \geq 1$  au sens de la définition 1.3.29 et différente de  $(0)_{1 \times 1}$ . À une matrice de permutation près,  $M^p$  est une matrice diagonale par blocs et ces blocs sont des matrices carrées primitives<sup>31</sup>.*

*Démonstration.* Tout d'abord, si  $p = 1$ , le lemme est démontré puisque la matrice irréductible est en fait primitive par la proposition 1.3.34. Nous pouvons donc supposer que  $p > 1$ . Reprenons ensuite les notations de la preuve du lemme 1.3.35. Nous savons que les ensembles

$$C_0 = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid k_j \equiv 0 \pmod{p}\}, \dots, C_{p-1} = \{j \in \{1, \dots, m\} \mid k_j \equiv p-1 \pmod{p}\}.$$

sont tous non vides, disjoints deux à deux et forment une partition de l'ensemble  $\{1, \dots, m\}$ . Nous montrons tout d'abord trois résultats qui permettent d'obtenir la forme matricielle souhaitée pour la matrice plafond. La dernière partie de la preuve consiste à montrer que nous avons aussi cette forme pour la matrice  $M$  de départ.

**Longueur des chemins entre le sommet 1 et un sommet de  $C_r$ .** Si  $j \in C_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ , alors toutes les longueurs des chemins dans  $G(M)$  joignant 1 à  $j$  sont congrues à  $r$  modulo  $p$ . En effet, supposons disposer d'un chemin de 1 vers  $j$  (il en existe au moins un puisque  $M$  est irréductible). Notons-le  $c$  et  $k$  sa longueur. Comme  $M$  est irréductible, on sait qu'il existe un chemin liant  $j$  à 1 dans  $G(M)$ . Notons-le  $c'$  et  $k'$  sa longueur. La situation envisagée est reprise à la figure 1.7. Grâce à la preuve du lemme 1.3.35, nous savons que  $k' \equiv -r \pmod{p}$ . En empruntant le cycle sur 1 construit sur les chemins  $c$  et  $c'$  dans  $G(M)$ , on obtient  $k + k' \equiv 0 \pmod{p}$  par définition de la période, ce qui implique que  $k \equiv -(-r) \pmod{p}$ .

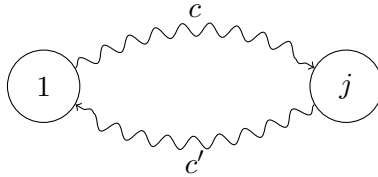


FIGURE 1.7 – Chemins entre les sommets 1 et  $j$ .

**Longueur des chemins au sein d'un ensemble  $C_r$ .** Nous allons maintenant montrer qu'au sein de chaque ensemble  $C_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ , les sommets sont liés par des chemins de longueur multiple de  $p$  dans  $G(M)$ . Fixons  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . Soient  $i, j \in C_r$ . Par irréductibilité de  $M$ , on sait qu'il existe au moins un chemin de  $i$  vers  $j$  dans  $G(M)$ . Notons-le  $c$  et  $k$  sa longueur. Dans  $G(M)$ , considérons un chemin  $c'$  joignant 1 à  $i$  dont la longueur est égale à  $k_i$ . La situation dont nous parlons est donnée à la figure 1.8. Le chemin construit sur  $c'$  et  $c$  joignant 1 à  $j$  et passant par  $i$  est de longueur  $k + k_i$ . Par le paragraphe précédent et puisque  $j \in C_r$ ,  $k + r \equiv r \pmod{p}$ . Ceci montre que  $k$  est un multiple de  $p$ .

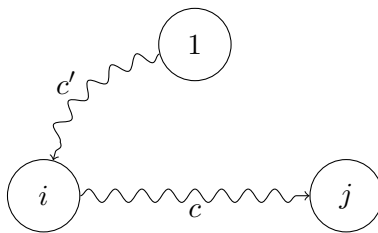


FIGURE 1.8 – Chemins entre les sommets 1,  $i$  et  $j$ .

31. En fait, nous pouvons en dire un peu plus sur les blocs primitifs diagonaux : ils sont obtenus comme une permutation cyclique des facteurs du produit  $B_0 \cdots B_{p-1}$  où les blocs  $B_r$ ,  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  sont les blocs du lemme 1.3.35. Ceci est expliqué dans l'annexe A.

**Chemins de longueur multiple de  $p$  entre deux ensembles  $C_r$  et  $C_{r'}$  distincts.** Établissons qu'il n'y a pas de chemin de longueur multiple de  $p$  entre deux ensembles distincts dans  $G(M)$ . Soient  $r, r' \in \{0, \dots, p-1\}$  avec  $r \neq r'$ . Prenons  $i \in C_r$  et  $j \in C_{r'}$ . Supposons qu'il existe un chemin  $c$  de longueur  $k = np$  avec  $n \in \mathbb{N}$  liant  $i$  à  $j$  dans  $G(M)$ . Considérons un chemin  $c'$  de longueur  $k_i$  joignant 1 à  $i$  dans  $G(M)$ . En fait, il s'agit de la même situation que celle décrite à la figure 1.8. En empruntant  $c'$  suivi de  $c$ , nous trouvons un chemin joignant 1 à  $j$  et passant par  $i$  de longueur  $k_i + np$  dans  $G(M)$ . Comme  $j \in C_{r'}$ , nous savons que  $r + np \equiv r' \pmod{p}$ , ce qui est impossible.

**Forme matricielle diagonale par blocs pour la matrice plafond.** En ne considérant maintenant plus que les chemins de longueur  $p$  dans  $G(M)$ , nous obtenons un nouveau graphe orienté  $G$  dont la matrice d'adjacence est  $\lceil M \rceil^p$ . En fait, nous savons que  $(\lceil M \rceil^p)_{i,j}$  compte exactement le nombre de chemins de longueur  $p$  dans  $G(M)$  de  $i$  vers  $j$  pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . De plus, si  $i$  est lié à  $j$  par un chemin de longueur  $np$  avec  $n \in \mathbb{N}$  dans  $G(M)$ , alors  $i$  est lié à  $j$  par un chemin de longueur  $n$  dans  $G$ . Grâce au paragraphe précédent, nous voyons que deux sommets appartenant à des ensembles  $C_r$  différents avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  ne peuvent être liés par un arc dans  $G$ , i.e. il n'existe pas de chemin de longueur  $p$  dans  $G(M)$  entre deux sommets appartenant à des ensembles  $C_r$  différents avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . Par conséquent, s'il existe un arc entre deux sommets  $i$  et  $j$  dans  $G$ , ces deux sommets appartiennent forcément au même ensemble  $C_r$ ,  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ .

Ainsi, si nous réarrangeons les sommets de  $G(M)$  selon l'ordre  $C_0, \dots, C_{p-1}$  en prenant l'ordre naturel sur  $\mathbb{N}$  dans chacun de ces ensembles, il existe une matrice de permutation  $P$  telle que

$$P^{-1} \lceil M \rceil^p P = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{p-1} \\ L'_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L'_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L'_{p-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{p-1} \end{matrix}$$

où les blocs  $L'_r$ ,  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ , sont des matrices naturelles de dimension  $\#C_r$  telles que  $(L'_r)_{i,j} = (\lceil M \rceil^p)_{i,j} = n \in \mathbb{N}$  pour  $i, j \in C_r$  si, et seulement si, il a y  $n$  chemins différents de longueur  $p$  de  $i$  vers  $j$  dans  $G(M)$ .

Nous allons maintenant montrer que les blocs  $L'_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  sont primitifs. Fixons  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . Procédons en deux temps et montrons tout d'abord que  $L'_r$  est irréductible. Soient  $i, j \in C_r$ . Nous devons trouver un entier  $k \in \mathbb{N}$  tel que  $((L'_r)^k)_{i,j} > 0$ . On a

$$((L'_r)^k)_{i,j} = ((\lceil M \rceil^p)^k)_{i,j}$$

pour tout  $k \in \mathbb{N}$ . Comme  $M$  est irréductible, on sait qu'il existe au moins un chemin dans  $G(M)$  de  $i$  vers  $j$ . Comme  $i, j \in C_r$ , nous avons montré au troisième paragraphe de cette preuve que ce chemin est de longueur multiple de  $p$ , disons de longueur  $np$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . Par conséquent, pour ce naturel  $n$ , on a

$$((L'_r)^n)_{i,j} = ((\lceil M \rceil^p)^n)_{i,j} = (\lceil M \rceil^{np})_{i,j} > 0.$$

On en conclut que  $k = n$  convient et que  $L'_r$  est irréductible. Démontrons maintenant que la période de cette matrice est égale à 1 car alors, vu la proposition 1.3.34, on sait que  $L'_r$  est primitif. Soit  $i \in C_r$ . Comme la période de  $M$  est  $p$ , celle de  $\lceil M \rceil$  est aussi  $p$  grâce à la remarque 1.3.32. Dans ce cas, par la proposition 1.3.33, nous savons qu'il existe  $N_i \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N_i$ ,

$$((L'_r)^n)_{i,i} = ((\lceil M \rceil^p)^n)_{i,i} > 0.$$

Donc, il existe  $\ell \geq N_i$  tel que

$$((L'_r)^\ell)_{i,i} > 0 \text{ et } ((L'_r)^{\ell+1})_{i,i} > 0.$$

La période de chaque état  $i \in C_r$  est égale à 1 puisque  $\text{pgcd}\{\ell, \ell + 1\} = 1$ . On en déduit que  $L'_r$  est de période 1. Au total, nous avons démontré qu'à la matrice de permutation  $P$  près,  $\lceil M \rceil^p$  est une matrice diagonale par blocs primitifs.

**Forme matricielle diagonale par blocs pour la matrice de départ.** Si  $M$  est à coefficients naturels, la preuve se termine puisque  $\lceil M \rceil = M$ . Par contre, si  $M$  n'est pas à coefficients naturels, nous devons encore démontrer que  $P^{-1}M^pP$  a la forme attendue. Notons  $\sigma$  la permutation associée à la matrice  $P$ . Grâce au lemme 1.3.7, nous savons que, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$(P^{-1}\lceil M \rceil^pP)_{i,j} = (\lceil M \rceil^p)_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)} = 0 \Leftrightarrow (P^{-1}M^pP)_{i,j} = (M^p)_{\sigma^{-1}(i),\sigma^{-1}(j)} = 0.$$

Par conséquent,  $P^{-1}\lceil M \rceil^pP$  et  $P^{-1}M^pP$  ont la même forme, à savoir

$$P^{-1}M^pP = \begin{pmatrix} C_0 & C_1 & \cdots & C_{p-1} \\ L_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & L_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & L_{p-1} \end{pmatrix} \begin{matrix} C_0 \\ C_1 \\ \vdots \\ C_{p-1} \end{matrix}$$

où les matrices  $L_r, r \in \{0, \dots, p-1\}$ , sont des matrices carrées positives. Pour achever la preuve, il reste à démontrer que les matrices  $L_r, r \in \{0, \dots, p-1\}$ , sont primitives. Pour cela, il suffit de procéder en deux temps comme précédemment : on fixe  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  et on peut montrer que  $L_r$  est irréductible en utilisant le lemme 1.3.7, puis on prouve que la période de  $L_r$  est 1.  $\square$

**Remarque 1.3.38.** Reprenons les notations de la preuve du lemme précédent. Nous affirmons que les longueurs des chemins dans  $G(M)$  liant un ensemble  $C_r$  à un autre ensemble  $C_{r'}$  avec  $r, r' \in \{0, \dots, p-1\}$  et  $r \neq r'$  sont congrues à  $r' - r$  modulo  $p$ . En effet, soient  $r, r' \in \{0, \dots, p-1\}$  avec  $r \neq r'$  et  $i \in C_r$  et  $j \in C_{r'}$ . Notons  $c$  un chemin de longueur  $k_i$  liant 1 à  $i$  dans  $G(M)$ . Puisque  $M$  est irréductible, nous savons qu'il existe au moins un chemin de  $i$  vers  $j$  dans  $G(M)$ . Notons-le  $c'$  et  $k$  sa longueur. Nous savons aussi qu'il existe un chemin  $c''$  de  $j$  vers 1 dans  $G(M)$  et que sa longueur est congrue à  $-r'$  modulo  $p$ . Cette situation est donnée à la figure 1.9. Nous créons un cycle sur 1 dans  $G(M)$  et, par définition de la période, nous en tirons que  $k \equiv r' - r \pmod{p}$ .

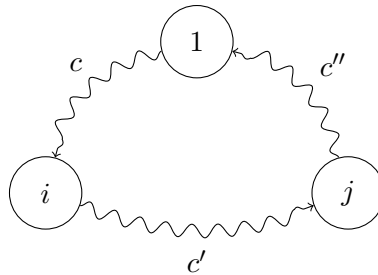


FIGURE 1.9 – Chemins entre les sommets 1,  $i$  et  $j$ .

Illustrons le lemme précédent.

**Exemple 1.3.39.** Continuons l'exemple 1.3.36. La matrice  $P^{-1}M^3P$  est égale à

$$\begin{matrix} & & \overbrace{C_0} & \overbrace{C_1} & \overbrace{C_2} \\ & & 1 & 4 & 3 & 2 & 5 \\ C_0 \left\{ \right. & 1 & \left( \begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 3 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 2 & 2 \end{array} \right) \\ C_1 \left\{ \right. & 3 & & & & & \\ C_2 \left\{ \right. & 2 & & & & & \\ & 5 & & & & & \end{matrix}$$

et le graphe associé à  $M^3$  est donné par la figure 1.10. Nous voyons que  $P^{-1}M^3P$  est bien une matrice diagonale par blocs primitifs, conformément au lemme 1.3.37.

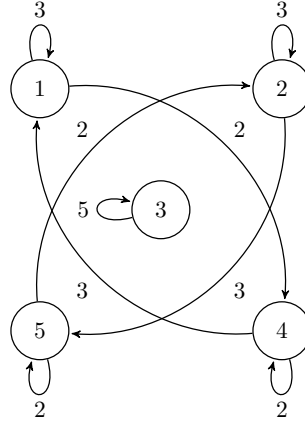


FIGURE 1.10 – Graphe  $G(M^3)$  associé à la matrice carrée positive  $M^3$ .

Nous sommes enfin prêts à démontrer l'égalité des deux notions de période<sup>32</sup>.

**Proposition 1.3.40.** *Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive et irréductible. Alors les deux notions de période coïncident, i.e.  $p_M = p$  si nous notons  $p_M$  la période de Perron–Frobenius de  $M$  et  $p$  la période au sens de la définition 1.3.29.*

*Démonstration.* Si  $M = (0)_{1 \times 1}$ , alors les deux notions de période coïncident par définition. Si  $M$  est primitif, nous savons que  $p = 1 = p_M$  par le théorème de Perron–Frobenius. Nous pouvons donc supposer que  $M \neq (0)_{1 \times 1}$  et que  $M$  n'est pas primitif.

**Propriété intermédiaire.** L'entier  $p_M$  est le plus petit naturel  $n$  non nul vérifiant la propriété  $\mathcal{P}(n)$  suivante : toute valeur propre de  $M^n$  différente de  $\rho(M)^n$  est de module strictement inférieur à  $\rho(M)^n$ . Montrons tout d'abord que  $\mathcal{P}(p_M)$  est vrai. Par le théorème de Perron–Frobenius, nous savons que les valeurs propres de  $M$  de module maximal égal à  $\rho(M)$  sont exactement les complexes

$$\rho(M) e^{\frac{2ir\pi}{p_M}} \quad (1.6)$$

avec  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ . Par un résultat d'algèbre linéaire, nous savons également que les valeurs propres d'une puissance naturelle d'une matrice carrée sont exactement les puissances correspondantes des valeurs propres de la matrice de départ<sup>33</sup>. Si  $\beta$  est une valeur propre de  $M^{p_M}$ , alors il existe une valeur propre  $\alpha$  de  $M$  telle que  $\beta = \alpha^{p_M}$ . Il y a maintenant deux possibilités pour le module de cette dernière valeur propre :  $|\alpha| = \rho(M)$  ou  $|\alpha| < \rho(M)$ . Dans le premier cas, la valeur propre  $\alpha$  s'écrit sous la forme (1.6) pour un naturel  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$  et  $\beta = \alpha^{p_M} = \rho(M)^{p_M}$ . On voit donc que chaque valeur propre du type (1.6) avec  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$  ne donne qu'une seule valeur propre (réelle) pour  $M^{p_M}$ , à savoir  $\rho(M)^{p_M}$ . Dans le second cas, nous avons

$$|\alpha| < \rho(M) \Rightarrow |\alpha|^{p_M} < \rho(M)^{p_M} \Rightarrow |\alpha^{p_M}| < \rho(M)^{p_M} \Rightarrow |\beta| < \rho(M)^{p_M}.$$

On en conclut que  $M^{p_M}$  possède une unique valeur propre (réelle) de module maximal, à savoir  $\rho(M)^{p_M}$ , et que  $\mathcal{P}(p_M)$  est vrai. Nous affirmons maintenant que  $p_M$  est le plus petit naturel  $n$  non nul ayant cette propriété. En effet, procédons par l'absurde et supposons qu'il existe  $n \in \mathbb{N}_0$  pour lequel  $\mathcal{P}(n)$  est vrai et tel que  $n < p_M$ . Comme  $p_M > 1$ , nous savons que  $\rho(M) e^{\frac{2ir\pi}{p_M}}$  est une valeur propre de  $M$  par le théorème de Perron–Frobenius. Par conséquent,  $\rho(M)^n$  et  $\rho(M)^n e^{\frac{2in\pi}{p_M}}$  sont

32. La démonstration de ce résultat est inspirée de [28].

33. Voir [23] à la page 234.

deux complexes distincts, tous deux valeurs propres de  $M^n$  et de même module. Dans ce cas,  $\mathcal{P}(n)$  est mis en défaut, d'où une contradiction.

**Nous avons  $p_M \leq p$ .** Nous montrons tout d'abord que  $\mathcal{P}(p)$  est vrai. Par le lemme 1.3.37, nous savons qu'il existe une matrice de permutation  $P$  telle que  $P^{-1}M^pP = \text{diag}(R_0, \dots, R_{p-1})$  où les  $p$  blocs diagonaux sont des matrices primitives. Par la proposition 1.2.4, nous savons que

$$\text{Spec}(M^p) = \text{Spec}(P^{-1}M^pP) = \bigcup_{j=0}^{p-1} \text{Spec}(R_j).$$

Par conséquent,  $\rho(M)^p = \max_{0 \leq j \leq p-1} \rho(R_j)$ . Maintenant, si  $\beta$  est une valeur propre de  $M^p$  différente de  $\rho(M)^p$ , il existe  $k \in \{0, \dots, p-1\}$  tel que  $\beta \in \text{Spec}(R_k)$ .

(i) Si  $\rho(R_k) < \max_{0 \leq j \leq p-1} \rho(R_j)$ , nous avons

$$|\beta| \leq \rho(R_k) < \max_{0 \leq j \leq p-1} \rho(R_j) = \rho(M)^p.$$

(ii) Si  $\rho(R_k) = \max_{0 \leq j \leq p-1} \rho(R_j)$ , le théorème de Perron–Frobenius affirme aussi que

$$|\beta| < \rho(R_k) = \max_{0 \leq j \leq p-1} \rho(R_j) = \rho(M)^p.$$

Ainsi,  $\mathcal{P}(p)$  est vrai. Vu la minimalité de  $p_M$  établie plus haut, on en conclut que  $p_M \leq p$ .

**Nous avons  $p_M \geq p$ .** Soit  $P$  une matrice de permutation de dimension  $m$  telle que  $P^{-1}MP$  a la forme prescrite par le lemme 1.3.35. Soient  $\alpha \in \text{Spec}(P^{-1}MP)$  et  $\vec{x}$  un vecteur propre non nul de valeur propre  $\alpha$  de  $P^{-1}MP$ . Ce vecteur peut être cassé en  $p$  sous-vecteurs  $\vec{x}_0, \dots, \vec{x}_{p-1}$  de sorte que, pour tout  $j \in \{0, \dots, p-1\}$ ,  $\vec{x}_j$  est de dimension  $\#C_j \times 1$  où l'ensemble  $C_j$  provient du lemme 1.3.35. Vu la forme particulière de  $P^{-1}MP$  donnée dans ce lemme et puisque  $(P^{-1}MP)\vec{x} = \alpha\vec{x}$ ,

$$B_{j-1}\vec{x}_j = \alpha\vec{x}_{j-1} \text{ pour tout } j \in \{1, \dots, p-1\} \text{ et } B_{p-1}\vec{x}_0 = \alpha\vec{x}_{p-1}.$$

Maintenant, considérons le vecteur  $\vec{y}$  défini à partir du vecteur  $\vec{x}$  en remplaçant  $\vec{x}_j$  par  $e^{\frac{2ij\pi}{p}}\vec{x}_j$  pour tout  $j \in \{0, \dots, p-1\}$ . Comme  $\vec{x}$  est non nul,  $\vec{y}$  l'est aussi et nous obtenons

$$(P^{-1}MP)\vec{y} = e^{\frac{2i\pi}{p}}\alpha\vec{y}$$

puisque, pour tout  $j \in \{1, \dots, p-1\}$ , nous avons

$$B_{j-1}e^{\frac{2ij\pi}{p}}\vec{x}_j = e^{\frac{2ij\pi}{p}}(B_{j-1}\vec{x}_j) = e^{\frac{2ij\pi}{p}}\alpha\vec{x}_{j-1} = e^{\frac{2i\pi}{p}}\alpha e^{\frac{2i(j-1)\pi}{p}}\vec{x}_{j-1}$$

et

$$B_{p-1}\vec{x}_0 = \alpha\vec{x}_{p-1} = e^{\frac{2i\pi}{p}}\alpha e^{\frac{2i(p-1)\pi}{p}}\vec{x}_{p-1}.$$

On en déduit que  $e^{\frac{2i\pi}{p}}\alpha$  est une valeur propre de  $P^{-1}MP$ . Ainsi, pour n'importe quelle valeur propre  $\alpha \in \mathbb{C}$  de  $P^{-1}MP$ , les complexes  $\alpha e^{\frac{2ir\pi}{p}}$  sont encore valeurs propres de  $P^{-1}MP$  pour tout  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . Grâce à la proposition 1.2.4, nous en tirons que, pour toute valeur propre  $\alpha \in \mathbb{C}$  d'une matrice irréductible  $M$  de période  $p$ , les complexes  $\alpha e^{\frac{2ir\pi}{p}}$  sont encore valeurs propres de  $M$  pour tout  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . Par conséquent, l'ensemble des valeurs propres de  $M$  est invariant sous la transformation complexe  $z \rightarrow z e^{\frac{2i\pi}{p}}$ . Or le théorème de Perron–Frobenius affirme que  $M$  possède exactement  $p_M$  valeurs propres de module maximal égal à  $\rho(M)$ . Par conséquent,  $p_M \geq p$ .  $\square$

### 1.3.5 Seconde forme pour les matrices carrées positives

Avant de pouvoir passer à la seconde proposition énoncée dans l'introduction de cette section, nous avons besoin du lemme suivant.

**Lemme 1.3.41.** *Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive. Si  $M$  est primitif, alors  $M^n$  est primitif pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $M$  est primitif et considérons  $n \in \mathbb{N}_0$ . Par la proposition 1.2.13, il existe  $N \in \mathbb{N}_0$  tel que  $M^k > 0$  pour tout  $k \geq N$ . Puisque  $nN \geq N > 0$ , on en déduit que  $(M^n)^N = M^{nN} > 0$ .  $\square$

Nous pouvons passer à la preuve du second résultat annoncé dans l'introduction de cette section. Comme nous allons le voir, il permet, en un sens, d'étendre la notion de période aux matrices réductibles.

**Proposition 1.3.42.** *Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive. Alors il existe une matrice de permutation  $P$  de dimension  $m$  et un entier  $p$  strictement positif tels que  $P^{-1}M^pP$  est une matrice triangulaire inférieure par blocs où les blocs diagonaux sont soit primitifs, soit nuls de dimension 1.*

*Démonstration.* On distingue trois cas selon la nature de la matrice  $M$ .

**Cas de la matrice nulle de dimension 1.** Si  $M = (0)_{1 \times 1}$ , le résultat est vérifié pour tout  $p \in \mathbb{N}_0$  et l'unique matrice de permutation de dimension 1 est l'identité  $(1)_{1 \times 1}$ . Dans ce cas, la matrice  $M^p$  ne comporte qu'un seul bloc nul de dimension 1 (sur sa diagonale).

**Cas d'une matrice irréductible non nulle.** Si  $M$  est une matrice irréductible différente de  $(0)_{1 \times 1}$ , alors le lemme 1.3.37 permet de conclure en prenant pour  $p \in \mathbb{N}_0$  la période de  $M$ . Remarquons, dans ce cas, que nous avons une matrice diagonale par blocs primitifs.

**Cas d'une matrice réductible.** Si  $M$  est réductible, nous savons, par la proposition 1.3.22, qu'il existe une matrice de permutation  $P$  de dimension  $m$  telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & M_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & M_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & M_s \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux  $M_1, \dots, M_s$  sont des matrices carrées irréductibles. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$P^{-1}M^nP = (P^{-1}MP)^n = \begin{pmatrix} M_1^n & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & M_2^n & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & M_3^n & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & M_s^n \end{pmatrix}.$$

Si  $M_1 = \dots = M_s = (0)_{1 \times 1}$ , alors il est clair que les blocs  $(M_1)^n, \dots, (M_s)^n$  sont eux aussi nuls de dimension 1 pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ . En particulier, en prenant comme matrice de permutation la matrice  $P$ , nous avons le résultat annoncé dans l'énoncé pour tout  $p \in \mathbb{N}_0$ .

Nous pouvons donc supposer qu'il existe au moins un bloc diagonal irréductible différent de  $(0)_{1 \times 1}$ . Pour chaque bloc  $M_i \neq (0)_{1 \times 1}$  irréductible avec  $i \in \{1, \dots, s\}$ , nous notons  $p_{M_i}$  la période de la matrice  $M_i$ . Par le lemme 1.3.37, nous savons qu'il existe une matrice de permutation  $P_i$  de dimension égale à celle de la matrice  $M_i$  telle que la matrice  $P_i^{-1}(M_i)^{p_{M_i}}P_i$  est une matrice diagonale par blocs primitifs. Considérons un entier  $p$  non nul et multiple de chacune des périodes définies précédemment, par exemple le plus petit commun multiple de celles-ci. Dans ce cas, si  $M_i$  est un bloc irréductible différent de  $(0)_{1 \times 1}$  avec  $i \in \{1, \dots, s\}$ , alors, en utilisant le lemme 1.3.41,

nous savons que  $P_i^{-1}(M_i)^p P_i$  est une matrice diagonale par blocs primitifs. Définissons une nouvelle matrice de permutation  $P'$  de dimension  $m$  par

$$P' = \begin{pmatrix} P'_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & P'_2 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & P'_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & P'_s \end{pmatrix}$$

où

$$P'_i = \begin{cases} P_i & \text{si } M_i \text{ est un bloc irréductible différent de } (0)_{1 \times 1}, \\ (1)_{1 \times 1} & \text{si } M_i = (0)_{1 \times 1} \end{cases}$$

pour tout  $i \in \{1, \dots, s\}$ . Il s'agit effectivement d'une matrice de permutation car  $P'$  est une matrice diagonale par blocs où les blocs diagonaux sont des matrices de permutation. On en tire<sup>34</sup> donc que

$$\begin{aligned} P'^{-1} P^{-1} M^p P P' &= \begin{pmatrix} (P'_1)^{-1} M_1^p P'_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & (P'_2)^{-1} M_2^p P'_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & (P'_3)^{-1} M_3^p P'_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & (P'_s)^{-1} M_s^p P'_s \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} M'_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & M'_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & M'_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & M'_t \end{pmatrix} \end{aligned}$$

où  $t \geq s$  puisqu'un bloc diagonal irréductible différent de la matrice  $(0)_{1 \times 1}$  peut donner naissance à plusieurs blocs primitifs. De plus, par construction, les blocs  $M'_i$  avec  $i \in \{1, \dots, t\}$  sont soit nuls de dimension 1, soit primitifs. Finalement, si  $P$  (resp.  $P'$ ) est associé à la permutation  $\sigma$  (resp.  $\sigma'$ ),  $(PP')^{-1}$  est associé à la permutation  $(\sigma' \circ \sigma)^{-1} = (\sigma)^{-1} \circ (\sigma')^{-1}$ . Puisque  $P'^{-1} P^{-1}$  est aussi associé à la permutation  $(\sigma)^{-1} \circ (\sigma')^{-1}$ , on en déduit que  $(PP')^{-1} = P'^{-1} P^{-1}$  à cause de la bijection existant entre les matrices de permutation de dimension  $m$  et les permutations de l'ensemble  $\{1, \dots, m\}$ . En prenant la matrice de permutation  $PP'$  de dimension  $m$ , nous obtenons la conclusion.  $\square$

Si  $M$  est une matrice irréductible différente de  $(0)_{1 \times 1}$ , la preuve précédente montre que l'entier  $p = p_M$  convient. Par conséquent, nous pouvons étendre la notion de période aux matrices réductibles de la façon suivante.

**Définition 1.3.43.** Si  $M$  est une matrice positive et réductible, le plus petit entier  $p$  strictement positif ayant la propriété décrite dans la proposition précédente est appelé la *période*<sup>35</sup> de la matrice  $M$  et noté  $p_M$ .

**Exemple 1.3.44.** Poursuivons l'exemple 1.3.24. Notons

$$M_1 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, M_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, M_3 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \text{ et } M_4 = \begin{pmatrix} 0 & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

34. Il suffit de se rappeler que le produit de deux matrices diagonales par blocs (où les blocs correspondants ont même dimension) est égal à la matrice diagonale par blocs dont chaque bloc diagonal est le produit des blocs diagonaux correspondants. Par conséquent, l'inverse d'une matrice diagonale par blocs (inversibles) est la matrice diagonale par blocs dont chaque bloc diagonal est l'inverse du bloc correspondant.

35. En général, la période d'une matrice réductible est une notion différente de celle donnée ici. Voir [20] à la page 126.

les quatre blocs irréductibles obtenus à cet exemple. Alors  $M_1$  est trivialement primitif. De plus, au vu de l'exemple 1.2.29,  $M_2$  est aussi primitif. Enfin,  $(M_4)^5 > 0$  et  $M_4$  est donc primitif. On en tire que  $p_{M_i} = 1$  pour tout  $i \in \{1, 2, 4\}$  en utilisant la proposition 1.3.34. En utilisant le lemme 1.3.41, pour tout  $p \in \mathbb{N}_0$ , la matrice  $P^{-1}M^pP$  est une matrice triangulaire inférieure par blocs où les blocs diagonaux sont soit primitifs, soit nuls de dimension 1, ce qui est conforme à la proposition 1.3.42. Nous avons donc aussi que  $p_M = 1$ .

## 1.4 Conséquences

Cette section est consacrée à quatre conséquences importantes des résultats établis jusqu'à présent. La première montre que, dans le cas d'une matrice carrée positive  $M$ , le réel  $\rho(M)$  est une valeur propre de  $M$ . La deuxième concerne la forme diagonale par blocs primitifs que prend, à une matrice de permutation près, une puissance adéquate d'une matrice carrée  $M$  positive, irréductible et différente de  $(0)_{1 \times 1}$ . Elle montre que les rayons spectraux des blocs diagonaux primitifs sont tous égaux à la puissance correspondante du rayon spectral de la matrice  $M$ . La troisième conséquence montre que le réel  $\rho(M)$  est plus grand ou égal à 1 si la matrice carrée  $M$  est à coefficients naturels et primitive. Enfin, la dernière donne un résultat similaire au point (v) du théorème de Perron–Frobenius, mais dans le cas irréductible (différent de  $(0)_{1 \times 1}$ ). Pour achever cette section, nous donnons un résumé de nos avancements en rassemblant certains résultats précédents.

### 1.4.1 Première conséquence

La première conséquence découle directement du théorème de Perron–Frobenius et des propositions 1.2.4 et 1.3.22. Nous verrons qu'elle permet d'étendre la notion de valeur propre dominante aux matrices réductibles.

**Théorème 1.4.1.** *Si  $M \in \mathbb{R}_m^m$  est une matrice positive, alors  $\rho(M)$  est une valeur propre de  $M$ .*

*Démonstration.* Si la matrice  $M$  est irréductible et différente de  $(0)_{1 \times 1}$ , le résultat est direct par le point (i) du théorème de Perron–Frobenius. Si  $M = (0)_{1 \times 1}$ , le résultat est tout aussi direct. Supposons que  $M$  est réductible. Par la proposition 1.3.22, nous savons qu'il existe une matrice de permutation  $P$  de dimension  $m$  telle que  $P^{-1}MP$  est une matrice triangulaire inférieure par blocs où les blocs diagonaux  $M_1, \dots, M_s$  sont irréductibles. Vu la forme de la matrice  $P^{-1}MP$ ,

$$\text{Spec}(M) = \text{Spec}(P^{-1}MP) = \bigcup_{i=1}^s \text{Spec}(M_i)$$

où la première égalité est obtenue via la proposition 1.2.4. Par définition du rayon spectral  $\rho(M)$  de  $M$ , il existe  $i \in \{1, \dots, s\}$  et  $\lambda \in \text{Spec}(M_i)$  tels que  $\rho(M) = |\lambda|$ . Or nous savons que  $\rho(M_i)$  est une valeur propre<sup>36</sup> de  $M_i$ . Vu l'égalité des spectres, nous en tirons que  $\rho(M_i)$  est une valeur propre de  $M$ . Par définition du rayon spectral  $\rho(M)$  de  $M$ , on voit que

$$|\rho(M_i)| = \rho(M_i) \leq \rho(M)$$

et, par définition du rayon spectral  $\rho(M_i)$  de  $M_i$ , nous savons que

$$\rho(M) = |\lambda| \leq \rho(M_i)$$

puisque  $\lambda$  est une valeur propre de  $M_i$ . Au total, on voit que  $\rho(M) = \rho(M_i)$ . On en tire que  $\rho(M)$  est aussi une valeur propre de  $M$ .  $\square$

<sup>36.</sup> Si  $M_i$  est irréductible et différent de  $(0)_{1 \times 1}$ , le point (i) du théorème 1.2.22 permet de conclure. Si  $M_i = (0)_{1 \times 1}$ , la remarque 1.2.24 donne le résultat.



Grâce à ce théorème, nous pouvons généraliser la notion de valeur propre dominante aux matrices carrées positives et réductibles.

**Définition 1.4.2.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive et réductible. Par définition du rayon spectral, si  $\alpha \in \mathbb{C}$  est une valeur propre de  $M$ , alors  $|\alpha| \leq \rho(M)$ . Nous voyons donc que toute valeur propre  $\alpha \in \mathbb{C}$  de  $M$  vérifie  $|\alpha| \leq \rho(M)$ . Pour cette raison et grâce au théorème précédent qui affirme que  $\rho(M)$  est une valeur propre de  $M$ , la valeur propre  $\rho(M)$  de  $M$  est appelée la *valeur propre dominante* ou encore *valeur propre de Perron* (ou de *Perron–Frobenius*) de  $M$ , en extension de la valeur propre dominante du début du chapitre.

Encore une fois, puisque les morphismes et les matrices sont liés, nous pouvons donner une définition similaire en ce qui concerne les morphismes.

**Définition 1.4.3.** Soit  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme réductible. Puisque la matrice d'incidence  $\text{Mat}_f$  de  $f$  est positive et réductible, la valeur propre  $\rho(f) = \rho(\text{Mat}_f)$  de  $f$  est appelée la *valeur propre dominante* de  $f$  grâce au théorème 1.4.1.

Avant de passer à la deuxième conséquence de cette section, nous illustrons le théorème 1.4.1.

**Exemple 1.4.4.** Considérons le morphisme  $f : \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}^* \rightarrow \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}^*$  défini par  $f(0) = 5$ ,  $f(1) = 1245$ ,  $f(2) = 00$ ,  $f(3) = 134$ ,  $f(4) = 1$ ,  $f(5) = 02$  et  $f(6) = 05$ . Sa matrice d'incidence est donnée par la matrice  $M$  de l'exemple 1.3.15 et est réductible. En utilisant le logiciel R ou le logiciel Sage<sup>37</sup>, on voit que  $\rho(f) = \rho(M) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  est bien une valeur propre de  $M$ .

## 1.4.2 Deuxième conséquence

Ce résultat est une conséquence du théorème de Perron–Frobenius et des lemmes 1.3.35 et 1.3.37. Avant de passer à son énoncé, nous définissons trois comparaisons asymptotiques.

**Définition 1.4.5.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur les naturels et à valeurs réelles. Nous supposons tout d'abord que toutes les notations introduites ici sont valables lorsque  $n \in \mathbb{N}$  tend vers  $+\infty$ . Nous dirons que  $f$  est *en petit o* de  $g$ , ce que nous notons  $f(n) = o(g(n))$ , si, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,

$$|f(n)| \leq \eta |g(n)|,$$

ce qui équivaut à demander que le quotient  $\frac{f(n)}{g(n)}$  tende vers 0 si  $n$  tend vers l'infini (si  $g$  est non nul)<sup>38</sup>. Nous dirons que  $f$  est *en grand thêta* de  $g$ , ce que nous notons  $f(n) = \Theta(g(n))$ , s'il existe deux constantes strictement positives  $K$  et  $L$  et un naturel  $N$  tels que

$$K|g(n)| \leq |f(n)| \leq L|g(n)|$$

pour tout  $n \geq N$ . Finalement, nous dirons que  $f$  et  $g$  sont *asymptotiquement équivalents* ou que  $f$  est *asymptotiquement équivalent* à  $g$ , ce que nous notons  $f(n) \sim g(n)$ , si, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,

$$|f(n) - g(n)| \leq \eta |g(n)|,$$

ce qui équivaut à demander que le quotient  $\frac{f(n)}{g(n)}$  tende vers 1 si  $n$  tend vers l'infini (si  $g$  est non nul).

Nous rappelons un résultat<sup>39</sup> sans démonstration nécessaire pour prouver la deuxième conséquence.

37. En fait,  $\text{Spec}(f) = \text{Spec}(M) = \{0, \frac{1-\sqrt{5}}{2}, 1, -0.76 + 0.86i, -0.76 - 0.86i, 1.52, \frac{1+\sqrt{5}}{2}\}$  en arrondissant les valeurs.

38. Le petit  $o$  est souvent référé comme une des notations de Landau.

39. Ce résultat se trouve à la page FRV V.6 de [7].

**Proposition 1.4.6.** Soient  $f_1, f_2, g_1, g_2$  quatre fonctions définies sur les naturels et à valeurs réelles. Si  $f_1(n) \sim g_1(n)$  et  $f_2(n) \sim g_2(n)$ , alors  $(f_1 f_2)(n) \sim (g_1 g_2)(n)$ .

Passons à la deuxième conséquence.

**Proposition 1.4.7.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive, irréductible de période  $p_M \geq 1$  et différente de  $(0)_{1 \times 1}$ . Il existe une matrice de permutation  $P$  de dimension  $m$  telle que

$$P^{-1} M^{p_M} P = \begin{pmatrix} M_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & M_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & M_2 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & M_{p_M-1} \end{pmatrix} \quad (1.7)$$

où  $M_i$  est une matrice primitive pour tout  $i \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ . De plus,

$$\rho(M_0) = \cdots = \rho(M_{p_M-1}) = \rho(M)^{p_M}.$$

*Démonstration.* Par le lemme 1.3.37, l'existence de la matrice de permutation remplissant la condition de l'énoncé est prouvée. Si la matrice  $M$  est primitive, il n'y a qu'un seul bloc diagonal primitif, à savoir la matrice elle-même, et la seconde partie de l'énoncé est vraie. Nous pouvons donc supposer que  $p_M > 1$ . Par le point (v) du théorème de Perron–Frobenius, si  $L$  est une matrice carrée positive et primitive, alors

$$L^n = (\rho(L)^n + o(\rho(L)^n))C \quad (1.8)$$

où  $C$  est une matrice carrée constante strictement positive. Autrement dit, toute composante de  $L^n$  est asymptotiquement équivalente à  $\rho(L)^n$  à une constante multiplicative (strictement positive) près, laquelle dépend de la composante sélectionnée. Nous introduisons la notation suivante. Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , nous notons  $c_{i,j}^{G(M)}(n)$  le nombre de chemins de longueur  $n \in \mathbb{N}$  joignant  $i$  à  $j$  dans le graphe  $G(M)$  associé à la matrice  $M$ .

Pour démontrer la seconde partie de l'énoncé, nous procédons en deux parties : la première montre que les rayons spectraux sont tous égaux et la seconde que tous les rayons spectraux sont égaux à  $\rho(M)^{p_M}$ .

**Les rayons spectraux sont tous égaux.** Montrons que, pour tous  $r, s \in \{0, \dots, p_M - 1\}$  avec  $r \neq s$ ,  $\rho(M_r) = \rho(M_s)$ . Fixons  $r, s \in \{0, \dots, p_M - 1\}$  tels que  $r \neq s$ . Au vu de l'égalité (1.8), nous savons que, à une constante multiplicative (strictement positive) près, si  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  sont deux sommets du sous-graphe  $G(M_r)$  et  $k, \ell \in \{1, \dots, m\}$  deux sommets du sous-graphe  $G(M_s)$ ,

$$c_{i,j}^{G(M_r)}(n) \sim \rho(M_r)^n \quad \text{et} \quad c_{k,\ell}^{G(M_s)}(n) \sim \rho(M_s)^n.$$

Soient  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  deux sommets de  $G(M_r)$  et  $k, \ell \in \{1, \dots, m\}$  deux sommets de  $G(M_s)$ . En reprenant les notations du lemme 1.3.35, nous savons que  $i$  et  $j$  (resp.  $k$  et  $\ell$ ) sont deux éléments de l'ensemble  $C_r$  (resp.  $C_s$ ). Grâce au lemme 1.3.37, nous savons également que les sommets  $i$  et  $j$  (resp.  $k$  et  $\ell$ ) sont joints par des chemins de longueur multiple de  $p_M$  dans  $G(M)$  et que, dans  $G(M^{p_M})$ , les longueurs des chemins sont divisées par  $p_M$ . Ainsi, à une constante multiplicative (strictement positive) près,

$$c_{i,j}^{G(M)}(np_M) = c_{i,j}^{G(M_r)}(n) \sim \rho(M_r)^n \quad \text{et} \quad c_{k,\ell}^{G(M)}(np_M) = c_{k,\ell}^{G(M_s)}(n) \sim \rho(M_s)^n.$$

Par hypothèse, puisque  $M$  est irréductible, nous savons qu'il existe au moins un chemin de  $i$  vers  $k$  (resp. de  $\ell$  vers  $j$ ) dans  $G(M)$ . Parmi tous les chemins de  $i$  vers  $k$  (resp. de  $\ell$  vers  $j$ ), nous en choisissons un de longueur minimale et nous notons  $L$  (resp.  $L'$ ) sa longueur. Vu la remarque 1.3.38, nous voyons que  $L + L' \equiv 0 \pmod{p_M}$ , i.e.  $L + L' = cp_M$  avec  $c \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand, dans  $G(M)$ , si nous empruntons le chemin de longueur  $L$ , puis un chemin liant  $k$  à

$\ell$  de longueur<sup>40</sup>  $(n - c)p_M$  et enfin le chemin de longueur  $L'$ , on obtient un chemin de longueur  $L + (n - c)p_M + L' = np_M$  de  $i$  vers  $j$  comme le montre la figure 1.11.

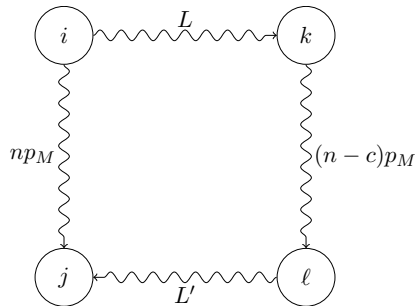


FIGURE 1.11 – Chemins entre les sommets  $i$  et  $k$ ,  $k$  et  $\ell$ ,  $\ell$  et  $j$ ,  $i$  et  $j$ .

Dans ce cas,

$$c_{i,j}^{\mathbb{G}(M)}(np_M) \geq c_{k,\ell}^{\mathbb{G}(M)}((n - c)p_M) > 0$$

puisque tous les chemins de longueur  $(n - c)p_M$  joignant  $k$  à  $\ell$  dans  $\mathbb{G}(M)$  permettent de construire des chemins de longueur  $np_M$  joignant  $i$  à  $j$  dans  $\mathbb{G}(M)$  (pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand). Ainsi, pour tous sommets  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  de  $\mathbb{G}(M_r)$  et tous sommets  $k, \ell \in \{1, \dots, m\}$  de  $\mathbb{G}(M_s)$ , il existe une constante  $c$  telle que

$$c_{i,j}^{\mathbb{G}(M)}(np_M) \geq c_{k,\ell}^{\mathbb{G}(M)}(np_M - cp_M) \Leftrightarrow \frac{c_{i,j}^{\mathbb{G}(M)}(np_M)}{c_{k,\ell}^{\mathbb{G}(M)}(np_M - cp_M)} \geq 1 \quad (1.9)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand. De plus, à une constante multiplicative (strictement positive) près,

$$\frac{c_{i,j}^{\mathbb{G}(M)}(np_M)}{c_{k,\ell}^{\mathbb{G}(M)}(np_M - cp_M)} \sim \left( \frac{\rho(M_r)}{\rho(M_s)} \right)^n$$

en utilisant la proposition 1.4.6. Par conséquent,  $\rho(M_r) \geq \rho(M_s)$ , sinon nous obtenons une contradiction avec l'inégalité (1.9). Le problème étant symétrique, nous pouvons recommencer le raisonnement et obtenir  $\rho(M_r) \leq \rho(M_s)$ . Au total,  $\rho(M_r) = \rho(M_s)$ .

**Les rayons spectraux sont tous égaux à  $\rho(M)^{p_M}$ .** Par le théorème de Perron–Frobenius, nous savons que  $\rho(M)$  est une valeur propre de  $M$ . Grâce à l'égalité (1.7), nous voyons que

$$\text{Spec}(M^{p_M}) = \bigcup_{i=0}^{p_M-1} \text{Spec}(M_i) \quad (1.10)$$

et qu'il existe  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$  tel que  $\rho(M)^{p_M} \in \text{Spec}(M_r)$ . Par définition du rayon spectral de  $M_r$ ,

$$|\rho(M)^{p_M}| = \rho(M)^{p_M} \leq \rho(M_r). \quad (1.11)$$

Par le théorème de Perron–Frobenius,  $\rho(M_r)$  est une valeur propre de  $M_r$  puisque cette matrice est primitive. Maintenant, grâce à l'égalité (1.10),  $\rho(M_r)$  est aussi une valeur propre de  $M^{p_M}$ . Finalement, il est aisé de montrer que, si  $\beta$  est une valeur propre de  $M^{p_M}$ , alors  $|\beta| \leq \rho(M)^{p_M}$ . Nous obtenons ainsi que

$$|\rho(M_r)| = \rho(M_r) \leq \rho(M)^{p_M}. \quad (1.12)$$

En combinant les expressions (1.11) et (1.12),  $\rho(M_r) = \rho(M)^{p_M}$ .  $\square$

40. Puisque la matrice  $M_s$  est primitive, nous savons qu'à partir d'une certaine longueur, toutes les longueurs de chemins apparaissent entre deux sommets quelconques au sein du graphe  $\mathbb{G}(M_s)$ . Pour  $n \in \mathbb{N}$  assez grand, on en déduit que  $(M_s^{n-c})_{k,\ell} > 0$ . Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand, on a aussi  $(M^{(n-c)p_M})_{k,\ell} > 0$ , i.e. il existe au moins un chemin de longueur  $(n - c)p_M$  de  $k$  vers  $\ell$  dans  $\mathbb{G}(M)$ .

**Exemple 1.4.8.** Reprenons l'exemple 1.3.39. Dans notre cas,  $p_M = 3$ . En utilisant le logiciel Sage, nous voyons que  $\rho(M) = \sqrt[3]{5}$  et que les trois blocs diagonaux primitifs de  $P^{-1}M^3P$  ont tous un rayon spectral égal à 5.

### 1.4.3 Troisième conséquence

Puisque nous avons introduit le comportement asymptotique des puissances naturelle d'une matrice primitive dans la preuve de la proposition précédente, nous établissons maintenant que le rayon spectral d'une matrice naturelle primitive est un réel<sup>41</sup> plus grand ou égal à 1.

**Proposition 1.4.9.** *Soit  $M \in \mathbb{N}_m^m$  une matrice primitive. Alors  $\rho(M)$  est un réel plus grand ou égal à 1.*

*Démonstration.* Par le théorème de Perron–Frobenius, nous savons que, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ ,

$$(M^n)_{i,j} = (\rho(M)^n + o(\rho(M)^n))C_{i,j} \quad (1.13)$$

avec  $C_{i,j} > 0$ . Fixons  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . L'égalité (1.13) montre qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que

$$0 \leq (M^n)_{i,j} \leq 2C_{i,j}\rho(M)^n$$

pour tout  $n \geq N$ . Si  $\rho(M) \in [0, 1[$ , alors  $(M^n)_{i,j}$  tend vers 0 si  $n$  tend vers l'infini par le théorème de l'Étau. Puisque ce raisonnement est valable pour n'importe quel couple  $(i, j) \in \{1, \dots, m\}^2$  et puisque la matrice est à coefficients naturels, nous en déduisons que toutes les composantes de  $M^n$  sont nulles pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand. Ceci est en contradiction avec la primitivité de  $M$ .  $\square$

**Exemple 1.4.10.** Reprenons l'exemple 1.2.29. La matrice  $\text{Mat}_f$  est naturelle et primitive et nous y avons vu que  $\rho(\text{Mat}_f) = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ . La proposition précédente est bien vérifiée.

**Remarque 1.4.11.** Si  $M \in \mathbb{R}_m^m$  est une matrice primitive non naturelle, rien ne permet d'affirmer que  $\rho(M)$  est un réel plus grand ou égal à 1. Par exemple, si

$$M = \begin{pmatrix} \frac{1}{2} & \frac{1}{8} \\ \frac{1}{8} & \frac{1}{4} \end{pmatrix},$$

alors  $M$  est primitif et il est possible de montrer que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} (M^n)_{i,j} = 0$  pour tous  $i, j \in \{1, 2\}$  et que  $0 < \rho(M) < 1$ .

### 1.4.4 Quatrième conséquence

La proposition que nous allons démontrer découle du théorème de Perron–Frobenius, du lemme 1.3.37 et de la proposition 1.4.7. Ce résultat donne un avant-goût du sujet qui nous occupera tout au long du chapitre suivant.

**Proposition 1.4.12.** *Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive, irréductible de période  $p_M \geq 1$  et différente de  $(0)_{1 \times 1}$ . Alors, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , il existe une constante  $c > 0$  telle que le quotient  $\frac{(M^{np_M+r})_{i,j}}{\rho(M)^{np_M}}$  converge vers  $c$  lorsque  $n$  tend vers l'infini si  $r := r(i, j)$  est défini comme dans le point (iii) du théorème de Perron–Frobenius.*

41. Par la remarque 1.2.23, nous savons déjà que le rayon spectral d'une matrice irréductible différente de  $(0)_{1 \times 1}$  est un réel strictement positif.

*Démonstration.* Par le lemme 1.3.37 et la proposition 1.4.7, à une matrice de permutation près,  $M^{p_M}$  est une matrice diagonale par blocs où les blocs diagonaux sont primitifs et possèdent le même rayon spectral égal à  $\rho(M)^{p_M}$ . Dans ce cas, par le théorème de Perron–Frobenius, nous savons que, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  tels que  $r(i, j) = 0$  (ce qui signifie en particulier que  $(M^{np_M})_{i,j}$  est une composante d'un bloc diagonal), le quotient

$$\frac{(M^{np_M})_{i,j}}{\rho(M)^{np_M}}$$

converge vers une constante réelle  $c_{i,j}$  strictement positive lorsque  $n$  tend vers l'infini. Fixons  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  et considérons  $r := r(i, j)$  comme dans le point (iii) du théorème de Perron–Frobenius. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\frac{(M^{np_M+r})_{i,j}}{\rho(M)^{np_M}} = \sum_{k=1}^m \frac{(M^{np_M})_{i,k}}{\rho(M)^{np_M}} (M^r)_{k,j} = \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ r(i,k)=0}} \frac{(M^{np_M})_{i,k}}{\rho(M)^{np_M}} (M^r)_{k,j}$$

où nous avons utilisé le théorème de Perron–Frobenius pour la seconde égalité. Le terme à l'extrême gauche de ces égalités converge vers la constante

$$c := \sum_{\substack{1 \leq k \leq m \\ r(i,k)=0}} \underbrace{c_{i,k}}_{>0} (M^r)_{k,j}$$

lorsque  $n$  tend vers l'infini. Cette constante réelle est strictement positive, sinon  $(M^r)_{k,j} = 0$  pour tout  $k \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $r(i, k) = 0$ . Dans ce cas,  $(M^{np_M+r})_{i,j} = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , ce qui contredit le théorème de Perron–Frobenius.  $\square$

**Exemple 1.4.13.** Reprenons l'exemple 1.2.28. Rappelons que  $p_M = 2$ ,  $\rho(M) = 1$ ,  $M^{2n} = I$  et  $M^{2n+1} = M$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . De plus,  $r(1, 1) = r(2, 2) = 0$  et  $r(1, 2) = r(2, 1) = 1$ . On voit donc que le quotient  $\frac{(M^{2n})_{1,1}}{\rho(M)^{2n}}$  (resp.  $\frac{(M^{2n})_{2,2}}{\rho(M)^{2n}}$ , resp.  $\frac{(M^{2n+1})_{1,2}}{\rho(M)^{2n}}$ , resp.  $\frac{(M^{2n+1})_{2,1}}{\rho(M)^{2n}}$ ) converge vers  $c = 1$  lorsque  $n$  tend vers l'infini.

### 1.4.5 En guise de résumé...

Soit  $M$  une matrice carrée réelle positive. Par la proposition 1.3.22, il existe une matrice de permutation  $P$  de même dimension que  $M$  telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} M_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & M_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & M_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & * & M_s \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux  $M_i$  avec  $i \in \{1, \dots, s\}$  sont irréductibles. À chaque bloc  $M_i \neq (0)_{1 \times 1}$  irréductible dont la période est  $p_{M_i}$  avec  $i \in \{1, \dots, s\}$ , nous pouvons appliquer le lemme 1.3.37 et la proposition 1.4.7. À une matrice de permutation près,  $M_i^{p_{M_i}}$  est une matrice diagonale  $D_i$  par blocs et ces blocs sont des matrices primitives partageant le même rayon spectral égal à  $\rho(M_i)^{p_{M_i}}$ . Par la proposition 1.3.42, il existe une matrice de permutation  $P'$  de même dimension que  $M$  et un entier  $p$  (multiple des périodes des blocs irréductibles non nuls) tels que

$$(P')^{-1}M^pP' = \begin{pmatrix} M'_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ * & M'_2 & 0 & \cdots & 0 \\ * & * & M'_3 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ * & * & * & \cdots & M'_t \end{pmatrix}$$

avec  $t \geq s$  et où les blocs diagonaux  $M'_i$  avec  $i \in \{1 \dots, t\}$  sont primitifs ou nuls. En fait, nous voyons que chaque bloc irréductible différent de la matrice  $(0)_{1 \times 1}$  (resp. égal à  $(0)_{1 \times 1}$ ) sur la diagonale de  $P^{-1}MP$  est remplacé sur la diagonale de  $(P')^{-1}M^pP'$  par un bloc qui est lui-même une matrice diagonale par blocs primitifs (resp. une matrice nulle de dimension 1).

Si  $M_i \neq (0)_{1 \times 1}$  est un bloc irréductible avec  $i \in \{1 \dots, s\}$ , prenons  $n_i \in \mathbb{N}_0$  tel que  $p = n_i p_{M_i}$ . Si  $N'$  est un sous-bloc diagonal de  $D_i^{n_i}$ , il existe un sous-bloc diagonal  $N$  de  $D_i$  tel que  $N' = N^{n_i}$ . Dans ce cas, nous affirmons que

$$\rho(N') = \rho(N^{n_i}) = \rho(N)^{n_i} = (\rho(M_i)^{p_{M_i}})^{n_i} = \rho(M_i)^p$$

où la troisième égalité est obtenue puisque  $N$  est un bloc diagonal de  $D_i$ . Dans cette suite d'égalités, il reste à démontrer la deuxième. Puisque  $N$  est primitif,  $N^{n_i}$  est aussi primitif. Par le théorème de Perron–Frobenius, nous en déduisons que  $\rho(N)$  (resp.  $\rho(N^{n_i})$ ) est une valeur propre de  $N$  (resp.  $N^{n_i}$ ). Puisque  $\rho(N)^{n_i}$  est une valeur propre de  $N^{n_i}$ , par définition du rayon spectral de  $N^{n_i}$ , on a

$$\rho(N)^{n_i} \leq \rho(N^{n_i}).$$

Maintenant, puisque  $\rho(N^{n_i})$  est une valeur propre de  $N^{n_i}$ , il existe une valeur propre  $\alpha$  de  $N$  telle que  $\alpha^{n_i} = \rho(N^{n_i})$ . Par définition du rayon spectral de  $N$ , on en déduit que

$$\rho(N^{n_i}) = |\rho(N^{n_i})| = |\alpha|^{n_i} \leq \rho(N)^{n_i},$$

ce qui permet de conclure. Ainsi, tous les sous-blocs diagonaux de  $D_i^{n_i}$  partagent le même rayon spectral égal à  $\rho(M_i)^p$ .

Enfin, par la proposition 1.2.4,

$$\text{Spec}(M^p) = \text{Spec}((P')^{-1}M^pP') = \bigcup_{i=1}^t \text{Spec}(M'_i).$$

C'est sur ce résumé que nous terminons le premier chapitre. Grâce à celui-ci, nous allons obtenir, au chapitre suivant, des informations précises concernant le comportement asymptotique des puissances naturelles d'une matrice carrée à coefficients naturels.

## Chapitre 2

# Comportement asymptotique

Ce chapitre est consacré à quatre résultats déterminant le comportement asymptotique des composantes d'une matrice carrée (à coefficients naturels<sup>1</sup>) élevée à la puissance  $n \in \mathbb{N}$ . Le premier résultat caractérise le comportement asymptotique des composantes des puissances naturelles d'une matrice carrée à coefficients naturels mise sous la forme triangulaire inférieure par blocs où les blocs diagonaux sont soit primitifs, soit égaux à la matrice nulle de dimension 1 (cette forme est obtenue par la proposition 1.3.42). De plus, il précise laquelle des valeurs propres dominantes apparaît dans le comportement asymptotique. Étant donnée une matrice carrée  $M$  à coefficients naturels, la deuxième affirmation montre que le comportement asymptotique des éléments des puissances naturelles de cette matrice est soit nul, soit déterminé par deux quantités qui dépendent de l'élément et du reste modulo l'entier  $p_M$  de la définition 1.3.43. En particulier, ce résultat permet d'attacher deux quantités à chaque composante de la matrice  $M$  et à chaque reste considéré. Le troisième résultat utilise la forme triangulaire inférieure par blocs où les blocs diagonaux sont irréductibles, donnée par la proposition 1.3.22. Il affirme que les éléments d'un bloc, non nécessairement situé sur la diagonale, ont tous le même comportement asymptotique (à un changement d'exposant près). Enfin, le dernier résultat s'intéresse au comportement asymptotique de la somme des éléments  $(M^n)_{i,j}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , situés sur une même ligne  $i$  (resp. une même colonne  $j$ ) de la matrice  $M$ . Ce chapitre est découpé en cinq sections : la première donne quelques lemmes et propositions préalables tandis que les autres parties présentent les quatre résultats cités ci-dessus.

### 2.1 Quelques résultats préliminaires

Nous démontrons tout d'abord un résultat concernant deux des trois comparaisons asymptotiques introduites dans la définition 1.4.5.

**Lemme 2.1.1.** *Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions définies sur les naturels et à valeurs réelles positives. Supposons qu'il existe une constante  $c \in \mathbb{R}_{>0}$  telle que  $f(n) = cg(n) + o(g(n))$ . Alors  $f(n) = \Theta(g(n))$ .*

*Démonstration.* Par définition, il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ , on a

$$|f(n) - cg(n)| \leq \frac{1}{2}cg(n).$$

Dans ce cas, pour tout  $n \geq N$ , nous avons

$$\frac{1}{2}cg(n) \leq f(n) \leq \frac{3}{2}cg(n).$$

On en déduit que  $f(n) = \Theta(g(n))$ . □

---

1. Le passage des matrices à coefficients réels aux matrices à coefficients naturels se justifie de la façon suivante : la théorie peut être réalisée pour les matrices à coefficients naturels puisque le but est de caractériser le comportement asymptotique des matrices d'incidence des morphismes.

Nous rappelons un résultat<sup>2</sup> sans démonstration nécessaire pour prouver le premier lemme.

**Proposition 2.1.2.** *Soient  $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$  et  $(y_n)_{n \in \mathbb{N}}$  deux suites à valeurs dans  $\mathbb{R}_{\geq 0}$ .*

(i) *Si la série  $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n$  converge, alors*

$$x_n \sim y_n \Rightarrow \sum_{i=n}^{+\infty} x_i \sim \sum_{i=n}^{+\infty} y_i \quad (\text{si } n \rightarrow +\infty).$$

(ii) *Si  $\sum_{n=0}^{+\infty} y_n = +\infty$ , alors*

$$x_n \sim y_n \Rightarrow \sum_{i=0}^n x_i \sim \sum_{i=0}^n y_i \quad (\text{si } n \rightarrow +\infty).$$

Pour finir cette section, nous citons les trois résultats suivants<sup>3</sup>.

**Proposition 2.1.3.** (i) *Pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}_{>1}$ ,*

$$\sum_{i=0}^n i^m \lambda^i = \Theta(n^m \lambda^n). \quad (2.1)$$

(ii) *Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,*

$$\sum_{i=0}^n i^m = \Theta(n^{m+1}). \quad (2.2)$$

(iii) *Pour tout  $q \in \mathbb{N}_0$ ,*

$$C_{n,q} := \#\{(i_1, \dots, i_q) \in \mathbb{N}^q \mid i_1 + \dots + i_q = n\} = \Theta(n^{q-1}). \quad (2.3)$$

## 2.2 Premier résultat sur le comportement asymptotique

Le principal lemme de cette section caractérise le comportement asymptotique des éléments d'une matrice carrée à coefficients naturels élevée à la puissance  $n \in \mathbb{N}$  et précise laquelle des valeurs propres dominantes apparaît dans le comportement asymptotique. L'idée de la preuve est basée sur le concept de graphe de chemins. De plus, dans son énoncé, nous considérons des blocs primitifs ou nuls. Cela signifie simplement qu'au lieu de considérer la matrice  $M$ , nous considérons plutôt sa puissance  $M^{pM}$ , à une permutation près, conformément à la proposition 1.3.42. Avant de passer à ce lemme, nous avons encore besoin du résultat suivant.

**Lemme 2.2.1.** *Soient  $P_1, \dots, P_r$  des matrices carrées positives primitives ou égales à  $(0)_{1 \times 1}$  et  $B_1, \dots, B_{r-1}$  des matrices positives telles que le produit matriciel  $P_1 B_1 P_2 B_2 \dots P_{r-1} B_{r-1} P_r$  a du sens. Alors il existe  $i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}$  tels que toutes les composantes de la matrice  $P_1^{i_1} B_1 P_2^{i_2} \dots B_{r-1} P_r^{i_r}$  sont strictement positives si, et seulement si, les matrices  $B_1, B_2, \dots, B_{r-1}$  sont toutes non nulles.*

*Démonstration.* Pour tous  $i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}$ , posons

$$\mathcal{P}(i_1, \dots, i_r) := P_1^{i_1} B_1 P_2^{i_2} \dots B_{r-1} P_r^{i_r}.$$

S'il existe une matrice  $B_j$  nulle avec  $j \in \{1, \dots, r-1\}$ , alors la matrice  $\mathcal{P}(i_1, \dots, i_r)$  est aussi nulle pour tous les indices  $i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}$ . Supposons maintenant que  $B_1 \neq 0, B_2 \neq 0, \dots, B_{r-1} \neq 0$ . Plusieurs cas apparaissent.

2. Ce résultat se trouve à la page FRV V.27 de [7].

3. Les preuves de ces résultats peuvent être trouvées à l'annexe B.



Premier cas : Si les matrices  $P_1, \dots, P_r$  sont toutes égales à  $(0)_{1 \times 1}$ , alors toutes les matrices  $B_1, B_2, \dots, B_{r-1}$  sont de dimension 1 et strictement positives par hypothèse. La matrice  $\mathcal{P}(i_1, \dots, i_r)$  est strictement positive uniquement si <sup>4</sup>  $i_1 = \dots = i_r = 0$ .

Deuxième cas : Supposons que les matrices  $P_1, \dots, P_r$  sont toutes primitives. Alors il existe  $i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}$  tels que  $P_1^{i_1} > 0, \dots, P_r^{i_r} > 0$  par primitivité <sup>5</sup>. Dans ce cas, pour tous  $a, c$ , l'élément  $(\mathcal{P}(i_1, \dots, i_r))_{a,c}$  est égal à

$$\sum_{a_1, \dots, a_{2r-2}} (P_1^{i_1})_{a, a_1} (B_1)_{a_1, a_2} \cdots (P_{r-1}^{i_{r-1}})_{a_{2(r-1)-2}, a_{2(r-1)-1}} (B_{r-1})_{a_{2(r-1)-1}, a_{2(r-1)}} (P_r^{i_r})_{a_{2r-2}, c}.$$

Puisque  $B_j \neq 0$  pour tout  $1 \leq j \leq r-1$ , il existe  $a_{2j-1}, a_{2j} \in \mathbb{N}$  tels que  $(B_j)_{a_{2j-1}, a_{2j}} > 0$ . En utilisant le fait que toutes les matrices sont à coefficients positifs ou nuls, on a

$$(\mathcal{P}(i_1, \dots, i_r))_{a,c} \geq \underbrace{(P_1^{i_1})_{a, a_1}}_{>0} \underbrace{(B_1)_{a_1, a_2}}_{>0} \cdots \underbrace{(P_{r-1}^{i_{r-1}})_{a_{2(r-1)-2}, a_{2(r-1)-1}}}_{>0} \underbrace{(B_{r-1})_{a_{2(r-1)-1}, a_{2(r-1)}}}_{>0} \underbrace{(P_r^{i_r})_{a_{2r-2}, c}}_{>0} > 0$$

pour tous  $a, c$ . Par conséquent, la matrice  $\mathcal{P}(i_1, \dots, i_r)$  est strictement positive.

Autres cas : En fait, tous les autres cas se traitent de la même façon. Si  $P_j$  est un bloc primitif, alors on choisit  $i_j \in \mathbb{N}$  de sorte que  $P_j^{i_j} > 0$ , ce qui est toujours possible par primitivité. Par contre, si  $P_j$  est le bloc nul de dimension 1, on choisit  $i_j = 0$  de sorte que  $P_j^{i_j} = (1)_{1 \times 1}$ . On reproduit ensuite le raisonnement qui a conduit à l'inégalité du deuxième cas. Avec le choix des indices  $i_1, \dots, i_r$  que nous venons de faire, les matrices carrées  $(P_j^{i_j})_{j \in \{1, \dots, r\}}$  sont strictement positives. De plus, les matrices  $(B_j)_{j \in \{1, \dots, r-1\}}$  étant non nulles, il est toujours possible de trouver des éléments strictement positifs dans chaque matrice du produit de sorte que  $(\mathcal{P}(i_1, \dots, i_r))_{a,c} > 0$  pour tous  $a, c$ .  $\square$

Nous pouvons passer au lemme dont nous parlions dans l'introduction de cette section.

**Lemme 2.2.2.** *Soit  $M \in \mathbb{N}_m^m$  une matrice triangulaire inférieure de la forme*

$$\begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{2,1} & P_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ B_{t,1} & \cdots & B_{t,t-1} & P_t \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux sont soit primitifs, soit nuls de dimension 1. Alors, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , soit  $(M^n)_{i,j} = 0$  pour tout naturel  $n$  suffisamment grand, soit il existe  $\lambda \in \text{Spec}(M) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$  et  $d \in \mathbb{N}$  tels que  $(M^n)_{i,j} = \Theta(n^d \lambda^n)$ .

Plus précisément, dans le second cas, si  $M_{i,j}$  est un élément du bloc  $B_{k,\ell}$  avec  $1 \leq \ell < k \leq t$  ou un élément du bloc diagonal  $P_\ell$  (auquel cas, nous posons  $k = \ell$  dans les formules), alors

$$\lambda = \max_{\substack{k=h_1 > h_2 > \cdots > h_{r-1} > h_r = \ell \\ B_{h_1, h_2} \neq 0, B_{h_2, h_3} \neq 0, \dots, B_{h_{r-1}, h_r} \neq 0}} \max\{\rho(P_{h_s}) \mid s \in \{1, \dots, r\}\} \quad (2.4)$$

et

$$d + 1 = \max_{\substack{k=h_1 > h_2 > \cdots > h_{r-1} > h_r = \ell \\ B_{h_1, h_2} \neq 0, B_{h_2, h_3} \neq 0, \dots, B_{h_{r-1}, h_r} \neq 0}} \#\{s \in \{1, \dots, r\} \mid \rho(P_{h_s}) = \lambda\}. \quad (2.5)$$

En particulier, tous les comportements asymptotiques de  $(M^n)_{i,j}$  correspondant à des éléments d'un même bloc donné  $B_{k,\ell}$  coïncident.

4. Ce choix d'indices ne fonctionne pas toujours. En effet, prendre un indice  $i_j$  égal à 0 entraîne que  $P_j^{i_j}$  est la matrice identité. Si  $P_j$  est de dimension plus grande ou égale à 2, rien ne garantit que toutes les composantes de  $B_j$  sont strictement positives et, dans ce cas,  $\mathcal{P}(i_1, \dots, i_r)$  n'est pas forcément strictement positif.

5. Remarquons que, par primitivité, il existe des naturels  $i_1, \dots, i_r \in \mathbb{N}$  tels que, pour tout  $j \in \{1, \dots, r\}$ ,  $P_j^{n_j} > 0$  pour tout  $n_j \geq i_j$ .

*Démonstration.* Cette preuve est divisée en trois parties. La première concerne le comportement asymptotique des éléments situés au-dessus de la diagonale. La deuxième s'intéresse au comportement asymptotique des éléments situés sur la diagonale et se divise en deux sous-parties en fonction de la nature du bloc diagonal considéré. Enfin, la troisième partie étudie le comportement asymptotique des éléments situés en dessous de la diagonale. Elle comprend deux parties : un exemple et le cas général.

**Comportement des éléments situés au-dessus de la diagonale.** Vu la forme de la matrice  $M$ , les composantes situées au-dessus de la diagonale de  $M^n$  sont nulles pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Nous rentrons alors dans le premier cas de l'énoncé du lemme.

**Comportement des éléments situés sur la diagonale.** Nous devons considérer deux cas : un bloc primitif ou un bloc nul de dimension 1.

**Comportement des éléments situés sur la diagonale, dans un bloc primitif.** Soit  $P_\ell$  un bloc primitif de dimension  $n_\ell$  avec  $1 \leq \ell \leq t$ . Par le théorème de Perron–Frobenius, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n_\ell\}$ , il existe une constante  $c_{i,j} > 0$  telle que  $(P_\ell^n)_{i,j} = \rho(P_\ell)^n c_{i,j} + o(\rho(P_\ell)^n)$ . Par le lemme 2.1.1,  $(P_\ell^n)_{i,j} = \Theta(\rho(P_\ell)^n)$ . Ainsi, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  tels que  $M_{i,j}$  est un élément du bloc diagonal  $P_\ell$ , nous obtenons  $(M^n)_{i,j} = \Theta(\rho(P_\ell)^n)$ . Puisque  $P_\ell$  est primitif, le théorème de Perron–Frobenius affirme que  $\rho(P_\ell) \in \text{Spec}(P_\ell)$ . Vu la forme de la matrice  $M$  et par la proposition 1.4.9, on en tire que  $\rho(P_\ell) \in \text{Spec}(M) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$ . Notons de plus que, dans ce cas, nous avons obtenu que  $\lambda = \rho(P_\ell)$  et  $d = 0$ , ce qui est cohérent avec les formules (2.4) et (2.5) si nous posons  $k = \ell$  dans celles-ci. Finalement, nous voyons que la dernière partie de l'énoncé est vérifiée puisque tous les éléments du bloc  $P_\ell$  ont le même comportement asymptotique.

**Comportement des éléments situés sur la diagonale, dans un bloc  $(0)_{1 \times 1}$ .** Si  $P_\ell$  est un bloc nul de dimension 1, alors  $P_\ell^n = (0)_{1 \times 1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ . Dans ce cas, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  tels que  $M_{i,j}$  est un élément du bloc  $P_\ell$ ,  $(M^n)_{i,j} = \Theta(\rho(P_\ell)^n)$  puisque  $\rho(P_\ell) = 0$ . Nous tombons en fait dans le premier cas de l'énoncé du lemme. De plus, la dernière partie de l'énoncé est vérifiée puisque tous les éléments du bloc  $P_\ell$  ont le même comportement asymptotique.

**Comportement des éléments situés en dessous de la diagonale.** Nous examinons maintenant le cas des blocs situés sous la diagonale de  $M$ . Ces blocs sont obtenus comme sommes de produits dont les facteurs sont parmi les blocs diagonaux  $P_1, \dots, P_t$  et les blocs situés sous la diagonale de  $M$ . Avant de passer au cas général, nous développons un exemple.

**Exemple pour lequel  $t = 3$ .** Considérons l'exemple dans lequel  $M$  est la matrice triangulaire inférieure par blocs donnée par

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ D & B & 0 \\ F & E & C \end{pmatrix}$$

où les blocs  $A, B, C$  sont primitifs ou nuls de dimension 1.

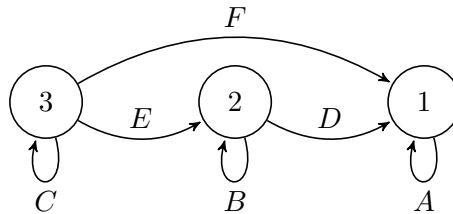


FIGURE 2.1 – Graphe de chemins  $G_C(M)$  associé à la matrice naturelle triangulaire inférieure par blocs  $M$ .

À une matrice par blocs naturels  $N$ , on associe un graphe orienté, appelé *graphe de chemins* et noté  $G_C(N)$ , de la manière suivante. Si  $s \in \mathbb{N}_0$  est le nombre de blocs sur la diagonale de la matrice  $N$ , alors les sommets du graphe sont les naturels  $1, \dots, s$ . Si  $B_{i,j}$  est le bloc situé sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $N$ , alors, dans le graphe, nous inscrivons un arc du sommet  $i$  vers

le sommet  $j$  de label  $B_{i,j}$  uniquement si ce bloc est non nul. Pour la matrice de l'exemple, nous obtenons le graphe  $G_C(M)$  de la figure 2.1 (sans information supplémentaire sur les blocs, nous les inscrivons tous). Par exemple, si le bloc diagonal  $B$  est nul, nous avons le même graphe, mais sans boucle sur le sommet 2.

Soit  $G(M)$  le graphe associé à la matrice  $M$ . Fixons un sommet  $i$  (resp.  $j$ ) dans la composante primitive correspondant au bloc diagonal  $C$  (resp.  $A$ ) ou, si  $C$  (resp.  $A$ ) est la matrice  $(0)_{1 \times 1}$ , alors  $i$  (resp.  $j$ ) est le sommet isolé de la composante correspondante. Il existe deux types de chemins de longueur  $n \in \mathbb{N}$  allant de  $i$  vers  $j$  dans  $G(M)$ .

- Il y a ceux qui peuvent être décomposés en trois morceaux, à savoir comme un chemin de longueur  $i_1 \in \mathbb{N}$  du sommet  $i$  vers un autre sommet  $i'$  de la composante correspondant à  $C$ , suivi par un arc de  $i'$  vers un sommet  $j'$  de la composante correspondant à  $A$  et se terminant par un chemin de longueur  $n - i_1 - 1$  de  $j'$  vers  $j$ . Par la remarque 1.3.12, le nombre de tels chemins est donné par  $(C^{i_1} F A^{n-i_1-1})_{i,j}$ .
- Il y a ceux qui peuvent être obtenus en cinq morceaux, à savoir comme un chemin de longueur  $i_1$  de  $i$  vers un sommet  $i'$  de la composante correspondant à  $C$ , suivi par un arc de  $i'$  vers un sommet  $k$  de la composante correspondant à  $B$ , puis un chemin de longueur  $i_2$  de  $k$  vers un sommet  $k'$  de la composante correspondant à  $B$ , un arc de  $k'$  vers un sommet  $j'$  de la composante correspondant à  $A$  et se terminant par un chemin de longueur  $n - i_1 - i_2 - 2$  du sommet  $j'$  au sommet  $j$ . Le nombre de tels chemins est donné par  $(C^{i_1} E B^{i_2} D A^{n-i_1-i_2-2})_{i,j}$ .

Dans  $G(M)$ , le nombre total de chemins de longueur  $n$  partant de n'importe quel sommet  $i$  de la composante correspondant au bloc  $C$  vers n'importe quel sommet  $j$  de la composante correspondant au bloc  $A$  est donné par  $(M^n)_{i,j}$ , élément qui appartient au bloc correspondant à  $F$  dans  $M^n$ . En fait, le bloc correspondant à  $F$  dans  $M^n$  (resp.  $D$ ,  $E$ ) avec  $n \in \mathbb{N}$  est la somme<sup>6</sup> des labels des chemins de longueur  $n$  joignant 3 à 1 (resp. 2 à 1, 3 à 2) dans le graphe  $G_C(M)$  de la figure 2.1. Par conséquent, considérer tous les chemins de longueur  $n$  entre deux sommets dans le graphe de chemins  $G_C(M)$  permet d'évaluer le nombre de chemins de longueur  $n$  entre deux sommets du graphe  $G(M)$ . Dans notre exemple, le bloc en position  $(3, 1)$  dans  $M^n$  est

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n-2 \\ i_1, i_2, i_3 \geq 0}} C^{i_1} E B^{i_2} D A^{i_3} + \sum_{\substack{i_1+i_2=n-1 \\ i_1, i_2 \geq 0}} C^{i_1} F A^{i_2}. \quad (2.6)$$

Par le début de la preuve, les composantes de  $A^n$  (resp.  $B^n$ ,  $C^n$ ) et  $\rho(A)^n$  (resp.  $\rho(B)^n$ ,  $\rho(C)^n$ ) sont asymptotiquement équivalents (à une constante multiplicative (strictement positive) près). Par exemple, si les réels  $\rho(A)$ ,  $\rho(B)$  et  $\rho(C)$  ne sont pas nuls, la proposition 1.4.6 et le second point de la proposition 2.1.2 permettent d'affirmer que le comportement asymptotique des composantes de la matrice (2.6) est proportionnel à

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n-2 \\ i_1, i_2, i_3 \geq 0}} \rho(C)^{i_1} \rho(B)^{i_2} \rho(A)^{i_3} + \sum_{\substack{i_1+i_2=n-1 \\ i_1, i_2 \geq 0}} \rho(C)^{i_1} \rho(A)^{i_2}. \quad (2.7)$$

Remarquons qu'il existe des naturels  $i_1, i_2, i_3$  (resp.  $i_1, i_2$ ) tels que les composantes de la matrice  $C^{i_1} E B^{i_2} D A^{i_3}$  (resp.  $C^{i_1} F A^{i_2}$ ) sont toutes strictement positives si, et seulement si,  $E \neq 0$  et  $D \neq 0$  (resp.  $F \neq 0$ ) par le lemme 2.2.1.

Par exemple, si  $\rho(A) = \rho(B) = \rho(C) > 0$ ,  $D \neq 0$  et  $E \neq 0$ , alors les éléments du bloc (2.6) ont un comportement<sup>7</sup> en  $\Theta(n^2 \rho(A)^n)$ . Si  $\rho(A) = \rho(B) > \rho(C) > 0$ ,  $D \neq 0$  et  $E \neq 0$ , alors les éléments de ce bloc ont un comportement<sup>8</sup> en  $\Theta(n \rho(A)^n)$ . Dans les deux cas envisagés, vu la forme particulière de la matrice  $M$ ,  $\rho(A) \in \text{Spec}(M) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$  et nous nous retrouvons dans le second cas de

6. Pour une preuve de ce résultat, se référer à l'annexe C.

7. Puisqu'il ne s'agit que d'un exemple dans la preuve du lemme, ce résultat est démontré à l'annexe C.

8. Pour la même raison, se référer à l'annexe C.

l'énoncé du lemme. Observons encore une fois que les formules (2.4) et (2.5) sont respectées et que les comportements des éléments du bloc  $F$  sont tous identiques.

**Cas général.** La matrice  $M$  de départ possède  $t$  blocs diagonaux soit primitifs, soit nuls de dimension 1 et nous obtenons à la figure 2.2 le graphe de chemins  $G_C(M)$  associé à  $M$ . Comme dans l'exemple, si  $M$  possède des blocs nuls, cela signifie que le graphe  $G_C(M)$  de la figure 2.2 ne possède pas tous les arcs.

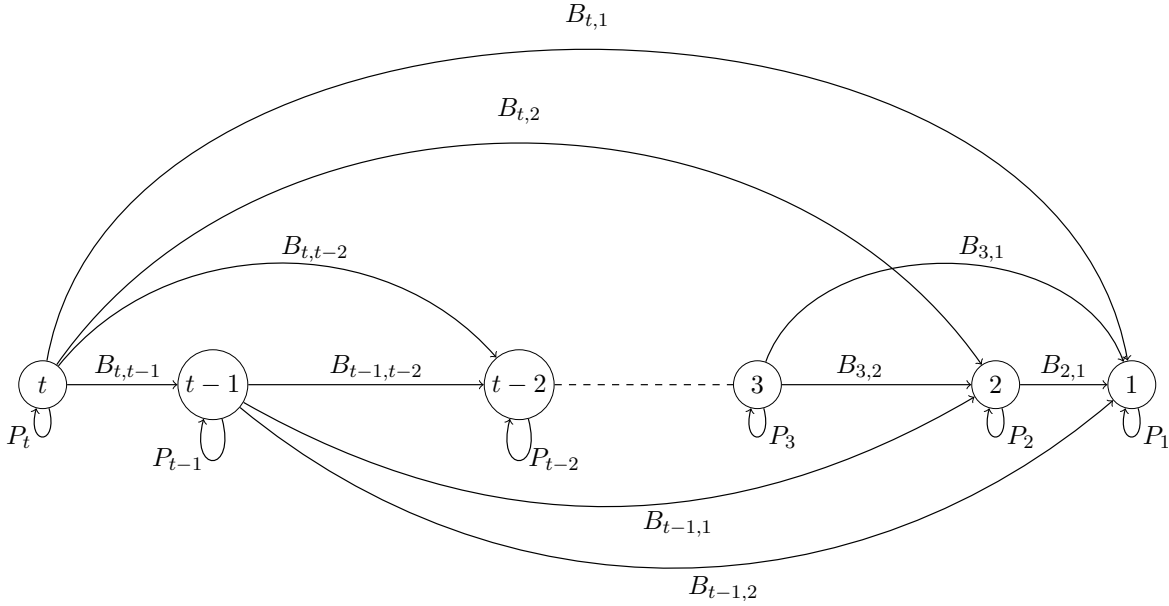


FIGURE 2.2 – Graphe de chemins  $G_C(M)$  associé à la matrice naturelle triangulaire inférieure par blocs  $M$ .

Si nous cherchons le comportement asymptotique d'un élément  $(M^n)_{i,j}$ , nous devons d'abord identifier à quelle composante de  $G(M)$  le sommet  $i$  (resp.  $j$ ) appartient. Si l'élément  $M_{i,j}$  est un élément du bloc  $B_{k,\ell}$  avec  $1 \leq \ell < k \leq t$ , alors  $i$  (resp.  $j$ ) est dans la composante correspondant au bloc  $P_k$  (resp.  $P_\ell$ ). Nous devons ensuite chercher tous les chemins possibles et existant de longueur  $n$  du sommet  $k$  vers le sommet  $\ell$  dans le graphe orienté de la figure 2.2. Nous obtenons alors une somme semblable à l'expression (2.6), donnée par la somme, sur tous les chemins possibles, de

$$\sum_{\substack{i_1 + \dots + i_r = n - (r-1) \\ i_1, \dots, i_r \geq 0}} P_{h_1}^{i_1} B_{h_1, h_2} P_{h_2}^{i_2} B_{h_2, h_3} \cdots B_{h_{r-1}, h_r} P_{h_r}^{i_r} \quad (2.8)$$

où  $t \geq k = h_1 > \dots > h_r = \ell \geq 1$ . Cette « grosse » somme est la matrice qui correspond au bloc en position  $(k, \ell)$  dans  $M^n$ . En fait, l'expression (2.8) fixe les sommets  $h_1, h_2, \dots, h_r$  par lesquels nous passons dans  $G_C(M)$  (nous fixons donc aussi les composantes correspondant aux blocs diagonaux par lesquelles nous passons). Si nous supposons que nous pouvons effectivement joindre  $k$  à  $\ell$  dans le graphe de chemins en empruntant ces sommets, cela signifie que les matrices  $B_{h_1, h_2}, B_{h_2, h_3} \cdots B_{h_{r-1}, h_r}$  sont toutes non nulles. Pour plus de facilité, notons  $\rho(P_{h_s}) = \beta_s$  pour tout  $s \in \{1, \dots, r\}$ . Si  $P_{h_s}$  est primitif, alors  $\beta_s \in \mathbb{R}_{\geq 1}$  et, si  $P_{h_s}$  est nul de dimension 1, alors  $\beta_s = 0$ .

Si, nous pouvons joindre  $k$  à  $\ell$  dans  $G_C(M)$  en empruntant les sommets  $h_1 = k, h_2, \dots, h_r = \ell$  et si tous les  $(\beta_s)_{s \in \{1, \dots, r\}}$  sont nuls, cela signifie que, dans le graphe de chemins, il n'y a de boucle sur aucun des sommets  $h_1 = k, h_2, \dots, h_r = \ell$ . Par conséquent, puisque nous ne pouvons emprunter aucune boucle dans  $G_C(M)$ , la longueur des chemins dans  $G_C(M)$  passant par ces sommets est bornée et nous ne pouvons pas créer de chemin de longueur  $n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand dans  $G_C(M)$  passant par ces sommets. Dans ce cas, nous posons

$$\lambda(h_1 = k, h_2, \dots, h_{r-1}, h_r = \ell) = 0 \in \text{Spec}(M) \quad \text{et} \quad d(h_1 = k, h_2, \dots, h_{r-1}, h_r = \ell) = 1 \in \mathbb{N}.$$

Maintenant, si, sur n'importe quel chemin joignant  $k$  à  $\ell$  dans  $G_{\mathcal{C}}(M)$ , nous passons par des sommets  $h_1 = k, h_2, \dots, h_r = \ell$  du type du paragraphe précédent, cela signifie que, dans le graphe de chemins, il n'y a de boucle dans aucun chemin emprunté pour passer du sommet  $k$  au sommet  $\ell$ . Par conséquent, nous ne pouvons pas créer de chemin de longueur arbitrairement grande dans  $G_{\mathcal{C}}(M)$ . Dans ce cas, le comportement asymptotique de  $(M^n)_{i,j}$  est nul (et nous tombons dans le premier cas de l'énoncé). Remarquons que ce raisonnement est valable pour n'importe quel élément  $M_{i,j}$  du bloc  $B_{k,\ell}$ , ce qui montre la dernière partie de l'énoncé.

Supposons ne pas être dans cette situation. Autrement dit, nous supposons qu'il est possible de joindre  $k$  à  $\ell$  dans  $G_{\mathcal{C}}(M)$  en empruntant des sommets  $h_1 = k, h_2, \dots, h_r = \ell$  tels que les  $(\beta_s)_{s \in \{1, \dots, r\}}$  ne sont pas tous nuls. Dans la suite, nous examinons le comportement asymptotique découlant des chemins passant par ce type de sommets.

Fixons de tels sommets  $h_1 = k, h_2, \dots, h_r = \ell$ . Alors il y a au moins une boucle dans le graphe de chemins, i.e. tous les blocs diagonaux correspondant à ces sommets visités ne sont pas égaux à la matrice nulle de dimension 1, de sorte que des chemins arbitrairement longs existent. Par le lemme 2.2.1, il existe des naturels  $i_1, \dots, i_r$  tels que  $P_{h_1}^{i_1} B_{h_1, h_2} P_{h_2}^{i_2} \dots B_{h_{r-1}, h_r} P_{h_r}^{i_r} > 0$ . Puisque nous rencontrons au moins un bloc primitif, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand, il est toujours possible de trouver des naturels  $n_1, \dots, n_r$  tels que  $n_s \geq i_s$  pour tout  $s \in \{1, \dots, r\}$ , tels que  $n_1 + \dots + n_r = n - (r - 1)$  et tels que la matrice (2.8) est strictement positive.

Nous savons alors que le comportement asymptotique des composantes de la matrice (2.8) a une écriture semblable aux termes de l'expression (2.7) et qu'il est donné, à une constante près, par<sup>9</sup>

$$\mathcal{S} := \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_r = n \\ i_1, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{s=1}^r \beta_s^{i_s}$$

grâce aux propositions 1.4.6 et 2.1.2. Si un des  $\beta_s$  est nul (mais ils ne le sont pas tous simultanément), cela signifie que nous passons, dans  $G_{\mathcal{C}}(M)$ , par le sommet  $h_s$  qui correspond au bloc  $P_{h_s}$  nul de dimension 1. Puisqu'un tel bloc correspond à un sommet isolé sans boucle, nous devons avoir  $i_s = 0$  par le lemme 2.2.1. Par conséquent, puisque le produit est commutatif, quitte à réordonner les valeurs propres des blocs diagonaux et à ne plus tenir compte des contributions des valeurs propres nulles des blocs diagonaux nuls de dimension 1 (en considérant, s'il le faut, une sous-expression de  $\mathcal{S}$ ), nous pouvons supposer que  $\beta_1 = \dots = \beta_q > \beta_{q+1} \geq \dots \geq \beta_r \geq 1$  pour un  $q \in \{1, \dots, r\}$ . Alors

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_r = n \\ i_1, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{s=1}^r \beta_s^{i_s} = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_r = n \\ i_1, \dots, i_r \geq 0}} \beta_1^{i_1} \dots \beta_q^{i_q} \beta_{q+1}^{i_{q+1}} \dots \beta_r^{i_r}.$$

Tout d'abord, si  $q = r$ , alors tous les rayons spectraux sont égaux à  $\beta_1 \geq 1$  et nous obtenons

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_r = n \\ i_1, \dots, i_r \geq 0}} \beta_1^n = \beta_1^n \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_r = n \\ i_1, \dots, i_r \geq 0}} 1 = \beta_1^n C_{n,r} = \beta_1^n C_{n,q}.$$

Par l'égalité (2.3), on voit que  $\mathcal{S} = \Theta(n^{q-1} \beta_1^n)$ . Supposons maintenant que  $r > q$ . Vu les conditions sur les réels  $(\beta_s)_{s \in \{1, \dots, r\}}$ , on a

$$\mathcal{S} = \sum_{\substack{i_1 + \dots + i_r = n \\ i_1, \dots, i_r \geq 0}} \beta_1^{i_1 + \dots + i_q} \beta_{q+1}^{i_{q+1}} \dots \beta_r^{i_r} = \sum_{i=0}^n C_{i,q} \beta_1^i \sum_{\substack{i_{q+1} + \dots + i_r = n-i \\ i_{q+1}, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{s=q+1}^r \beta_s^{i_s}.$$

9. Remarquons que, par le lemme 2.2.1, l'indice correspondant à un bloc diagonal nul de dimension 1 est pris égal à 0.

Ainsi, on a

$$S \geq \sum_{i=0}^n C_{i,q} \beta_1^i \beta_r^{n-i} \underbrace{\sum_{\substack{i_{q+1}+\dots+i_r=n-i \\ i_{q+1}, \dots, i_r \geq 0}}}_{=C_{n-i, r-q}} 1 \geq \beta_r^n \sum_{i=0}^n C_{i,q} \left(\frac{\beta_1}{\beta_r}\right)^i$$

où la première inégalité est obtenue puisque  $1 \leq \beta_r \leq \dots \leq \beta_{q+1}$  et on a aussi

$$S \leq \sum_{i=0}^n C_{i,q} \beta_1^i \beta_{q+1}^{n-i} \underbrace{\sum_{\substack{i_{q+1}+\dots+i_r=n-i \\ i_{q+1}, \dots, i_r \geq 0}}}_{=C_{n-i, r-q}} 1 \leq \beta_{q+1}^n \sum_{i=0}^n C_{i,q} C_{n-i, r-q} \left(\frac{\beta_1}{\beta_{q+1}}\right)^i$$

où la première inégalité est obtenue puisque  $1 \leq \beta_r \leq \dots \leq \beta_{q+1}$ . Au total, nous avons donc

$$\beta_r^n \sum_{i=0}^n C_{i,q} \left(\frac{\beta_1}{\beta_r}\right)^i \leq \sum_{\substack{i_1+\dots+i_r=n \\ i_1, \dots, i_r \geq 0}} \prod_{s=1}^r \beta_s^{i_s} \leq \beta_{q+1}^n \sum_{i=0}^n C_{i,q} C_{n-i, r-q} \left(\frac{\beta_1}{\beta_{q+1}}\right)^i.$$

Pour terminer le cas général, il suffit de montrer que l'on a un comportement en  $\Theta(n^{q-1}\beta_1^n)$ . Occupons-nous de la première extrémité. Grâce aux formules (2.1) et (2.3), nous en tirons qu'il existe des constantes  $K, L > 0$  pour lesquelles

$$\beta_r^n K n^{q-1} \left(\frac{\beta_1}{\beta_r}\right)^n \leq \beta_r^n \sum_{i=0}^n C_{i,q} \left(\frac{\beta_1}{\beta_r}\right)^i \leq \beta_r^n L n^{q-1} \left(\frac{\beta_1}{\beta_r}\right)^n$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand. Ainsi, en simplifiant, nous obtenons

$$\beta_r^n \sum_{i=0}^n C_{i,q} \left(\frac{\beta_1}{\beta_r}\right)^i = \Theta(n^{q-1}\beta_1^n).$$

Pour la seconde extrémité, on peut montrer<sup>10</sup> le résultat plus général suivant

$$\sum_{i=0}^n i^a (n-i)^b \alpha^i \leq L n^a \alpha^n$$

où  $a, b, n \in \mathbb{N}$ ,  $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$  et  $L$  est une constante strictement positive.

Pour chaque  $r$ -uplet de sommets  $(h_1 = k, h_2, \dots, h_r = \ell)$  fixés comme précédemment, nous avons obtenu un comportement asymptotique caractérisé par le réel

$$\lambda(h_1 = k, h_2, \dots, h_{r-1}, h_r = \ell) = \max\{\rho(P_{h_s}) \mid s \in \{1, \dots, r\}\} \in \text{Spec}(M) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$$

qui est le plus grand rayon spectral des blocs diagonaux de  $M$  correspondant aux sommets  $h_1, \dots, h_r$  par lesquels nous passons pour joindre  $k$  à  $\ell$  dans le graphe de chemins et par le naturel  $d(h_1 = k, h_2, \dots, h_{r-1}, h_r = \ell)$  où

$$d(h_1 = k, h_2, \dots, h_{r-1}, h_r = \ell) + 1 = \#\{s \in \{1, \dots, r\} \mid \rho(P_{h_s}) = \lambda(h_1 = k, h_2, \dots, h_{r-1}, h_r = \ell)\}$$

est le nombre maximal de blocs diagonaux de  $M$  qui ont leur rayon spectral égal à  $\lambda(h_1 = k, h_2, \dots, h_{r-1}, h_r = \ell)$  et correspondant aux sommets  $h_1, \dots, h_r$  par lesquels nous passons pour joindre  $k$  à  $\ell$  dans le graphe de chemins. Alors le comportement asymptotique que nous cherchons est égal au comportement asymptotique dominant déterminé par :

10. Voir l'annexe C.

- la plus grande valeur propre dominante

$$\lambda = \max_{\substack{k=h_1>h_2>\dots>h_{r-1}>h_r=\ell \\ B_{h_1,h_2}\neq 0, B_{h_2,h_3}\neq 0, \dots, B_{h_{r-1},h_r}\neq 0}} \max\{\rho(P_{h_s}) \mid s \in \{1, \dots, r\}\} \in \text{Spec}(M) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$$

des blocs diagonaux de  $M$  correspondant aux sommets rencontrés sur tous les chemins <sup>11</sup> liant le sommet  $k$  au sommet  $\ell$  dans le graphe de chemins associé à  $M$  ;

- le naturel

$$d + 1 = \max_{\substack{k=h_1>h_2>\dots>h_{r-1}>h_r=\ell \\ B_{h_1,h_2}\neq 0, B_{h_2,h_3}\neq 0, \dots, B_{h_{r-1},h_r}\neq 0}} \#\{s \in \{1, \dots, r\} \mid \rho(P_{h_s}) = \lambda\}$$

étant le plus grand nombre, diminué de 1, de blocs diagonaux de  $M$  possédant une valeur propre dominante égale à  $\lambda$  et correspondant aux sommets par lesquels nous passons pour joindre  $k$  à  $\ell$  dans le graphe de chemins.

Enfin, nous voyons que tous les éléments d'un même bloc possèdent le même comportement asymptotique.  $\square$

**Exemple 2.2.3.** Considérons les trois matrices

$$M_1 = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right), \quad M_2 = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad M_3 = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Le graphe  $G(M_1)$  (resp.  $G(M_2)$ , resp.  $G(M_3)$ ) associé à la matrice  $M_1$  (resp.  $M_2$ , resp.  $M_3$ ) se trouve à la figure 2.3a (resp 2.3b, resp. 2.3c).

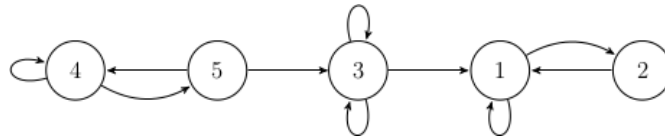
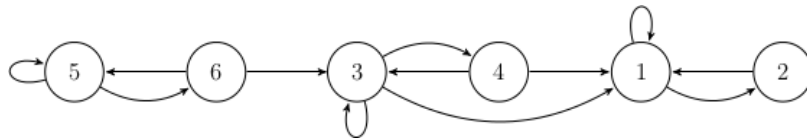
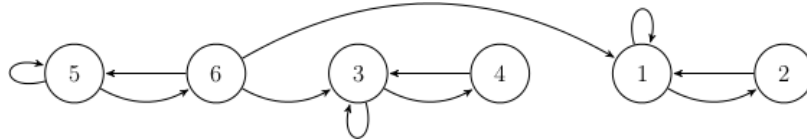


FIGURE 2.3 – Trois graphes montrant différents comportements asymptotiques.

11. Rappelons que nous avons supposé qu'il existe au moins un  $r$ -uplet de sommets  $(h_1 = k, h_2, \dots, h_r = \ell)$  tel qu'il est possible de joindre  $k$  à  $\ell$  dans le graphe de chemins en passant par ces sommets et tel qu'ils ne correspondent pas tous à des blocs nuls de dimension 1 de  $M$ . Par conséquent,  $\lambda$  est le maximum d'un ensemble contenant des réels plus grands ou égaux à 1 et éventuellement des 0. En effet, il est possible que des chemins joignant  $k$  à  $\ell$  dans le graphe de chemins et passant par des sommets correspondant tous à des blocs nuls de dimension 1 de  $M$  existent, mais ils ne sont pas tous de ce type. Nous obtenons  $\lambda \in \text{Spec}(M) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$ .

Les trois matrices  $M_1$ ,  $M_2$  et  $M_3$  sont déjà sous la forme triangulaire inférieure par blocs où les blocs diagonaux sont primitifs. De plus, les blocs diagonaux correspondent aux composantes fortement connexes de chacun des graphes. Dans cet exemple, nous souhaitons connaître le comportement asymptotique des éléments  $(M_1^n)_{5,2}$ ,  $(M_2^n)_{5,2}$  et  $(M_3^n)_{4,2}$ .

Pour passer du sommet 5 au sommet 2 dans le graphe 2.3a, nous sommes obligés d'emprunter d'abord la dernière composante fortement connexe puis la première (il est clair que nous ne pouvons pas passer par la deuxième). Dans ce cas,  $(M_1^n)_{5,2} = \Theta(n^d \lambda^n)$  où  $\lambda \in \text{Spec}(M_1)$  est égal au plus grand rayon spectral des blocs diagonaux correspondant aux composantes connexes empruntées et où  $(d+1) \in \mathbb{N}_0$  est égal au nombre maximal de blocs diagonaux correspondant aux composantes fortement connexes empruntées et dont le rayon spectral vaut  $\lambda$ . Ici,  $\lambda = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $d+1 = 2$  de sorte que  $(M_1^n)_{5,2} = \Theta(n\varphi^n)$ .

Pour passer du sommet 5 au sommet 2 dans le graphe 2.3b, nous sommes forcés de passer par les trois composantes fortement connexes. Dans ce cas,  $\lambda = \varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$  et  $d+1 = 3$  de sorte que  $(M_2^n)_{5,2} = \Theta(n^2\varphi^n)$ .

Enfin, pour passer du sommet 4 au sommet 2 dans le graphe 2.3c, nous sommes contraints d'emprunter les trois composantes fortement connexes. Dans ce cas,  $\lambda = \max\{2, \varphi\} = 2$  et  $d+1 = 1$  de sorte que  $(M_3^n)_{4,2} = \Theta(2^n)$ .

Remarquons finalement que les comportements des éléments  $(M_1^n)_{5,1}$ ,  $(M_1^n)_{5,2}$ ,  $(M_1^n)_{6,1}$  et  $(M_1^n)_{6,2}$  (resp.  $(M_2^n)_{5,1}$ ,  $(M_2^n)_{5,2}$ ,  $(M_2^n)_{6,1}$  et  $(M_2^n)_{6,2}$ , resp.  $(M_3^n)_{4,1}$ ,  $(M_3^n)_{4,2}$ ,  $(M_3^n)_{5,1}$  et  $(M_3^n)_{5,2}$ ) sont identiques puisqu'il suffit de reproduire le raisonnement précédent. Ainsi, la dernière partie du lemme 2.2.2 est satisfaite.

## 2.3 Deuxième résultat sur le comportement asymptotique

Voici le deuxième résultat concernant le comportement asymptotique des éléments d'une puissance naturelle d'une matrice carrée  $M$  à coefficients naturels. Il montre que ce comportement est soit nul, soit entièrement caractérisé par deux quantités qui dépendent non seulement de l'élément sélectionné, mais aussi du reste modulo  $p_M$ .

**Proposition 2.3.1.** *Soit  $M \in \mathbb{N}_m^m$  une matrice. Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  et tout  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ , soit  $(M^{np_M+r})_{i,j}$  est nul pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand, soit il existe  $\lambda \in \text{Spec}(M^{p_M}) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$  et  $d \in \mathbb{N}$  tels que  $(M^{np_M+r})_{i,j} = \Theta(n^d \lambda^n)$ .*

*Démonstration.* Fixons  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  et  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ . Supposons que nous ne sommes pas dans le premier cas de l'énoncé, i.e. supposons que  $(M^{np_M+r})_{i,j}$  ne s'annule pas ultimement. Par hypothèse, nous devons passer au moins par une composante fortement connexe différente d'un sommet isolé sans boucle sur les chemins joignant  $i$  à  $j$  dans le graphe  $G(M)$ . Sinon, les longueurs des chemins de  $i$  vers  $j$  dans  $G(M)$  sont bornées et la quantité  $(M^{np_M+r})_{i,j}$  est nulle pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand. Par définition de  $p_M$ , il existe<sup>12</sup>  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $(M^{np_M+r})_{i,j} > 0$  pour tout  $n \geq N$ . Par conséquent, l'ensemble

$$K_r = \{k \in \{1, \dots, m\} \mid (M^{np_M})_{i,k} (M^r)_{k,j} > 0 \text{ pour tout } n \in \mathbb{N} \text{ suffisamment grand}\}$$

est non vide. Si  $k \in K_r$ , alors  $(M^{np_M})_{i,k} > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand. Or on sait que la matrice  $M^{p_M}$  a la forme demandée par le lemme 2.2.2 à une matrice de permutation près grâce

<sup>12</sup>. Nous savons qu'il existe au moins un naturel  $N'$  tel que  $(M^{N'p_M+r})_{i,j} > 0$  et tel que, sur ce chemin de longueur  $N'p_M + r$  de  $i$  vers  $j$  dans  $G(M)$ , nous rencontrons au moins une composante f. connexe différente d'un sommet isolé sans boucle (sinon, nous finissons par ne plus voir des chemins de longueur assez grande). Notons  $p$  la période du bloc irréductible différent de  $(0)_{1 \times 1}$  correspondant à une composante f. connexe rencontrée et différente d'un sommet isolé sans boucle et  $k$  le sommet de celle-ci par lequel passe le chemin considéré de  $i$  vers  $j$  dans  $G(M)$ . Par la proposition 1.3.33, nous savons qu'il existe  $N_k \in \mathbb{N}$  tel que tous les cycles sur  $k$  de longueur  $np$  existent vraiment dans  $G(M)$  pour tout  $n \geq N_k$ . Puisque  $p_M$  est un multiple de  $p$ , on va aussi voir tous les cycles sur  $k$  de longueur  $np_M$  dans  $G(M)$  pour tout  $n \geq N'_k$  avec  $N'_k \in \mathbb{N}$ . Dans ce cas,  $(M^{np_M+r})_{i,j} > 0$  pour tout  $n \geq (N' + N'_k)$ .



à la proposition 1.3.42. Ainsi, par ce lemme, il existe  $\lambda_k \in \text{Spec}(M^{p_M}) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$  et  $d_k \in \mathbb{N}$  tels que  $(M^{np_M})_{i,k} = \Theta(n^{d_k} \lambda_k^n)$ . Définissons les deux quantités

$$\lambda := \max\{\lambda_k \mid k \in K_r\} \in \text{Spec}(M^{p_M}) \cap \mathbb{R}_{\geq 1} \quad \text{et} \quad d := \max\{d_k \mid k \in K_r \text{ et } \lambda_k = \lambda\} \in \mathbb{N}.$$

Par le lemme 2.2.2, si  $k \in K_r$ , le réel  $\lambda_k$  est obtenu en prenant le plus grand rayon spectral des blocs primitifs correspondant aux sommets rencontrés sur tous les types de chemins joignant le sommet qui correspond à la composante contenant  $i$  à celui qui correspond à la composante contenant  $k$  dans  $G_C(M^{p_M})$ , pour autant que  $(M^r)_{k,j} > 0$  (cette dernière condition donne une contrainte sur les chemins que nous pouvons regarder). Par ce même lemme, le naturel  $d_k + 1$  est le nombre maximal de blocs primitifs possédant un rayon spectral égal à  $\lambda_k$  et correspondant aux sommets sur les chemins envisagés dans  $G_C(M^{p_M})$ . Par conséquent, pour trouver la quantité  $\lambda$  définie ci-dessus, nous devons regarder tous les chemins joignant le sommet correspondant à la composante contenant  $i$  au sommet correspondant à la composante contenant  $k$  dans le graphe de chemins  $G_C(M^{p_M})$  et ce, pour tout  $k \in K_r$ .

Considérons maintenant  $k_0 \in K_r$  tel que  $\lambda_{k_0} = \lambda$  et  $d_{k_0} = d$ . Alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand, nous avons

$$(M^{np_M})_{i,k_0} (M^r)_{k_0,j} \leq (M^{np_M+r})_{i,j} \leq \sum_{k \in K_r} (M^{np_M})_{i,k} (M^r)_{k,j},$$

ce qui montre que  $(M^{np_M+r})_{i,j} = \Theta(n^d \lambda^n)$ .  $\square$

En particulier, cette proposition permet d'associer deux quantités à n'importe quelle composante d'une matrice carrée à coefficients naturels et à n'importe quel reste.

**Définition 2.3.2.** Soit  $M \in \mathbb{N}_m^m$  une matrice. Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  et tout  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ , nous notons  $\lambda(i, j, r) \in \text{Spec}(M^{p_M}) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$  et  $d(i, j, r) \in \mathbb{N}$  les deux quantités  $\lambda$  et  $d$  de la proposition 2.3.1 si  $(M^{np_M+r})_{i,j}$  n'est pas ultimement nul (lorsque  $n$  tend vers l'infini) et nous posons  $\lambda(i, j, r) = 0$  et  $d(i, j, r) = 1$  sinon<sup>13</sup>.

**Remarque 2.3.3.** Soit  $M \in \mathbb{N}_m^m$  une matrice. Fixons  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  et  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ . Considérons  $\lambda(i, j, r) \in \text{Spec}(M^{p_M}) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$  et  $d(i, j, r) \in \mathbb{N}$  les deux quantités de la définition 2.3.2. Nous savons, par le lemme 2.2.2, que le réel  $\lambda(i, j, r)$  est en fait le rayon spectral d'un bloc primitif  $P$  de la diagonale de la forme triangulaire inférieure par blocs obtenue pour  $M$  par la proposition 1.3.42. Nous savons que ce bloc provient d'un bloc irréductible  $A \neq (0)_{1 \times 1}$  de la diagonale de la forme triangulaire inférieure par blocs obtenue pour  $M$  par la proposition 1.3.22. Ainsi, on a

$$\lambda(i, j, r) = \rho(P) = \rho(A)^{p_M}$$

par la sous-section 1.4.5. Le théorème de Perron–Frobenius permet d'affirmer que le réel  $\rho(P)^{\frac{1}{p_M}} = \lambda(i, j, r)^{\frac{1}{p_M}}$  est une valeur propre de  $A$  et, par conséquent, aussi une valeur propre de  $M$ . En effet, procédons par l'absurde et supposons que  $\rho(P)^{\frac{1}{p_M}}$  n'est pas une valeur propre de  $A$ . Il existe alors  $r \in \{1, \dots, p_M - 1\}$  tel que  $\rho(P)$  provient de la valeur propre  $\rho(P)^{\frac{1}{p_M}} e^{\frac{2ir\pi}{p_M}}$  de  $A$ . Si  $\rho(A) = |\rho(P)^{\frac{1}{p_M}} e^{\frac{2ir\pi}{p_M}}|$ , alors, par le théorème de Perron–Frobenius, on sait que  $\rho(P)^{\frac{1}{p_M}}$  est une valeur propre réelle strictement positive de  $A$ . On obtient une contradiction. Par conséquent,  $\rho(A)$  est un réel strictement plus grand que  $\rho(P)^{\frac{1}{p_M}}$ . Dans ce cas,

$$|\rho(P)^{\frac{1}{p_M}} e^{\frac{2ir\pi}{p_M}}| < \rho(A) \Rightarrow |\rho(P)^{\frac{1}{p_M}} e^{\frac{2ir\pi}{p_M}}|^{p_M} < \rho(A)^{p_M} \Rightarrow \rho(P) < \rho(A)^{p_M},$$

ce qui est impossible.

13. N'importe quelle valeur naturelle de  $d(i, j, r)$  convient dans ce dernier cas. Le choix  $d(i, j, r) = 1$  est arbitraire.

L'exemple suivant montre que nous ne pouvons pas espérer mieux quant à la dépendance des quantités  $\lambda$  et  $d$  de la proposition 2.3.1. En effet, nous allons voir qu'elles dépendent effectivement des éléments  $i, j$  et du reste  $r$ .

**Exemple 2.3.4.** Considérons le morphisme  $g : \{a, b, c, d, e, f\}^* \rightarrow \{a, b, c, d, e, f\}^*$  défini par  $g(a) = bd$ ,  $g(b) = cc$ ,  $g(c) = bfb$ ,  $g(d) = feee$ ,  $g(e) = ddd$  et  $g(f) = \varepsilon$ . Nous remarquons que  $g$  est effaçant, i.e. il existe une lettre de l'alphabet dont l'image par le morphisme est le mot vide (nous reviendrons plus tard sur cette notion). La matrice d'incidence du morphisme  $g$  est donnée par la matrice

$$\text{Mat}_g = M = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

et le graphe associé à  $M$  se trouve à la figure 2.4.

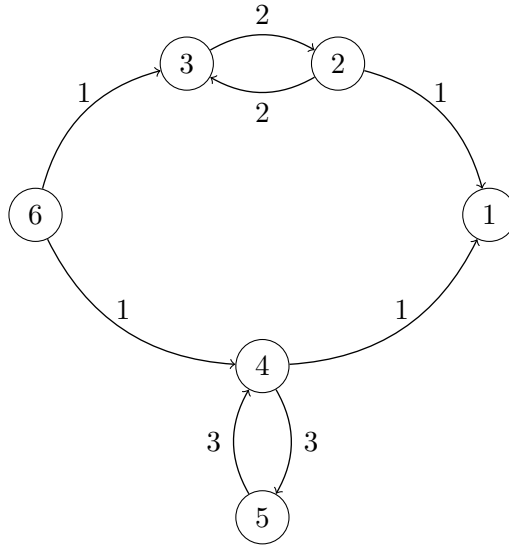


FIGURE 2.4 – Graphe  $G(M)$  associé à la matrice carrée positive  $M$ .

Nous voyons que les périodes des deux blocs diagonaux de  $M$  irréductibles et différents de  $(0)_{1 \times 1}$  sont égales à 2. De plus,

$$M^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 0 & 0 & 9 & 0 \\ 1 & 2 & 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui permet d'affirmer que  $p_M = 2$  et que  $\text{Spec}(M^2) = \{0, 0, 4, 4, 9, 9\}$ . On peut montrer par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$M^{2n} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2^{2n} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2^{2n-1} & 0 & 2^{2n} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3^{2n} & 0 & 0 \\ 3^{2n-1} & 0 & 0 & 0 & 3^{2n} & 0 \\ 3^{2n-2} & 2^{2n-1} & 0 & 0 & 3^{2n-1} & 0 \end{pmatrix}$$

et

$$M^{2n+1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 2^{2n} & 0 & 2^{2n+1} & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 2^{2n+1} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 3^{2n} & 0 & 0 & 0 & 3^{2n+1} & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3^{2n+1} & 0 & 0 \\ \hline 2^{2n-1} & 0 & 2^{2n} & 3^{2n} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Nous souhaitons examiner le comportement asymptotique de l'élément  $(M^n)_{6,1}$ . Le graphe nous montre que, pour passer du sommet 6 au sommet 1, nous avons deux possibilités : nous pouvons passer par la partie supérieure du graphe et emprunter dès lors des chemins de longueur impaire ou nous pouvons prendre la partie inférieure du graphe et considérer des chemins de longueur paire. Grâce aux formes obtenues pour les puissances naturelles de la matrice  $M$ , nous obtenons le tableau 2.1.

	$(M^{2n+r})_{6,1}$	$\lambda(6, 1, r) \in \text{Spec}(M^2) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$	$d(6, 1, r) \in \mathbb{N}$
$r = 0$	$\Theta(9^n)$	9	0
$r = 1$	$\Theta(4^n)$	4	0

TABLEAU 2.1 – Valeurs des quantités  $\lambda(6, 1, r)$  et  $d(6, 1, r)$  en fonction du reste  $r \in \{0, 1\}$ .

Nous voyons que les deux quantités  $\lambda(6, 1, r)$  et  $d(6, 1, r)$  de la proposition précédente dépendent effectivement de l'élément  $(6, 1)$  et du reste modulo  $p_M$  considéré. Remarquons que nous pouvons refaire le même raisonnement pour les autres composantes de la matrice  $M$  si nous le souhaitons. Par exemple, pour passer de 2 (resp. 4) à 1 dans le graphe, nous ne pouvons emprunter que des chemins de longueur impaire. Par conséquent,  $(M^{2n})_{2,1} = 0$  (resp.  $(M^{2n})_{4,1} = 0$ ) pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

## 2.4 Troisième résultat sur le comportement asymptotique

Par la proposition 1.3.22, il est possible de réorganiser les états d'une matrice carrée  $M$  (à coefficients naturels) de sorte qu'elle a une forme triangulaire inférieure par blocs où les blocs diagonaux sont irréductibles. Le lemme suivant affirme que les éléments d'un bloc, non nécessairement situé sur la diagonale, ont tous le même comportement asymptotique (à un changement d'exposant près).

**Lemme 2.4.1.** *Soit  $M \in \mathbb{N}_m^m$  une matrice triangulaire inférieure par blocs de la forme*

$$\begin{pmatrix} B_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ B_{s,1} & \cdots & B_{s,s-1} & B_{s,s} \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux  $B_{\ell,\ell}$  avec  $\ell \in \{1, \dots, s\}$  sont des matrices irréductibles. Soient  $k, \ell$  avec  $1 \leq \ell \leq k \leq s$ . Soient  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  tels que  $M_{i,j}$  est une composante du bloc  $B_{k,\ell}$ . Supposons qu'il existe  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ ,  $\lambda \in \text{Spec}(M^{p_M}) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$  et  $d \in \mathbb{N}$  tels que  $(M^{np_M+r})_{i,j} = \Theta(n^d \lambda^n)$ .

- (i) Si  $M_{i',j'}$  est une composante du même bloc  $B_{k,\ell}$  avec  $i', j' \in \{1, \dots, m\}$ , alors il existe un reste  $r' \in \{0, \dots, p_M - 1\}$  tel que  $(M^{np_M+r'})_{i',j'} = \Theta(n^d \lambda^n)$ .
- (ii) Si le bloc diagonal  $B_{k,k}$  est irréductible et différent de  $(0)_{1 \times 1}$ , alors, pour tout reste  $r' \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ , il existe  $i' \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $M_{i',j}$  est un élément du bloc  $B_{k,\ell}$  et tel que  $(M^{np_M+r'})_{i',j} = \Theta(n^d \lambda^n)$ .
- (iii) Si le bloc diagonal  $B_{\ell,\ell}$  est irréductible et différent de  $(0)_{1 \times 1}$ , alors, pour tout reste  $r' \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ , il existe  $j' \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $M_{i,j'}$  est un élément du bloc  $B_{k,\ell}$  et tel que  $(M^{np_M+r'})_{i,j'} = \Theta(n^d \lambda^n)$ .

*Démonstration.* Pour plus de clarté, notons  $p := p_M$ .

**Preuve de (i).** Remarquons que  $M_{i',i}$  et  $M_{i,i'}$  (resp.  $M_{j,j'}$  et  $M_{j',j}$ ) sont des éléments du bloc diagonal  $B_{k,k}$  (resp.  $B_{\ell,\ell}$ ). Cette preuve se divise en trois cas selon la nature des blocs  $B_{k,k}$  et  $B_{\ell,\ell}$ .

Premier cas : Supposons que ces blocs sont tous les deux irréductibles et différents de  $(0)_{1 \times 1}$ . Notons  $p_k := p_{B_{k,k}}$  (resp.  $p_\ell := p_{B_{\ell,\ell}}$ ) la période du premier (resp. second) bloc. Occupons-nous de détailler ce qu'il se passe au niveau du premier bloc. Vu le point (iii) du théorème de Perron–Frobenius, il existe une unique constante  $r_1 := r(i', i) \in \{0, \dots, p_k - 1\}$  telle que  $(B_{k,k}^{np_k+r_1})_{i',i} > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand. Puisque  $p = n_k p_k$  avec  $n_k \in \mathbb{N}_0$ , on en tire que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand,

$$(B_{k,k}^{np+r_1})_{i',i} = (B_{k,k}^{n n_k p_k + r_1})_{i',i} > 0.$$

Vu la forme de la matrice  $M$ ,  $(M^{np+r_1})_{i',i} = (B_{k,k}^{np+r_1})_{i',i} > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand. Puisque  $p \geq p_k$ , il est donc possible de trouver deux constantes  $r_1 \in \{0, \dots, p - 1\}$  et  $n_1 \in \mathbb{N}$  telles que  $(M^{n_1 p+r_1})_{i',i} > 0$ . Nous pouvons effectuer le même raisonnement sur le second bloc et trouver des constantes  $r_2 \in \{0, \dots, p - 1\}$  et  $n_2 \in \mathbb{N}$  telles que  $(M^{n_2 p+r_2})_{j,j'} > 0$ . Définissons la constante  $R = r_1 + r_2 + r + (n_1 + n_2)p$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons alors

$$(M^{np+R})_{i',j'} = (M^{n_1 p+r_1} M^{np+r} M^{n_2 p+r_2})_{i',j'} \geq (M^{n_1 p+r_1})_{i',i} (M^{np+r})_{i,j} (M^{n_2 p+r_2})_{j,j'}. \quad (2.9)$$

De manière analogue, le raisonnement précédent permet de trouver une unique constante  $r_3 := r(i, i') \in \{0, \dots, p_k - 1\}$  telle que  $(B_{k,k}^{np_k+r_3})_{i,i'} > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand. Par le point (iii) du théorème de Perron–Frobenius, nous savons que  $r_3 \equiv -r_1 \pmod{p_k}$ . Ainsi,  $(B_{k,k}^{np_k-r_1})_{i,i'} > 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand. Puisque  $p = n_k p_k$  avec  $n_k \in \mathbb{N}_0$ , on en tire que

$$(M^{np-r_1})_{i,i'} = (B_{k,k}^{np-r_1})_{i,i'} = (B_{k,k}^{n n_k p_k - r_1})_{i,i'} > 0$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand. Par conséquent, il existe une constante naturelle  $n_3 > n_1$  telle que  $(M^{(n_3-n_1)p-r_1})_{i,i'} > 0$ . En procédant de la même façon sur le second bloc, il existe une constante naturelle  $n_4 > n_2$  telle que  $(M^{(n_4-n_2)p-r_2})_{j',j} > 0$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$(M^{(n+n_3+n_4)p+r})_{i,j} \geq (M^{(n_3-n_1)p-r_1})_{i,i'} (M^{np+R})_{i',j'} (M^{(n_4-n_2)p-r_2})_{j',j}. \quad (2.10)$$

En mettant les inégalités (2.9) et (2.10) ensemble, nous obtenons alors que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(M^{n_1 p+r_1})_{i',i} (M^{np+r})_{i,j} (M^{n_2 p+r_2})_{j,j'} \leq (M^{np+R})_{i',j'} \leq \frac{(M^{(n+n_3+n_4)p+r})_{i,j}}{(M^{(n_3-n_1)p-r_1})_{i,i'} (M^{(n_4-n_2)p-r_2})_{j',j}}.$$

Considérons les deux constantes strictement positives

$$C_1 := (M^{n_1 p+r_1})_{i',i} (M^{n_2 p+r_2})_{j,j'} \quad \text{et} \quad C_2 := \frac{1}{(M^{(n_3-n_1)p-r_1})_{i,i'} (M^{(n_4-n_2)p-r_2})_{j',j}}.$$

Il est ensuite possible d'écrire  $R$  sous la forme  $qp + r'$  avec  $r' \in \{0, \dots, p - 1\}$ . Par hypothèse, nous savons qu'il existe des constantes  $K, L > 0$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand, on a

$$C_1 K n^d \lambda^n \leq (M^{(n+q)p+r'})_{i',j'} \leq C_2 L (n + n_3 + n_4)^d \lambda^{n+n_3+n_4}.$$

Puisque  $q, n_3, n_4$  sont des constantes, nous en tirons le comportement asymptotique souhaité.

Deuxième cas : Supposons maintenant que ces deux blocs sont nuls de dimension 1. Alors  $i' = i$  et  $j' = j$  et l'énoncé du lemme est vérifié puisque  $M_{i',j'} = M_{i,j}$  (il suffit de prendre  $r' = r$ ).

Troisième cas : Supposons que le premier bloc est irréductible et différent de  $(0)_{1 \times 1}$  et que le second est nul de dimension 1 (l'autre cas se traite de la même façon). Nous savons alors que  $j' = j$ . En reprenant les notations du premier cas, il existe des constantes  $r_1 \in \{0, \dots, p - 1\}$ ,  $n_1 \in \mathbb{N}$  et

$n_3 \in \mathbb{N}_{>n_1}$  telles que  $(M^{n_1 p+r_1})_{i',i} > 0$  et  $(M^{(n_3-n_1)p-r_1})_{i,i'} > 0$ . Si  $R = r_1 + r + n_1 p$ , alors, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(M^{np+R})_{i',j} \geq (M^{n_1 p+r_1})_{i',i} (M^{np+r})_{i,j} \quad (2.11)$$

et, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(M^{(n+n_3)p+r})_{i,j} \geq (M^{(n_3-n_1)p-r_1})_{i,i'} (M^{np+R})_{i',j}. \quad (2.12)$$

En mettant les inégalités (2.11) et (2.12) ensemble, nous obtenons alors que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$(M^{n_1 p+r_1})_{i',i} (M^{np+r})_{i,j} \leq (M^{np+R})_{i',j} \leq \frac{(M^{(n+n_3)p+r})_{i,j}}{(M^{(n_3-n_1)p-r_1})_{i,i'}}.$$

En écrivant  $R = qp + r'$  avec  $r' \in \{0, \dots, p-1\}$  et en utilisant l'hypothèse et l'inégalité ci-dessus, nous trouvons des constantes  $K, L > 0$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand,

$$K n^d \lambda^n \leq (M^{(n+q)p+r'})_{i',j} \leq L(n+n_3)^d \lambda^{n+n_3}.$$

Puisque  $q, n_3$  sont des constantes, nous en tirons le comportement asymptotique espéré.

**Preuve de (ii).** Démontrons la deuxième partie de l'énoncé, la troisième partie pouvant être prouvée de la même façon. Soit  $r' \in \{0, \dots, p-1\}$ . Puisque  $B_{k,k}$  est un bloc irréductible différent de  $(0)_{1 \times 1}$ , il correspond à une composante fortement connexe du graphe  $G(M)$  différente d'un sommet isolé sans boucle et le sommet  $i$  est lié à tous les sommets de cette composante dans  $G(M)$ . Il existe donc  $i' \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $M_{i',i}$  est un élément du bloc diagonal  $B_{k,k}$  et tel que  $(M^{p-r+r'})_{i',i} > 0$ . Nous avons

$$(M^{np+r'})_{i',j} \geq (M^{p-r+r'})_{i',i} (M^{(n-1)p+r})_{i,j}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ . Puisque  $B_{k,k}$  est un bloc irréductible différent de  $(0)_{1 \times 1}$ , il existe au moins un chemin de longueur strictement positive de  $i$  vers  $i'$  dans  $G(M)$ . Considérons un tel chemin et notons  $c$  sa longueur. La situation envisagée est reprise à la figure 2.5.

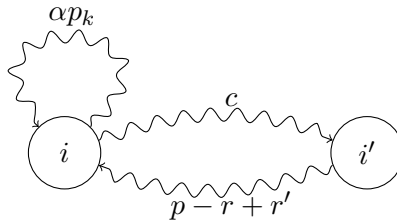


FIGURE 2.5 – Chemins entre les sommets  $i$  et  $i'$ .

Nous savons que  $c + p - r + r' \equiv 0 \pmod{p_k}$  si  $p_k := p_{B_{k,k}}$  est la période du bloc  $B_{k,k}$ . Comme  $c, p + r' - r \in \mathbb{N}_0$ , il existe une constante  $\alpha \in \mathbb{N}_0$  telle que  $c + p - r + r' = \alpha p_k$  où  $\alpha p_k$  est la longueur du cycle créé sur le sommet  $i$  dans  $G(M)$ . On a donc  $(M^{\alpha p_k - p + r - r'})_{i,i'} = (M^c)_{i,i'} > 0$ . Dans ce cas, pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ ,  $(M^{n \alpha p_k - p + r - r'})_{i,i'} > 0$  puisque nous pouvons emprunter le cycle créé sur  $i$  autant de fois que nous le voulons. Par définition de  $p$ , il existe  $n_k \in \mathbb{N}_0$  tel que  $p = n_k p_k$ . Dans ce cas,  $(M^{2 \alpha n_k p - p + r - r'})_{i,i'} > 0$ . Ainsi, nous avons

$$(M^{(n+2\alpha-1)p+r})_{i,j} \geq (M^{(2\alpha-1)p+r-r'})_{i,i'} (M^{np+r'})_{i',j}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Au total, nous avons donc

$$(M^{p-r+r'})_{i',i} (M^{(n-1)p+r})_{i,j} \leq (M^{np+r'})_{i',j} \leq \frac{(M^{(n+2\alpha-1)p+r})_{i,j}}{(M^{(2\alpha-1)p+r-r'})_{i,i'}}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ . Par hypothèse, il existe des constantes  $K, L > 0$  telles que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand,

$$(M^{p-r+r'})_{i',i} K(n-1)^d \lambda^{n-1} \leq (M^{np+r'})_{i',j} \leq \frac{L(n+2\alpha-1)^d \lambda^{n+2\alpha-1}}{(M^{(2\alpha-1)p+r-r'})_{i,i'}}.$$

Puisque  $2\alpha$  est une constante, nous en tirons le comportement asymptotique désiré.  $\square$

**Remarque 2.4.2.** Le lemme précédent montre en particulier que tous les restes sont rencontrés le long de chaque colonne (resp. chaque ligne) d'un bloc  $B_{k,\ell}$  dont l'indice de ligne (resp. de colonne)  $k$  (resp.  $\ell$ ) correspond à un bloc diagonal  $B_{k,k}$  (resp.  $B_{\ell,\ell}$ ) irréductible différent de  $(0)_{1 \times 1}$ .

Dans l'exemple suivant, nous illustrons le lemme dans le cas où des blocs diagonaux nuls apparaissent.

**Exemple 2.4.3.** Considérons le morphisme  $g : \{a, b, c, d, e, f\}^* \rightarrow \{a, b, c, d, e, f\}^*$  défini par  $g(a) = bb$ ,  $g(b) = aea$ ,  $g(c) = ddf$ ,  $g(d) = ccc$ ,  $g(e) = \varepsilon$  et  $g(f) = \varepsilon$ . Sa matrice d'incidence est donnée par

$$\text{Mat}_g = M = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 2 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

et le graphe associé à  $M$  se trouve à la figure 2.6.

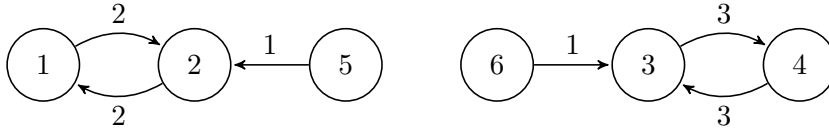


FIGURE 2.6 – Graphe  $G(M)$  associé à la matrice carrée positive  $M$ .

Les deux premiers blocs diagonaux de  $M$  sont irréductibles (voir l'exemple 1.2.8 pour s'en convaincre). Le bloc nul de dimension 2 situé le plus en bas à droite ne doit pas être considéré comme un bloc diagonal de dimension 2, mais doit être découpé en deux blocs diagonaux nuls de dimension 1. En effet, s'il est considéré dans son entièreté, nous allons montrer que le lemme précédent n'est plus vérifié. Rappelons qu'en termes de graphe, les blocs nuls de dimension 1 correspondent à des sommets isolés sans boucle. Nous pouvons montrer que  $p_M = 2$ ,  $\text{Spec}(M^2) = \{0, 0, 4, 4, 9, 9\}$  et que

$$M^{2n} = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 4^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 9^n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 9^n & 0 & 0 \\ \hline \frac{4^n}{2} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \frac{9^n}{3} & 0 & 0 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad M^{2n+1} = \left( \begin{array}{cc|cc|cc} 0 & 2 \cdot 4^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 2 \cdot 4^n & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 0 & 0 & 3 \cdot 9^n & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \cdot 9^n & 0 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 4^n & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 9^n & 0 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ . En fait, chaque bloc irréductible différent de  $(0)_{1 \times 1}$  sur la diagonale de  $M$  donne naissance à une matrice diagonale par blocs avec deux blocs diagonaux primitifs sur la diagonale de  $M^2$ . Remarquons, au passage, que la proposition 1.4.7 est respectée pour ces blocs.

Ici, les éléments  $(M^{2n})_{5,1}$  et  $(M^{2n+1})_{5,2}$  ont le même comportement asymptotique en  $\Theta(4^n)$  (avec  $4 \in \text{Spec}(M^2) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$ ). Cependant, si nous ne découpons pas le bloc diagonal nul de dimension 2 en deux blocs diagonaux nuls de dimension 1, le comportement des éléments  $M_{6,1}$  et  $M_{6,2}$  doit être similaire à celui des éléments  $M_{5,1}$  et  $M_{5,2}$  (à un changement de reste près). Ce n'est évidemment pas le cas puisque, d'une part, le comportement des deux premiers est toujours nul et, d'autre part, le comportement des deux autres est en  $\Theta(4^n)$ . Cette remarque montre que le découpage des blocs est nécessaire. En termes de graphe, cela signifie que nous avons deux sommets isolés : l'un atteint la composante fortement connexe correspondant au premier bloc diagonal, tandis que l'autre ne l'atteint jamais.

En opérant le découpage du bloc, le lemme est vérifié. En reprenant les notations de ce lemme,  $s = 4$  et nous notons les sous-blocs de  $M$  comme suit :

$$B_{1,1} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 2 & 0 \end{pmatrix}, B_{2,1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, B_{2,2} = \begin{pmatrix} 0 & 3 \\ 3 & 0 \end{pmatrix}, B_{3,1} = (0 \ 1), \\ B_{3,2} = (0 \ 0), B_{3,3} = B_{4,3} = B_{4,4} = (0), B_{4,1} = (0 \ 0), \text{ et } B_{4,2} = (1 \ 0).$$

Regardons ce qu'il se passe au niveau des blocs diagonaux différents de  $(0)_{1 \times 1}$ . Supposons que  $M_{i,j}$  est une composante de  $B_{1,1}$  (resp.  $B_{2,2}$ ). La forme particulière des matrices  $M^{2n}$  et  $M^{2n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$  permet de voir que soit  $(M^{2n})_{i,j} = \Theta(4^n)$  (resp.  $(M^{2n})_{i,j} = \Theta(9^n)$ ) et  $r = 0$ , soit  $(M^{2n+1})_{i,j} = \Theta(4^n)$  (resp.  $(M^{2n+1})_{i,j} = \Theta(9^n)$ ) et  $r = 1$ . Nous sommes bien dans les conditions du lemme puisque  $4 \in \text{Spec}(M^2) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$  (resp.  $9 \in \text{Spec}(M^2) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$ ) et  $d = 0 \in \mathbb{N}$ . En observant encore une fois les matrices  $M^{2n}$  et  $M^{2n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ , nous voyons que, pour tout autre élément  $M_{i',j'}$  de  $B_{1,1}$  (resp.  $B_{2,2}$ ), soit  $(M^{2n})_{i',j'} = \Theta(4^n)$  (resp.  $(M^{2n})_{i',j'} = \Theta(9^n)$ ) et  $r' = 0$ , soit  $(M^{2n+1})_{i',j'} = \Theta(4^n)$  (resp.  $(M^{2n+1})_{i',j'} = \Theta(9^n)$ ) et  $r' = 1$ . Dès lors, les deux éléments ont le même comportement asymptotique (à un changement d'exposant près). De plus, sur chaque ligne (resp. chaque colonne) du bloc  $B_{1,1}$  (resp.  $B_{2,2}$ ), tous les restes sont rencontrés.

En ce qui concerne le cas des blocs  $B_{3,1}$  et  $B_{4,2}$ , nous pouvons refaire le raisonnement précédent et aboutir aux mêmes conclusions. Remarquons seulement que tous les restes sont rencontrés le long de l'unique ligne du bloc considéré.

Enfin, nous voyons que, si  $M_{i,j}$  est une composante d'un des blocs  $B_{2,1}$ ,  $B_{3,2}$ ,  $B_{3,3}$ ,  $B_{4,1}$ ,  $B_{4,3}$  ou  $B_{4,4}$ , alors  $(M^n)_{i,j} = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$  et nous n'entrons pas dans les hypothèses du lemme.

## 2.5 Quatrième résultat sur le comportement asymptotique

Si  $M$  est une matrice carrée à coefficients naturels, ce dernier résultat s'intéresse au comportement asymptotique de la somme des éléments  $(M^n)_{i,j}$  situés sur une même ligne  $i$  (resp. une même colonne  $j$ ) de la matrice  $M$ .

**Lemme 2.5.1.** *Soit  $M \in \mathbb{N}_m^m$  une matrice.*

(i) *Pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , il existe  $\lambda \in \text{Spec}(M) \cap (\mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{0\})$  et  $d \in \mathbb{N}$  tels que*

$$\sum_{j=1}^m (M^n)_{i,j} = \Theta(n^d \lambda^n).$$

(ii) *Pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ , il existe  $\lambda \in \text{Spec}(M) \cap (\mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{0\})$  et  $d \in \mathbb{N}$  tels que*

$$\sum_{i=1}^m (M^n)_{i,j} = \Theta(n^d \lambda^n).$$

*Démonstration.* Par la proposition 1.3.22, à une matrice de permutation près, nous pouvons supposer que la matrice  $M$  est une matrice triangulaire inférieure par blocs de la forme

$$\begin{pmatrix} B_{1,1} & 0 & \cdots & 0 \\ B_{2,1} & B_{2,2} & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ B_{s,1} & \cdots & B_{s,s-1} & B_{s,s} \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux sont des matrices irréductibles. En effet, les sommes considérées dans l'énoncé du lemme sont indépendantes de la permutation (les lignes et les colonnes sont permutées de la même façon). Nous démontrons le point (ii) du lemme, le point (i) découlant du passage à la transposée.

Pour cela, fixons  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Soit  $\ell \in \{1, \dots, s\}$  tel que la colonne  $j$  de  $M$  passe par les blocs dont la colonne est indiquée par  $\ell$ . Pour tout  $k \in \{\ell, \dots, s\}$ , nous introduisons la notation suivante : si le couple  $(i', j')$  est tel que  $M_{i', j'}$  est un élément du bloc  $B_{k, \ell}$ , nous écrivons  $(i', j') \in B_{k, \ell}$ . Maintenant, pour tout  $k \in \{\ell, \dots, s\}$ , nous définissons les deux quantités

$$\lambda(k, \ell) = \max\{\lambda(i, j, r) \mid (i, j) \in B_{k, \ell} \text{ et } r \in \{0, \dots, p_M - 1\}\} \in \text{Spec}(M^{p_M}) \cap (\mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{0\})$$

et

$$d(k, \ell) = \max\{d(i, j, r) \mid (i, j) \in B_{k, \ell}, r \in \{0, \dots, p_M - 1\} \text{ et } \lambda(i, j, r) = \lambda(k, \ell)\} \in \mathbb{N}$$

si  $\lambda(i, j, r)$  et  $d(i, j, r)$  sont pris comme dans la définition 2.3.2. Nous démontrons à présent deux résultats intermédiaires utiles.

**Premier résultat.** Pour tout  $k \in \{\ell, \dots, s\}$  tel que  $B_{k, k}$  est un bloc irréductible différent de  $(0)_{1 \times 1}$ , nous affirmons que, pour tout reste  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ , la somme des éléments  $(M^{np_M+r})_{i, j}$  de la colonne  $j$  appartenant au bloc  $B_{k, \ell}$  est égale à  $\Theta(n^{d(k, \ell)} \lambda(k, \ell)^n)$ . Fixons un tel  $k \in \{\ell, \dots, s\}$ . Tout d'abord, par définition des deux quantités  $\lambda(k, \ell)$  et  $d(k, \ell)$ , il existe un couple d'indices  $(i', j') \in B_{k, \ell}$  et un reste  $r' \in \{0, \dots, p_M - 1\}$  pour lesquels

$$\lambda(i', j', r') = \lambda(k, \ell) \text{ et } d(i', j', r') = d(k, \ell).$$

Ensuite, par définition, pour tous  $i'', j'' \in \{1, \dots, m\}$  et tout  $r'' \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ ,  $\lambda(i'', j'', r'')$  et  $d(i'', j'', r'')$  peuvent essentiellement prendre deux formes :

- (i)  $\lambda(i'', j'', r'') \in \text{Spec}(M^{p_M}) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$  et  $d(i'', j'', r'') \in \mathbb{N}$  ou
- (ii)  $\lambda(i'', j'', r'') = 0$  et  $d(i'', j'', r'') = 1$ .

Ainsi,  $\lambda(k, \ell) = 0$  uniquement si toutes les quantités  $\lambda(i'', j'', r'')$  sont nulles pour tous  $i'', j'' \in \{1, \dots, m\}$  tels que  $(i'', j'') \in B_{k, \ell}$  et tout  $r'' \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ . Dans ce cas,  $d(k, \ell) = 1$ . Par conséquent, pour tous  $i'', j'' \in \{1, \dots, m\}$  tels que  $(i'', j'') \in B_{k, \ell}$  et tout  $r'' \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ ,  $(M^{np_M+r''})_{i'', j''} = 0$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand. On en tire que, pour tout  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ , la somme des éléments  $(M^{np_M+r})_{i, j}$  de la colonne  $j$  appartenant au bloc  $B_{k, \ell}$  est égale à  $\Theta(n^{d(k, \ell)} \lambda(k, \ell)^n) = 0$ , ce que nous voulions montrer. Nous pouvons donc supposer que  $\lambda(k, \ell) \neq 0$ , i.e.  $\lambda(k, \ell) \in \text{Spec}(M^{p_M}) \cap \mathbb{R}_{\geq 1}$ .

Pour n'importe quel couple  $(i''', j''') \in B_{k, \ell}$ , nous savons, grâce au point (i) du lemme 2.4.1, qu'il existe un reste  $r''' \in \{0, \dots, p_M - 1\}$  tel que

$$\lambda(i''', j''', r''') = \lambda(k, \ell) \text{ et } d(i''', j''', r''') = d(k, \ell).$$

En particulier, ceci est vrai pour tous les couples  $(i''', j) \in B_{k, \ell}$ . Ensuite, par le point (ii) de ce même lemme, pour tout  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ , il existe  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $(i, j) \in B_{k, \ell}$  et tel que

$$\lambda(i, j, r) = \lambda(k, \ell) \text{ et } d(i, j, r) = d(k, \ell).$$

Ainsi, pour tout  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ , la somme des éléments  $(M^{np_M+r})_{i, j}$  de la colonne  $j$  appartenant au bloc  $B_{k, \ell}$  est égale à  $\Theta(n^{d(k, \ell)} \lambda(k, \ell)^n)$  puisque le comportement maximal domine.

**Second résultat.** Soit  $k \in \{\ell, \dots, s\}$  tel que  $B_{k, k} = (0)_{1 \times 1}$ . Dans ce cas, le bloc  $B_{k, \ell}$  ne contient qu'une unique ligne et il n'existe par conséquent qu'un seul naturel noté  $i$  tel que  $(i, j) \in B_{k, \ell}$ . Nous affirmons alors que, pour tout  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ , soit  $\lambda(i, j, r) = 0$ , soit il existe  $k' \in \{\ell, \dots, s\}$  tel que  $B_{k', k'}$  est une matrice irréductible différente de  $(0)_{1 \times 1}$ ,  $\lambda(i, j, r) \leq \lambda(k', \ell)$  et  $d(i, j, r) \leq d(k', \ell)$ . En général<sup>14</sup>, pour tout  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ ,

$$\lambda(i, j, r) = \max\{\lambda(i', j, r_{i, i'}) \mid 1 \leq i' \leq m \text{ et } n_{i, i'} \neq 0\} \quad (2.13)$$

14. Si  $n_{i, i'} > 0$ , les chemins de  $i'$  vers  $j$  de longueur  $np_M + r - n_{i, i'}$  avec  $n \in \mathbb{N}$  assez grand permettent de construire des chemins de longueur  $np_M + r$  de  $i$  vers  $j$  dans  $G(M)$ . Par conséquent, si  $r' = r - n_{i, i'} \pmod{p_M}$ , alors  $\lambda(i, j, r) \geq \lambda(i', j, r')$ . En termes de graphe, puisque  $B_{k, k} = (0)_{1 \times 1}$ , le sommet  $i$  est isolé dans sa composante f. connexe. Dans ce cas, le comportement asymptotique de l'élément  $M_{i, j}$  est donné par le plus grand comportement asymptotique des éléments  $M_{i', j}$  où  $i'$  est un sommet atteignable dans  $G(M)$  depuis  $i$ , ce qui montre l'égalité concernant  $\lambda(i, j, r)$ . De plus, nous avons choisi  $n_{i, i'}$  le plus petit possible de sorte qu'il est bien défini. Pour l'autre égalité, on procède de même.



et

$$d(i, j, r) = \max\{d(i', j, r_{i,i'}) \mid 1 \leq i' \leq m, n_{i,i'} \neq 0 \text{ et } \lambda(i, j, r) = \lambda(i', j, r_{i,i'})\} \quad (2.14)$$

où  $n_{i,i'}$  est le plus petit naturel  $n$  tel que  $(M^n)_{i,i'} > 0$  et  $r_{i,i'} = r - n_{i,i'} \bmod p_M \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ . Fixons un reste  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$  et supposons que  $\lambda(i, j, r) \neq 0$ . Puisque  $B_{k,k} = (0)_{1 \times 1}$  et grâce aux égalités (2.13) et (2.14), il existe  $i' \in \{1, \dots, m\}$  et  $r' \in \{0, \dots, p_M - 1\}$  tels que  $i' \neq i$ ,  $\lambda(i, j, r) = \lambda(i', j, r')$  et  $d(i, j, r) = d(i', j, r')$ . Puisque  $B_{k,\ell}$  est un bloc ligne, l'élément  $M_{i',j}$  appartient forcément à un autre bloc  $B_{k',\ell}$  avec  $k' \in \{\ell, \dots, s\} \setminus \{k\}$ . De plus, il doit exister un tel indice  $k' \in \{\ell, \dots, s\} \setminus \{k\}$  tel que  $B_{k',k'}$  est un bloc irréductible différent de  $(0)_{1 \times 1}$ . En effet, puisque  $(M^{np_M+r})_{i,j}$  est non nul pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand, nous devons passer au moins par une composante fortement connexe différente d'un sommet isolé sans boucle, sinon le nombre de chemins liant le sommet  $i$  au sommet  $j$  dans  $G(M)$  est borné. Par définition, nous avons donc

$$\lambda(i, j, r) = \lambda(i', j, r') \leq \lambda(k', \ell) \text{ et } d(i, j, r) = d(i', j, r') \leq d(k', \ell).$$

Nous pouvons désormais démontrer le lemme. Définissons les deux quantités

$$\lambda := \max\{\lambda(k, \ell) \mid \ell \leq k \leq s\} \text{ et } d := \max\{d(k, \ell) \mid \ell \leq k \leq s \text{ et } \lambda(k, \ell) = \lambda\}.$$

Pour tout  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ , nous avons

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^m (M^{np_M+r})_{i,j} &= \sum_{k=\ell}^s \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ (i,j) \in B_{k,\ell}}} (M^{np_M+r})_{i,j} \\ &= \sum_{\substack{\ell \leq k \leq s \\ B_{k,k} \neq (0)_{1 \times 1}}} \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ (i,j) \in B_{k,\ell}}} (M^{np_M+r})_{i,j} + \sum_{\substack{\ell \leq k \leq s \\ B_{k,k} = (0)_{1 \times 1}}} \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ (i,j) \in B_{k,\ell}}} (M^{np_M+r})_{i,j}. \end{aligned}$$

Grâce au second résultat établi plus haut, nous savons que les comportements des éléments situés dans les blocs diagonaux égaux à  $(0)_{1 \times 1}$  sont soit nuls, soit majorés par les comportements des éléments situés dans les blocs diagonaux irréductibles non nuls. Par conséquent, pour tout  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ , le comportement de  $\sum_{i=1}^m (M^{np_M+r})_{i,j}$  est déterminé par

$$\sum_{\substack{\ell \leq k \leq s \\ B_{k,k} \neq (0)_{1 \times 1}}} \sum_{\substack{1 \leq i \leq m \\ (i,j) \in B_{k,\ell}}} (M^{np_M+r})_{i,j} = \sum_{\substack{\ell \leq k \leq s \\ B_{k,k} \neq (0)_{1 \times 1}}} \Theta(n^{d(k,\ell)} \lambda(k, \ell)^n) = \Theta(n^d \lambda^n)$$

où la première égalité provient du premier résultat démontré. Finalement, puisque ce dernier résultat est vrai pour tous les restes, nous obtenons

$$\sum_{i=1}^m (M^n)_{i,j} = \Theta\left(n^d \lambda^{\frac{n}{p_M}}\right),$$

ce qui termine la preuve puisque  $\lambda^{\frac{1}{p_M}} \in \text{Spec}(M) \cap (\mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{0\})$  par la remarque 2.3.3 et  $d \in \mathbb{N}$ .  $\square$

**Remarque 2.5.2.** Nous pouvons donner la description des deux quantités qui déterminent le comportement asymptotique du lemme précédent. Comme dans la preuve, considérons le cas (ii) et supposons que la matrice  $M$  a une forme triangulaire inférieure par blocs où les blocs diagonaux  $B_{\ell,\ell}$  sont irréductibles pour tout  $\ell \in \{1, \dots, s\}$ . Fixons  $j \in \{1, \dots, m\}$  et considérons  $\ell \in \{1, \dots, s\}$  tel que la colonne  $j$  de  $M$  passe par les blocs dont l'indice de colonne est  $\ell$ . D'après la preuve du lemme,  $\lambda^{p_M}$  est le plus grand des réels  $\lambda(i, j, r)$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$  et  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ .

Par le lemme 2.4.1, il suffit de regarder les comportements asymptotiques sur la colonne  $j$ . En effet, si  $k \in \{\ell, \dots, s\}$  est tel que  $B_{k,k}$  est un bloc irréductible non nul, le lemme 2.4.1 montre que les comportements asymptotiques des éléments du bloc  $B_{k,\ell}$  sont identiques (à un changement de reste

près) et que, pour n'importe quel reste  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ , le comportement en  $\Theta(n^{d(k,\ell)} \lambda(k,\ell)^n)$  est rencontré sur la colonne  $j$ . Par la preuve du lemme 2.5.1, nous voyons que, si  $k \in \{\ell, \dots, s\}$  est tel que  $B_{k,k} = (0)_{1 \times 1}$ , les comportements asymptotiques des éléments du bloc  $B_{k,\ell}$  sont soit nuls, soit majorés par les comportements asymptotiques des éléments des blocs  $B_{k',\ell}$  où  $k' \in \{\ell, \dots, s\} \setminus \{k\}$  est tel que  $B_{k',k'}$  est un bloc irréductible non nul. De plus,  $i$  peut prendre toutes les valeurs entre 1 et  $m$  puisque les comportements des éléments au-dessus de la diagonale sont nuls pour tous les restes  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$ .

Par le lemme 2.2.2 et par la proposition 1.4.7, on voit que  $\lambda$  est le plus grand rayon spectral des blocs irréductibles  $B_{k,k}$  avec  $k \in \{\ell, \dots, s\}$  pour lesquels il existe  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $M_{i,i}$  est un élément du bloc  $B_{k,k}$  et tel qu'il existe un chemin de  $i$  vers  $j$  dans  $G(M)$ .

Enfin, de la même façon, la quantité  $d$  est le plus grand des naturels  $d(i, j, r)$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$  et  $r \in \{0, \dots, p_M - 1\}$  et pour lequel  $\lambda(i, j, r) = \lambda^{p_M}$ .

**Exemple 2.5.3.** Reprenons l'exemple 2.3.4. Nous savons que  $p_M = 2$  et nous souhaitons examiner le comportement de la somme des éléments de la première colonne. Vu les formes particulières des matrices  $M^{2n}$  et  $M^{2n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$  données dans cet exemple, nous pouvons dresser le tableau 2.2 qui reprend l'ensemble des valeurs des deux quantités  $\lambda(i, 1, r)$  et  $d(i, 1, r)$  au sein des triplets  $(i, 1, r)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, 6\}$  et tout  $r \in \{0, 1\}$ .

$(i, 1, r)$	$\lambda(i, 1, r)$	$d(i, 1, r)$	$(i, 1, r)$	$\lambda(i, 1, r)$	$d(i, 1, r)$
(1, 1, 0)	0	1	(4, 1, 0)	0	1
(1, 1, 1)	0	1	(4, 1, 1)	9	0
(2, 1, 0)	0	1	(5, 1, 0)	9	0
(2, 1, 1)	4	0	(5, 1, 1)	0	1
(3, 1, 0)	4	0	(6, 1, 0)	9	0
(3, 1, 1)	0	1	(6, 1, 1)	4	0

TABLEAU 2.2 – Valeurs des quantités  $\lambda(i, 1, r)$  et  $d(i, 1, r)$  au sein des triplets  $(i, 1, r)$  pour tout  $i \in \{1, \dots, 6\}$  et tout  $r \in \{0, 1\}$ .

En prenant les notations de la preuve du lemme 2.5.1,  $s = 4$  et  $\ell = 1$ . Par conséquent, les valeurs de  $(\lambda(k, \ell))_{k \in \{1, \dots, 4\}, \ell=1}$  et de  $(d(k, \ell))_{k \in \{1, \dots, 4\}, \ell=1}$  sont

$$\begin{aligned} \lambda(1, 1) = 0, \quad d(1, 1) = 1, \quad \lambda(2, 1) = 4, \quad d(2, 1) = 0, \\ \lambda(3, 1) = 9, \quad d(3, 1) = 0, \quad \lambda(4, 1) = 9, \quad d(4, 1) = 0. \end{aligned}$$

Nous avons deux blocs irréductibles non nuls et deux blocs nuls de dimension 1. Dans la preuve du lemme 2.5.1, les deux résultats intermédiaires sont vérifiés. En effet, pour le premier résultat, pour tout reste  $r \in \{0, 1\}$ ,

$$\sum_{i=2}^3 (M^{2n+r})_{i,1} = \Theta(4^n) = \Theta(n^{d(2,1)} \lambda(2,1)^n) \quad \text{et} \quad \sum_{i=4}^5 (M^{2n+r})_{i,1} = \Theta(9^n) = \Theta(n^{d(3,1)} \lambda(3,1)^n).$$

Pour le second, nous avons tout d'abord que  $\lambda(1, 1, r) = 0$  pour tout reste  $r \in \{0, 1\}$  et ensuite que

$$\lambda(6, 1, 0) \leq \lambda(3, 1) \quad \text{et} \quad d(6, 1, 0) \leq d(3, 1), \quad \lambda(6, 1, 1) \leq \lambda(2, 1) \quad \text{et} \quad d(6, 1, 1) \leq d(2, 1).$$

D'une part, grâce aux formes des matrices  $M^{2n}$  et  $M^{2n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$\sum_{i=1}^6 (M^{2n+r})_{i,1} = \Theta(9^n)$$

pour tout reste  $r \in \{0, 1\}$  et, d'autre part, vu la preuve du lemme,

$$\sum_{i=1}^6 (M^{2n+r})_{i,1} = \Theta(n^d \lambda^n)$$

pour tout reste  $r \in \{0, 1\}$  avec

$$\lambda = \max\{\lambda(k, 1) \mid 1 \leq k \leq 4\} = 9 \text{ et } d = \max\{d(k, 1) \mid 1 \leq k \leq 4 \text{ et } \lambda(k, 1) = \lambda\} = 0.$$

Ces deux résultats coïncident bien. Enfin, nous avons

$$\sum_{i=1}^6 (M^n)_{i,1} = \Theta(3^n) = \Theta(n^d \lambda^{\frac{n}{2}})$$

avec  $\lambda^{\frac{1}{2}} = 3 \in \text{Spec}(M) = \{-3, -2, 0, 0, 2, 3\}$ . Remarquons que  $\lambda^{\frac{1}{2}}$  est effectivement le plus grand rayon spectral des blocs irréductibles sur la diagonale de  $M$  pour lesquels il existe un chemin d'un sommet de la composante fortement connexe qui leur correspond au sommet 1 dans  $G(M)$ . De plus,  $d$  est le plus grand  $d(i, 1, r)$  avec  $i \in \{1, \dots, 6\}$  et  $r \in \{0, 1\}$  tel que  $\lambda(i, 1, r) = \lambda$  (consulter le tableau 2.2). En reproduisant le même genre de raisonnement, on peut par exemple montrer que

$$\sum_{i=1}^6 (M^n)_{i,2} = \Theta(2^n) = \Theta(n^{d'} \lambda'^{\frac{n}{2}})$$

avec  $\lambda' = 4$ ,  $d' = 0$  et obtenir les mêmes interprétations.

Cet exemple clôture le chapitre consacré au comportement asymptotique des éléments d'une matrice carrée à coefficients naturels. Ce deuxième chapitre permet, en particulier, de donner le même genre d'informations sur les itérés d'un morphisme. En effet, pour comprendre le comportement de ces itérés, il est nécessaire d'étudier les puissances naturelles de la matrice d'incidence du morphisme. Par conséquent, dans le chapitre suivant, nous étudions le comportement asymptotique des itérés d'un morphisme et nous prouvons le théorème de Cobham dans sa version concernant les mots morphiques.



## Chapitre 3

# Un théorème de Cobham pour les morphismes effaçants

Le but ultime de ce chapitre est de démontrer le théorème de Cobham affirmant qu'un mot obtenu comme l'image, par un morphisme  $g$ , d'un mot engendré par un morphisme  $f$  peut aussi être donné comme l'image, sous un codage  $\tau$ , d'un mot engendré par un morphisme  $\sigma$  non effaçant. En particulier, ce théorème montre que l'on peut se débarrasser de l'effacement. Pour pouvoir le démontrer, nous avons besoin de nouvelles notions concernant les morphismes que nous exposons dans la première section de ce chapitre. Puisque le théorème de Cobham que nous venons d'énoncer est une version concernant les mots morphiques, la deuxième section est dédiée à ce concept. Enfin, la preuve du théorème nécessite plusieurs étapes et fait l'objet de la dernière section de ce chapitre. Nous y établissons aussi le lien entre les types de croissance des morphismes  $f$  et  $\sigma$  (par rapport aux lettres initiales).

### 3.1 Quelques définitions élémentaires

Nous avons introduit les morphismes à la première section du premier chapitre de ce travail. Dans la section qui nous occupe à présent, nous définissons de nouvelles notions les concernant. Nous la débutons par deux classes particulières : les morphismes uniformes, dont les codages font partie, et les morphismes effaçants. Ensuite, nous définissons la notion de lettre (im)mortelle pour un morphisme, suivie du concept de sous-morphisme d'un morphisme. À la fin de cette section se trouve un résultat concernant le comportement asymptotique de la longueur des itérations d'un morphisme sur n'importe quelle lettre de l'alphabet sur lequel il est défini.

**Définition 3.1.1.** Soient  $\Sigma$  et  $\Gamma$  deux alphabets. Si  $k$  est un naturel non nul, un morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  est *k-uniforme* si l'image de chaque lettre de  $\Sigma$  est un mot de longueur  $k$ . Si  $k = 1$ , le morphisme est appelé *codage*.

**Exemple 3.1.2.** Le morphisme  $t$  de Thue–Morse de l'exemple 1.1.7 est 2-uniforme. Le morphisme  $E$  de l'exemple 1.2.18 est un codage.

Dans ce qui suit, nous sommes confrontés à un certain type de morphismes : les morphismes effaçants.

**Définition 3.1.3.** Soient  $\Sigma$  et  $\Gamma$  deux alphabets. Un morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  est dit *non effaçant* si l'image de chaque lettre de  $\Sigma$  est un mot de longueur strictement positive. Dans le cas contraire, il est dit *effaçant*.

**Exemple 3.1.4.** Les morphismes de l'exemple précédent sont non effaçants. Par contre, le morphisme  $g$  de l'exemple 2.4.3 est effaçant.

Un autre exemple de morphisme effaçant est le suivant.

**Définition 3.1.5.** Si  $\Gamma$  est un sous-ensemble non vide de l'alphabet  $\Sigma$ , nous définissons le morphisme  $\kappa_{\Sigma, \Gamma} : \Sigma^* \rightarrow (\Sigma \setminus \Gamma)^*$  par

$$\kappa_{\Sigma, \Gamma}(a) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } a \in \Gamma, \\ a & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout  $a \in \Sigma$ .

Étant donné un morphisme sur un alphabet, nous pouvons séparer les lettres de cet alphabet en deux groupes selon qu'une itération du morphisme rend le mot vide ou qu'aucune itération n'est égale au mot vide.

**Définition 3.1.6.** Soient  $\Sigma$  un alphabet et  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme. Une lettre  $a \in \Sigma$  est une lettre *mortelle* (par rapport à ou pour ou encore de  $f$ ) s'il existe  $n \in \mathbb{N}_0$  tel que  $f^n(a) = \varepsilon$ . Une lettre qui n'est pas mortelle est une lettre *immortelle* (par rapport à ou pour ou encore de  $f$ ). Nous définissons  $\Sigma_{\mathcal{M}, f}$  (ou simplement  $\Sigma_{\mathcal{M}}$ ) comme étant l'ensemble des lettres mortelles de  $\Sigma$  (par rapport à  $f$ ) et  $\Sigma_{\mathcal{I}, f}$  (ou simplement  $\Sigma_{\mathcal{I}}$ ) comme étant l'ensemble des lettres immortelles de  $\Sigma$  (par rapport à  $f$ ).

**Exemple 3.1.7.** Considérons le morphisme  $f : \{a, b, c\}^* \rightarrow \{a, b, c\}^*$  défini par  $f(a) = ab$ ,  $f(b) = c$  et  $f(c) = \varepsilon$ . Nous voyons déjà que  $c \in \{a, b, c\}_{\mathcal{M}, f}$ . De plus,  $f^2(b) = f(c) = \varepsilon$ , ce qui implique que  $b \in \{a, b, c\}_{\mathcal{M}, f}$ . Par contre,  $f^0(a) = a$ ,  $f^1(a) = f(a) = ab$  et  $f^n(a) = abc$  pour tout  $n \geq 2$ . On en tire que  $a \in \{a, b, c\}_{\mathcal{I}, f}$ .

Nous donnons ci-après la définition d'un sous-morphisme. Rappelons que, si  $f : A \rightarrow B$  est une application de  $A$  dans  $B$  et si  $A'$  est un sous-ensemble non vide de  $A$ , nous notons  $f|_{A'}$  la restriction habituelle de l'application  $f$  à l'ensemble  $A'$ .

**Définition 3.1.8.** Soient  $\Sigma$  un alphabet,  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme et  $\Gamma$  un sous-alphabet non vide de  $\Sigma$ . Si  $f(\Gamma) \subseteq \Gamma^*$ , la restriction  $f_{\Gamma} := f|_{\Gamma^*} : \Gamma^* \rightarrow \Gamma^*$  est appelée *sous-morphisme* de  $f$ .

**Exemple 3.1.9.** Posons  $\Sigma = \{a, b, c, d\}$  et définissons le morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  par  $f(a) = abb$ ,  $f(b) = a$ ,  $f(c) = dac$  et  $f(d) = cbc$ . Si  $\Gamma = \{a, b\} \subseteq \Sigma$ , on voit que  $f(\Gamma) = \{abb, a\} \subseteq \Gamma^*$ . Ainsi, le morphisme  $f_{\Gamma} : \Gamma^* \rightarrow \Gamma^*$  défini par  $f_{\Gamma}(a) = abb$  et  $f_{\Gamma}(b) = a$  est un sous-morphisme de  $f$ .

**Exemple 3.1.10.** Considérons  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme. Si l'ensemble  $\Sigma_{\mathcal{M}}$  des lettres mortelles de  $\Sigma$  n'est pas vide, alors la restriction de  $f$  à  $\Sigma_{\mathcal{M}}$  est un sous-morphisme de  $f$ . En effet, si  $c \in \Sigma_{\mathcal{M}}$ , alors il existe  $n \in \mathbb{N}_0$  tel que  $f^n(c) = \varepsilon$ . Ainsi,  $f(c) \in \Sigma_{\mathcal{M}}^*$  puisque  $f^{n-1}(f(c)) = f^n(c) = \varepsilon$ .

Maintenant, si le morphisme  $f$  est irréductible, le seul sous-morphisme de  $f$  est lui-même. En effet, il est d'abord clair que  $f$  est un sous-morphisme de lui-même. Ensuite, si  $\Gamma$  est un sous-ensemble non vide et strict de  $\Sigma$  tel que  $f(\Gamma) \subseteq \Gamma^*$ , alors toutes les itérations du morphisme  $f$  sur les lettres de  $\Gamma$  donnent des mots sur  $\Gamma$ . Par conséquent, si nous fixons une lettre  $a \in \Gamma$  et une lettre  $b \in \Sigma \setminus \Gamma$ , nous ne pouvons trouver aucune itération  $f^k$  avec  $k \in \mathbb{N}$  telle que  $|f^k(a)|_b$  est strictement positif. Par la remarque 1.2.17, nous contredisons<sup>1</sup> le caractère irréductible de  $f$ . On en tire qu'un tel sous-ensemble non vide et strict n'existe pas et que  $f$  est le seul sous-morphisme de  $f$ .

Le lemme suivant concerne le comportement asymptotique de la longueur des itérations d'un morphisme sur n'importe quelle lettre de l'alphabet sur lequel il est défini et est une conséquence de la proposition 1.1.10 et du lemme 2.5.1.

1. On peut aussi voir ce résultat sur les matrices. Si l'on ordonne les lettres de  $\Sigma$  en commençant par les lettres de  $\Delta := \Sigma \setminus \Gamma$  puis celles de  $\Gamma$ , alors la matrice d'incidence de  $f$  est donnée, à une matrice de permutation près, par

$$\begin{array}{cc} & \begin{array}{c} \Delta \quad \Gamma \end{array} \\ \begin{array}{c} \Delta \\ \Gamma \end{array} & \left( \begin{array}{cc} * & 0 \\ * & * \end{array} \right) \end{array}$$

puisque  $f(\Gamma) \subseteq \Gamma^*$ . Cette matrice n'est évidemment pas irréductible.

**Lemme 3.1.11.** Soient  $\Sigma$  un alphabet et  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme. Pour toute lettre  $a \in \Sigma$ , il existe  $\lambda \in \text{Spec}(f) \cap (\mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{0\})$  et  $d \in \mathbb{N}$  tels que  $|f^n(a)| = \Theta(n^d \lambda^n)$ .

*Démonstration.* Fixons une lettre  $a \in \Sigma$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|f^n(a)| = \sum_{b \in \Sigma} |f^n(a)|_b = \sum_{b \in \Sigma} (\text{Mat}_{f^n})_{b,a} = \sum_{b \in \Sigma} (\text{Mat}_f^n)_{b,a}$$

en utilisant la proposition 1.1.10 pour la troisième égalité. Par le point (ii) du lemme 2.5.1, il existe  $\lambda \in \text{Spec}(\text{Mat}_f) \cap (\mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{0\})$  et  $d \in \mathbb{N}$  tels que  $|f^n(a)| = \Theta(n^d \lambda^n)$ .  $\square$

**Définition 3.1.12.** Soient  $\Sigma$  un alphabet,  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme et  $a$  une lettre de  $\Sigma$ . Les uniques quantités  $\lambda \in \text{Spec}(f) \cap (\mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{0\})$  et  $d \in \mathbb{N}$  associées à la lettre  $a \in \Sigma$  dans le lemme ci-dessus sont notées respectivement  $d(a)$  et  $\lambda(a)$ .

Illustrons le lemme 3.1.11.

**Exemple 3.1.13.** Reprenons l'exemple 2.3.4. Dans cet exemple, rappelons que  $p_{\text{Mat}_g} = p_g = 2$ . De plus,  $\text{Spec}(\text{Mat}_g) = \text{Spec}(g) = \{-3, -2, 0, 0, 2, 3\}$ . En examinant les diverses composantes des matrices  $\text{Mat}_g^{2n}$  et  $\text{Mat}_g^{2n+1}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ , nous pouvons déterminer les quantités de la définition précédente pour toutes les lettres de  $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$ . En effet, la preuve du lemme 2.5.1 nous permet de dresser le tableau 3.1.

	$\lambda(\ell) \in \text{Spec}(g) \cap (\mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{0\})$	$d(\ell) \in \mathbb{N}$
$\ell = a$	3	0
$\ell = b$	2	0
$\ell = c$	2	0
$\ell = d$	3	0
$\ell = e$	3	0
$\ell = f$	0	1

TABLEAU 3.1 – Valeurs des quantités  $\lambda(\ell)$  et  $d(\ell)$  pour toute lettre  $\ell$  de  $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$ .

## 3.2 Les mots morphiques

Cette section est consacrée, comme son nom l'indique, aux mots morphiques. Pour pouvoir définir de tels mots, nous avons besoin d'une notion de convergence au sein des mots infinis. Cette notion découle de la métrique associée à l'espace  $\Sigma^\omega$ . Pour commencer cette section, nous définissons donc une distance sur cet espace. Ensuite, nous définissons la convergence au sein des mots infinis et nous l'étendons naturellement aux mots finis. Après, nous donnons la définition d'un morphisme prolongeable. Grâce à ces morphismes particuliers, nous pouvons définir les mots (purs) morphiques. À la fin de cette section, nous donnons deux résultats asymptotiques concernant les morphismes prolongeables, résultats qui permettent de définir le type de croissance d'un morphisme relatif à une lettre de l'alphabet de définition du morphisme en question.

### 3.2.1 Distance et convergence

La distance évoquée dans l'introduction de cette section est la suivante.

**Définition 3.2.1.** Soit  $\Sigma$  un alphabet. Nous pouvons munir  $\Sigma^\omega$  d'une *distance*  $\mathcal{D}$  définie comme suit. Si  $\mathbf{x}, \mathbf{y}$  sont deux mots infinis sur  $\Sigma$ , on désigne par  $\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$  le plus long préfixe commun de  $\mathbf{x}$  et  $\mathbf{y}$ . La distance  $\mathcal{D}$  entre ces deux mots est alors définie par

$$\mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 0 & \text{si } \mathbf{x} = \mathbf{y}, \\ 2^{-|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}|} & \text{sinon.} \end{cases}$$

Intuitivement, deux mots infinis sont d'autant plus « proches » l'un de l'autre qu'ils ont un long préfixe commun. Remarquons de plus que  $|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}| = \min\{i \in \mathbb{N} \mid x_i \neq y_i\}$  si la suite  $(x_i)_{i \in \mathbb{N}}$  (resp.  $(y_i)_{i \in \mathbb{N}}$ ) désigne l'ensemble des lettres du mot  $\mathbf{x}$  (resp.  $\mathbf{y}$ ).

On vérifie alors la proposition suivante.

**Proposition 3.2.2.** *L'application  $\mathcal{D}$  définie précédemment sur  $\Sigma^\omega \times \Sigma^\omega$  est une distance. De plus,  $\mathcal{D}$  est ultramétrique, i.e. pour tous  $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in \Sigma^\omega$ ,  $\mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \leq \max\{\mathcal{D}(\mathbf{x}, \mathbf{z}), \mathcal{D}(\mathbf{z}, \mathbf{y})\}$ .*

L'espace  $(\Sigma^\omega, \mathcal{D})$  est dès lors métrique. Grâce à cette distance, la notion de convergence d'une suite de mots infinis vers un mot infini a du sens.

**Définition 3.2.3.** Soit  $(\mathbf{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de mots infinis sur l'alphabet  $\Sigma$ . La suite  $(\mathbf{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le mot  $\mathbf{x} \in \Sigma^\omega$  si, pour tout  $\eta > 0$ , il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que, pour tout  $n \geq N$ ,  $\mathcal{D}(\mathbf{z}_n, \mathbf{x}) < \eta$ .

De façon classique, nous pouvons démontrer l'unicité de la limite.

**Proposition 3.2.4.** *Soit  $(\mathbf{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de mots infinis sur l'alphabet  $\Sigma$ . Si la suite  $(\mathbf{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le mot  $\mathbf{x} \in \Sigma^\omega$  et vers le mot  $\mathbf{y} \in \Sigma^\omega$ , alors  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ .*

**Exemple 3.2.5.** Soit  $\Sigma = \{a, b\}$ . Posons  $\mathbf{z}_0 = bbb \cdots$  et  $\mathbf{z}_n = a^n bbb \cdots$  pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ . Alors la suite de mots infinis  $(\mathbf{z}_n)_{n \in \mathbb{N}}$  sur  $\Sigma$  converge vers le mot infini  $\mathbf{x} = aaa \cdots \in \Sigma^\omega$ .

Nous allons étendre la notion de convergence aux suites de mots finis.

**Définition 3.2.6.** Soit  $c$  une lettre n'appartenant pas à l'alphabet  $\Sigma$ . Tout mot fini  $w \in \Sigma^*$  est en correspondance biunivoque avec le mot infini  $wccc \cdots$  de  $(\Sigma \cup \{c\})^\omega$ . Une suite  $(w_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de mots finis sur  $\Sigma$  converge vers le mot infini  $\mathbf{y} \in \Sigma^\omega$  si, et seulement si, la suite  $(w_n ccc \cdots)_{n \in \mathbb{N}}$  de mots infinis converge au sens de la définition 3.2.3 vers  $\mathbf{y}$ .

**Exemple 3.2.7.** Considérons le morphisme  $f : \{a, b, c\}^* \rightarrow \{a, b, c\}^*$  défini par  $f(a) = abc$ ,  $f(b) = ac$  et  $f(c) = b$ . En procédant par récurrence, on voit que  $f^n(a)$  est un préfixe strict<sup>2</sup> de  $f^{n+1}(a)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et aussi que la suite des longueurs  $(|f^n(a)|)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante (puisque le morphisme est non effaçant, nous ne faisons qu'ajouter des lettres lors d'itérations successives du morphisme). Ainsi, il existe une suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  de mots finis non vides sur  $\{a, b, c\}$  telle que  $u_0 = a$  et  $f^n(a) = u_0 u_1 \cdots u_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On en tire que la suite  $(f^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le mot infini limite  $\mathbf{y} = u_0 u_1 u_2 \cdots u_n u_{n+1} \cdots \in \{a, b, c\}^\omega$ .

**Exemple 3.2.8.** Soit  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de mots finis non vides sur un alphabet  $\Sigma$ . Pour tout  $\ell \geq 0$ , on définit le mot fini  $v_\ell \in \Sigma^*$  comme étant la concaténation  $u_0 u_1 \cdots u_\ell$ . La suite  $(v_\ell)_{\ell \in \mathbb{N}}$  de mots finis non vides converge vers un mot infini limite. Ce mot infini limite est la concaténation des mots finis de la suite  $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . En particulier, pour une suite constante  $u_n = u \in \Sigma^*$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $v_\ell = u^{\ell+1}$  et la concaténation d'un nombre infini de copies du mot fini  $u$  est notée  $u^\omega$ .

### 3.2.2 Les morphismes prolongeables

**Définition 3.2.9.** Soient  $\Sigma$  un alphabet et  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme. Nous dirons que  $f$  est prolongeable en une lettre  $a \in \Sigma$  si  $f(a) = au$  pour un mot  $u$  de  $\Sigma^*$  et si  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(a)| = +\infty$ . Dans ce cas, la suite de mots finis  $(f^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le mot infini

$$f^\omega(a) := a u f(u) f^2(u) \cdots = \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(a).$$

Nous remarquons que  $f^\omega(a)$  est un point fixe<sup>3</sup> du morphisme  $f$ . Il s'agit même de l'unique point fixe de  $f$  commençant par la lettre  $a$ . Finalement, nous dirons que le mot  $f^\omega(a)$  est engendré par le morphisme  $f$  ou que  $f$  engendre ce mot.

2. Par préfixe strict d'un mot  $w \in \Sigma^*$ , nous entendons un préfixe de  $w$  de longueur strictement inférieure à  $|w|$ .

3. Un mot fini  $w$  (resp. un mot infini  $\mathbf{w}$ ) sur  $\Sigma$  est un point fixe du morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  si  $f(w) = w$  (resp.  $f(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ ).



**Exemple 3.2.10.** Reprenons le morphisme de Fibonacci défini sur l'alphabet  $\Sigma = \{0, 1\}$  par  $f(0) = 01$  et  $f(1) = 0$ . Alors  $f(0) = 0u$  où  $u = 1 \in \Sigma^*$ . De plus, si nous notons  $(F'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  la suite des nombres de Fibonacci de conditions initiales  $F'_0 = 1$  et  $F'_1 = 2$  et donnée par la relation de récurrence linéaire  $F'_{n+2} = F'_{n+1} + F'_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous voyons par récurrence que  $|f^n(0)| = F'_n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque la suite de Fibonacci  $(F'_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante, nous obtenons

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(0)| = \lim_{n \rightarrow +\infty} F'_n = +\infty.$$

Ainsi,  $f$  est prolongeable en 0. La suite de mots finis  $(f^n(0))_{n \in \mathbb{N}}$  converge donc vers le mot infini

$$f^\omega(0) = 01f(1)f^2(1)f^3(1) \cdots = 010010100100101001010 \cdots$$

appelé *mot de Fibonacci*.

**Remarque 3.2.11.** Soient  $\Sigma$  un alphabet et  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme prolongeable en une lettre  $a \in \Sigma$ . Alors  $(f^n)^\omega(a) = f^\omega(a)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ , i.e.  $f^n$  est prolongeable en  $a$  et engendre le même mot infini. Soit  $n \in \mathbb{N}_0$ . Par hypothèse, puisque  $f$  est prolongeable en  $a$ , nous savons qu'il existe un mot  $u \in \Sigma^*$  tel que  $f(a) = au$  de sorte que

$$f^\omega(a) = au f(u) f^2(u) \cdots .$$

Pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ ,  $f^m(a) = au f(u) \cdots f^{m-1}(u)$ . Alors  $f^n$  est prolongeable en  $a$  et

$$\begin{aligned} (f^n)^\omega(a) &= au f(u) \cdots f^{n-1}(u) f^n(uf(u) \cdots f^{n-1}(u)) f^{2n}(uf(u) \cdots f^{n-1}(u)) \cdots \\ &= au f(u) \cdots f^{n-1}(u) f^n(u) f^{n+1}(u) \cdots f^{2n-1}(u) f^{2n}(u) \cdots \\ &= f^\omega(a). \end{aligned}$$

**Définition 3.2.12.** Un mot infini  $\mathbf{w}$  sur  $\Sigma$  est dit *pur morphique* ou *pur substitutif* s'il existe un morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  prolongeable en une lettre  $a \in \Sigma$  tel que  $\mathbf{w} = f^\omega(a)$ . Un mot infini est *morphique* ou *substitutif* s'il est l'image, par un morphisme<sup>4</sup>, d'un mot pur morphique.

**Remarque 3.2.13.** Si  $\mathbf{w} = f^\omega(a) \in \Sigma^\omega$  est pur morphique, alors la lettre  $a \in \Sigma$  n'est pas mortelle, sinon il existe  $N \in \mathbb{N}_0$  tel que  $f^n(a) = \varepsilon$  pour tout  $n \geq N$ . Dans ce cas, la seconde condition de la définition 3.2.9 est mise en défaut et  $f$  n'est pas prolongeable en  $a$ .

Voici un exemple de mot pur morphique.

**Exemple 3.2.14.** Le mot (infini) de Fibonacci  $f^\omega(0)$  de l'exemple 3.2.10 est pur morphique.

Avant de donner un exemple de mot morphique, nous introduisons la notion de mot caractéristique d'un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$ . En fait, tout sous-ensemble de  $\mathbb{N}$  donne naissance à un mot infini sur  $\{0, 1\}$  de la façon suivante.

**Définition 3.2.15.** Soit  $X$  un sous-ensemble de  $\mathbb{N}$ . Le *mot caractéristique* de  $X$  est le mot infini  $\mathbf{x} = x_0 x_1 x_2 \cdots$  sur  $\{0, 1\}$  dont chacune des lettres est définie par

$$x_n = \begin{cases} 1 & \text{si } n \in X, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ .

---

4. Remarquons que nous ne demandons pas que le second morphisme soit un codage puisque cela semble plus restrictif. Nous allons cependant démontrer que le second morphisme peut être pris comme tel et que le premier morphisme peut être choisi non effaçant grâce à la version du théorème de Cobham qui nous intéresse.

**Exemple 3.2.16.** Considérons l'alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$  et le morphisme  $g : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  défini par  $g(a) = abcc$ ,  $g(b) = bcc$  et  $g(c) = c$ . Nous voyons que  $g$  est prolongeable en  $a$ . La première condition de la définition 3.2.9 est remplie avec le mot  $u = bcc$ . De plus, nous pouvons démontrer par récurrence que  $|g^n(a)| = (n+1)^2$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . La seconde condition de cette définition est donc vérifiée. La suite  $(g^n(a))_{n \in \mathbb{N}}$  converge alors vers le mot infini

$$g^\omega(a) = a bcc g(bcc) g^2(bcc) \cdots = abccbccccbcccccbcccccbcccccbcccccbcc \cdots := \mathbf{w}$$

et  $\mathbf{w}$  est pur morphique. Dans ce mot  $\mathbf{w}$ , la lettre  $a$  n'apparaît qu'au début puisque la restriction de  $g$  au sous-alphabet  $\{b, c\}$  est un sous-morphisme de  $g$ . De plus, nous voyons que deux occurrences successives de la lettre  $b$  sont séparées par des blocs de lettres  $c$  de plus en plus longs. Nous allons déterminer la taille de ces blocs de lettres  $c$ . Puisque

$$\mathbf{w} = (a) (bcc) (g(bcc)) (g^2(bcc)) \cdots$$

et que  $g(b) = bcc$  et  $g(c) = c$ , les positions des lettres  $b$  dans  $\mathbf{w}$  se déterminent au moyen des positions de chacune des premières lettres de  $g^n(bcc) = g^{n+1}(b)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On voit par récurrence que

$$g^n(b) = b \underbrace{c \cdots c}_{2n \text{ fois}}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . On en tire donc

$$g^n(bcc) = g^{n+1}(b) = b \underbrace{c \cdots c}_{2(n+1) \text{ fois}}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Ainsi, la première lettre de  $g^n(bcc)$ , à savoir  $b$ , est séparée de la première lettre de  $g^{n+1}(bcc)$ , à savoir  $b$ , par un bloc de lettres  $c$  de longueur  $2(n+1)$ . En fait, toutes les lettres  $b$  du mot  $\mathbf{w}$  apparaissent aux positions de la forme  $n^2$  avec  $n \in \mathbb{N}_0$ . En effet, nous savons que le mot  $\mathbf{w}$  ne contient des lettres  $b$  qu'au début de chaque bloc de la forme  $g^n(bcc)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  par définition du morphisme  $g$ . Par récurrence, nous pouvons montrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , la première lettre du facteur  $g^n(bcc)$  dans  $\mathbf{w}$  se situe en position  $(n+1)^2$ . Par conséquent, les deux lettres  $a$  et  $b$  apparaissent dans  $\mathbf{w}$  uniquement à des positions du type  $n^2$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . Les autres positions du mot  $\mathbf{w}$  sont exclusivement remplies par des lettres  $c$ . Considérons maintenant le codage  $\tau : \Sigma^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  défini par  $\tau(a) = 1 = \tau(b)$  et  $\tau(c) = 0$ . Nous avons alors

$$\tau(g^\omega(a)) = \tau(\mathbf{w}) = 110010000100000010000000010000000000100 \cdots := \mathbf{z}.$$

Ce mot est le mot caractéristique du sous-ensemble  $\{n^2 \mid n \in \mathbb{N}\}$  de  $\mathbb{N}$ . En effet, deux carrés successifs  $n^2$  et  $(n+1)^2$  sont séparés par  $(n+1)^2 - n^2 - 1 = 2n$  lettres (si l'on ne compte ni  $n^2$ , ni  $(n+1)^2$ ). On en tire que le mot caractéristique des carrés de  $\mathbb{N}$  est morphique puisqu'il est égal à  $\tau(g^\omega(a))$ .

Si nous disposons d'un alphabet  $\Sigma$  et d'un morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  prolongeable en une lettre  $a$  de  $\Sigma$  et si le mot pur morphique  $\mathbf{w} = f^\omega(a)$  contient au moins une fois toutes les lettres de  $\Sigma$ , alors on peut en dire davantage sur le réel  $\lambda(a)$  de la définition 3.1.12.

**Proposition 3.2.17.** Soient  $\Sigma$  un alphabet et  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme prolongeable en une lettre  $a$  de  $\Sigma$ . Notons aussi  $\mathbf{w} = f^\omega(a)$ . Soient  $\lambda(a) \in \text{Spec}(f) \cap (\mathbb{R}_{\geq 1} \cup \{0\})$  et  $d(a) \in \mathbb{N}$  les quantités de la définition 3.1.12 telles que  $|f^n(a)| = \Theta(n^{d(a)} \lambda(a)^n)$ . Si toutes les lettres de  $\Sigma$  apparaissent<sup>5</sup> dans  $\mathbf{w}$ , alors  $\lambda(a) = \rho(f)$ .

5. Le lecteur peut se demander pourquoi cette condition est essentielle. Nous répondons à cette question en fin de section.

*Démonstration.* Il est d'abord clair que  $\lambda(a) \leq \rho(f)$ . Par hypothèse, puisque toutes les lettres de  $\Sigma$  apparaissent dans  $\mathbf{w}$ , cela signifie qu'il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que  $f^N(a)$  contient au moins une fois toutes les lettres de  $\Sigma$ . Pour toute lettre  $b$  de  $\Sigma$ ,  $b$  est un facteur de  $f^N(a)$ , ce qui permet de dire que  $f^n(b)$  est un facteur de  $f^{N+n}(a)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand, on a donc

$$\sum_{b \in \Sigma} |f^{n-N}(b)| \leq |f^n(a)|.$$

La proposition 1.3.42 appliquée à la matrice  $\text{Mat}_f$  permet de trouver un bloc diagonal primitif<sup>6</sup>  $P$  tel que  $\rho(f^p) = \rho(\text{Mat}_f^p) = \rho(P)$  où  $p := p_f$ . De plus, par le lemme 2.2.2, le comportement asymptotique des éléments du bloc diagonal  $P$  est en  $\Theta(\rho(P)^n)$ . Si, pour une lettre  $b \in \Sigma$ , l'élément  $(\text{Mat}_f)_{b,b}$  se situe dans le bloc  $P$ , alors  $(\text{Mat}_f^{np})_{b,b} = \Theta(\rho(P)^n)$ . Par le lemme 2.4.1, puisque  $P$  provient d'un bloc irréductible  $A \neq (0)_{1 \times 1}$  de la forme triangulaire inférieure donnée par la proposition 1.3.22 appliquée à  $\text{Mat}_f$ , on sait que tous les restes sont rencontrés sur la ligne et la colonne d'indice  $b$  au sein du bloc  $A$  en question. En particulier, par le lemme 2.5.1, la partie « exponentielle » du comportement asymptotique<sup>7</sup> de  $|f^n(b)|$  est donnée par la racine  $p^{\text{ème}}$  réelle de  $\rho(P)$ , à savoir  $\rho(f)$ . On en tire que  $\lambda(a) \geq \rho(f)$  puisque  $\lambda(a)$  est le plus grand de tous les comportements.  $\square$

**Définition 3.2.18.** Soient  $\Sigma$  un alphabet et  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme prolongeable en une lettre  $a$  de  $\Sigma$ . Si le mot pur morphique  $\mathbf{w} = f^\omega(a)$  vérifie les hypothèses de la proposition précédente avec  $\lambda(a) = \rho(f) := \lambda$  et  $d(a) := d$ , alors  $\mathbf{w}$  est dit  $(\lambda, d)$ -pur morphique.

**Exemple 3.2.19.** Considérons l'alphabet  $\Sigma = \{0, 1, 2\}$  et le morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  défini par  $f(0) = 012$ ,  $f(1) = 11$  et  $f(2) = 2$ . Nous avons

$$\text{Mat}_f = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

avec  $\text{Spec}(f) = \{1, 1, 2\}$  et  $\rho(f) = 2$ . Nous pouvons montrer par récurrence que

$$\text{Mat}_f^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2^n - 1 & 2^n & 0 \\ n & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . D'une part, vu la forme que prend cette matrice, on en déduit que

$$|f^n(0)| = |f^n(0)|_0 + |f^n(0)|_1 + |f^n(0)|_2 = 1 + (2^n - 1) + n = \Theta(n^{d(0)}(\lambda(0))^n)$$

où  $\lambda(0) = 2 \in \text{Spec}(f)$  et  $d(0) = 0 \in \mathbb{N}$  en conservant les notations de la définition 3.1.12. D'autre part,  $f$  est prolongeable en 0. En effet,  $f(0) = 0u$  où  $u = 12 \in \Sigma^*$  et nous pouvons montrer par récurrence que  $|f^n(0)| = 2^n + n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  indépendamment du résultat obtenu sur la matrice  $\text{Mat}_f^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Puisque le mot infini  $f^\omega(0)$  contient toutes les lettres de  $\Sigma$ , nous sommes dans les conditions du lemme précédent et nous avons bien que  $\lambda(0) = \rho(f)$ . Le mot infini  $f^\omega(0)$  est donc  $(2, 0)$ -pur morphique.

Si le mot infini  $\mathbf{w}$  est  $(\lambda, d)$ -pur morphique, nous pouvons en dire un peu plus sur la nature de  $\lambda$  et de  $d$ .

6. Si tous les blocs diagonaux sont nuls de dimension 1, cela signifie que toutes les composantes fortement connexes du graphe  $G(\text{Mat}_f)$  sont des sommets isolés sans boucle. Dans ce cas, il est impossible que  $\mathbf{w}$  soit un mot infini puisque les longueurs des chemins entre deux sommets quelconques dans  $G(\text{Mat}_f)$  sont bornées.

7. Par la preuve de ce lemme et par la remarque 2.5.2, nous devons regarder tous les  $\lambda(c, b, r)$  avec  $c \in \Sigma$  et  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ . Comme  $\rho(f^p)$  apparaît au moins une fois pour chaque reste, on en déduit qu'il s'agit du maximum.

**Proposition 3.2.20.** Soient  $\Sigma$  un alphabet et  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme prolongeable en une lettre  $a$  de  $\Sigma$ . Notons aussi  $\mathbf{w} = f^\omega(a)$ . Si toutes les lettres de  $\Sigma$  apparaissent dans  $\mathbf{w}$  et si  $|f^n(a)| = \Theta(n^d \lambda^n)$  où  $\lambda := \rho(f)$  et  $d := d(a)$ , alors, soit  $\lambda > 1$  et  $d \in \mathbb{N}$ , soit  $\lambda = 1$  et  $d \in \mathbb{N}_0$ .

*Démonstration.* Par hypothèse, il existe des constantes  $K, L > 0$  telles que

$$Kn^d \lambda^n \leq |f^n(a)| \leq Ln^d \lambda^n$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand. Si  $0 \leq \lambda < 1$ , alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} Ln^d \lambda^n = 0 \quad \text{et} \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} Kn^d \lambda^n = 0$$

pour tout  $d \in \mathbb{N}$ . Par le théorème de l'Étau, nous devons alors avoir  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(a)| = 0$ , ce qui contredit la prolongeabilité de  $f$  en  $a$ . On en tire que  $\lambda \geq 1$ . Si  $\lambda > 1$ , alors n'importe quelle valeur naturelle de  $d$  peut apparaître. Par contre, si  $\lambda = 1$ , alors  $d$  doit être strictement positif, sinon on contredit de la même façon la prolongeabilité de  $f$  en  $a$ .  $\square$

**Définition 3.2.21.** Le couple  $(\lambda, d)$  de la définition 3.2.18 est appelé le *type de croissance* de  $f$  relatif (ou par rapport) à la lettre  $a \in \Sigma$ . Si  $\lambda > 1$ , le morphisme  $f$  est dit *exponentiel* par rapport à  $a$ . Sinon, lorsque  $\lambda = 1$ , il est *polynomial de degré  $d$*  par rapport à  $a$ .

Un mot infini est  $(\lambda, d)$ -*morphique* s'il est l'image par un morphisme d'un mot infini  $(\lambda, d)$ -pur morphique.

**Remarque 3.2.22.** Si  $\lambda > 1$ , nous ne gardons en général pas l'information concernant le degré  $d$  et nous mentionnons simplement que nous avons des mots infinis  $\lambda$ -(purs) morphiques.

**Exemple 3.2.23.** Reprenons l'exemple 3.2.19. Le type de croissance du morphisme  $f$  par rapport à la lettre 0 est donné par  $(2, 0)$ . Ce morphisme est par conséquent exponentiel par rapport à 0. Si nous définissons le codage  $\tau : \{0, 1, 2\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$  par  $\tau(0) = a$ ,  $\tau(1) = \tau(2) = b$ , le mot infini  $\tau(f^\omega(0))$  est 2-morphique.

**Exemple 3.2.24.** Continuons l'exemple 3.2.16. Alors  $\text{Spec}(g) = \{1, 1, 1\}$  et le type de croissance du morphisme  $g$  par rapport à la lettre  $a$  est donné par  $(1, 2)$ . Ainsi,  $g$  est polynomial de degré 2 par rapport à  $a$ . Le mot caractéristique des carrés est donc  $(1, 2)$ -morphique.

**Remarque 3.2.25.** Dans les propositions 3.2.17 et 3.2.20 et les définitions 3.2.18 et 3.2.21, nous avons imposé la condition que toutes les lettres de l'alphabet sur lequel le morphisme est défini doivent apparaître dans le mot infini considéré. Cette condition est demandée pour avoir des mots infinis  $(\lambda, d)$ -purs morphiques bien définis. En effet, prenons  $\Sigma = \{0, 1, 2\}$  et considérons le morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  défini par  $f(0) = 0001$ ,  $f(1) = 12$  et  $f(2) = 21$ . Alors

$$\text{Mat}_f = \begin{pmatrix} 3 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et  $\text{Spec}(f) = \{0, 2, 3\}$ . Ainsi, la valeur propre dominante de  $f$  est  $\lambda = \rho(f) = 3$ . De plus,  $f$  est prolongeable en 1 car  $f(1) = 1u$  où  $u = 2 \in \Sigma^*$  et, en procédant par récurrence, on peut montrer que  $|f^n(1)| = 2^n = |f^n(2)|$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ . Au vu de ce résultat, nous avons aussi

$$|f^n(1)| = \Theta(n^{d(1)} (\lambda(1))^n)$$

où  $\lambda(1) = 2 \in \text{Spec}(f)$  et  $d(1) = 0$ . Par conséquent,  $f^\omega(1)$  n'est pas 3-pur morphique puisque  $\lambda(1) \neq 3$ . Par contre, si nous restreignons l'alphabet  $\Sigma$  au sous-ensemble non vide  $\Gamma = \{1, 2\} \subseteq \Sigma$ ,  $f(\Gamma) \subseteq \Gamma^*$  et  $f_\Gamma$  est donc un sous-morphisme de  $f$ . Puisque toutes les lettres de  $\Gamma$  apparaissent dans  $f_\Gamma^\omega(1) = f^\omega(1)$ , nous pouvons dire que  $f^\omega(1)$  est 2-pur morphique<sup>8</sup>. Nous voyons que la condition imposée sur l'apparition de toutes les lettres de  $\Sigma$  au sein de  $f^\omega(1)$  est bien essentielle.

8. En fait, nous remarquons que  $f_\Gamma$  engendre le mot de Thue–Morse.

### 3.3 Éviter les morphismes effaçants

Dans cette section, nous démontrons le célèbre théorème de Cobham concernant les mots morphiques.

**Théorème 3.3.1 (Cobham, version morphique).** *Soit  $\mathbf{w} = g(f^\omega(a))$  un mot infini morphique sur un alphabet  $\Gamma$ . Alors il existe un alphabet  $\Pi$ , un morphisme non effaçant  $\sigma : \Pi^* \rightarrow \Pi^*$ , une lettre  $a' \in \Pi$  en laquelle  $\sigma$  est prolongeable et un codage  $\tau : \Pi^* \rightarrow \Gamma^*$  tels que  $\mathbf{w} = \tau(\sigma^\omega(a'))$ .*

Nous démontrons ce théorème en deux étapes. La première montre que nous pouvons choisir  $f$  et  $g$  non effaçants. Pour parvenir à cette étape, nous avons besoin de deux lemmes : le premier stipule que nous pouvons choisir  $f$  comme étant un morphisme non effaçant et le second prouve que nous pouvons supprimer toutes les lettres « inutiles », i.e. nous ne prenons plus en compte les lettres effacées par le morphisme  $g$  et telles que la restriction de  $f$  à ces lettres est un sous-morphisme de  $f$ . La seconde étape consiste à montrer que nous pouvons contrôler les longueurs des morphismes pour obtenir un codage. Ces deux étapes mises ensemble conduisent à un algorithme répondant à la question et présenté à la troisième sous-section. Cet algorithme permet en particulier de construire les morphismes  $\sigma$  et  $\tau$ . Finalement, en reprenant les notations du théorème 3.3.1, nous comparons le type de croissance du morphisme  $f$  par rapport à la lettre  $a$  et celui du morphisme  $\sigma$  par rapport à la lettre  $a'$ .

#### 3.3.1 Première étape

Comme annoncé un peu plus haut, pour aboutir à la première étape, nous avons besoin de deux lemmes. Voici le premier.

**Lemme 3.3.2.** *Soit  $\mathbf{w} = f^\omega(a)$  un mot infini pur morphique avec  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$ . Posons  $k = \#\Sigma_{\mathcal{M}}$  le nombre de lettres mortelles de  $f$ . Alors le morphisme*

$$f_{\mathcal{I}} := (\kappa_{\Sigma, \Sigma_{\mathcal{M}}} \circ f)|_{\Sigma_{\mathcal{I}}^*} : \Sigma_{\mathcal{I}}^* \rightarrow \Sigma_{\mathcal{I}}^*$$

*est non effaçant et tel que  $\mathbf{w} = f^k(f_{\mathcal{I}}^\omega(a))$ . De plus,  $\text{Mat}_{f_{\mathcal{I}}} = (\text{Mat}_f)_{\Sigma_{\mathcal{I}}}$ .*

*Démonstration.* Puisque le morphisme  $\kappa_{\Sigma, \Sigma_{\mathcal{M}}}$  est défini de  $\Sigma^*$  dans  $\Sigma_{\mathcal{I}}^*$ , le morphisme  $f_{\mathcal{I}}$  défini dans l'énoncé a bien un sens.

**Résultat intermédiaire.** Si  $k$  est le nombre de lettres mortelles de  $f$ , alors  $f^k(b) = \varepsilon$  pour toute lettre mortelle  $b$  de  $f$ . Pour tout  $\ell \in \mathbb{N}_0$ , définissons l'ensemble

$$\Sigma_{\mathcal{M}}^\ell = \{b \in \Sigma \mid f^\ell(b) = \varepsilon\}.$$

Si  $f$  possède des lettres mortelles, il est clair que  $\Sigma_{\mathcal{M}}^1 \neq \emptyset$ . On voit que la suite  $(\Sigma_{\mathcal{M}}^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$  est une suite d'ensembles emboîtés en croissant. De plus, s'il existe  $\ell \in \mathbb{N}_0$  tel que  $\Sigma_{\mathcal{M}}^\ell = \Sigma_{\mathcal{M}}^{\ell+1}$ , alors  $\Sigma_{\mathcal{M}}^{\ell+1} = \Sigma_{\mathcal{M}}^{\ell+2}$ . Autrement dit, s'il y a une égalité entre deux ensembles, elle se perpétue entre les ensembles suivants. Puisqu'il y a  $k$  lettres mortelles, il y a au plus  $k$  ensembles distincts emboîtés dans la suite  $(\Sigma_{\mathcal{M}}^\ell)_{\ell \in \mathbb{N}_0}$ . On en déduit que  $f^k(b) = \varepsilon$  pour toute lettre mortelle  $b$  de  $f$ .

**Preuve de la première partie de l'énoncé.** Cette preuve se découpe en deux morceaux : nous montrons d'abord que  $\mathbf{w} = f^k(f_{\mathcal{I}}^\omega(a))$  et ensuite que  $f_{\mathcal{I}}$  est non effaçant. Pour simplifier les notations, posons  $\kappa_{\mathcal{M}} = \kappa_{\Sigma, \Sigma_{\mathcal{M}}}$ . Nous montrons alors les deux résultats suivants :

(i)  $(f^k \circ \kappa_{\mathcal{M}})(\mathbf{w}) = \mathbf{w}$ ,

(ii)  $\kappa_{\mathcal{M}}(\mathbf{w}) = f_{\mathcal{I}}^\omega(a)$ .

**Preuve de (i).** Nous savons que  $\mathbf{w}$  est un point fixe de  $f$ . Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons aussi  $\mathbf{w} = f^n(\mathbf{w})$ . En particulier, nous voyons que  $\mathbf{w} = f^k(\mathbf{w})$ . Écrivons  $\mathbf{w} = w_0 w_1 w_2 \dots$  où  $w_i \in \Sigma$  pour tout  $i \in \mathbb{N}$ . On obtient

$$\mathbf{w} = f^k(\mathbf{w}) = f^k(w_0) f^k(w_1) f^k(w_2) \dots$$

Si  $w_i$ , avec  $i \in \mathbb{N}$ , est une lettre mortelle de  $\mathbf{w}$ , alors  $f^k(w_i) = \varepsilon$  en utilisant le résultat intermédiaire. Par conséquent,

$$\mathbf{w} = f^k(\mathbf{w}) = f^k(w_{i_0})f^k(w_{i_1})f^k(w_{i_2}) \cdots$$

où la suite d'indices naturels  $(i_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante et sélectionne exactement et dans l'ordre toutes les lettres immortelles de  $\mathbf{w}$ . Autrement dit, nous avons

$$\mathbf{w} = f^k(w_{i_0}w_{i_1}w_{i_2} \cdots) = f^k(\kappa_{\mathcal{M}}(\mathbf{w})).$$

L'exemple 3.3.3 illustre la situation.

**Preuve de (ii).** Tout d'abord, nous pouvons démontrer par récurrence sur  $\ell \in \mathbb{N}_0$  que

$$(\kappa_{\mathcal{M}} \circ f)^\ell = \kappa_{\mathcal{M}} \circ f^\ell \quad (3.1)$$

en utilisant le fait que  $f(\Sigma_{\mathcal{M}}) \subseteq \Sigma_{\mathcal{M}}^*$  et que

$$\kappa_{\mathcal{M}} \circ f^\ell \circ \kappa_{\mathcal{M}} = \kappa_{\mathcal{M}} \circ f^\ell \quad (3.2)$$

pour tout  $\ell \in \mathbb{N}$ . Ensuite, nous montrons que le morphisme  $f_{\mathcal{I}}$  est prolongeable en  $a$ . Puisque  $f$  est prolongeable en  $a$ , nous savons qu'il existe  $x \in \Sigma^*$  tel que  $f(a) = ax$  et que la lettre  $a$  n'est pas mortelle. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , en utilisant l'égalité (3.1), on a

$$f_{\mathcal{I}}^{n+1}(a) = (\kappa_{\mathcal{M}} \circ f)^{n+1}(a) = (\kappa_{\mathcal{M}} \circ f^{n+1})(a) = a\kappa_{\mathcal{M}}(xf(x) \cdots f^n(x)).$$

Si toutes les lettres du mot  $x$  sont mortelles, alors  $f^n(x) = \varepsilon$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand et le mot  $f^\omega(a)$  est fini, ce qui est impossible. Par conséquent, le mot  $x$  contient au moins une lettre immortelle et nous obtenons

$$f_{\mathcal{I}}(a) = a \underbrace{\kappa_{\mathcal{M}}(x)}_{\neq \varepsilon}.$$

En reproduisant ce raisonnement, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  fixé, le mot  $f^n(x)$  contient au moins une lettre immortelle. Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a

$$|f_{\mathcal{I}}^{n+1}(a)| = |f_{\mathcal{I}}^n(a)\kappa_{\mathcal{M}}(f^n(x))| = |f_{\mathcal{I}}^n(a)| + \underbrace{|\kappa_{\mathcal{M}}(f^n(x))|}_{>0} > |f_{\mathcal{I}}^n(a)|$$

et, puisque la suite  $(|f_{\mathcal{I}}^n(a)|)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas majorée<sup>9</sup>, elle converge vers  $+\infty$ . Les deux conditions de la définition 3.2.9 sont respectées, nous en déduisons que le morphisme  $f_{\mathcal{I}}$  est prolongeable en  $a$ . D'une part, grâce à l'égalité (3.1), nous avons

$$\lim_{\ell \rightarrow +\infty} (\kappa_{\mathcal{M}} \circ f^\ell)(a) = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} \underbrace{(\kappa_{\mathcal{M}} \circ f)^\ell(a)}_{= f_{\mathcal{I}}^\ell(a) \text{ car } a \in \Sigma_{\mathcal{I}}} = \lim_{\ell \rightarrow +\infty} f_{\mathcal{I}}^\ell(a) = f_{\mathcal{I}}^\omega(a)$$

puisque  $f_{\mathcal{I}}$  est prolongeable en  $a$ . D'autre part, puisque le morphisme  $\kappa_{\mathcal{M}} \circ f$  est prolongeable en  $a$ , nous savons que la suite  $((\kappa_{\mathcal{M}} \circ f^\ell)(a))_{\ell \in \mathbb{N}}$  converge vers le mot infini

$$\begin{aligned} (\kappa_{\mathcal{M}} \circ f)^\omega(a) &= a \kappa_{\mathcal{M}}(x) ((\kappa_{\mathcal{M}} \circ f)(\kappa_{\mathcal{M}}(x))) ((\kappa_{\mathcal{M}} \circ f)^2(\kappa_{\mathcal{M}}(x))) \cdots \\ &= a \kappa_{\mathcal{M}}(x) (\kappa_{\mathcal{M}} \circ f \circ \kappa_{\mathcal{M}})(x) ((\kappa_{\mathcal{M}} \circ f^2 \circ \kappa_{\mathcal{M}})(x)) \cdots \\ &= a \kappa_{\mathcal{M}}(x) (\kappa_{\mathcal{M}} \circ f)(x) ((\kappa_{\mathcal{M}} \circ f)^2(x)) \cdots \\ &= \kappa_{\mathcal{M}}(axf(x)f^2(x) \cdots) \\ &= \kappa_{\mathcal{M}}(\mathbf{w}) \end{aligned}$$

9. Si cette suite de naturels est majorée, elle ne prend qu'un nombre fini de valeurs. Dans ce cas, il existe  $n, n' \in \mathbb{N}$  avec  $n \neq n'$  tels que  $|f_{\mathcal{I}}^n(a)| = |f_{\mathcal{I}}^{n'}(a)|$ . On peut même supposer que  $n = n' + \ell$  avec  $\ell \in \mathbb{N}_0$ . Alors nous devons avoir  $\kappa_{\mathcal{M}}(f^n(x) \cdots f^{n+\ell-1}(x)) = \varepsilon$ , ce qui est interdit.

en utilisant les égalités (3.1) et (3.2). Par la proposition 3.2.4, nous en déduisons que  $\kappa_{\mathcal{M}}(\mathbf{w}) = f_{\mathcal{I}}^{\omega}(a)$ .

Pour finir cette partie, nous montrons que  $f_{\mathcal{I}}$  est non effaçant. Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe  $b \in \Sigma_{\mathcal{I}}$  tel que  $f_{\mathcal{I}}^n(b) = \varepsilon$  pour un certain  $n \in \mathbb{N}_0$ . Or, par définition de  $\kappa_{\mathcal{M}}$ , si  $x$  est un mot sur  $\Sigma$ ,  $\kappa_{\mathcal{M}}(x) = \varepsilon$  si, et seulement si,  $x \in \Sigma_{\mathcal{M}}^*$ . On en tire que  $f^n(b) \in \Sigma_{\mathcal{M}}^*$  et qu'il existe  $m \in \mathbb{N}_0$  tel que  $f^m(f^n(b)) = \varepsilon$ . Autrement dit,  $b \in \Sigma_{\mathcal{M}}$ , ce qui est contraire à l'hypothèse.

**Preuve de la seconde partie de l'énoncé.** Réordonnons les lettres de l'alphabet  $\Sigma$  en commençant par les lettres immortelles suivies des lettres mortelles de  $f$ . Il existe une matrice de permutation  $P$  de dimension  $\#\Sigma$  telle que

$$P^{-1} \text{Mat}_f P = \begin{pmatrix} (\text{Mat}_f)_{\Sigma_{\mathcal{I}}} & B \\ C & (\text{Mat}_f)_{\Sigma_{\mathcal{M}}} \end{pmatrix}.$$

Puisque  $f(\Sigma_{\mathcal{M}}) \subseteq \Sigma_{\mathcal{M}}^*$ , le bloc  $B$  est en fait nul et on a alors

$$P^{-1} \text{Mat}_f P = \begin{pmatrix} (\text{Mat}_f)_{\Sigma_{\mathcal{I}}} & 0 \\ * & (\text{Mat}_f)_{\Sigma_{\mathcal{M}}} \end{pmatrix}.$$

De plus, par définition de  $\kappa_{\mathcal{M}}$ , pour la même matrice de permutation, on a

$$P^{-1} \text{Mat}_{\kappa_{\mathcal{M}}} P = \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

si  $I$  est la matrice identité de dimension convenable (ici,  $\#\Sigma - k$ ). En utilisant la proposition 1.1.12, on en tire que

$$\begin{aligned} P^{-1} \text{Mat}_{\kappa_{\mathcal{M}} \circ f} P &= P^{-1} \text{Mat}_{\kappa_{\mathcal{M}}} \text{Mat}_f P = P^{-1} \text{Mat}_{\kappa_{\mathcal{M}}} P P^{-1} \text{Mat}_f P \\ &= \begin{pmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (\text{Mat}_f)_{\Sigma_{\mathcal{I}}} & 0 \\ * & (\text{Mat}_f)_{\Sigma_{\mathcal{M}}} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} (\text{Mat}_f)_{\Sigma_{\mathcal{I}}} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Puisque  $f_{\mathcal{I}}$  est la restriction du morphisme  $\kappa_{\mathcal{M}} \circ f$  à  $\Sigma_{\mathcal{I}}^*$ , nous avons  $\text{Mat}_{f_{\mathcal{I}}} = (\text{Mat}_f)_{\Sigma_{\mathcal{I}}}$ .  $\square$

Voici l'exemple dont nous parlions dans la preuve ci-dessus.

**Exemple 3.3.3.** Considérons l'alphabet  $\Sigma = \{1, 2, 3, 4\}$  et le morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  défini par  $f(1) = 123$ ,  $f(2) = 214$ ,  $f(3) = \varepsilon$  et  $f(4) = 3$ . On voit que  $f$  est prolongeable en 1 et que

$$\mathbf{w} = f^{\omega}(1) = 12321421412332141233 \dots$$

En posant  $\kappa_{\mathcal{M}} = \kappa_{\Sigma, \{3,4\}}$ , on voit que  $\kappa_{\mathcal{M}}(\mathbf{w}) = 122121122112 \dots$  et que

$$\begin{aligned} f(\kappa_{\mathcal{M}}(\mathbf{w})) &= f(122121122112 \dots) = 123214214123214123 \dots, \\ f^2(\kappa_{\mathcal{M}}(\mathbf{w})) &= f(123214214123214123) = 12321421412332141233 \dots = \mathbf{w}. \end{aligned}$$

Comme  $k = 2$  ici, il a fallu itérer deux fois le morphisme pour obtenir le mot infini  $\mathbf{w}$  de départ.

Nous illustrons le lemme précédent.

**Exemple 3.3.4.** Soit  $f : \{a, b, c\}^* \rightarrow \{a, b, c\}^*$  le morphisme défini par  $f(a) = abc$ ,  $f(b) = bca$  et  $f(c) = \varepsilon$ . On voit que  $f$  est prolongeable en  $a$ . Posons  $\mathbf{w} = f^{\omega}(a)$ . Si nous notons  $\Sigma = \{a, b, c\}$ , alors  $\Sigma_{\mathcal{I}} = \{a, b\}$ ,  $\Sigma_{\mathcal{M}} = \{c\}$  et  $k = 1$ . Le morphisme  $f_{\mathcal{I}} : \Sigma_{\mathcal{I}}^* \rightarrow \Sigma_{\mathcal{I}}^*$  est défini par  $f_{\mathcal{I}}(a) = ab$  et  $f_{\mathcal{I}}(b) = ba$ . On voit<sup>10</sup> dès lors que  $f_{\mathcal{I}}$  est non effaçant, prolongeable en  $a$  et aussi que  $f_{\mathcal{I}}^{\omega}(a) = abbabaab \dots$ . Ainsi,

$$f^k(f_{\mathcal{I}}^{\omega}(a)) = f(f_{\mathcal{I}}^{\omega}(a)) = abc bca bca abc \dots = f^{\omega}(a) = \mathbf{w}.$$

10. Remarquons qu'il s'agit du morphisme de Thue–Morse.

De plus, on a

$$\text{Mat}_f = \left( \begin{array}{c|c} (\text{Mat}_f)_{\Sigma_{\mathcal{I}}} & 0 \\ \hline * & (\text{Mat}_f)_{\Sigma_{\mathcal{M}}} \end{array} \right) = \left( \begin{array}{cc|c} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ \hline 1 & 1 & 1 \end{array} \right)$$

avec

$$(\text{Mat}_f)_{\Sigma_{\mathcal{I}}} = \left( \begin{array}{cc} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{array} \right) \quad \text{et} \quad (\text{Mat}_f)_{\Sigma_{\mathcal{M}}} = (1).$$

On voit clairement que  $\text{Mat}_{f_{\mathcal{I}}} = (\text{Mat}_f)_{\Sigma_{\mathcal{I}}}$ .

Nous passons au second lemme permettant d'obtenir la première étape. En comparaison avec le lemme précédent, le lemme suivant concerne un mot morphique obtenu grâce à deux morphismes  $f$  et  $g$ . Dans celui-ci, nous supposons que  $f$  est non effaçant. Si tel n'est pas le cas, nous utilisons le lemme 3.3.2 pour le rendre non effaçant. De plus, ce résultat permet d'enlever tous les sous-morphismes de  $f$  dont l'alphabet est effacé par  $g$ . En fait, la philosophie adoptée ici est de prendre le plus « gros », en termes de sous-alphabet, sous-morphisme de  $f$  vérifiant cette propriété même si le résultat reste vrai pour n'importe quel sous-morphisme la satisfaisant.

**Lemme 3.3.5.** *Soit  $\mathbf{w} = g(f^\omega(a))$  un mot infini morphique tel que  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  et  $g : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  sont deux morphismes où  $f$  est non effaçant. Soit  $\Delta$  un sous-alphabet non vide de  $\{b \in \Sigma \mid g(b) = \varepsilon\}$  tel que  $f_\Delta$  est un sous-morphisme de  $f$ . Alors les morphismes  $f_\varepsilon := (\kappa_{\Sigma, \Delta} \circ f)|_{(\Sigma \setminus \Delta)^*}$  et  $g_\varepsilon := g|_{(\Sigma \setminus \Delta)^*}$  sont tels que  $g_\varepsilon \circ f_\varepsilon^n = (g \circ f^n)|_{(\Sigma \setminus \Delta)^*}$  pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ . De plus, nous avons  $\mathbf{w} = g_\varepsilon(f_\varepsilon^\omega(a))$ . Enfin, nous avons  $\text{Mat}_{f_\varepsilon} = (\text{Mat}_f)_{\Sigma \setminus \Delta}$ .*

*Démonstration.* Tout d'abord, les deux morphismes  $f_\varepsilon$  et  $g_\varepsilon$  sont bien définis. De plus, on a  $f_\varepsilon : (\Sigma \setminus \Delta)^* \rightarrow (\Sigma \setminus \Delta)^*$ , ce qui entraîne que la composition  $g_\varepsilon \circ f_\varepsilon$  est elle aussi bien définie.

**Preuve de la première partie de l'énoncé.** Par définition de  $g_\varepsilon$ , nous avons

$$g = g_\varepsilon \circ \kappa_{\Sigma, \Delta}. \quad (3.3)$$

En effet, si  $c \in \Delta$ , alors  $(g_\varepsilon \circ \kappa_{\Sigma, \Delta})(c) = \varepsilon = g(c)$  et, si  $c \in \Sigma \setminus \Delta$ , alors  $(g_\varepsilon \circ \kappa_{\Sigma, \Delta})(c) = g_\varepsilon(c) = g(c)$ . Puisque  $f(\Delta) \subseteq \Delta^*$  par hypothèse, nous pouvons démontrer que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$\kappa_{\Sigma, \Delta} \circ f^n \circ \kappa_{\Sigma, \Delta} = \kappa_{\Sigma, \Delta} \circ f^n \quad (3.4)$$

et par récurrence que, pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$(\kappa_{\Sigma, \Delta} \circ f)^n = \kappa_{\Sigma, \Delta} \circ f^n. \quad (3.5)$$

Il s'agit en fait d'informations similaires aux égalités (3.1) et (3.2). Ainsi, pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ ,

$$g_\varepsilon \circ f_\varepsilon^n = g_\varepsilon \circ (\kappa_{\Sigma, \Delta} \circ f)^n|_{(\Sigma \setminus \Delta)^*} = (g_\varepsilon \circ \kappa_{\Sigma, \Delta} \circ f^n)|_{(\Sigma \setminus \Delta)^*} = (g \circ f^n)|_{(\Sigma \setminus \Delta)^*}$$

grâce aux égalités (3.3) et (3.5).

**Preuve de la deuxième partie de l'énoncé.** Pour montrer que  $f_\varepsilon$  est prolongeable en  $a$ , on procède de la même manière que dans la preuve du lemme 3.3.2. Pour cela, si  $x \in \Sigma^*$  est tel que  $f(a) = ax$ , on remarque que  $a \notin \Delta$  (sinon  $\mathbf{w}$  est vide) et que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,  $f^n(x)$  contient au moins une lettre de  $\Sigma \setminus \Delta$  (sinon  $\mathbf{w}$  est fini).

Ensuite, de la même façon que dans la preuve du lemme 3.3.2, on montre, d'une part, que la suite  $((\kappa_{\Sigma, \Delta} \circ f^n)(a))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le mot infini limite  $\kappa_{\Sigma, \Delta}(f^\omega(a))$  et, d'autre part, qu'elle converge vers le mot infini limite  $f_\varepsilon^\omega(a)$ . Par unicité de la limite, on en tire que  $\kappa_{\Sigma, \Delta}(f^\omega(a)) = f_\varepsilon^\omega(a)$ .



Finalement, puisque  $f^n(f^\omega(a)) = f^\omega(a)$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$\begin{aligned}
\mathbf{w} &= (g_\varepsilon \circ \kappa_{\Sigma, \Delta})(f^\omega(a)) \\
&= (g_\varepsilon \circ \kappa_{\Sigma, \Delta} \circ f^n)(f^\omega(a)) \\
&= (g_\varepsilon \circ \kappa_{\Sigma, \Delta} \circ f^n \circ \kappa_{\Sigma, \Delta})(f^\omega(a)) \\
&= (g_\varepsilon \circ (\kappa_{\Sigma, \Delta} \circ f)^n \circ \kappa_{\Sigma, \Delta})(f^\omega(a)) \\
&= (g_\varepsilon \circ f_\varepsilon^n \circ \kappa_{\Sigma, \Delta})(f^\omega(a)) \\
&= (g_\varepsilon \circ f_\varepsilon^n)(f_\varepsilon^\omega(a)) \\
&= g_\varepsilon(f_\varepsilon^\omega(a))
\end{aligned}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$  où, dans la première égalité, on a utilisé l'égalité (3.3), dans la troisième égalité, la formule (3.4), dans la quatrième égalité, la formule (3.5), dans la cinquième égalité, le fait que  $\kappa_{\Sigma, \Delta}(f^\omega(a)) \in (\Sigma \setminus \Delta)^* \cup (\Sigma \setminus \Delta)^\omega$  et la définition de  $f_\varepsilon$  et, dans la dernière, le fait que  $f_\varepsilon^\omega(a)$  est un point fixe de  $f_\varepsilon$ .

**Preuve de la troisième partie de l'énoncé.** À une matrice de permutation près, si nous considérons d'abord les lettres de  $\Sigma \setminus \Delta$  puis celles de  $\Delta$ , la matrice  $\text{Mat}_f$  peut s'écrire sous la forme

$$\begin{pmatrix} (\text{Mat}_f)_{\Sigma \setminus \Delta} & 0 \\ * & (\text{Mat}_f)_\Delta \end{pmatrix}$$

puisque  $f_\Delta$  est un sous-morphisme de  $f$ . En utilisant le même raisonnement que dans la preuve du lemme 3.3.2, nous avons aussi  $\text{Mat}_{f_\varepsilon} = (\text{Mat}_f)_{\Sigma \setminus \Delta}$ .  $\square$

Dans l'exemple qui suit, nous donnons explicitement les morphismes  $f_\varepsilon$  et  $g_\varepsilon$  du lemme précédent.

**Exemple 3.3.6.** Considérons le morphisme non effaçant  $f : \{a, b, c, d, e\}^* \rightarrow \{a, b, c, d, e\}^*$  défini par  $f(a) = abcde$ ,  $f(b) = bcea$ ,  $f(c) = cdd$ ,  $f(d) = cc$  et  $f(e) = dc$  et le morphisme effaçant  $g : \{a, b, c, d, e\}^* \rightarrow \{1, 2\}^*$  défini par  $g(a) = 12$ ,  $g(b) = \varepsilon$ ,  $g(c) = \varepsilon$ ,  $g(d) = \varepsilon$  et  $g(e) = 1$ .

Le plus grand sous-alphabet  $\Delta$  de  $\Sigma = \{a, b, c, d, e\}$  construit au moyen de lettres de  $\Sigma$  effacées par  $g$  et pour lequel  $f_\Delta$  est un sous-morphisme de  $f$  est donné par  $\Delta = \{c, d\}$ . En effet, puisque la lettre  $b$  est effacée par  $g$ , nous sommes tentés de l'inclure dans  $\Delta$ , mais, dans ce cas, nous n'avons plus  $f(\Delta) \subseteq \Delta^*$ . Ainsi, si  $\Gamma = \{1, 2\}$ , les deux morphismes  $f_\varepsilon : (\Sigma \setminus \Delta)^* \rightarrow (\Sigma \setminus \Delta)^*$  et  $g_\varepsilon : (\Sigma \setminus \Delta)^* \rightarrow \Gamma^*$  du lemme 3.3.5 sont donnés respectivement par

$$\begin{aligned}
f_\varepsilon(a) &= \kappa_{\Sigma, \Delta}(f(a)) = \kappa_{\Sigma, \Delta}(abcde) = abe, \\
f_\varepsilon(b) &= \kappa_{\Sigma, \Delta}(f(b)) = \kappa_{\Sigma, \Delta}(bcea) = bea, \\
f_\varepsilon(e) &= \kappa_{\Sigma, \Delta}(f(e)) = \kappa_{\Sigma, \Delta}(dc) = \varepsilon
\end{aligned}$$

et

$$g_\varepsilon(a) = g(a) = 12, \quad g_\varepsilon(b) = g(b) = \varepsilon \quad \text{et} \quad g_\varepsilon(e) = g(e) = 1.$$

Nous remarquons au passage que ces deux morphismes sont effaçants. Finalement, nous pouvons vérifier que  $\text{Mat}_{f_\varepsilon} = (\text{Mat}_f)_{\Sigma \setminus \Delta}$ .

Voici le lemme conduisant à la première étape. En fait, nous sommes proches d'obtenir le résultat que nous voulons. En effet, nous obtenons deux morphismes non effaçants, mais il restera encore à montrer que le second morphisme peut être pris comme un codage.

**Lemme 3.3.7.** Soit  $\mathbf{w} = g(f^\omega(a))$  un mot infini morphique avec  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  et  $g : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ . Soit  $\Sigma'$  l'ensemble des lettres  $b$  de  $\Sigma$  telles que  $g(f^{np}(b)) \neq \varepsilon$  pour une infinité de naturels  $n$  où  $p := p_f$ . Alors il existe deux morphismes non effaçants  $f' : \Sigma'^* \rightarrow \Sigma'^*$  et  $g' : \Sigma'^* \rightarrow \Gamma^*$  tels que  $\mathbf{w} = g'(f'^\omega(a))$  et tels que  $\text{Mat}_{f'} = (\text{Mat}_f)_{\Sigma'}$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, grâce à la proposition 1.3.42, la matrice  $\text{Mat}_{f^p}$  est égale, à une matrice de permutation près (de dimension  $\#\Sigma$ ), à une matrice triangulaire inférieure par blocs où les blocs diagonaux sont soit primitifs, soit égaux à la matrice  $(0)_{1 \times 1}$ . Pour prouver le présent résultat, nous appliquons les lemmes 3.3.2 et 3.3.5 plusieurs fois pour obtenir les morphismes  $f'$  et  $g'$  de l'énoncé.

Première étape : Nous appliquons le lemme 3.3.2 au morphisme  $f^p : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  et au mot pur morphique  $(f^p)^\omega(a) = f^\omega(a)$ . En reprenant les notations de ce lemme, nous prenons l'alphabet  $\Sigma_1 := \Sigma_{\mathcal{I}, f^p} \subseteq \Sigma$  et le morphisme non effaçant  $f_1 := f_{\mathcal{I}}^p : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_1^*$  tel que

$$f^\omega(a) = (f^p)^\omega(a) = f^{pk_0}(f_1^\omega(a))$$

où  $k_0$  est le nombre de lettres mortelles de  $f^p$  et tel que  $\text{Mat}_{f_1} = (\text{Mat}_{f^p})_{\Sigma_1}$ . En posant  $g_1 := (g \circ f^{pk_0})|_{\Sigma_1^*}$ , nous obtenons un morphisme de  $\Sigma_1^*$  dans  $\Gamma^*$  tel que

$$g_1(f_1^\omega(a)) = g(f^{pk_0}(f_1^\omega(a))) = g(f^\omega(a)) = \mathbf{w}.$$

Deuxième étape : Puisque le morphisme  $f_1$  est non effaçant, nous appliquons le lemme 3.3.5 aux morphismes  $f_1$  et  $g_1$ , au mot morphique  $g_1(f_1^\omega(a)) = \mathbf{w}$  et au plus gros sous-alphabet  $\Delta_1$  de  $\Sigma_1 \cap g_1^{-1}(\varepsilon)$  tel que  $(f_1)_{\Delta_1}$  est un sous-morphisme de  $f_1$ . Nous trouvons alors un alphabet  $\Sigma_2 := \Sigma_1 \setminus \Delta_1 \subseteq \Sigma_1$  et deux morphismes  $f_2 : \Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_2^*$ ,  $g_2 : \Sigma_2^* \rightarrow \Gamma^*$  respectivement définis par

$$f_2 := (\kappa_{\Sigma_1, \Delta_1} \circ f_1)|_{\Sigma_2^*} \text{ et } g_2 := g_1|_{\Sigma_2^*}$$

et tels que  $g_2(f_2^\omega(a)) = g_1(f_1^\omega(a)) = \mathbf{w}$ . De plus, nous avons aussi  $\text{Mat}_{f_2} = (\text{Mat}_{f_1})_{\Sigma_2} = (\text{Mat}_{f^p})_{\Sigma_2}$  puisque  $\Sigma_2 \subseteq \Sigma_1$ . Remarquons que le morphisme  $f_2$  peut être effaçant. C'est le cas lorsqu'une lettre  $b \in \Sigma_1$  n'est pas effacée par le morphisme  $g_1$ , mais telle que  $g_1(f_1(b)) = \varepsilon$ . En effet, si une telle lettre  $b$  existe<sup>11</sup>, nous avons  $f_1(b) \in \Delta_1^*$ , ce qui entraîne que

$$f_2(b) = \kappa_{\Sigma_1, \Delta_1}(\underbrace{f_1(b)}_{\in \Delta_1^*}) = \varepsilon.$$

Dans ce cas, nous recommençons la procédure.

Troisième étape : Grâce aux lemmes 3.3.2 et 3.3.5 appliqués au plus gros sous-alphabet possible, nous obtenons un alphabet  $\Sigma_3 \subseteq \Sigma_2$  et des morphismes  $f_3 : \Sigma_3^* \rightarrow \Sigma_3^*$ ,  $g_3 : \Sigma_3^* \rightarrow \Gamma^*$  tels que  $g_3(f_3^\omega(a)) = \mathbf{w}$  et tels que  $\text{Mat}_{f_3} = (\text{Mat}_{f^p})_{\Sigma_3}$ .

Dernière étape : Nous recommençons la procédure jusqu'à obtenir un morphisme  $f_\ell : \Sigma_\ell^* \rightarrow \Sigma_\ell^*$  non effaçant pour un naturel  $\ell$  et défini sur un alphabet  $\Sigma_\ell \subseteq \Sigma_{\ell-1} \subseteq \dots \subseteq \Sigma$ . Ceci est toujours possible puisque les applications successives des deux lemmes enlèvent des lettres à l'alphabet fini  $\Sigma$  et que la lettre  $a$  de départ n'est jamais retirée. De plus,  $g_\ell(f_\ell^\omega(a)) = \mathbf{w}$  et  $\text{Mat}_{f_\ell} = (\text{Mat}_{f^p})_{\Sigma_\ell}$ .

Pour conclure, nous avons encore besoin de quelques résultats. Nous montrons d'abord que, pour toute lettre  $b \in \Sigma_\ell$ ,

$$g_\ell(f_\ell^n(b)) \neq \varepsilon \tag{3.6}$$

pour une infinité d'entiers  $n \in \mathbb{N}$ . Procédons par l'absurde et supposons qu'il existe une lettre  $b \in \Sigma_\ell$  telle que  $g_\ell(f_\ell^n(b)) = \varepsilon$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand. Dans ce cas, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand, toutes les lettres du mot  $f_\ell^n(b)$  sont effacées par le morphisme  $g_\ell$ . Nous devrions encore répéter le lemme 3.3.5 alors que nous avons supposé que l'algorithme s'arrêterait à l'étape  $\ell$ .

Grâce au choix de  $p$  et puisque  $\text{Mat}_{f_\ell} = (\text{Mat}_{f^p})_{\Sigma_\ell}$ , nous allons montrer que sélectionner les lignes et les colonnes de l'alphabet  $\Sigma_\ell$  dans  $\text{Mat}_{f^p}$  ne découpe pas les blocs de la forme triangulaire inférieure par blocs de cette dernière matrice. Les seuls blocs « découpables » sont les blocs primitifs de dimension supérieure ou égale à 2. Considérons un tel bloc. Par primitivité, chaque lettre correspondant à ce bloc apparaît dans  $f^{tp}(b)$  pour toute lettre  $b$  correspondant au bloc et tout naturel  $t$

11. Observons que c'est le cas de la lettre  $e$  de l'exemple 3.3.6.

assez grand. Deux situations se présentent. Si toutes les lettres du bloc sont effacées, alors nous nous débarrassons du bloc entier puisque l'application des deux lemmes précédents retire de telles lettres. Par contre, si l'une des lettres du bloc n'est pas effacée, alors nous sommes obligés de garder le bloc tout entier puisque, si nous supprimons uniquement les lignes et les colonnes correspondant aux lettres effacées, nous n'avons pas un sous-morphisme comme demandé dans les lemmes précédents (à cause de la primitivité du bloc en question, toutes les lettres du bloc finissent par apparaître). En fait, nous avons déjà fait cette remarque pour les morphismes irréductibles (voir l'exemple 3.1.10).

Nous allons maintenant renforcer l'expression (3.6). Au morphisme  $f_\ell$  est associée la matrice d'incidence  $\mathbf{Mat}_{f_\ell}$ . Cette matrice a une forme triangulaire inférieure par blocs où les blocs diagonaux sont primitifs ou égaux à  $(0)_{1 \times 1}$  puisqu'elle est obtenue en sélectionnant certaines « grosses » lignes et certaines « grosses » colonnes de  $\mathbf{Mat}_{f^p}$ . Au morphisme  $f_\ell$ , on peut aussi associer un graphe orienté<sup>12</sup>  $G$  et la matrice d'adjacence  $M(G)$  de ce graphe est la transposée de  $\mathbf{Mat}_{f_\ell}$ . Cette matrice d'adjacence est une matrice triangulaire supérieure par blocs où les blocs diagonaux sont primitifs ou égaux à  $(0)_{1 \times 1}$ . En effet, si  $P$  est un bloc primitif sur la diagonale de  $\mathbf{Mat}_{f_\ell}$ , alors il donne naissance à un bloc primitif sur la diagonale de  $M(G)$  puisque, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , on a  $(P^\top)^n = (P^n)^\top$ .

Comme le morphisme  $f_\ell$  est non effaçant, toute lettre de  $\Sigma_\ell$  finit par atteindre une composante primitive dans  $G$  (rappelons que les sommets du graphe  $G$  sont exactement les lettres de  $\Sigma_\ell$ ); sinon la lettre en question n'atteint que des sommets isolés sans boucle dans  $G$  et est par conséquent effacée, ce qui est impossible. Par conséquent, nous pouvons renforcer l'expression (3.6). Pour toute lettre  $b \in \Sigma_\ell$ , il existe un naturel<sup>13</sup>  $N_b > 0$  tel que

$$g_\ell(f_\ell^n(b)) \neq \varepsilon \quad (3.7)$$

pour tout naturel  $n \geq N_b$ . Posons  $N = \max\{N_b \mid b \in \Sigma_\ell\}$ . Grâce à l'expression (3.7), le morphisme  $g' := g_\ell \circ f_\ell^N$  défini de  $\Sigma_\ell^*$  dans  $\Gamma^*$  est non effaçant. De plus, on a

$$g'(f_\ell^\omega(a)) = g_\ell(f_\ell^N(f_\ell^\omega(a))) = g_\ell(f_\ell^\omega(a)) = \mathbf{w}$$

puisque  $f_\ell^\omega(a)$  est un point fixe de  $f_\ell$ .

Ensuite<sup>14</sup>,  $\Sigma' = \Sigma_\ell$ . Posons finalement  $f' := f_\ell$ . Alors que  $f' : \Sigma'^* \rightarrow \Sigma'^*$  et  $g' : \Sigma'^* \rightarrow \Gamma^*$  sont deux morphismes non effaçants tels que  $g'(f'^\omega(a)) = g'(f_\ell^\omega(a)) = \mathbf{w}$  et tels que

$$\mathbf{Mat}_{f'} = \mathbf{Mat}_{f_\ell} = (\mathbf{Mat}_{f^p})_{\Sigma_\ell} = (\mathbf{Mat}_{f^p})_{\Sigma'},$$

ce qui achève la preuve. □

Nous illustrons la construction mise en place dans la preuve précédente.

**Exemple 3.3.8.** Reprenons les morphismes  $f$  et  $g$  de l'exemple 3.3.6. Comme  $f$  est non effaçant, il n'est pas nécessaire d'appliquer le lemme 3.3.2. En appliquant le lemme 3.3.5 une fois, nous avons obtenu les deux morphismes  $f_\varepsilon$  et  $g_\varepsilon$  de l'exemple 3.3.6. Comme nous l'avons déjà remarqué, le morphisme  $f_\varepsilon$  est effaçant et nous devons appliquer une nouvelle fois le lemme 3.3.2. L'unique lettre mortelle de  $f_\varepsilon$  est la lettre  $e$ . Nous obtenons le nouvel alphabet  $\Sigma' = \{a, b\}$  et les nouveaux morphismes  $f' : \Sigma'^* \rightarrow \Sigma'^*$  et  $g' : \Sigma'^* \rightarrow \Gamma^*$  définis respectivement par

$$f'(a) = \kappa_{\Sigma \setminus \Delta, \{e\}}(f_\varepsilon(a)) = \kappa_{\Sigma \setminus \Delta, \{e\}}(abe) = ab \quad \text{et} \quad f'(b) = \kappa_{\Sigma \setminus \Delta, \{e\}}(f_\varepsilon(b)) = \kappa_{\Sigma \setminus \Delta, \{e\}}(bea) = ba$$

12. Ce graphe permet de voir les liens entre une lettre et les lettres de son image. Comme dans l'introduction, l'arc  $(a, b)$  joint les lettres  $a$  et  $b$  de  $\Sigma_\ell$  dans le graphe si  $b$  apparaît dans le mot  $f_\ell(a)$ .

13. On sait que toute lettre  $b \in \Sigma_\ell$  finit par atteindre une composante primitive dans  $G$ . Dans ce cas, par primitivité, il existe un naturel  $N_b > 0$  tel que, pour tout naturel  $n \geq N_b$ , l'itération  $f_\ell^n(b)$  contient toutes les lettres de la composante primitive atteinte par  $b$ . Puisque nous avons gardé une telle composante, au moins une des lettres de celle-ci n'est pas effacée par  $g_\ell$ . Notons-la  $c$ . Dans ce cas, pour tout  $n \geq N_b$ , puisque le mot  $f_\ell^n(b)$  contient au moins une fois la lettre  $c$ , le mot  $g_\ell(f_\ell^n(b))$  contient le mot non vide  $g_\ell(c)$ .

14. Pour voir ceci, consulter l'annexe D.

et

$$g'(a) = g_\varepsilon(f_\varepsilon(a)) = g_\varepsilon(abe) = 121 \quad \text{et} \quad g'(b) = g_\varepsilon(f_\varepsilon(b)) = g_\varepsilon(beat) = 112$$

puisque nous avons une seule lettre mortelle. Ces deux nouveaux morphismes étant non effaçants, la procédure s'arrête<sup>15</sup>. Puisque  $p = p_f = 1$ , nous pouvons montrer que  $\text{Mat}_{f'} = (\text{Mat}_{f^p})_{\Sigma'}$ .

**Corollaire 3.3.9.** *Soit  $\mathbf{w} = g(f^\omega(a))$  un mot infini morphique avec  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  et  $g : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ . Considérons l'entier  $p := p_f$ , l'alphabet  $\Sigma' \subseteq \Sigma$  et les morphismes  $f' : \Sigma'^* \rightarrow \Sigma'^*$  et  $g' : \Sigma'^* \rightarrow \Gamma^*$  du lemme 3.3.7. Alors  $f_{\Sigma \setminus \Sigma'}^p$  est un sous-morphisme de  $f^p$ . De plus, si le morphisme  $f$  a un type de croissance égal à  $(\lambda, d)$  par rapport à la lettre  $a$ , exactement une des situations suivantes a lieu :*

- (i)  $\lambda \notin \text{Spec}(f_{\Sigma \setminus \Sigma'})$  et  $f'$  a un type de croissance égal à  $(\lambda^p, d)$  par rapport à  $a$  ;
- (ii)  $\lambda \in \text{Spec}(f_{\Sigma \setminus \Sigma'})$  et  $\lambda \notin \text{Spec}(\kappa_{\Sigma, \Sigma \setminus \Sigma'} \circ f|_{\Sigma'^*})$  et il existe  $\lambda' \in \text{Spec}(f)$  avec  $\lambda' < \lambda$  et  $d' \in \mathbb{N}$  tels que  $f'$  a un type de croissance égal à  $(\lambda'^p, d')$  par rapport à  $a$  ;
- (iii)  $\lambda \in \text{Spec}(f_{\Sigma \setminus \Sigma'}) \cap \text{Spec}(\kappa_{\Sigma, \Sigma \setminus \Sigma'} \circ f|_{\Sigma'^*})$  et il existe  $d' \in \mathbb{N}$  avec  $d' \leq d$  tel que  $f'$  a un type de croissance égal à  $(\lambda^p, d')$  par rapport à  $a$ .

*Démonstration.* Montrons tout d'abord que  $f_{\Sigma \setminus \Sigma'}^p$  est un sous-morphisme de  $f^p$ . Par définition de  $\Sigma'$ ,  $\Sigma \setminus \Sigma'$  est l'ensemble des lettres  $b \in \Sigma$  telles que  $g(f^{np}(b)) = \varepsilon$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand. Si  $b \in \Sigma \setminus \Sigma'$ , alors il est clair que  $g(f^{np}(f^p(b))) = g(f^{(n+1)p}(b)) = \varepsilon$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand, ce qui signifie que  $f^p(\Sigma \setminus \Sigma') \subseteq (\Sigma \setminus \Sigma')^*$ .

Passons à la seconde partie de la preuve. Par la proposition 1.3.42, il existe une matrice de permutation  $T$  de dimension  $\#\Sigma$  telle que

$$T^{-1} \text{Mat}_{f^p} T = \begin{pmatrix} P_1 & 0 & \cdots & 0 \\ B_{2,1} & P_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ B_{t,1} & \cdots & B_{t,t-1} & P_t \end{pmatrix}$$

où les blocs diagonaux sont soit primitifs, soit égaux à  $(0)_{1 \times 1}$ . Par le lemme 3.3.7, nous savons que  $\text{Mat}_{f'} = (\text{Mat}_{f^p})_{\Sigma'}$  et qu'en sélectionnant les lignes et les colonnes correspondant à l'alphabet  $\Sigma'$ , nous prenons les blocs dans leur entièreté. Par conséquent, quitte à modifier encore la matrice de permutation  $T$ , nous pouvons supposer que

$$T^{-1} \text{Mat}_{f^p} T = \begin{pmatrix} (\text{Mat}_{f^p})_{\Sigma'} & 0 \\ * & (\text{Mat}_{f^p})_{\Sigma \setminus \Sigma'} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \text{Mat}_{f'} & 0 \\ * & \text{Mat}_{f_{\Sigma \setminus \Sigma'}^p} \end{pmatrix}$$

et qu'il existe un naturel  $s \in \{1, \dots, t\}$  tel que, à une matrice de permutation près, la matrice d'incidence  $\text{Mat}_{f'}$  prend la forme

$$\begin{pmatrix} P'_1 & 0 & \cdots & 0 \\ B'_{2,1} & P'_2 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ B'_{s,1} & \cdots & B'_{s,s-1} & P'_s \end{pmatrix}$$

où les blocs sont obtenus en restreignant l'alphabet  $\Sigma$  à  $\Sigma'$ . Les blocs diagonaux, puisqu'ils sont pris dans leur entièreté, sont par conséquent primitifs ou égaux à la matrice  $(0)_{1 \times 1}$ . Supposons que le morphisme  $f$  a un type de croissance égal à  $(\lambda, d)$  par rapport à la lettre  $a$ . Nous savons même que  $\lambda = \rho(f)$  par la proposition 3.2.17. Nous souhaitons connaître le type de croissance<sup>16</sup> du morphisme

15. Observons que le morphisme  $f'$  est en fait le morphisme de Thue–Morse.

16. Notons que, par construction, toutes les lettres « inutiles » ne sont pas gardées dans  $\Sigma'$ . Par conséquent, toutes les lettres de  $\Sigma'$  sont dans le mot infini  $f'^\omega(a)$  et la recherche du type de croissance du morphisme  $f'$  par rapport à la lettre  $a$  a du sens. De plus, la partie exponentielle du type de croissance de  $f'$  par rapport à  $a$  est donnée par  $\rho(f')$ .

$f'$  par rapport à la lettre  $a$ . Par le lemme 2.5.1 et la remarque 2.5.2, il s'obtient en regardant les comportements asymptotiques, pour n'importe quel reste, de tous les éléments de la colonne associée à la lettre  $a$ . Puisque  $f'$  est obtenu en restreignant  $f^p$ , plusieurs cas apparaissent.

Premier cas : Si  $\lambda \notin \text{Spec}(f_{\Sigma \setminus \Sigma'})$ , nous ne supprimons pas la quantité maximale  $\lambda$  et le morphisme  $f'$  a un type de croissance égal à  $(\lambda^p, d)$  par rapport à la lettre  $a$ .

Deuxième cas : Si  $\lambda \in \text{Spec}(f_{\Sigma \setminus \Sigma'})$  et  $\lambda \notin \text{Spec}(\kappa_{\Sigma, \Sigma \setminus \Sigma'} \circ f|_{\Sigma'^*})$ , alors la quantité maximale  $\lambda$  est supprimée. Par conséquent, il existe  $\lambda' \in \text{Spec}(f)$  avec  $\lambda' < \lambda$  et  $d' \in \mathbb{N}$  tels que  $f'$  a un type de croissance égal à  $(\lambda'^p, d')$  par rapport à la lettre  $a$ .

Troisième cas : Si  $\lambda \in \text{Spec}(f_{\Sigma \setminus \Sigma'}) \cap \text{Spec}(\kappa_{\Sigma, \Sigma \setminus \Sigma'} \circ f|_{\Sigma'^*})$ , alors certaines apparitions de la quantité maximale sont supprimées et d'autres pas. Dans ce cas,  $f'$  a un type de croissance égal à  $(\lambda^p, d')$  par rapport à la lettre  $a$  pour un naturel  $d' \leq d$  puisque le comportement avec le degré le plus grand peut éventuellement être supprimé.  $\square$

Dans les trois exemples qui suivent, nous illustrons le corollaire et modifions légèrement un même morphisme pour obtenir les différents cas de l'énoncé.

**Exemple 3.3.10.** Considérons le morphisme  $f : \{a, b, c, d\}^* \rightarrow \{a, b, c, d\}^*$  défini par  $f(a) = abcd$ ,  $f(b) = ba$ ,  $f(c) = c$  et  $f(d) = \varepsilon$  et le morphisme  $g : \{a, b, c, d\}^* \rightarrow \{1, 2\}^*$  défini par  $g(a) = 1$ ,  $g(b) = 22$ ,  $g(c) = \varepsilon$  et  $g(d) = 11$ . Pour obtenir les morphismes  $f'$  et  $g'$  de l'énoncé du corollaire précédent, nous devons appliquer alternativement les lemmes 3.3.2 et 3.3.5. Posons  $\Sigma = \{a, b, c, d\}$  et  $\Gamma = \{1, 2\}$  et reprenons les notations de la procédure mise en place dans la preuve du lemme 3.3.7. Puisque

$$\text{Mat}_f = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right),$$

nous avons  $p = p_f = 1$ . Nous voyons que  $f^p = f$  ne possède qu'une seule lettre mortelle, à savoir la lettre  $d$ , et donc que  $k_0 = 1$ . La première application du lemme 3.3.2 fournit le nouvel alphabet  $\Sigma_1 = \{a, b, c\}$  et les morphismes

$$f_1 : \Sigma_1^* \rightarrow \Sigma_1^* : \begin{cases} a \mapsto f_{\mathcal{I}}(a) = abc, \\ b \mapsto f_{\mathcal{I}}(b) = ba, \\ c \mapsto f_{\mathcal{I}}(c) = c \end{cases}$$

et

$$g_1 : \Sigma_1^* \rightarrow \Gamma^* : \begin{cases} a \mapsto (g \circ f^{pk_0})(a) = 12211, \\ b \mapsto (g \circ f^{pk_0})(b) = 221, \\ c \mapsto (g \circ f^{pk_0})(c) = \varepsilon. \end{cases}$$

Nous appliquons le lemme 3.3.5 aux morphismes  $f_1$  et  $g_1$ . Nous avons  $\Delta_1 = \{c\}$  et nous obtenons le nouvel alphabet  $\Sigma_2 = \{a, b\}$  et les morphismes

$$f_2 : \Sigma_2^* \rightarrow \Sigma_2^* : \begin{cases} a \mapsto (\kappa_{\Sigma_1, \Delta_1} \circ f_1)(a) = ab, \\ b \mapsto (\kappa_{\Sigma_1, \Delta_1} \circ f_1)(b) = ba \end{cases}$$

et

$$g_2 : \Sigma_2^* \rightarrow \Gamma^* : \begin{cases} a \mapsto g_1(a) = 12211, \\ b \mapsto g_1(b) = 221. \end{cases}$$

Les deux derniers morphismes étant non effaçants, la procédure s'arrête. Ainsi,  $\Sigma' = \{a, b\}$ ,  $f' = f_2$  et  $g' = g_2$ .

La première partie du corollaire précédent est remplie puisque  $f_{\Sigma \setminus \Sigma'}^p = f_{\Sigma \setminus \Sigma'}$  est un sous-morphisme de  $f^p = f$ . De plus, on obtient la décomposition de la matrice  $\text{Mat}_f$  au moyen des blocs

$$P_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, B_{2,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, P_2 = \begin{pmatrix} 1 \end{pmatrix}, B_{3,1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \end{pmatrix}, B_{3,2} = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix} \text{ et } P_3 = \begin{pmatrix} 0 \end{pmatrix}$$

et nous voyons que

$$\text{Mat}_{f'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = P_1$$

est bien une matrice inférieure par blocs où les blocs diagonaux sont primitifs. On peut aussi montrer que

$$\text{Spec}(f) = \{0, 0, 1, 2\}, \text{Spec}(f') = \{0, 2\}, \text{Spec}(f_{\Sigma \setminus \Sigma'}) = \{0, 1\} \text{ et } \text{Spec}(\kappa_{\Sigma, \Sigma \setminus \Sigma'} \circ f|_{\Sigma'^*}) = \{0, 2\}.$$

Comme toutes les lettres de  $\Sigma$  sont dans  $f^\omega(a)$ , par la proposition 3.2.17, le morphisme  $f$  a un type de croissance égal à  $(\lambda = 2, d(a))$  par rapport à la lettre  $a$ . Déterminons  $d(a) \in \mathbb{N}$ . Pour tout  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , on peut montrer par récurrence que

$$\text{Mat}_f^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} - 1 & 1 & 0 \\ 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

ce qui permet d'affirmer que  $d(a) = 0$ .

D'une part, puisque toutes les lettres de  $\Sigma'$  sont dans  $f'^\omega(a)$ , nous savons, par le même argument que précédemment, que le morphisme  $f'$  a un type de croissance égal à  $(\lambda' = 2, d'(a))$  par rapport à la lettre  $a$ . De plus, on peut montrer par récurrence que

$$\text{Mat}_{f'}^n = 2^{n-1} \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ , ce qui entraîne que  $d'(a) = 0$ .

D'autre part, nous sommes dans le premier cas du corollaire 3.3.9. Ce résultat nous dit alors que le type de croissance du morphisme  $f'$  par rapport à la lettre  $a$  est égal à  $(\lambda^1, d(a)) = (2, 0)$ , ce qui coïncide avec le résultat établi avant.

Dans l'exemple précédent, nous avons obtenu le premier cas du corollaire 3.3.9. Nous allons illustrer les deux autres possibilités.

**Exemple 3.3.11.** Considérons le morphisme  $f : \{a, b, c, d\}^* \rightarrow \{a, b, c, d\}^*$  défini par  $f(a) = abcd$ ,  $f(b) = ba$ ,  $f(c) = ccc$  et  $f(d) = \varepsilon$  et le morphisme  $g : \{a, b, c, d\}^* \rightarrow \{1, 2\}^*$  de l'exemple 3.3.10. Le morphisme  $f$  du présent exemple est presque le même que celui de l'exemple 3.3.10. Par conséquent, nous pouvons suivre un raisonnement similaire et voir que les morphismes  $f'$  et  $g'$  sont donnés par ceux de l'exemple précédent avec  $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ ,  $\Sigma' = \{a, b\}$  et  $\Gamma = \{1, 2\}$ . On a aussi

$$\text{Mat}_f = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad p_f = 1 \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{f'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Spec}(f) = \{0, 0, 2, 3\}, \text{Spec}(f') = \{0, 2\}, \text{Spec}(f_{\Sigma \setminus \Sigma'}) = \{0, 3\} \text{ et } \text{Spec}(\kappa_{\Sigma, \Sigma \setminus \Sigma'} \circ f|_{\Sigma'^*}) = \{0, 2\}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , on peut montrer par récurrence que

$$\text{Mat}_f^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 2 \cdot 3^{n-1} - 2^{n-1} & 3^{n-1} - 2^{n-1} & 3^n & 0 \\ 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme toutes les lettres de  $\Sigma$  sont dans  $f^\omega(a)$ , par la proposition 3.2.17 et grâce à la forme de la matrice  $\text{Mat}_f^n$ , le morphisme  $f$  a un type de croissance égal à  $(\lambda = 3, d(a) = 0)$  par rapport à la lettre  $a$ .

D'une part, par le raisonnement de l'exemple précédent, nous voyons que le morphisme  $f'$  a un type de croissance égal à  $(\lambda' = 2, d'(a) = 0)$  par rapport à la lettre  $a$ .

D'autre part, nous sommes dans le deuxième cas du corollaire 3.3.9. Ce résultat nous dit alors que le type de croissance du morphisme  $f'$  par rapport à la lettre  $a$  est égal à  $(\lambda''^1, d''(a))$  avec

$$\lambda'' \in \text{Spec}(f), \lambda'' < \lambda = 3$$

et  $d''(a) \in \mathbb{N}$ , ce qui coïncide avec le résultat établi avant en prenant  $\lambda'' = 2$  et  $d''(a) = 0$ .

**Exemple 3.3.12.** Considérons le morphisme  $f : \{a, b, c, d\}^* \rightarrow \{a, b, c, d\}^*$  défini par  $f(a) = abcd$ ,  $f(b) = ba$ ,  $f(c) = cc$  et  $f(d) = \varepsilon$  et le morphisme  $g : \{a, b, c, d\}^* \rightarrow \{1, 2\}^*$  de l'exemple 3.3.10. Le morphisme  $f$  de l'actuel exemple est sensiblement le même que celui des exemples 3.3.10 et 3.3.11. Par conséquent, nous pouvons raisonner de la même façon et voir que les morphismes  $f'$  et  $g'$  sont donnés par ceux de l'exemple précédent avec  $\Sigma = \{a, b, c, d\}$ ,  $\Sigma' = \{a, b\}$  et  $\Gamma = \{1, 2\}$ . On a aussi

$$\text{Mat}_f = \left( \begin{array}{cc|cc} 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ \hline 1 & 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{array} \right), \quad p_f = 1 \quad \text{et} \quad \text{Mat}_{f'} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et

$$\text{Spec}(f) = \{0, 0, 2, 2\}, \text{Spec}(f') = \{0, 2\}, \text{Spec}(f_{\Sigma \setminus \Sigma'}) = \{0, 2\} \quad \text{et} \quad \text{Spec}(\kappa_{\Sigma, \Sigma \setminus \Sigma'} \circ f|_{\Sigma^*}) = \{0, 2\}.$$

Pour tout  $n \in \mathbb{N}_{\geq 2}$ , on peut montrer par récurrence que

$$\text{Mat}_f^n = \begin{pmatrix} 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ 2^{n-1} & 2^{n-1} & 0 & 0 \\ (n+1)2^{n-2} & (n-1)2^{n-2} & 2^n & 0 \\ 2^{n-2} & 2^{n-2} & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Comme toutes les lettres de  $\Sigma$  sont dans  $f^\omega(a)$ , par la proposition 3.2.17 et grâce à la forme de la matrice  $\text{Mat}_f^n$ , le morphisme  $f$  a un type de croissance égal à  $(\lambda = 2, d(a) = 1)$  par rapport à la lettre  $a$ .

D'une part, par le raisonnement des exemples précédents, nous voyons que le morphisme  $f'$  a un type de croissance égal à  $(\lambda' = 2, d'(a) = 0)$  par rapport à la lettre  $a$ .

D'autre part, nous sommes dans le dernier cas du corollaire 3.3.9. Ce résultat nous dit alors que le type de croissance du morphisme  $f'$  par rapport à la lettre  $a$  est égal à  $(\lambda''^1 = 2, d''(a))$  avec  $d''(a) \leq d(a)$ , ce qui coïncide avec le résultat établi avant.

### 3.3.2 Seconde étape

Voici la seconde étape de notre procédure. C'est grâce à ce dernier lemme que nous obtenons le codage voulu.

**Lemme 3.3.13.** Soit  $\mathbf{w} = g(f^\omega(a))$  un mot infini morphique avec  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  et  $g : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  deux morphismes non effaçants. Alors il existe deux naturels strictement positifs  $p$  et  $q$  tels que

$$|(g \circ f^p)(f^q(a))| > |(g \circ f^p)(a)|$$

et

$$|(g \circ f^p)(f^q(b))| \geq |(g \circ f^p)(b)|$$

pour toute lettre  $b \in \Sigma$ . De plus,  $(g \circ f^p)((f^q)^\omega(a)) = \mathbf{w}$ .

Pour démontrer ce lemme, nous choisissons la démonstration donnée par J. Cassaigne et F. Nicolas<sup>17</sup>. En fait, ils démontrent même un résultat plus fort puisqu'ils ne supposent pas que les morphismes sont non effaçants. Il s'agit d'une démonstration en trois temps : nous devons d'abord prouver deux lemmes concernant les suites de naturels avant d'avoir enfin le résultat.

**Lemme 3.3.14.** *De toute suite de naturels, on peut extraire une sous-suite constante ou une sous-suite strictement croissante.*

*Démonstration.* Soit  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de naturels. Nous allons scinder la preuve en deux parties selon que la suite est majorée ou non.

Supposons tout d'abord que la suite  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est majorée. Alors  $\nu_n$  ne prend qu'un nombre fini de valeurs distinctes lorsque  $n$  parcourt  $\mathbb{N}$ . Ainsi, il existe une valeur  $m \in \mathbb{N}$  telle que l'ensemble  $\{n \in \mathbb{N} \mid \nu_n = m\}$  compte une infinité d'éléments. Par conséquent, on peut extraire une sous-suite de  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  qui est constante et égale à cette valeur  $m$ .

Supposons que la suite  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  n'est pas majorée. Dans ce cas, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , le naturel  $M = \max\{\nu_0, \dots, \nu_p\}$  ne peut majorer  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$ . Par conséquent, il existe un naturel  $q > p$  tel que  $\nu_q > \nu_p$ . En effet, si un tel naturel n'existe pas, cela signifie que, pour tout  $q > p$ , on a  $\nu_q \leq \nu_p$  et la suite  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  est alors majorée par  $M$ , ce qui est proscrit par hypothèse. Grâce à cette constatation, nous pouvons construire par récurrence une sous-suite de  $(\nu_n)_{n \in \mathbb{N}}$  strictement croissante.  $\square$

**Lemme 3.3.15.** *Soit  $d \in \mathbb{N}_0$ . Si  $(\nu_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (\nu_n^{(d)})_{n \in \mathbb{N}}$  sont des suites de naturels, alors il existe  $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  strictement croissant tel que, pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $(\nu_{\varphi(n)}^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissant ou constant.*

*Démonstration.* Nous procédons par récurrence sur  $d$ . Le cas de base correspondant à  $d = 1$  est vérifié par le lemme 3.3.14. Supposons que le résultat est vérifié pour  $d - 1$  suites de naturels avec  $d \geq 2$  et montrons-le pour  $d$  suites. Soient  $(\nu_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (\nu_n^{(d)})_{n \in \mathbb{N}}$  des suites de naturels. D'une part, en appliquant l'hypothèse de récurrence aux suites  $(\nu_n^{(1)})_{n \in \mathbb{N}}, \dots, (\nu_n^{(d-1)})_{n \in \mathbb{N}}$ , il existe  $\psi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  strictement croissant tel que, pour tout  $i \in \{1, \dots, d - 1\}$ ,  $(\nu_{\psi(n)}^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissant ou constant. D'autre part, puisque la suite  $(\nu_{\psi(n)}^{(d)})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de naturels, le lemme 3.3.14 procure  $\psi' \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  strictement croissant tel que  $(\nu_{(\psi \circ \psi')(n)}^{(d)})_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissant ou constant. Pour finir, posons  $\varphi = \psi \circ \psi'$ . Dans ce cas,  $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  est strictement croissant par composition de fonctions strictement croissantes et tel que, pour tout  $i \in \{1, \dots, d\}$ ,  $(\nu_{\varphi(n)}^{(i)})_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissant ou constant puisque, pour  $i \in \{1, \dots, d - 1\}$ ,  $\psi'$  sélectionne une sous-suite d'une sous-suite strictement croissante ou constante.  $\square$

**Lemme 3.3.16.** *Soit  $\mathbf{w} = g(f^\omega(a))$  un mot infini morphique avec  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  et  $g : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  deux morphismes. Alors il existe deux naturels strictement positifs  $p$  et  $q$  tels que*

$$|(g \circ f^p)(f^q(a))| > |(g \circ f^p)(a)|$$

et

$$|(g \circ f^p)(f^q(b))| \geq |(g \circ f^p)(b)|$$

pour toute lettre  $b \in \Sigma$ . De plus,  $(g \circ f^p)((f^q)^\omega(a)) = \mathbf{w}$ .

*Démonstration.* Pour toute lettre  $b \in \Sigma$ , définissons  $\nu^{(b)} : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N} : n \mapsto \nu_n^{(b)} = |g(f^n(b))|$ . En fait,  $(\nu_n^{(b)})_{n \in \mathbb{N}}$  est une suite de naturels pour toute lettre  $b \in \Sigma$ . La famille  $\mathcal{F} = \{(\nu_n^{(b)})_{n \in \mathbb{N}} \mid b \in \Sigma\}$  de suites de naturels est finie puisque nous travaillons au moyen d'alphabets finis. Par le lemme 3.3.15,

17. Consulter [9]. Nous choisissons la preuve de J. Cassaigne et F. Nicolas plutôt que celle donnée par F. Durand dans [14], même si cette dernière montre que les naturels  $p$  et  $q$  peuvent être choisis algorithmiquement, parce que l'algorithme qui viendra après est basé sur la première.



il existe  $\varphi \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$  strictement croissant tel que, pour tout  $b \in \Sigma$ ,  $(\nu_{\varphi(n)}^{(b)})_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissant ou constant. Posons  $p = \varphi(1) > 0$  et  $q = \varphi(2) - \varphi(1) > 0$ . Pour tout  $b \in \Sigma$ , puisque  $(\nu_{\varphi(n)}^{(b)})_{n \in \mathbb{N}}$  est croissant, on a

$$|(g \circ f^p)(f^q(b))| = \nu_{p+q}^{(b)} = \nu_{\varphi(2)}^{(b)} \geq \nu_{\varphi(1)}^{(b)} = \nu_p^{(b)} = |(g \circ f^p)(b)|.$$

Comme le mot  $\mathbf{w}$  est infini, nous savons que

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_n^{(a)} = \lim_{n \rightarrow +\infty} |g(f^n(a))| = +\infty.$$

Puisque toute sous-suite d'une suite qui converge vers l'infini converge également vers l'infini<sup>18</sup>, on obtient également que  $\lim_{n \rightarrow +\infty} \nu_{\varphi(n)}^{(a)} = +\infty$ . Nous en tirons que la suite  $(\nu_{\varphi(n)}^{(a)})_{n \in \mathbb{N}}$  ne peut être constante. Elle est donc strictement croissante et nous avons

$$|(g \circ f^p)(f^q(a))| = \nu_{p+q}^{(a)} = \nu_{\varphi(2)}^{(a)} > \nu_{\varphi(1)}^{(a)} = \nu_p^{(a)} = |(g \circ f^p)(a)|.$$

Enfin, par la remarque 3.2.11, nous obtenons  $(g \circ f^p)((f^q)^\omega(a)) = \mathbf{w}$ . □

Nous voyons que le lemme 3.3.13 est une conséquence directe du lemme précédent. Illustrons le premier lemme.

**Exemple 3.3.17.** Définissons les alphabets  $\Sigma = \{a, b\}$  et  $\Gamma = \{1, 2\}$ , le morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  par  $f(a) = ab$  et  $f(b) = a$  et le morphisme  $g : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  par  $g(a) = 1$  et  $g(b) = 2$ . Posons  $\mathbf{w} = g(f^\omega(a))$ . On voit que les deux morphismes  $f$  et  $g$  sont non effaçants, mais que

$$|(g \circ f)(b)| = |g(a)| = 1 < 2 = |g(b)|.$$

Avec les notations du lemme 3.3.13, prendre  $p = 1 = q$  convient car

$$|(g \circ f)(f(a))| = |g(aba)| = |1221| = 4 > 3 = |122| = |g(ab)| = |(g \circ f)(a)|$$

et

$$|(g \circ f)(f(b))| = |g(ab)| = 3 \geq 1 = |g(a)| = |(g \circ f)(b)|.$$

Finalement, on a aussi  $(g \circ f)(f^\omega(a)) = g(f^\omega(a)) = \mathbf{w}$  puisque  $f^\omega(a)$  est un point fixe de  $f$ .

### 3.3.3 Un algorithme répondant à la question

Nous donnons maintenant l'algorithme de J. Cassaigne et F. Nicolas<sup>19</sup> pour obtenir les morphismes  $\sigma$  et  $\tau$  du théorème 3.3.1. La proposition 3.3.19 démontre que cet algorithme répond bien à la question. Soit  $\mathbf{w} = g(f^\omega(a))$  un mot infini morphique avec  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  et  $g : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  deux morphismes. Grâce au lemme 3.3.7,  $f$  et  $g$  peuvent être pris non effaçants. Si nécessaire, en appliquant ensuite le lemme 3.3.13 et en remplaçant  $f$  par  $f^q$  et  $g$  par  $g \circ f^p$ , nous pouvons supposer<sup>20</sup> que  $f$  et  $g$  sont non effaçants (par composition de morphismes non effaçants) et vérifient les inégalités

$$|g(f(a))| > |g(a)| \quad \text{et} \quad |g(f(b))| \geq |g(b)|, \quad \forall b \in \Sigma. \quad (3.8)$$

**Algorithme 3.3.18.** *Les données sont deux morphismes non effaçants  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  et  $g : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  vérifiant les inégalités (3.8). La sortie consiste en deux nouveaux morphismes  $\sigma$  et  $\tau$  définis sur un nouvel alphabet  $\Pi$ . Puisque  $g$  est non effaçant, nous définissons l'alphabet*

$$\Pi = \{(b, i) \mid b \in \Sigma, 0 \leq i < |g(b)|\}$$

18. Voir [30] à la page 43.

19. Cet algorithme provient de [9].

20. Dans le cas de l'exemple 3.3.17, il est nécessaire d'appliquer ce lemme, alors qu'il n'y a pas besoin de l'utiliser dans l'exemple 3.3.20 comme nous le verrons.

et le morphisme  $\alpha : \Sigma^* \rightarrow \Pi^*$  par

$$\alpha(b) = (b, 0)(b, 1) \cdots (b, |g(b)| - 1)$$

pour tout  $b \in \Sigma$ . Nous définissons aussi le codage  $\tau : \Pi^* \rightarrow \Gamma^*$  par

$$\tau(b, i) = (g(b))_{i+1}$$

pour tout  $(b, i) \in \Pi$ , où  $(g(b))_{i+1}$  désigne la  $(i+1)^{\text{ème}}$  lettre apparaissant dans  $g(b)$ , avec  $b \in \Sigma$  et  $0 \leq i < |g(b)|$ . Il est clair que  $\tau \circ \alpha = g$  puisque, par définition, on a, pour tout  $b \in \Sigma$ ,

$$\tau(\alpha(b)) = \underbrace{\tau((b, 0))}_{1^{\text{ère}} \text{ lettre de } g(b)} \underbrace{\tau((b, 1))}_{2^{\text{ème}} \text{ lettre de } g(b)} \cdots \underbrace{\tau((b, |g(b)| - 1))}_{\text{Dernière lettre de } g(b)} = g(b).$$

Fixons une lettre  $b \in \Sigma$ . Par définition et grâce aux inégalités (3.8),  $|\alpha(f(b))| = |g(f(b))| \geq |g(b)|$  et  $\alpha(f(b))$  peut donc être factorisé en  $|g(b)|$  mots non vides de  $\Pi^*$ , une telle factorisation n'étant pas forcément unique. Choisissons un tel découpage

$$\alpha(f(b)) = w_{b,0} w_{b,1} \cdots w_{b,|g(b)|-1}$$

avec  $w_{b,i} \in \Pi^+$  pour tout  $i \in \{0, \dots, |g(b)| - 1\}$ . En ce qui concerne la lettre  $a$ , puisque  $|\alpha(f(a))| = |g(f(a))| > |g(a)|$ , nous imposons de surcroît que  $|w_{a,0}| \geq 2$ . Maintenant, nous définissons le morphisme  $\sigma : \Pi^* \rightarrow \Pi^*$  par

$$\sigma((b, i)) = w_{b,i}$$

pour tout  $(b, i) \in \Pi$ .

**Proposition 3.3.19.** Soit  $\mathbf{w} = g(f^\omega(a))$  un mot infini morphique tel que  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  et  $g : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  sont deux morphismes non effaçants vérifiant les inégalités (3.8). Alors les deux morphismes  $\tau$  et  $\sigma$  construits dans l'algorithme 3.3.18 sont tels que  $\mathbf{w} = \tau(\sigma^\omega((a, 0)))$ ,  $\sigma$  est non effaçant et  $\tau$  est un codage. De plus<sup>21</sup>, si  $f$  a un type de croissance égal à  $(\lambda, d)$  par rapport à la lettre  $a$ , le morphisme  $\sigma$  a un type de croissance égal à  $(\lambda, d)$  par rapport à la lettre  $(a, 0)$ .

*Démonstration.* Par définition, nous voyons que  $\tau$  est un codage. De plus, puisque les mots  $w_{b,i}$  définis pour tout  $b \in \Sigma$  et tout  $i \in \{0, \dots, |g(b)| - 1\}$  sont vides,  $\sigma$  est un morphisme non effaçant.

**Prolongeabilité.** Pour que  $\sigma^\omega((a, 0))$  ait au minimum un sens, nous devons montrer que  $\sigma$  est prolongeable en la lettre  $(a, 0)$  de  $\Pi$ . Par choix du mot  $w_{a,0}$ , il existe un mot  $x \in \Pi^+$  tel que  $\sigma((a, 0)) = w_{a,0} = (a, 0)x$  et on voit que

$$\sigma^n((a, 0)) = (a, 0)x\sigma(x) \cdots \sigma^{n-1}(x)$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ . Par conséquent,  $\sigma^n((a, 0))$  est un préfixe strict de  $\sigma^{n+1}((a, 0))$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$  et, puisque  $\sigma$  est non effaçant, la suite des longueurs  $(|\sigma^n((a, 0))|)_{n \in \mathbb{N}}$  est strictement croissante. On en déduit que  $\sigma$  est prolongeable en  $(a, 0)$ .

Montrons maintenant que  $\mathbf{w} = \tau(\sigma^\omega((a, 0)))$ . Posons  $\mathbf{u} = f^\omega(a)$ . Puisque  $\tau \circ \alpha = g$ , nous avons  $\tau(\alpha(\mathbf{u})) = g(\mathbf{u}) = \mathbf{w}$  et il suffit donc de montrer que  $\alpha(\mathbf{u}) = \sigma^\omega((a, 0))$ . Pour cela, montrons que  $\alpha \circ f = \sigma \circ \alpha$ . Fixons une lettre  $b \in \Sigma$ . Alors  $\alpha(b) = (b, 0)(b, 1) \cdots (b, |g(b)| - 1)$  et

$$\alpha(f(b)) = w_{b,0} w_{b,1} \cdots w_{b,|g(b)|-1}$$

pour des mots  $w_{b,i} \in \Pi^+$ ,  $0 \leq i < |g(b)|$ . Dans ce cas, par définition de  $\sigma$ , on obtient

$$\sigma(\alpha(b)) = \sigma((b, 0))\sigma((b, 1)) \cdots \sigma((b, |g(b)| - 1)) = w_{b,0} w_{b,1} \cdots w_{b,|g(b)|-1} = \alpha(f(b)).$$

21. En fait, il est possible de lier les matrices d'incidence des morphismes  $f$  et  $\sigma$ . Voir l'annexe E.

On voit dès lors que  $\sigma(\alpha(\mathbf{u})) = \alpha(f(\mathbf{u})) = \alpha(\mathbf{u})$ , ce qui entraîne que  $\alpha(\mathbf{u})$  est un point fixe de  $\sigma$ . Puisque  $\mathbf{u}$  commence par la lettre  $a$ ,  $\alpha(\mathbf{u})$  commence par la lettre  $(a, 0)$ . Par la définition 3.2.9, grâce à l'unicité du point fixe commençant par cette dernière lettre, on en tire que  $\alpha(\mathbf{u}) = \sigma^\omega((a, 0))$ .

**Type de croissance.** Il reste à prouver que  $\sigma$  a le même type de croissance<sup>22</sup> par rapport à  $(a, 0)$  que  $f$  par rapport à  $a$ . Par hypothèse, il existe deux constantes  $K, L > 0$  telles que

$$Kn^d\lambda^n \leq |f^n(a)| \leq Ln^d\lambda^n$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand. Posons  $C = \max\{|g(b)| \mid b \in \Sigma\}$  et  $C' = \min\{|g(b)| \mid b \in \Sigma\}$ . Puisque  $g$  est non effaçant,  $C \geq C' > 0$ . Dans ce cas, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand, nous avons

$$\underbrace{C'K}_{>0} n^d\lambda^n \leq |g(f^n(a))| \leq \underbrace{CL}_{>0} n^d\lambda^n,$$

ce qui implique que  $|g(f^n(a))| = \Theta(n^d\lambda^n)$ . Or, par définition, puisque  $|g(b)| = |\alpha(b)|$  pour tout  $b \in \Sigma$  et  $\alpha \circ f = \sigma \circ \alpha$ , on obtient que, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ ,

$$|g(f^n(a))| = |\alpha(f^n(a))| = |\sigma^n(\alpha(a))|,$$

ce qui montre que  $|\sigma^n(\alpha(a))| = \Theta(\lambda^n n^d)$ . Nous savons que la suite  $(\sigma^n((a, 0)))_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le mot infini  $\sigma^\omega((a, 0)) = \alpha(\mathbf{u}) = \sigma(\alpha(\mathbf{u}))$ . Puisque  $f$  est prolongeable en  $a$ , il existe un mot  $y \in \Sigma^+$  tel que  $f(a) = ay$ . Des égalités

$$(a, 0)x\sigma(x)\sigma^2(x)\cdots = \sigma^\omega((a, 0)) = \sigma(\alpha(\mathbf{u})) = (\sigma \circ \alpha)(a)(\sigma \circ \alpha)(y)(\sigma \circ \alpha)(f(y))(\sigma \circ \alpha)(f^2(y))\cdots,$$

on voit qu'il existe  $k_1 \in \mathbb{N}$  tel que  $(\sigma \circ \alpha)(a)$  est un préfixe de  $\sigma^{k_1}((a, 0))$ . Pour la même raison, il existe  $k_2 \in \mathbb{N}$  tel que  $\sigma^{k_1}((a, 0))$  est lui-même un préfixe de  $(\sigma \circ \alpha \circ f^{k_2})(a) = (\sigma^{k_2+1} \circ \alpha)(a)$ . Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , nous avons

$$|\sigma^{n+1}(\alpha(a))| \leq |\sigma^{n+k_1}((a, 0))| \leq |\sigma^{n+k_2+1}(\alpha(a))|,$$

ce qui signifie que  $\sigma$  a un type de croissance égal à  $(\lambda, d)$  par rapport à la lettre  $(a, 0)$  puisque  $k_1$  et  $k_2$  sont des constantes.  $\square$

Illustrons l'algorithme 3.3.18 et la proposition 3.3.19.

**Exemple 3.3.20.** Continuons l'exemple 3.3.8. Pour plus de facilité, renommons nos morphismes et définissons  $\Sigma = \{a, b\}$ ,  $\Gamma = \{1, 2\}$ ,  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  par  $f(a) = ab$  et  $f(b) = ba$  et  $g : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  par  $g(a) = 121$  et  $g(b) = 112$ . Les morphismes  $f$  et  $g$  sont non effaçants et vérifient les inégalités (3.8). Avec les notations de l'algorithme,  $\Pi = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$  puisque  $|g(a)| = 3 = |g(b)|$ . Le morphisme  $\alpha : \Sigma^* \rightarrow \Pi^*$  est alors donné par  $\alpha(a) = (a, 0)(a, 1)(a, 2)$  et  $\alpha(b) = (b, 0)(b, 1)(b, 2)$ . Le codage  $\tau$  est défini par le tableau 3.2.

	$(a, 0)$	$(a, 1)$	$(a, 2)$		$(b, 0)$	$(b, 1)$	$(b, 2)$
$\tau(\cdot)$	1	2	1		1	1	2

TABLEAU 3.2 – Définition du codage  $\tau$  sur l'alphabet  $\Pi$ .

Nous devons maintenant choisir une factorisation de  $\alpha(f(a))$  et de  $\alpha(f(b))$  en trois mots non vides avec pour seule condition que  $|w_{a,0}| \geq 2$ . Nous prenons, de façon arbitraire,

$$\alpha(f(a)) = \underbrace{(a, 0)(a, 1)}_{=w_{a,0}} \underbrace{(a, 2)(b, 0)}_{=w_{a,1}} \underbrace{(b, 1)(b, 2)}_{=w_{a,2}} \quad \text{et} \quad \alpha(f(b)) = \underbrace{(b, 0)(b, 1)}_{=w_{b,0}} \underbrace{(b, 2)(a, 0)}_{=w_{b,1}} \underbrace{(a, 1)(a, 2)}_{=w_{b,2}}.$$

22. Remarquons que la recherche du type de croissance de  $\sigma$  par rapport à la lettre  $(a, 0)$  a bien un sens. En effet, nous savons que toutes les lettres de  $\Sigma$  apparaissent dans  $f^\omega(a)$ . Fixons une lettre  $b \in \Sigma$ . Alors  $b$  apparaît dans  $f^\omega(a)$  et, puisque  $\sigma^\omega((a, 0)) = \alpha(f^\omega(a))$ , on voit que  $\alpha(b)$  est un facteur  $\sigma^\omega((a, 0))$ . Par conséquent, les lettres  $(b, 0), (b, 1), \dots, (b, |g(b)| - 1)$  apparaissent toutes dans  $\sigma^\omega((a, 0))$ . Au total, toutes les lettres de  $\Pi$  se retrouvent dans  $\sigma^\omega((a, 0))$ .

Le morphisme  $\sigma : \Pi^* \rightarrow \Pi^*$  est alors donné par le tableau 3.3.

	$\sigma((a, i))$	$\sigma((b, i))$
$i = 0$	$w_{a,0} = (a, 0)(a, 1)$	$w_{b,0} = (b, 0)(b, 1)$
$i = 1$	$w_{a,1} = (a, 2)(b, 0)$	$w_{b,1} = (b, 2)(a, 0)$
$i = 2$	$w_{a,2} = (b, 1)(b, 2)$	$w_{b,2} = (a, 1)(a, 2)$

TABLEAU 3.3 – Définition du morphisme  $\sigma$  sur l'alphabet  $\Pi$ .

Illustrons la dernière partie de la proposition 3.3.19. Le type de croissance de  $f$  par rapport à  $a$  est donné par<sup>23</sup>  $(2, 0)$ . Comme  $|\sigma^n((a, 0))| = 2^n$  pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le type de croissance de  $\sigma$  par rapport à la lettre  $(a, 0)$  est aussi égal à  $(2, 0)$ .

### 3.3.4 Nécessité des seconds morphismes dans la version morphique du théorème de Cobham

Le théorème 3.3.1 affirme que toute **image**, par un morphisme, d'un mot engendré par un morphisme est l'**image**, par un codage, d'un mot engendré par un morphisme non effaçant. Cependant, l'affirmation « tout mot engendré par un morphisme est engendré par un morphisme non effaçant » est fausse comme l'ont montré J. Cassaigne et F. Nicolas dans le contre-exemple suivant. Par conséquent, nous ne pouvons pas nous débarrasser du mot « image ».

**Proposition 3.3.21.** *Soit  $f : \{0, 1, 2\}^* \rightarrow \{0, 1, 2\}^*$  le morphisme défini par  $f(0) = 01222$ ,  $f(1) = 10222$  et  $f(2) = \varepsilon$ . Alors  $f$  est prolongeable en 0 et le mot infini  $\mathbf{u} = f^\omega(0)$  n'est engendré par aucun morphisme non effaçant de  $\{0, 1, 2\}^*$ .*

*Démonstration.* Il est d'abord clair que le morphisme  $f$  est prolongeable en 0. Avant de démontrer la suite du résultat, nous avons besoin de quelques remarques.

Définissons le morphisme  $\chi : \{0, 1, 2\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  par  $\chi(0) = 0$ ,  $\chi(1) = 1$  et  $\chi(2) = \varepsilon$ . En fait, ce morphisme efface la lettre 2. Si nous considérons le morphisme de Thue–Morse  $t : \{0, 1\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  défini dans l'exemple 1.1.7, nous pouvons aisément montrer que  $t \circ \chi = \chi \circ f$ . Il suffit de voir que les deux morphismes coïncident sur les lettres 0, 1 et 2. Par conséquent, nous voyons que  $t(\chi(\mathbf{u})) = \chi(f(\mathbf{u})) = \chi(\mathbf{u})$  puisque  $\mathbf{u}$  est un point fixe de  $f$ . On en tire que  $\chi(\mathbf{u})$  est un point fixe de  $t$ . Nous remarquons que le mot  $\chi(\mathbf{u})$  commence par la lettre 0 et, si  $\mathbf{t}$  désigne le mot de Thue–Morse, nous avons  $\chi(\mathbf{u}) = \mathbf{t}$  par unicité du point fixe tirée de la définition 3.2.9. Maintenant, on voit que  $\mathbf{u}$  s'écrit comme une concaténation infinie de 01222 et de 10222. Par conséquent, si  $\text{Fac}(\mathbf{u})$  désigne l'ensemble des facteurs du mot  $\mathbf{u}$ , nous avons

$$\text{Fac}(\mathbf{u}) \cap \{0, 1\}^* = \{\varepsilon, 0, 1, 01, 10\} \quad (3.9)$$

et

$$\text{Fac}(\mathbf{u}) \cap \{2\}^* = \{\varepsilon, 2, 22, 222\}. \quad (3.10)$$

Procédons à présent par l'absurde et supposons qu'il existe un morphisme  $g : \{0, 1, 2\}^* \rightarrow \{0, 1, 2\}^*$  non effaçant tel que  $\mathbf{u} = g^\omega(0)$ . Puisque  $\mathbf{u}$  est un point fixe de  $g$ , l'image par  $g$  de tout facteur (resp. tout préfixe) de  $\mathbf{u}$  est un facteur (resp. un préfixe) de  $\mathbf{u}$ . En particulier,  $g(222) = (g(2))^3$  est un facteur de  $\mathbf{u}$ . Par conséquent,  $\chi((g(2))^3) = (\chi(g(2)))^3$  est un facteur de  $\chi(\mathbf{u}) = \mathbf{t}$ . Or le mot de Thue–Morse est sans chevauchement<sup>24</sup> et donc aussi sans cube. Ainsi,

$$\chi(g(2)) = \varepsilon \Rightarrow g(2) \in \{2\}^*.$$

23. Souvenons-nous que  $f$  est le morphisme de Thue–Morse.

24. Voir [25] à la page 8.

Vu l'égalité (3.10), on doit avoir  $(g(2))^3 \in \{\varepsilon, 2, 22, 222\}$ . Comme  $g$  est non effaçant, on en tire que  $g(2) = 2$ . Puisque  $g$  engendre  $\mathbf{u}$ ,  $g(0)$  est un préfixe de  $\mathbf{u}$  de longueur au moins deux. Puisque  $01$  est le préfixe de longueur deux de  $\mathbf{u}$ , il existe  $x \in \{0, 1, 2\}^*$  tel que  $g(0) = 01x$ . Comme  $1222$  est un facteur de  $\mathbf{u}$ ,  $g(1222) = g(1)222$  est aussi un facteur de  $\mathbf{u}$ . Vu l'égalité (3.10), la dernière lettre de  $g(1)$ , qui existe puisque  $g$  est non effaçant, n'est pas un 2. Ainsi, il existe  $a \in \{0, 1\}$  et  $y \in \{0, 1, 2\}^*$  tels que  $g(1) = ya$ . Comme  $10$  est un facteur de  $\mathbf{u}$ ,  $g(10) = ya01x$  est aussi un facteur de  $\mathbf{u}$ . Le mot  $a01$  est donc aussi un facteur de  $\mathbf{u}$ , ce qui contredit l'égalité (3.9). Au total, il ne peut exister un tel morphisme  $g$ .  $\square$

### 3.3.5 Comparaison des types de croissance par rapport aux lettres initiales

Pour terminer, nous souhaitons répondre à la question suivante : si  $f$  et  $\sigma$  sont les deux morphismes du théorème 3.3.1 et si le type de croissance de  $f$  par rapport à la lettre  $a$  est  $(\lambda, d)$ , que peut-on dire du type de croissance de  $\sigma$  par rapport à la lettre  $a'$  ? Pour répondre à cette question, nous avons besoin d'une dernière proposition.

**Proposition 3.3.22.** *Soit  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  un morphisme prolongeable en une lettre  $a$  et de type de croissance égal à  $(\lambda, d)$  par rapport à la lettre  $a$ . Pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ , le morphisme  $f^m$  a un type de croissance égal à  $(\lambda^m, d)$  par rapport à la lettre  $a$ .*

*Démonstration.* Fixons  $m \in \mathbb{N}_0$ . Tout d'abord, par la remarque 3.2.11, le morphisme  $f^m$  est prolongeable en  $a$  pour tout  $m \in \mathbb{N}_0$ . Ensuite, puisque  $(f^m)^\omega(a) = f^\omega(a)$ , toutes les lettres de  $\Sigma$  apparaissent dans  $(f^m)^\omega(a)$ . Par hypothèse, il existe des constantes  $K, L > 0$  telles que

$$Kn^d\lambda^n \leq |f^n(a)| \leq Ln^d\lambda^n$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand. Par conséquent, il existe des constantes  $K', L' > 0$  telles que

$$K'n^d(\lambda^m)^n \leq |f^{m \cdot n}(a)| \leq L'n^d(\lambda^m)^n$$

pour tout  $n \in \mathbb{N}$  suffisamment grand.  $\square$

Nous pouvons donc lier les types de croissance par rapport aux lettres initiales des deux morphismes  $f$  et  $\sigma$  du théorème de Cobham grâce au corollaire 3.3.9 et aux propositions 3.3.19 et 3.3.22. En effet, si le morphisme  $f$  a un type de croissance égal à  $(\lambda, d)$  par rapport à la lettre  $a$ , nous savons par le corollaire 3.3.9 que le morphisme  $f'$  du lemme 3.3.7 a un type de croissance égal à  $(\lambda', d')$  par rapport à la lettre  $a$  où le couple  $(\lambda', d')$  est donné par l'une des trois situations du corollaire 3.3.9. Ensuite, pour pouvoir appliquer l'algorithme 3.3.18, nous devons éventuellement remplacer  $f'$  par l'une de ses puissances naturelles  $f'^q$  bien choisie selon le lemme 3.3.13 et le type de croissance de ce dernier morphisme par rapport à la lettre  $a$  est alors  $(\lambda'^q, d')$  par la proposition 3.3.22. Finalement, par la proposition 3.3.19, le type de croissance du morphisme  $\sigma$  par rapport à la lettre  $a' = (a, 0)$  est  $(\lambda'^q, d')$ .

Cette proposition referme le dernier chapitre de ce travail. Nous y avons démontré le théorème de Cobham dans sa version morphique et en particulier défini le type de croissance d'un mot infini pur morphique. Nous avons aussi pu comparer les types de croissance des morphismes  $f$  et  $\sigma$  de ce théorème par rapport aux lettres initiales. Dans la conclusion, nous présentons un prolongement possible et naturel à ce travail.



# Conclusion

En guise de conclusion, nous souhaitons proposer un prolongement possible à ce mémoire. Un motif d'étude des mots infinis est qu'ils permettent de coder les éléments d'un ensemble infini au moyen d'un nombre fini de symboles. Ils sont particulièrement utiles dans le codage du mot caractéristique d'un ensemble d'entiers  $X \subseteq \mathbb{N}$ . En effet, si  $k \geq 2$  est un entier, un ensemble  $X \subseteq \mathbb{N}$  est dit *k-reconnaisable* si l'ensemble des représentations en base  $k$  des éléments de l'ensemble  $X$  est un langage *régulier*, i.e. accepté par un automate fini. En 1972, A. Cobham a donné une caractérisation précise des mots caractéristiques des ensembles *k-reconnaisables* : ils sont obtenus comme les images, sous un codage, d'un point fixe d'un morphisme *k-uniforme* [12].

D'après [17], l'ensemble de Thue–Morse  $T$  est un exemple d'ensemble reconnaissable. Il se définit comme suit : un naturel  $n$  appartient à  $T$  si, et seulement si, la somme des chiffres de la représentation en base 2 de  $n$  est impaire. Cet ensemble  $T$  est 2-reconnaisable puisqu'il est accepté par l'automate fini de la figure 1 (en lisant les chiffres de poids fort ou de poids faible pour commencer). Les premières lettres du mot caractéristique  $\mathbf{x}$  de  $T$  sont 01101001100101... Il s'agit en fait de l'image du mot infini  $\mathbf{t} = \text{abbabaabbaabab}\dots$  par le codage  $\tau : \{a, b\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  défini par  $\tau(a) = 0$  et  $\tau(b) = 1$ . Ce dernier mot  $\mathbf{t}$  est, quant à lui, le point fixe du morphisme 2-uniforme  $\sigma : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$  défini par  $\sigma(a) = ab$  et  $\sigma(b) = ba$ , commençant par la lettre  $a$ , à savoir le mot de Thue–Morse. Nous obtenons donc que  $\mathbf{x} = \tau(\sigma^\omega(a))$ . Cependant, il existe une infinité de morphismes permettant de générer le mot infini  $\mathbf{x}$ . Par exemple, nous pourrions prendre le morphisme  $\sigma' : \{a, b, c\}^* \rightarrow \{a, b, c\}^*$  défini par  $\sigma'(a) = abc$ ,  $\sigma'(b) = bca$  et  $\sigma'(c) = cccc$  et le codage  $\tau' : \{a, b, c\}^* \rightarrow \{0, 1\}^*$  donné par  $\tau'(a) = 0$ ,  $\tau'(b) = 1$  et  $\tau'(c) = \varepsilon$ .

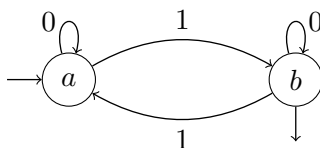


FIGURE 1 – Automate acceptant l'ensemble de Thue–Morse  $T$ .

Rappelons un autre résultat que l'on doit à A. Cobham en 1969 [11].

**Théorème 1.** *Soient  $k, \ell \geq 2$  deux naturels multiplicativement indépendants, i.e. tels que le quotient  $\frac{\log(k)}{\log(\ell)}$  est un nombre irrationnel. Si  $X \subseteq \mathbb{N}$  est un ensemble simultanément *k-reconnaisable* et *ℓ-reconnaisable*, alors  $X$  est une union finie de progressions arithmétiques.*

Du point de vue des morphismes [15, 29], ce résultat s'exprime en disant qu'un mot obtenu à la fois comme l'image, sous un codage, d'un point fixe d'un morphisme *k-uniforme* et comme l'image, sous un codage, d'un point fixe d'un morphisme *ℓ-uniforme* est un mot *ultimement périodique*, i.e. de la forme  $uv^\omega = uvvv\dots$  pour un mot  $u$  éventuellement vide et un mot  $v$  non vide.

Les *systèmes de numération abstraits* sont des généralisations de nombreux systèmes de numération, comme les systèmes de numération à base entière ou le système de numération basé sur la suite de Fibonacci. Ces systèmes de numération sont introduits en 2001 par P. Lecomte et M. Rigo [6]. Un ensemble  $X \subseteq \mathbb{N}$  est *reconnaisable* par rapport à un tel système de numération si

l'ensemble des représentations de ses éléments au sein du système de numération considéré est un langage régulier<sup>1</sup>. Grâce aux travaux de M. Rigo et de A. Maes [21, 27], une version du théorème de Cobham de 1972 est obtenue pour les systèmes de numération abstraits, dont la preuve constructive fait éventuellement apparaître des morphismes effaçants.

**Théorème 2.** *Un ensemble  $X \subseteq \mathbb{N}$  est reconnaissable par rapport à un système de numération abstrait basé sur un langage régulier si, et seulement si, le mot caractéristique  $\mathbf{x}$  de  $X$  est morphique.*

Puisque les systèmes de numération abstraits sont des généralisations des systèmes à base entière, il est naturel de chercher un équivalent du théorème de Cobham de 1969 pour ces systèmes de numération particuliers. Dans le cas où les seconds morphismes utilisés pour engendrer des mots infinis morphiques sont non effaçants, le théorème suivant est obtenu par F. Durand [13].

**Théorème 3.** *Soient  $\lambda, \lambda'$  deux réels strictement plus grands que 1 et multiplicativement indépendants, i.e. tels que le quotient  $\frac{\log(\lambda)}{\log(\lambda')}$  est un nombre irrationnel. Soient aussi  $\mathbf{u}$  (resp.  $\mathbf{v}$ ) un mot  $\lambda$ -pur morphique (resp.  $\lambda'$ -pur morphique). Considérons  $\phi$  et  $\psi$  deux morphismes non effaçants. Si  $\mathbf{w} = \phi(\mathbf{u}) = \psi(\mathbf{v})$ , alors  $\mathbf{w}$  est ultimement périodique.*

Si l'on veut généraliser le théorème de Cobham de 1969, l'emploi de morphismes effaçants pose problème. En effet, considérons le morphisme  $f : \{a, b, c\}^* \rightarrow \{a, b, c\}^*$  défini par  $f(a) = ab$ ,  $f(b) = bac$  et  $f(c) = ccccc$ . Ce morphisme est prolongeable en  $a$  et le mot infini

$$f^\omega(a) = abbacbacabcccccbaabccccc \dots$$

est 5-pur morphique (5 est la valeur propre dominante du morphisme  $f$ ). Si l'on applique le morphisme  $g : \{a, b, c\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$  défini par  $g(a) = a$ ,  $g(b) = b$  et  $g(c) = \varepsilon$  au mot infini  $f^\omega(a)$ , nous retrouvons le mot de Thue–Morse  $\mathbf{t} = g(f^\omega(a))$ . Ce mot ne contient pas de cube et n'est en particulier pas périodique. Comme ce mot est aussi engendré par le morphisme  $\sigma$  donné au début de cette conclusion, il est 2-pur morphique. Pourtant, les entiers 2 et 5 sont multiplicativement indépendants. Pour pouvoir généraliser le théorème de Cobham, il faut donc considérer simultanément les deux morphismes  $f$  et  $g$  pour définir correctement l'ordre de croissance associé au mot d'intérêt.

Le but ultime est donc de généraliser le théorème de Cobham de 1969 aux systèmes de numération abstraits que l'on peut conjecturer comme suit.

**Conjecture 4.** *Soient  $S$  et  $T$  deux systèmes de numération abstraits construits sur des langages réguliers indépendants, pour une notion d'indépendance à définir proprement (on distinguera le cas des langages à croissance polynomiale de ceux à croissance exponentielle<sup>2</sup>). Si  $X \subseteq \mathbb{N}$  est un ensemble simultanément  $S$ -reconnaissable et  $T$ -reconnaissable, alors  $X$  est ultimement périodique, i.e. une union finie de progressions arithmétiques.*

Pour pouvoir obtenir cette généralisation, une première étape est d'étudier le passage d'un système de numération abstrait à un mot morphique et vice-versa. En effet, une construction explicite permet, étant donné un automate reconnaissant une partie  $X$  dans un système de numération abstrait, de fournir deux morphismes permettant d'engendrer le mot caractéristique de  $X$  et réciproquement. Cependant, comme nous l'avons déjà mentionné, la preuve constructive fait apparaître des morphismes potentiellement effaçants et cela pose problème. De plus, le cas des morphismes et des langages à croissance polynomiale doit aussi être étudié en profondeur. En effet, on remarquera que le théorème 3 suppose les réels  $\lambda, \lambda'$  strictement plus grands que 1, alors que le cas polynomial correspond à une valeur propre égale à 1.

1. Si le système de numération abstrait est noté  $S$ , on parle aussi d'ensemble  $S$ -reconnaissable.

2. La fonction de complexité d'un langage régulier est bornée soit par un polynôme, soit par une fonction exponentielle [29].



# Annexes

## A Compléments aux lemmes 1.3.35 et 1.3.37

Reprenons les notations du lemme 1.3.35. Nous savons que les ensembles  $C_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  forment une partition de l'ensemble des sommets  $\{1, \dots, m\}$  du graphe  $G(M)$ .

**Proposition A.0.1.** *Ces ensembles sont invariants par rapport au sommet initial choisi, i.e. l'effet d'un changement de sommet initial ne modifie pas la composition des ensembles, mais n'affecte que leur ordre et ce, de manière cyclique.*

*Démonstration.* Dans la preuve du lemme 1.3.35, nous avons privilégié le sommet 1 comme sommet initial. Dans la suite, pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ , nous notons  $r_j \in \{0, \dots, p-1\}$  le reste modulo  $p$  associé au sommet  $j$  provenant de la classification par rapport au sommet 1.

Fixons un autre sommet initial  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Nous pouvons recommencer la classification, mais, cette fois-ci, nous l'effectuons par rapport au sommet  $i$ . Pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ , nous notons ensuite  $r'_j \in \{0, \dots, p-1\}$  le reste modulo  $p$  obtenu par rapport à cette nouvelle classification.

Soit un sommet  $j \in \{1, \dots, m\}$ . Grâce à la classification effectuée par rapport au sommet  $i$ , nous obtenons, dans  $G(M)$ , un chemin  $c$  de  $i$  vers  $j$  de longueur  $np + r'_j$  avec  $n \in \mathbb{N}$ . Maintenant, grâce à la classification effectuée par rapport au sommet 1, dans  $G(M)$ , il existe un chemin  $c'$  de longueur  $n'p + r_i$  de 1 vers  $i$  et un chemin  $c''$  de longueur  $n''p + r_j$  de 1 vers  $j$  avec  $n', n'' \in \mathbb{N}$ . Puisque la matrice  $M$  est irréductible, nous savons qu'il existe un chemin de  $j$  vers 1 dans  $G(M)$ . Notons-le  $c'''$ . La situation dont nous parlons est décrite à la figure A1.

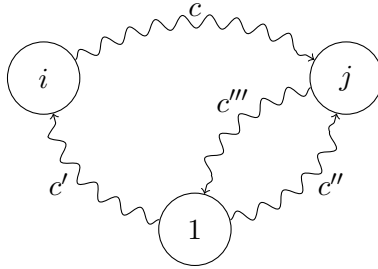


FIGURE A1 – Chemins entre les sommets 1,  $i$  et  $j$ .

En empruntant le chemin  $c''$  suivi du chemin  $c'''$ , nous obtenons un cycle sur le sommet 1 dans  $G(M)$ . Par définition de la période, il existe  $n''' \in \mathbb{N}$  tel que  $n'''p - r_j$  est la longueur du chemin  $c'''$ . En suivant ensuite les chemins  $c$ ,  $c'''$  et  $c'$ , nous obtenons un cycle sur le sommet  $i$  dans  $G(M)$  et, par définition de la période, on a

$$r_i + r'_j \equiv r_j \pmod{p}.$$

Ceci signifie que la composition des ensembles reste inchangée. En effet, si deux sommets appartiennent au même ensemble, ils ont le même reste associé à la classification par rapport à 1. Dans la nouvelle classification, le même reste leur est attribué. Cependant, l'ordre des ensembles peut être sujet à une permutation cyclique. Au total, l'effet d'un changement d'indice initial ne modifie pas la composition des ensembles, mais n'affecte que leur ordre et ce, de manière cyclique.  $\square$

**Exemple A.0.2.** Reprenons l'exemple 1.3.36. En choisissant le sommet 1 comme sommet initial, nous avons obtenu les ensembles  $C_0 = \{1, 4\}$ ,  $C_1 = \{3\}$  et  $C_2 = \{2, 5\}$ . Nous allons déterminer les ensembles  $C'_r$  obtenus grâce à la classification des sommets par rapport au sommet initial  $i = 3$ . Dans la classification par rapport au sommet 1, le sommet 3 appartient à  $C_1$  et donc  $r_i = r_3 = 1$ . Le tableau A1 donne la classification des sommets par rapport au nouveau sommet initial. Avec celui-ci, on en déduit que la nouvelle classification est donnée par

$$C'_0 = C_1 = \{3\}, C'_1 = C_2 = \{2, 5\} \text{ et } C'_2 = C_0 = \{1, 4\}.$$

Il s'agit bien d'une permutation cyclique de l'ancienne classification et on voit que la composition des ensembles n'a pas changé.

$r_j \in \{0, 1, 2\}$	$r_i + r'_j \equiv r_j \pmod{3}$	$r'_j \in \{0, 1, 2\}$
0	$1 + r'_j \equiv 0 \pmod{3}$	2
1	$1 + r'_j \equiv 1 \pmod{3}$	0
2	$1 + r'_j \equiv 2 \pmod{3}$	1

TABLEAU A1 – Nouvelle classification des sommets par rapport au sommet initial  $i = 3$ .

**Définition A.0.3.** Soit  $N$  une matrice réelle positive par blocs. Le *graphe de chemins* associé à  $N$ , noté  $G_C(N)$ , est le graphe orienté défini de la façon suivante. Si  $s \in \mathbb{N}_0$  est le nombre de blocs sur la diagonale de la matrice  $N$ , alors les sommets du graphe sont les naturels  $1, \dots, s$ . Si  $A_{i,j}$  est le bloc situé sur la  $i^{\text{ème}}$  ligne et la  $j^{\text{ème}}$  colonne de la matrice  $N$ , alors, dans le graphe, nous inscrivons un arc du sommet  $i$  vers le sommet  $j$  de label  $A_{i,j}$  uniquement si ce bloc est non nul.

**Lemme A.0.4.** Soit  $N$  une matrice carrée réelle positive par blocs possédant  $s \in \mathbb{N}_0$  blocs sur sa diagonale. Pour tout  $n \in \mathbb{N}$ , le bloc correspondant à la position  $(i, j)$  avec  $i, j \in \{1, \dots, s\}$  dans  $N^n$  est la somme des labels des chemins de longueur  $n$  joignant  $i$  à  $j$  dans le graphe  $G_C(N)$ .

*Démonstration.* Nous procédons par récurrence sur  $n \in \mathbb{N}$ . Pour  $n = 0$ , nous devons montrer que le bloc correspondant à la position  $(i, j)$  avec  $i, j \in \{1, \dots, s\}$  dans  $N^0$  est la somme des labels des chemins de longueur 0 de  $i$  à  $j$  dans  $G_C(N)$ . Or un chemin de longueur 0 dans  $G_C(N)$  existe uniquement entre le sommet  $i \in \{1, \dots, s\}$  et lui-même. Ce chemin porte le label  $I$  où  $I$  est la matrice identité avec la dimension adéquate. De plus, dans  $N^0$ , seuls les blocs diagonaux ne sont pas nuls et sont égaux à la matrice identité (pourvue d'une dimension adéquate).

Pour  $n = 1$ , nous devons montrer que le bloc correspondant à la position  $(i, j)$  avec  $i, j \in \{1, \dots, s\}$  dans  $N$  est la somme des labels des chemins de longueur 1 de  $i$  à  $j$  dans  $G_C(N)$ . Ceci est vrai par définition de  $G_C(N)$ .

Supposons maintenant que le résultat est vrai pour  $m \in \{0, \dots, n\}$  avec  $n \geq 1$  et démontrons-le pour  $m = n + 1$ . Nous devons donc montrer que le bloc correspondant à la position  $(i, j)$  dans  $N^{n+1}$  est la somme des labels des chemins de longueur  $n + 1$  de  $i$  à  $j$  dans  $G_C(N)$ . Fixons  $i, j \in \{1, \dots, s\}$ . Par définition du produit matriciel,

$$(N^{n+1})_{i,j} = \sum_{\ell=1}^s (N^n)_{i,\ell} N_{\ell,j}.$$

Par hypothèse de récurrence,  $(N^n)_{i,\ell}$  (resp.  $N_{\ell,j}$ ) est la somme des labels des chemins de longueur  $n$  (resp. 1) de  $i$  vers  $\ell$  (resp.  $\ell$  vers  $j$ ) dans  $G_C(N)$ . Ainsi, le produit  $(N^n)_{i,\ell} N_{\ell,j}$  est la somme des labels des chemins de longueur  $n + 1$  de  $i$  vers  $j$  en passant par  $\ell$  dans  $G_C(N)$ . On en conclut que  $\sum_{\ell=1}^s (N^n)_{i,\ell} N_{\ell,j}$  est la somme des labels des chemins de longueur  $n + 1$  de  $i$  vers  $j$  dans  $G_C(N)$ .  $\square$

**Proposition A.0.5.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive, irréductible de période  $p \geq 1$  et différente de  $(0)_{1 \times 1}$ . Il existe une matrice de permutation  $P$  (essentiellement basée sur les ensembles  $C_0, \dots, C_{p-1}$ ) de dimension  $m$  telle que

$$P^{-1}MP = \begin{pmatrix} 0 & B_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{p-2} \\ B_{p-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \quad (\text{A1})$$

où les blocs  $B_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  sont des matrices positives (pas forcément carrées), de dimension adéquate et non nulles et telle que

$$P^{-1}M^pP = \begin{pmatrix} R_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{p-1} \end{pmatrix} \quad (\text{A2})$$

où les matrices  $R_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  sont des matrices carrées primitives. De plus, les blocs  $R_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  sont obtenus comme une permutation cyclique des facteurs du produit  $B_0 \cdots B_{p-1}$ .

*Démonstration.* Tout d'abord, les lemmes 1.3.35 et 1.3.37 permettent d'établir les égalités (A1) et (A2). Grâce à celles-ci,

$$\left( \begin{pmatrix} 0 & B_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & B_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & B_{p-2} \\ B_{p-1} & 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix} \right)^p = \begin{pmatrix} R_0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & R_1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & R_{p-1} \end{pmatrix}.$$

Ensuite, le graphe de chemins  $G_C(P^{-1}MP)$  associé à la matrice est donné à la figure A2 puisque tous les blocs sont non nuls.

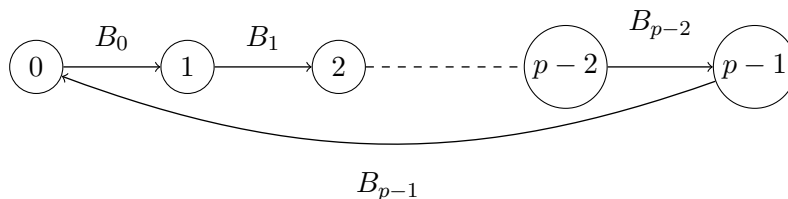


FIGURE A2 – Graphe de chemins  $G_C(P^{-1}MP)$  associé à la matrice carrée positive par blocs  $P^{-1}MP$ .

Ces deux informations et le lemme A.0.4 permettent d'affirmer que le bloc primitif  $R_r$ , avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ , est obtenu comme la somme des labels des chemins de longueur  $p$  du sommet  $r$  vers ce même sommet dans  $G_C(P^{-1}MP)$ . Vu les arcs de ce graphe, pour tout  $r \in \{0, \dots, p-1\}$ , nous pouvons donc écrire que  $R_r = B_r \cdots B_{p-1} B_0 \cdots B_{r-1}$  puisqu'il n'y a qu'un unique chemin de longueur  $p$  au sein du graphe  $G_C(P^{-1}MP)$  du sommet  $r$  vers lui-même. Ainsi, les blocs  $R_r$  avec  $r \in \{0, \dots, p-1\}$  sont obtenus comme une permutation cyclique des facteurs du produit  $B_0 \cdots B_{p-1}$ .  $\square$

**Exemple A.0.6.** Reprenons l'exemple 1.3.39. Dans l'exemple 1.3.36, nous avons obtenu les trois blocs positifs non nuls

$$B_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, B_1 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ et } B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et, dans l'exemple 1.3.39, les trois blocs primitifs

$$R_0 = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 3 & 2 \end{pmatrix}, R_1 = (5) \text{ et } R_2 = \begin{pmatrix} 3 & 3 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que  $R_0 = B_0 B_1 B_2$ ,  $R_1 = B_1 B_2 B_0$  et  $R_2 = B_2 B_0 B_1$ .

## B Quelques résultats préliminaires à la preuve du lemme 2.2.2

Dans cette annexe, nous démontrons les trois points de la proposition 2.1.3.

**Proposition B.0.1.** *Pour tout  $m \in \mathbb{N}$  et tout  $\lambda \in \mathbb{R}_{>1}$ ,*

$$\sum_{i=0}^n i^m \lambda^i = \Theta(n^m \lambda^n). \quad (\text{B1})$$

*Démonstration.* Pour démontrer ceci, nous fixons  $\lambda \in \mathbb{R}_{>1}$  et nous procédons par récurrence sur  $m \in \mathbb{N}$ . Pour  $m = 0$ ,

$$\sum_{i=0}^n \lambda^i = \frac{\lambda^{n+1} - 1}{\lambda - 1} = \Theta(n^0 \lambda^n).$$

Supposons que le résultat est vrai jusqu'au cran  $m$  et vérifions-le pour le cran  $m + 1$ . En utilisant le binôme de Newton d'abord et l'hypothèse de récurrence ensuite, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (i+1)^{m+1} \lambda^i &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m+1} C_{m+1}^j i^j \lambda^i = \sum_{i=0}^n i^{m+1} \lambda^i + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m C_{m+1}^j i^j \lambda^i \\ &= \sum_{i=0}^n i^{m+1} \lambda^i + \underbrace{\sum_{j=0}^m \underbrace{C_{m+1}^j}_{=\text{cste.}} \underbrace{\sum_{i=0}^n i^j \lambda^i}_{=\Theta(n^j \lambda^n)}}_{=\Theta(n^m \lambda^n)} \end{aligned}$$

puisque le comportement global est déterminé par le plus grand de tous les comportements. Cette suite d'égalités entraîne que

$$\sum_{i=0}^n (i+1)^{m+1} \lambda^i - \sum_{i=0}^n i^{m+1} \lambda^i = \Theta(n^m \lambda^n).$$

Or

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (i+1)^{m+1} \lambda^i - \sum_{i=0}^n i^{m+1} \lambda^i &= (n+1)^{m+1} \lambda^n + \sum_{i=0}^{n-1} (i+1)^{m+1} \lambda^i - \sum_{i=0}^n i^{m+1} \lambda^i \\ &= (n+1)^{m+1} \lambda^n + \frac{1}{\lambda} \sum_{i=0}^n i^{m+1} \lambda^i - \sum_{i=0}^n i^{m+1} \lambda^i \\ &= (n+1)^{m+1} \lambda^n + \left( \frac{1}{\lambda} - 1 \right) \sum_{i=0}^n i^{m+1} \lambda^i, \end{aligned}$$

ce qui permet de dire que

$$\sum_{i=0}^n i^{m+1} \lambda^i = \frac{(n+1)^{m+1} \lambda^n}{\left(1 - \frac{1}{\lambda}\right)} - \Theta(n^m \lambda^n) = \Theta(n^{m+1} \lambda^n). \quad \square$$

**Remarque B.0.2.** Dans [16], on trouve le comportement exact de la somme (B1).

Lorsque le réel  $\lambda$  de la proposition précédente est égal à 1, nous obtenons le résultat suivant.

**Proposition B.0.3.** *Pour tout  $m \in \mathbb{N}$ ,*

$$\sum_{i=0}^n i^m = \Theta(n^{m+1}). \quad (\text{B2})$$

*Démonstration.* Procédons par récurrence sur  $m \in \mathbb{N}$ . Pour  $m = 0$ ,

$$\sum_{i=0}^n i^0 = n + 1 = \Theta(n).$$

Supposons que le résultat est vrai jusqu'au cran  $m$  et montrons-le pour le cran  $m + 1$ . En utilisant le binôme de Newton d'abord et l'hypothèse de récurrence ensuite, on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^n (i+1)^{m+2} &= \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{m+2} C_{m+2}^j i^j = \sum_{i=0}^n i^{m+2} + \sum_{i=0}^n C_{m+2}^{m+1} i^{m+1} + \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^m C_{m+2}^j i^j \\ &= \sum_{i=0}^n i^{m+2} + \sum_{i=0}^n (m+2) i^{m+1} + \underbrace{\sum_{j=0}^m \underbrace{C_{m+2}^j}_{=\text{cste.}} \underbrace{\sum_{i=0}^n i^j}_{=\Theta(n^{j+1})}}_{=\Theta(n^{m+1})}. \end{aligned}$$

Or

$$\sum_{i=0}^n (i+1)^{m+2} = (n+1)^{m+2} + \sum_{i=0}^n i^{m+2},$$

ce qui implique que

$$\sum_{i=0}^n i^{m+1} = \frac{(n+1)^{m+2}}{m+2} - \Theta(n^{m+1}).$$

Par conséquent, nous obtenons

$$\sum_{i=0}^n i^{m+1} = \Theta(n^{m+2}). \quad \square$$

**Proposition B.0.4.** *Pour tout  $q \in \mathbb{N}_0$ ,  $C_{n,q} := \#\{(i_1, \dots, i_q) \in \mathbb{N}^q \mid i_1 + \dots + i_q = n\} = \Theta(n^{q-1})$ .*

*Démonstration.* Nous procédons par récurrence sur  $q \in \mathbb{N}_0$ . Au niveau des cas de base, pour  $q = 1$ ,

$$C_{n,1} = \#\{i \in \mathbb{N} \mid i = n\} = 1 = \Theta(n^0)$$

et pour  $q = 2$ ,

$$C_{n,2} = \#\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = n\} = n + 1 = \Theta(n^1)$$

puisque  $i$  peut parcourir les naturels entre 0 et  $n$ , ce qui donne  $n + 1$  possibilités, mais, lorsque  $i$  est fixé,  $j$  ne peut prendre qu'une valeur, à savoir  $n - i$ . Supposons que le résultat est vrai pour  $m \in \{1, \dots, q\}$  avec  $q \geq 2$  et vérifions-le pour  $m = q + 1$ . On a

$$\begin{aligned} C_{n,q+1} &= \#\{(i_1, \dots, i_{q+1}) \in \mathbb{N}^{q+1} \mid i_1 + \dots + i_{q+1} = n\} \\ &= \sum_{j=0}^n \#\{(i_1, \dots, i_q) \in \mathbb{N}^q \mid i_1 + \dots + i_q = n - j\} \\ &= \sum_{j=0}^n C_{n-j,q} = \sum_{j=0}^n \underbrace{C_{j,q}}_{=\Theta(j^{q-1})} = \Theta(n^q) \end{aligned}$$

en utilisant d'abord l'hypothèse de récurrence, puis la formule (B2).  $\square$

Il est aussi possible de donner le comportement exact de  $C_{n,q}$  pour tout  $q \in \mathbb{N}_0$ .

**Proposition B.0.5.** *Pour tout  $q \in \mathbb{N}_0$ ,  $C_{n,q} = C_{n+q-1}^{q-1}$ .*

*Démonstration.* Nous procédons par récurrence sur  $q \in \mathbb{N}_0$ . Au niveau du cas de base, pour  $q = 1$ ,

$$C_{n,1} = \# \{i \in \mathbb{N} \mid i = n\} = 1 = C_n^0.$$

Supposons que le résultat est vrai pour tout  $m \in \{1, \dots, q-1\}$  avec  $q \geq 2$  et montrons-le pour  $m = q$ . En utilisant la définition et l'hypothèse de récurrence, on a

$$C_{n,q} = \# \{(i_1, \dots, i_q) \in \mathbb{N}^q \mid i_1 + \dots + i_q = n\} = \sum_{j=0}^n C_{j,q-1} = \sum_{j=0}^n C_{j+q-2}^{q-2}.$$

Or, pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , on a

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^n C_{j+p}^p &= \sum_{j=0}^n C_{p+j}^j = C_p^0 + C_{p+1}^1 + \dots + C_{p+n}^n = \underbrace{C_{p+1}^0 + C_{p+1}^1}_{=C_{p+2}^1} + \dots + C_{p+n}^n \\ &= \underbrace{C_{p+2}^1 + C_{p+2}^2}_{=C_{p+3}^2} + \dots + C_{p+n}^n = \dots = C_{p+n}^{n-1} + C_{p+n}^n = C_{p+n+1}^n = C_{n+p+1}^{p+1} \end{aligned}$$

en utilisant la formule du triangle de Pascal en cascade. Par conséquent,  $C_{n,q} = C_{n+q-1}^{q-1}$ . □

## C Compléments à la preuve du lemme 2.2.2

### C.1 Complément à l'exemple

Reprenons les notations de l'exemple au cœur de la preuve du lemme 2.2.2. La matrice  $M$  considérée est la matrice triangulaire inférieure par blocs donnée par

$$\begin{pmatrix} A & 0 & 0 \\ D & B & 0 \\ F & E & C \end{pmatrix}$$

où les blocs  $A, B, C$  sont primitifs ou nuls de dimension 1 et son graphe de chemins est donné à la figure 2.1.

**Proposition C.1.1.** *Le bloc correspondant à  $F$  dans  $M^n$  (resp.  $D, E$ ) avec  $n \in \mathbb{N}$  est la somme des labels des chemins de longueur  $n$  joignant 3 à 1 (resp. 2 à 1, 3 à 2) dans le graphe  $G_C(M)$  de la figure 2.1.*

*Démonstration.* Il s'agit d'un cas particulier du lemme A.0.4. □

**Proposition C.1.2.** *Reprenons les notations précédentes et celles de la preuve du lemme 2.2.2.*

- (i) Si  $\rho(A) = \rho(B) = \rho(C) > 0$ ,  $D \neq 0$  et  $E \neq 0$ , alors les éléments du bloc (2.6) ont un comportement en  $\Theta(n^2 \rho(A)^n)$ .
- (ii) Si  $\rho(A) = \rho(B) > \rho(C) > 0$ ,  $D \neq 0$  et  $E \neq 0$ , alors les éléments de ce bloc ont un comportement en  $\Theta(n \rho(A)^n)$ .

*Démonstration. Preuve de (i).* Supposons que  $\beta = \rho(A) = \rho(B) = \rho(C) > 0$ ,  $D \neq 0$  et  $E \neq 0$ . Le premier terme de la somme (2.7) se réécrit

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n-2 \\ i_1, i_2, i_3 \geq 0}} \beta^{i_1+i_2+i_3} = \beta^{n-2} \sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n-2 \\ i_1, i_2, i_3 \geq 0}} 1 = \beta^{n-2} \sum_{i_1=0}^{n-2} \sum_{i_2=0}^{n-2-i_1} 1 = \beta^{n-2} \frac{n(n-1)}{2} = \Theta(n^2 \beta^n)$$

tandis que le second est égal à

$$\sum_{\substack{i_1+i_2=n-1 \\ i_1, i_2 \geq 0}} \beta^{i_1+i_2} = \beta^{n-1} \sum_{\substack{i_1+i_2=n-1 \\ i_1, i_2 \geq 0}} 1 = \beta^{n-1} \sum_{i_1=0}^{n-1} 1 = \beta^{n-1} n = \Theta(n \beta^n).$$

Par conséquent, le comportement (dominant) des éléments du bloc (2.6) est en  $\Theta(n^2 \beta^n)$ .

**Preuve de (ii).** Supposons que  $\beta = \rho(A) = \rho(B) > \rho(C) = \gamma > 0$ ,  $D \neq 0$  et  $E \neq 0$ . Tout d'abord, le comportement est déterminé, à une constante près, par

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n \\ i_1, i_2, i_3 \geq 0}} \beta^{i_1+i_2} \gamma^{i_3} = \sum_{\ell=0}^n C_{\ell,2} \beta^\ell \gamma^{n-\ell}$$

où  $C_{\ell,2} := \#\{(i, j) \in \mathbb{N}^2 \mid i + j = \ell\} = \ell + 1$ . Ainsi,

$$\sum_{\substack{i_1+i_2+i_3=n \\ i_1, i_2, i_3 \geq 0}} \beta^{i_1+i_2} \gamma^{i_3} = \gamma^n \sum_{\ell=0}^n (\ell + 1) \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^\ell = \gamma^n \sum_{\ell=0}^n \ell \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^\ell + \gamma^n \sum_{\ell=0}^n \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^\ell.$$

Grâce à la formule (B1),

$$\sum_{\ell=0}^n \ell \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^\ell = \Theta\left(n \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^n\right) \quad \text{et} \quad \sum_{\ell=0}^n \left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^\ell = \Theta\left(\left(\frac{\beta}{\gamma}\right)^n\right),$$

ce qui montre que le comportement des éléments du bloc (2.6) est en  $\Theta(n \beta^n)$ .  $\square$

## C.2 Complément au cas général

Passons maintenant à la preuve de la majoration présente dans le cas général. Pour cela, nous avons besoin de deux résultats.

**Lemme C.2.1.** *Soient  $P, Q \in \mathbb{R}[x]$  deux polynômes premiers entre eux. Notons  $\sum_{n \geq 0} a_n x^n$  la série génératrice de la fraction rationnelle  $\frac{P}{Q}$ . Supposons que  $x_0$  est un zéro réel non nul de  $Q$  de multiplicité  $m_0 > 0$  tel que, pour tout autre zéro  $x$  de  $Q$ ,  $|x| > |x_0|$ . Alors  $a_n \sim n^{m_0-1} \left(\frac{1}{x_0}\right)^n$  à une constante multiplicative près.*

*Démonstration.* Notons  $x_0, \dots, x_p$  les zéros distincts de  $Q$  de multiplicité respective  $m_0 > 0, \dots, m_p > 0$ . Par la décomposition en fractions simples sur  $\mathbb{C}$ , il existe un polynôme  $R \in \mathbb{R}[x]$  et des constantes  $c_{i,j} \in \mathbb{C}$  tels que

$$\frac{P(x)}{Q(x)} = R(x) + \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^{m_i} \frac{c_{i,j}}{\left(1 - \frac{x}{x_i}\right)^j}.$$

Notons que, puisque  $x_0$  est un zéro réel de multiplicité  $m_0$  de  $Q$ , nous avons  $c_{0,m_0} \in \mathbb{R}_0$ . De plus, nous savons<sup>1</sup> que, pour tout  $t \in \mathbb{N}$  et tout  $\alpha \in \mathbb{R}$ ,

$$\frac{1}{(1 - \alpha x)^{t+1}} = \sum_{n \geq 0} C_{n+t}^t \alpha^n x^n.$$

Par conséquent, pour tout  $n \in \mathbb{N}$  assez grand, nous avons

$$a_n = \sum_{i=0}^p \sum_{j=1}^{m_i} c_{i,j} C_{n+j-1}^{j-1} \left( \frac{1}{x_i} \right)^n.$$

Nous observons deux choses :

(i) Si  $i \in \{0, \dots, p\}$ , alors  $C_{n+j-1}^{j-1}$  est un polynôme de degré  $j-1$  en  $n$  pour tout  $j \in \{1, \dots, m_i\}$ .

(ii) Si  $i \in \{1, \dots, p\}$ , alors  $\frac{1}{|x_0|} > \frac{1}{|x_i|}$  puisque  $0 < |x_0| < |x_i|$ .

Puisque  $c_{0,m_0} \neq 0$ , on en tire que  $a_n \sim n^{m_0-1} \left( \frac{1}{x_0} \right)^n$  à une constante multiplicative près.  $\square$

**Lemme C.2.2.** *Pour tout  $p \in \mathbb{N}$ , nous avons*

$$\sum_{i \geq 0} i^p x^i = \frac{P(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

où  $P \in \mathbb{R}[x]$  est un polynôme qui ne s'annule pas en 1.

*Démonstration.* Nous procédons par récurrence sur  $p \in \mathbb{N}$ . Si  $p = 0$ , alors nous savons<sup>2</sup> que

$$\sum_{i \geq 0} x^i = \frac{1}{(1-x)}$$

et l'énoncé est vérifié. Supposons que le résultat est vrai jusqu'au cran  $p-1$  et montrons-le pour  $p \geq 1$ . D'une part,

$$\begin{aligned} \sum_{i \geq 0} (i+1)^p x^i - \sum_{i \geq 0} i^p x^i &= \sum_{i \geq 1} i^p x^{i-1} - \sum_{i \geq 1} i^p x^i = \sum_{i \geq 1} i^p x^{i-1} - x \sum_{i \geq 1} i^p x^{i-1} \\ &= (1-x) \sum_{i \geq 1} i^p x^{i-1} = \frac{1-x}{x} \sum_{i \geq 1} i^p x^i \\ &= \frac{1-x}{x} \sum_{i \geq 0} i^p x^i \end{aligned}$$

et, d'autre part,

$$\sum_{i \geq 0} (i+1)^p x^i - \sum_{i \geq 0} i^p x^i = \sum_{i \geq 0} ((i+1)^p - i^p) x^i = \sum_{i \geq 0} \sum_{j=0}^{p-1} C_p^j i^j x^i$$

par le binôme de Newton. On en tire que

$$\sum_{i \geq 0} i^p x^i = \frac{x}{1-x} \sum_{j=0}^{p-1} C_p^j \sum_{i \geq 0} i^j x^i.$$

1. Voir par exemple [24] à la page 141.

2. Voir par exemple [24] à la page 135.



Or, par hypothèse de récurrence, pour tout  $j \in \{0, \dots, p-1\}$ , il existe un polynôme  $P_j \in \mathbb{R}[x]$  tel que  $\sum_{i \geq 0} i^j x^i = \frac{P_j(x)}{(1-x)^{j+1}}$  et pour lequel  $P_j(1) \neq 0$ . Ainsi, nous obtenons

$$\sum_{i \geq 0} i^p x^i = \frac{x}{1-x} \sum_{j=0}^{p-1} C_p^j \frac{P_j(x)}{(1-x)^{j+1}} = \frac{x \sum_{j=0}^{p-1} C_p^j P_j(x) (1-x)^{p-j-1}}{(1-x)^{p+1}} = \frac{P(x)}{(1-x)^{p+1}}$$

où  $P(x) = x \sum_{j=0}^{p-1} C_p^j P_j(x) (1-x)^{p-j-1} \in \mathbb{R}[x]$ . Il est clair que  $P(1) \neq 0$ , sinon nous devons avoir  $P_{p-1}(1) = 0$ , ce qui est impossible.  $\square$

**Remarque C.2.3.** Soit  $p \in \mathbb{N}$ . Alors, par le lemme précédent,  $\sum_{i \geq 0} i^p x^i = \frac{P(x)}{(1-x)^{p+1}}$ . Dans ce cas, tous les zéros de  $P$  sont négatifs ou nuls.

Soient  $p, q \in \mathbb{N}$  et  $\alpha \in \mathbb{R}_{>1}$ . Le  $n^{\text{ème}}$  terme du produit de Cauchy (ou produit de convolution) des deux séries formelles  $\sum_{i \geq 0} i^p \alpha^i x^i$  et  $\sum_{j \geq 0} j^q x^j$  est donné par

$$\sum_{i+j=n} i^p \alpha^i j^q = \sum_{i=0}^n i^p \alpha^i (n-i)^q.$$

Par le lemme C.2.2, nous savons que

$$\sum_{i \geq 0} i^p \alpha^i x^i = \frac{P(\alpha x)}{(1-\alpha x)^{p+1}} \quad \text{et} \quad \sum_{j \geq 0} j^q x^j = \frac{Q(x)}{(1-x)^{q+1}}$$

où  $P, Q \in \mathbb{R}[x]$  sont des polynômes tels que  $P(\alpha x)|_{x=\frac{1}{\alpha}} \neq 0$  et  $Q(1) \neq 0$ . Les hypothèses du lemme C.2.1 étant vérifiées (se rappeler la remarque C.2.3),

$$\sum_{i=0}^n i^p \alpha^i (n-i)^q \sim n^p \alpha^n$$

à une constante multiplicative (strictement positive) près.

## D Complément à la preuve du lemme 3.3.7

Reprenons les notations des lemmes 3.3.2, 3.3.5 et 3.3.7. Dans ce dernier lemme, nous disposons d'un mot infini morphique  $\mathbf{w} = g(f^\omega(a))$  avec deux morphismes  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  et  $g : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$ . En appliquant alternativement les lemmes 3.3.2 et 3.3.5, nous construisons les morphismes d'intérêt  $f'$  et  $g'$ .

Supposons qu'à l'étape  $i$  du procédé, nous disposons de l'alphabet  $\Sigma_i \subseteq \Sigma$  et des morphismes  $f_i : \Sigma_i^* \rightarrow \Sigma_i^*$  et  $g_i : \Sigma_i^* \rightarrow \Gamma^*$ . À l'étape  $i+1$ , nous devons appliquer soit le lemme 3.3.2 (premier cas), soit le lemme 3.3.5 (second cas). Remarquons que nous détaillons les applications successives des lemmes 3.3.2 et 3.3.5, alors que nous les avons fusionnées dans le lemme 3.3.7.

Premier cas : Notons  $k_i$  le nombre de lettres mortelles de  $f_i$ . Dans ce cas, nous obtenons un nouvel alphabet  $\Sigma_{i+1} \subseteq \Sigma_i$  constitué des lettres immortelles de  $f_i$  et les deux morphismes  $f_{i+1} : \Sigma_{i+1}^* \rightarrow \Sigma_{i+1}^*$  et  $g_{i+1} : \Sigma_{i+1}^* \rightarrow \Gamma^*$  définis respectivement par

$$f_{i+1} = (\kappa_{\Sigma_i, \Sigma_i, \mathcal{M}} \circ f_i)|_{\Sigma_{i+1}^*} \quad \text{et} \quad g_{i+1} = (g_i \circ f_i^{k_i})|_{\Sigma_{i+1}^*}.$$

Second cas : Nous choisissons le plus gros sous-alphabet  $\Delta_i$  de  $\Sigma_i$  tel que  $\Delta_i \subseteq \Sigma_i \cap g_i^{-1}(\varepsilon)$  et tel que  $f_i(\Delta_i) \subseteq \Delta_i^*$  et nous posons  $\Sigma_{i+1} = \Sigma_i \setminus \Delta_i$ . Nous obtenons les deux morphismes  $f_{i+1} : \Sigma_{i+1}^* \rightarrow \Sigma_{i+1}^*$  et  $g_{i+1} : \Sigma_{i+1}^* \rightarrow \Gamma^*$  définis respectivement par

$$f_{i+1} = (\kappa_{\Sigma_i, \Delta_i} \circ f_i)|_{\Sigma_{i+1}^*} \quad \text{et} \quad g_{i+1} = g_i|_{\Sigma_{i+1}^*}.$$

**Proposition D.0.1.** Soit  $b \in \Sigma$ . Alors  $g_i(f_i^j(b)) \neq \varepsilon$  pour une infinité de naturels  $j$  si, et seulement si,  $g_{i+1}(f_{i+1}^j(b)) \neq \varepsilon$  pour une infinité de naturels  $j$ .

*Démonstration.* Supposons être dans le premier cas. Supposons que  $g_{i+1}(f_{i+1}^j(b)) \neq \varepsilon$  pour une infinité de naturels  $j$ . Alors

$$(g_i \circ f_i^{k_i} \circ \kappa_{\Sigma_i, \Sigma_i, \mathcal{M}} \circ f_i^j)(b) \neq \varepsilon$$

pour une infinité de naturels  $j \in \mathbb{N}$ . Or nous avons  $f_i^{k_i} \circ \kappa_{\Sigma_i, \Sigma_i, \mathcal{M}} = f_i^{k_i}$ . Par conséquent,

$$(g_i \circ f_i^{k_i+j})(b) \neq \varepsilon$$

pour une infinité de naturels  $j \in \mathbb{N}$ . On en tire que  $g_i(f_i^j(b)) \neq \varepsilon$  pour une infinité de naturels  $j$ . Supposons maintenant que  $g_i(f_i^j(b)) \neq \varepsilon$  pour une infinité de naturels  $j$ . On voit que  $b$  n'est pas mortel par rapport à  $f_i$ , i.e.  $b \in \Sigma_{i+1}$ . Ainsi, dans le graphe correspondant au morphisme  $f_i$ , on atteint au moins une composante primitive en partant de la lettre  $b$ . Dans ce cas, il existe une composante primitive telle que, pour une lettre  $e \in \Sigma_i$  de cette composante,

- (i) il existe  $M \in \mathbb{N}$  tel que le mot  $f_i^M(b)$  contient la lettre  $e$ ;
- (ii) il existe  $N \in \mathbb{N}$  tel que le mot  $f_i^n(e)$  contient la lettre  $e$  pour tout  $n \geq N$ ;
- (iii)  $g_i(e) \neq \varepsilon$ .

En particulier,  $e$  n'est pas mortel par rapport à  $f_i$ . Par primitivité de la composante dans laquelle se trouve la lettre  $e$ , il existe une lettre  $e' \in \Sigma_i$  de cette composante telle que

- (iv) le mot  $f_i^{k_i}(e')$  contient la lettre  $e$ ;
- (v) il existe  $N' \in \mathbb{N}$  tel que le mot  $f_i^n(e)$  contient la lettre  $e'$  pour tout  $n \geq N'$ .

On voit que  $e'$  n'est pas mortel par rapport à  $f_i$ . De plus, vu (i) et (ii),  $f_i^j(b)$  contient la lettre  $e$  pour tout  $j \geq M + N$ . Vu (v),  $f_i^j(b)$  contient la lettre  $e'$  pour tout  $j \geq M + N + N'$ . Par conséquent,  $(\kappa_{\Sigma_i, \Sigma_i, \mathcal{M}} \circ f_i^j)(b)$  contient la lettre  $e'$  pour tout  $j \geq M + N + N'$ . Par (iv), on voit que  $(f_i^{k_i} \circ \kappa_{\Sigma_i, \Sigma_i, \mathcal{M}} \circ f_i^j)(b)$  contient la lettre  $e$  pour tout  $j \geq M + N + N'$ . Vu (iii), on a

$$g_{i+1}(f_{i+1}^j(b)) = (g_i \circ f_i^{k_i} \circ \kappa_{\Sigma_i, \Sigma_i, \mathcal{M}} \circ f_i^j)(b) \neq \varepsilon$$

pour tout  $j \geq M + N + N'$ .

Supposons être dans le second cas. Supposons que  $g_{i+1}(f_{i+1}^j(b)) \neq \varepsilon$  pour une infinité de naturels  $j$ . Alors

$$(g_i \circ \kappa_{\Sigma_i, \Delta_i} \circ f_i^j)(b) \neq \varepsilon$$

pour une infinité de  $j \in \mathbb{N}$ . Or nous avons  $g_i \circ \kappa_{\Sigma_i, \Delta_i} = g_i$ . Par conséquent,

$$(g_i \circ f_i^j)(b) \neq \varepsilon$$

pour une infinité de  $j \in \mathbb{N}$ . Supposons maintenant que  $g_i(f_i^j(b)) \neq \varepsilon$  pour une infinité de naturels  $j$ . Par le même raisonnement que dans le cas précédent, il existe une lettre  $e \in \Sigma_i$  vérifiant (i), (ii) et (iii). Nous voyons que  $e \notin \Delta_i$  et, pour toute lettre  $e' \in \Sigma_i$  pour laquelle  $e$  apparaît dans  $f_i^L(e')$  pour un certain  $L \in \mathbb{N}$ , on a  $e' \notin \Delta_i$ . En particulier,  $b \notin \Delta_i$  et  $b \in \Sigma_{i+1}$ . Vu (i) et (ii),  $f_i^j(b)$  contient la lettre  $e$  pour tout  $j \geq M + N$ . Par (iii), on a

$$g_{i+1}(f_{i+1}^j(b)) = (g_i \circ \kappa_{\Sigma_i, \Delta_i} \circ f_i^j)(b) \neq \varepsilon$$

pour tout  $j \geq M + N$ . □

Si  $b$  est une lettre de  $\Sigma_\ell$ , alors on sait que  $g_\ell(f_\ell^j(b)) \neq \varepsilon$  pour une infinité de naturels  $j$ . Dans ce cas, en remontant jusqu'au début, nous obtenons que  $g(f^{jp}(b)) \neq \varepsilon$  pour une infinité de naturels  $j$ . Par conséquent,  $b$  est une lettre de  $\Sigma'$ . De la même façon, si  $b$  est une lettre de  $\Sigma'$ ,  $g(f^{jp}(b)) \neq \varepsilon$  pour une infinité de naturels  $j$ , ce qui implique que  $b$  est une lettre de  $\Sigma_\ell$ . Au total,  $\Sigma' = \Sigma_\ell$ .

## E Dilatation de matrices

Cette annexe traite d'une opération particulière sur les matrices carrées réelles : la dilatation. En fait, on peut voir que cette notion est en lien avec le produit d'automates qui apparaît dans [27] (voir [29] pour un exemple). Elle permet aussi de donner des informations supplémentaires quant aux transformations que nous avons appliquées aux morphismes dans ce travail. Dans un premier temps, nous donnons la définition de cette nouvelle notion et nous l'illustrons. Dans un deuxième temps, nous comparons le spectre d'une matrice carrée réelle et celui de ses dilatées. Enfin, nous montrons que la matrice d'incidence du morphisme  $\sigma$  de l'algorithme 3.3.18 est une matrice dilatée du morphisme  $f$  de cet algorithme.

### E.1 Définition et exemple

Lors de la dilatation d'une matrice carrée réelle  $M$ , l'idée est de remplacer de façon convenable chaque élément  $M_{i,j}$  par une matrice de dimension  $k_i \times k_j$  dont la somme des éléments de chaque ligne donne  $M_{i,j}$ . De façon plus précise, nous donnons la définition suivante.

**Définition E.1.1.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice. Une matrice  $D \in \mathbb{R}_n^n$  avec  $n \geq m$  est appelée *matrice dilatée* de  $M$  s'il existe des naturels non nuls  $k_1, \dots, k_m$  tels que

- (i)  $\sum_{i=1}^m k_i = n$  ;
- (ii) les lignes et les colonnes de  $D$  sont toutes deux indicées par des couples  $(i, k)$  où  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq k \leq k_i$  ;
- (iii) la matrice  $D$  satisfait à la condition suivante :

$$\forall i, j \in \{1, \dots, m\}, \forall k \in \{1, \dots, k_i\}, \sum_{\ell=1}^{k_j} D_{(i,k)(j,\ell)} = M_{i,j}. \quad (\text{E1})$$

Le vecteur  $(k_1, \dots, k_m)$  est appelé le *vecteur de dilatation* de  $D$ . Nous notons  $\text{Dil}(M)$  l'ensemble des matrices dilatées de  $M$ .

En d'autres mots, étant donnée une matrice réelle  $M$  de dimension  $m$ , une matrice dilatée de  $M$  ayant pour vecteur de dilatation le vecteur  $(k_1, \dots, k_m)$  est une matrice réelle par blocs

$$D = \begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & \cdots & B_{m,m} \end{pmatrix}$$

où chaque bloc  $B_{i,j}$  avec  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  possède  $k_i$  lignes et  $k_j$  colonnes de sorte que, pour tout  $k \in \{1, \dots, k_i\}$ , nous avons

$$\sum_{\ell=1}^{k_j} (B_{i,j})_{k,\ell} = M_{i,j}. \quad (\text{E2})$$

La définition précédente peut être adaptée aux vecteurs colonnes. L'idée est alors de répéter plusieurs fois une même entrée pour respecter la compatibilité de la multiplication d'une matrice par un vecteur colonne. Plus exactement, nous donnons la définition suivante.

**Définition E.1.2.** Soit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$  un vecteur. Un vecteur  $\vec{d} \in \mathbb{R}^n$  avec  $n \geq m$  est un *vecteur dilaté* de  $\vec{x}$  s'il existe des naturels non nuls  $k_1, \dots, k_m$  tels que

- (i)  $\sum_{i=1}^m k_i = n$  ;
- (ii) les composantes de  $\vec{d}$  sont indicées par des couples  $(i, k)$  où  $1 \leq i \leq m$  et  $1 \leq k \leq k_i$  ;
- (iii) pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  et tout  $k \in \{1, \dots, k_i\}$ , on pose  $d_{(i,k)} = x_i$ .

De la même façon, le vecteur  $(k_1, \dots, k_m)$  est appelé le *vecteur de dilatation* de  $\vec{d}$ .

En d'autres termes, étant donné un vecteur réel  $\vec{x}$  de dimension  $m \times 1$ , un vecteur dilaté de  $\vec{x}$  ayant pour vecteur de dilatation le vecteur  $(k_1, \dots, k_m)$  est un vecteur réel par blocs

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$$

où chaque bloc  $B_i$  avec  $i \in \{1, \dots, m\}$  possède  $k_i$  lignes (et une colonne) de sorte que, pour tout  $k \in \{1, \dots, k_i\}$ , nous avons  $(B_i)_k = d_{(i,k)} = x_i$ .

**Exemple E.1.3.** Considérons l'alphabet  $\Sigma = \{a, b, c\}$  et le morphisme  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  défini par  $f(a) = abcb$ ,  $f(b) = cab$  et  $f(c) = ba$ . La matrice d'incidence du morphisme  $f$  est

$$\text{Mat}_f = M = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Considérons aussi le vecteur

$$\vec{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix}.$$

Nous allons construire une matrice dilatée  $D$  (resp. un vecteur dilaté  $\vec{d}$ ) de la matrice  $M$  (resp. du vecteur  $\vec{x}$ ) ayant pour vecteur de dilatation le vecteur  $(1, 2, 2)$ .

Occupons-nous d'abord de la matrice de dilatation. Au vu de la réécriture de la définition E.1.1, la matrice  $D$  est une matrice réelle par blocs. Puisque le vecteur de dilatation est le vecteur  $(1, 2, 2)$ , on a  $k_1 = 1$ ,  $k_2 = 2$  et  $k_3 = 2$  et la matrice  $D$  doit prendre la forme suivante

$$\begin{array}{ccc|ccc} \hline (B_{1,1}) & (B_{1,2}) & (B_{1,3}) & & & \\ \hline (B_{2,1}) & (B_{2,2}) & (B_{2,3}) & & & \\ \hline (B_{3,1}) & (B_{3,2}) & (B_{3,3}) & & & \\ \hline \end{array} \begin{array}{l} \} 1 \text{ ligne} \\ \} 2 \text{ lignes} \\ \} 2 \text{ lignes} \end{array}$$

$\underbrace{\hspace{1.5cm}}_{1 \text{ col.}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2 \text{ col.}} \quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{2 \text{ col.}}$

où le bloc  $B_{1,1}$  possède une ligne et une colonne; les blocs  $B_{1,2}$  et  $B_{1,3}$  possèdent une ligne et deux colonnes; les blocs  $B_{2,1}$  et  $B_{3,1}$  possèdent deux lignes et une colonne; les blocs  $B_{2,2}$ ,  $B_{2,3}$ ,  $B_{3,2}$  et  $B_{3,3}$  possèdent deux lignes et deux colonnes. Autrement dit, la matrice  $D$  peut se réécrire comme

$$\begin{pmatrix} (B_{1,1})_{1,1} & (B_{1,2})_{1,1} & (B_{1,2})_{1,2} & (B_{1,3})_{1,1} & (B_{1,3})_{1,2} \\ (B_{2,1})_{1,1} & (B_{2,2})_{1,1} & (B_{2,2})_{1,2} & (B_{2,3})_{1,1} & (B_{2,3})_{1,2} \\ (B_{2,1})_{2,1} & (B_{2,2})_{2,1} & (B_{2,2})_{2,2} & (B_{2,3})_{2,1} & (B_{2,3})_{2,2} \\ (B_{3,1})_{1,1} & (B_{3,2})_{1,1} & (B_{3,2})_{1,2} & (B_{3,3})_{1,1} & (B_{3,3})_{1,2} \\ (B_{3,1})_{2,1} & (B_{3,2})_{2,1} & (B_{3,2})_{2,2} & (B_{3,3})_{2,1} & (B_{3,3})_{2,2} \end{pmatrix}$$

où  $(B_{i,j})_{k,\ell} \in \mathbb{R}$  pour tous  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , tout  $k \in \{1, \dots, k_i\}$  et tout  $\ell \in \{1, \dots, k_j\}$ . Il reste à remplir chaque bloc en respectant la condition (E2). Pour chaque ligne de chaque bloc  $B_{i,j}$  avec  $i, j \in \{1, 2, 3\}$ , il suffit alors de trouver des réels dont la somme vaut  $M_{i,j}$ . Nous choisissons de remplir la matrice  $D$  de la façon suivante

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline 1 & \sqrt[3]{3} & 1 - \sqrt[3]{3} & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 & -\pi & \pi \end{pmatrix}.$$

Le vecteur  $\vec{d}$  doit quant à lui s'écrire sous la forme

$$\left( \begin{array}{c} \frac{d_{(1,1)}}{d_{(2,1)}} \\ \frac{d_{(2,2)}}{d_{(3,1)}} \\ \frac{d_{(3,1)}}{d_{(3,2)}} \end{array} \right) \left. \begin{array}{l} \} 1 \text{ ligne} \\ \} 2 \text{ lignes} \\ \} 2 \text{ lignes} \end{array} \right\}$$

où  $d_{(i,k)} \in \mathbb{R}$  pour tout  $i \in \{1, 2, 3\}$  et tout  $k \in \{1, \dots, k_i\}$ . Au vu de la définition, on obtient

$$\vec{d} = \begin{pmatrix} \frac{1}{0} \\ 0 \\ \frac{2}{2} \end{pmatrix}.$$

**Remarque E.1.4.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice. Considérons un vecteur de dilatation  $(k_1, \dots, k_m)$ . Si le vecteur de dilatation vérifie  $k_i = 1$  pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ , alors toute matrice dilatée  $D$  de  $M$  ayant ce vecteur comme vecteur de dilatation possède la même dimension que  $M$ , à savoir  $m$ . Vu la réécriture de la définition E.1.1, nous savons que  $D$  peut se mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} B_{1,1} & \cdots & B_{1,m} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m,1} & \cdots & B_{m,m} \end{pmatrix}$$

où chaque bloc  $B_{i,j}$  avec  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  possède  $k_i = 1$  ligne et  $k_j = 1$  colonne de sorte que, pour tout  $k \in \{1, \dots, k_i = 1\}$ , nous avons

$$\sum_{\ell=1}^{k_j=1} (B_{i,j})_{k,\ell} = M_{i,j} \Rightarrow B_{i,j} = M_{i,j}.$$

Dans ce cas, nous n'avons pas le choix pour remplir la matrice  $D$  puisqu'elle doit être égale à la matrice  $M$ . Par contre, si le vecteur de dilatation  $(k_1, \dots, k_m)$  possède (au moins) une composante  $k_i$ ,  $i \in \{1, \dots, m\}$ , strictement plus grande que 1, alors n'importe quelle matrice dilatée  $D$  de  $M$  de vecteur de dilatation  $(k_1, \dots, k_m)$  possède une dimension strictement plus grande donnée par  $n = \sum_{j=1}^m k_j > m$  puisque  $k_j \geq 1$  pour tout  $j \in \{1, \dots, m\} \setminus \{i\}$  et  $k_i \geq 2$ . Dans ce cas, si la matrice dilatée  $D$  prend la forme donnée dans la réécriture de la définition E.1.1, alors, comme le bloc  $B_{i,i}$  possède au moins deux lignes et deux colonnes ( $k_i \geq 2$ ), nous pouvons remplir ce bloc d'une infinité de façons car il suffit que la somme des éléments de chaque ligne de ce bloc soit égale à  $M_{i,i}$ . Par conséquent, il existe plusieurs matrices dilatées d'une même matrice lorsque le vecteur de dilatation considéré a au moins une composante strictement plus grande que 1 puisque le remplissage de la matrice dilatée est arbitraire (tout en respectant la condition imposée par la définition).

Par contre, en ce qui concerne les vecteurs dilatés, on voit qu'il est possible de n'en créer qu'un seul à partir du moment où le vecteur de dilatation est imposé si l'on veut respecter la définition. Soit  $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$  un vecteur. Considérons un vecteur de dilatation  $(k_1, \dots, k_m)$ . Si  $\vec{d} \in \mathbb{R}^n$  est un vecteur dilaté de  $\vec{x}$  de vecteur de dilatation  $(k_1, \dots, k_m)$ , alors, vu la réécriture de la définition E.1.2,  $\vec{d}$  peut se mettre sous la forme

$$\begin{pmatrix} B_1 \\ \vdots \\ B_m \end{pmatrix}$$

où chaque bloc  $B_i$  avec  $i \in \{1, \dots, m\}$  possède  $k_i$  lignes (et une colonne) de sorte que, pour tout  $k \in \{1, \dots, k_i\}$ , nous avons

$$(B_i)_k = d_{(i,k)} = x_i.$$

Par conséquent, chaque bloc  $B_i$  avec  $i \in \{1, \dots, m\}$  ne peut être rempli que d'une unique façon puisque chaque élément de  $B_i$  doit être égal à  $x_i$ . Ainsi, il n'existe bien qu'un seul vecteur dilaté d'un vecteur si le vecteur de dilatation est spécifié.

## E.2 Comparaison entre le spectre d'une matrice carrée réelle et celui de ses dilatées

Nous allons maintenant montrer que les matrices dilatées d'une matrice carrée réelle possèdent les valeurs propres de la matrice de départ.

**Lemme E.2.1.** *Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice. Si  $D \in \text{Dil}(M)$  est une matrice dilatée de  $M$ , alors toute valeur propre de  $M$  est une valeur propre de  $D$ .*

*Démonstration.* Supposons que  $D$  est une matrice dilatée de  $M$  de vecteur de dilatation  $(k_1, \dots, k_m)$ . Soit  $\lambda$  une valeur propre de  $M$ . Alors il existe un vecteur non nul  $\vec{x} \in \mathbb{R}^m$  tel que  $M\vec{x} = \lambda\vec{x}$ .

Considérons maintenant un vecteur dilaté  $\vec{y}$  de  $\vec{x}$  de vecteur de dilatation  $(k_1, \dots, k_m)$ . Dans ce cas, le vecteur  $\vec{y}$  est non nul. En effet, puisque le vecteur  $\vec{x}$  est non nul, il existe  $i \in \{1, \dots, m\}$  tel que  $x_i \neq 0$ . Alors, pour tout  $k \in \{1, \dots, k_i\}$ , nous avons  $y_{(i,k)} = x_i \neq 0$ , ce qui implique que  $\vec{y} \neq 0$ . Pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$  et tout  $k \in \{1, \dots, k_i\}$ ,

$$\begin{aligned} (D\vec{y})_{(i,k)} &= \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^{k_j} D_{(i,k)(j,\ell)} y_{(j,\ell)} \\ &= \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^{k_j} D_{(i,k)(j,\ell)} x_j \quad \text{vu la définition E.1.2} \\ &= \sum_{j=1}^m \left( \sum_{\ell=1}^{k_j} D_{(i,k)(j,\ell)} \right) x_j \\ &= \sum_{j=1}^m M_{i,j} x_j \quad \text{vu l'égalité (E1)} \\ &= (M\vec{x})_i \\ &= \lambda x_i \\ &= \lambda y_{(i,k)} \quad \text{vu la définition E.1.2.} \end{aligned}$$

On en tire que  $D\vec{y} = \lambda\vec{y}$ , ce qui signifie que  $\lambda$  est aussi une valeur propre de  $D$ . □

Nous pouvons nous demander si les matrices dilatées d'une matrice  $M \in \mathbb{R}_m^m$  possèdent d'autres valeurs propres que celles de  $M$ . L'exemple suivant répond positivement à la question.

**Exemple E.2.2.** Considérons le morphisme  $E : \{a, b\}^* \rightarrow \{a, b\}^*$  de l'exemple 1.2.18. Sa matrice d'incidence est donnée par

$$M = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Il est facile de vérifier que la matrice

$$D = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & -1 & 2 \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & \pi & -\pi \end{array} \right)$$

est une matrice dilatée de  $M$  de vecteur de dilatation  $(1, 2)$ . En utilisant le logiciel R ou le logiciel Sage,  $\text{Spec}(M) = \{-1, 1\}$  et  $\text{Spec}(D) = \{-\pi, -1, 1\}$ . Ainsi,  $D$  possède non seulement les valeurs propres de  $M$ , mais en a d'autres.

Nous souhaitons maintenant établir qu'une matrice carrée positive et n'importe quelle matrice dilatée positive de cette matrice possèdent la même valeur propre dominante. Pour prouver ce résultat, nous avons besoin d'une notion de convergence au sein des matrices réelles.

**Définition E.2.3.** Soit  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  une suite de matrices de  $\mathbb{R}_m^m$ . La suite de matrices réelles  $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers une matrice  $A \in \mathbb{R}_m^m$  si, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  fixés, la suite de réels  $((A_n)_{i,j})_{n \in \mathbb{N}}$  converge vers le réel  $A_{i,j}$ . En fait, la convergence se fait composantes à composantes.

**Exemple E.2.4.** Considérons la matrice  $J \in \mathbb{R}_m^m$  définie par  $J_{i,j} = 1$  pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  et une matrice  $D \in \mathbb{R}_m^m$  quelconque. Pour tout  $n \in \mathbb{N}_0$ , définissons la matrice  $D_n \in \mathbb{R}_m^m$  par

$$D_n = D + \frac{1}{n}J.$$

Alors la suite de matrices  $(D_n)_{n \in \mathbb{N}_0}$  converge vers la matrice  $D$  puisque, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  fixés, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} (D_n)_{i,j} = \lim_{n \rightarrow +\infty} \left( D_{i,j} + \frac{1}{n} \right) = D_{i,j}.$$

Nous établissons maintenant le résultat voulu.

**Proposition E.2.5.** Soit  $M \in \mathbb{R}_m^m$  une matrice positive. Pour toute matrice positive  $D \in \text{Dil}(M)$ ,  $M$  et  $D$  ont la même valeur propre dominante.

*Démonstration.* Soit  $D \in \text{Dil}(M)$  une matrice positive. Notons  $n$  sa dimension. Par le théorème 1.4.1,  $\rho(M)$  est une valeur propre de  $M$ . Par le lemme E.2.1, nous en concluons que  $\rho(M)$  est aussi une valeur propre de  $D$ . Par conséquent,  $\rho(M) \leq \rho(D)$ . Nous allons montrer que  $\rho(M) \geq \rho(D)$  en dissociant deux cas : celui où  $M$  et  $D$  sont irréductibles et celui où  $M$  ou  $D$  est réductible. Avant de passer à ces deux cas, nous énonçons la formule de Collatz-Wielandt<sup>3</sup> qui établit que, pour toute matrice irréductible  $N$  de dimension  $\ell$ ,

$$\rho(N) = \max_{\substack{\vec{y} \in \mathbb{R}_0^\ell \\ \vec{y} \geq 0}} \min_{\substack{1 \leq i \leq \ell \\ y_i \neq 0}} \frac{(N\vec{y})_i}{y_i}.$$

Remarquons que cette formule montre aussi que  $\rho(N) < \infty$ .

**Cas où les matrices  $M$  et  $D$  sont irréductibles.** Montrons que, pour tout vecteur positif  $\vec{y} \in \mathbb{R}_0^n$ , il existe un vecteur positif  $\vec{x} \in \mathbb{R}_0^m$  tel que

$$\min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ y_i \neq 0}} \frac{(D\vec{y})_i}{y_i} \leq \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ x_i \neq 0}} \frac{(M\vec{x})_i}{x_i}.$$

Considérons un vecteur positif  $\vec{y} \in \mathbb{R}_0^n$  et notons  $(k_1, \dots, k_m)$  le vecteur de dilatation de la matrice  $D$ . Avec les conventions prises dans la définition E.1.2, nous indiquons les composantes du vecteur  $\vec{y}$  par des couples  $(i, k)$  avec  $i \in \{1, \dots, m\}$  et  $k \in \{1, \dots, k_i\}$ . Nous définissons ensuite le vecteur  $\vec{x} \in \mathbb{R}_0^m$  par

$$x_i = \max_{1 \leq k \leq k_i} y_{(i,k)}$$

3. Pour une preuve de ce résultat, voir par exemple la page 673 de [22] ou la remarque 4 de la page 64 de [18].

pour tout  $i \in \{1, \dots, m\}$ . Le vecteur  $\vec{x}$  ainsi créé est lui aussi positif. Alors

$$\begin{aligned}
\min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ y_i \neq 0}} \frac{(D \vec{y})_i}{y_i} &= \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq k_i \\ y_{(i,k)} \neq 0}} \frac{(D \vec{y})_{(i,k)}}{y_{(i,k)}} \\
&= \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq k_i \\ y_{(i,k)} \neq 0}} \frac{1}{y_{(i,k)}} \sum_{j=1}^m \sum_{\ell=1}^{k_j} D_{(i,k)(j,\ell)} \underbrace{y_{(j,\ell)}}_{\leq x_j} \\
&\leq \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq k_i \\ y_{(i,k)} \neq 0}} \frac{1}{y_{(i,k)}} \sum_{j=1}^m \left( \underbrace{\sum_{\ell=1}^{k_j} D_{(i,k)(j,\ell)}}_{=M_{i,j}} \right) x_j \\
&\leq \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq k_i \\ y_{(i,k)} \neq 0}} \frac{1}{y_{(i,k)}} \sum_{j=1}^m M_{i,j} x_j \\
&\leq \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ 1 \leq k \leq k_i \\ y_{(i,k)} \neq 0}} \frac{1}{y_{(i,k)}} (M \vec{x})_i \\
&\leq \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ x_i \neq 0}} \frac{(M \vec{x})_i}{x_i}
\end{aligned}$$

où la première inégalité est obtenue puisque, pour tout  $j \in \{1, \dots, m\}$ , nous avons  $x_j \geq y_{(j,k)}$  pour tout  $k \in \{1, \dots, k_j\}$  et où la dernière ligne est obtenue par définition de  $x_i$  pour  $i \in \{1, \dots, m\}$ . On en tire que, pour tout vecteur positif  $\vec{y} \in \mathbb{R}_0^n$ , il existe un vecteur positif  $\vec{x} \in \mathbb{R}_0^m$  tel que

$$\min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ y_i \neq 0}} \frac{(D \vec{y})_i}{y_i} \leq \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ x_i \neq 0}} \frac{(M \vec{x})_i}{x_i}. \quad (\text{E3})$$

Puisque, par hypothèse, nous avons

$$\rho(M) = \max_{\substack{\vec{x} \in \mathbb{R}_0^m \\ \vec{x} \geq 0}} \min_{\substack{1 \leq i \leq m \\ x_i \neq 0}} \frac{(M \vec{x})_i}{x_i} < \infty \quad \text{et} \quad \rho(D) = \max_{\substack{\vec{y} \in \mathbb{R}_0^n \\ \vec{y} \geq 0}} \min_{\substack{1 \leq i \leq n \\ y_i \neq 0}} \frac{(D \vec{y})_i}{y_i} < \infty,$$

nous obtenons  $\rho(D) \leq \rho(M)$  grâce à l'inégalité (E3) et par le fait que les maxima sont réalisés.

**Cas où la matrice  $M$  ou la matrice  $D$  est réductible.** Nous définissons alors deux matrices auxiliaires  $J \in \mathbb{R}_n^n$  et  $C \in \mathbb{R}_m^m$  respectivement par  $J_{i,j} = 1$  pour tous  $i, j \in \{1, \dots, n\}$  et  $C_{i,j} = k_j$  pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ . Nous considérons les deux suites de matrices réelles  $(M_s)_{s \in \mathbb{N}_0}$  et  $(D_s)_{s \in \mathbb{N}_0}$  définies respectivement par

$$M_s = M + \frac{1}{s} C \quad \text{et} \quad D_s = D + \frac{1}{s} J$$

pour tout  $s \in \mathbb{N}_0$ . Puisque  $C$  et  $J$  sont deux matrices strictement positives, les matrices  $M_s$  et  $D_s$  sont aussi strictement positives pour tout  $s \in \mathbb{N}_0$ . Par conséquent, les suites  $(M_s)_{s \in \mathbb{N}_0}$  et  $(D_s)_{s \in \mathbb{N}_0}$  sont composées de matrices irréductibles. De plus,  $J$  est une matrice dilatée de  $C$  de vecteur de dilatation  $(k_1, \dots, k_m)$ . En effet, en indiquant les composantes de la matrice  $J$  comme dans la définition E.1.1,  $J$  remplit les trois conditions de cette définition puisque, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  et tout  $k \in \{1, \dots, k_i\}$ , nous avons

$$\sum_{\ell=1}^{k_j} J_{(i,k)(j,\ell)} = \sum_{\ell=1}^{k_j} 1 = k_j = C_{i,j}.$$



Dans ce cas, pour tout  $s \in \mathbb{N}_0$ ,  $D_s$  est une matrice dilatée de  $M_s$  de vecteur de dilatation  $(k_1, \dots, k_m)$ . En effet, fixons un  $s \in \mathbb{N}_0$  et indiquons encore une fois les composantes de  $D_s$  par des couples comme dans la définition E.1.1. Alors, pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  et tout  $k \in \{1, \dots, k_i\}$ , nous avons

$$\sum_{\ell=1}^{k_j} (D_s)_{(i,k)(j,\ell)} = \sum_{\ell=1}^{k_j} D_{(i,k)(j,\ell)} + \sum_{\ell=1}^{k_j} \frac{1}{s} (J_{(i,k)(j,\ell)}) = M_{i,j} + \frac{1}{s} C_{i,j} = (M_s)_{i,j}$$

puisque  $D$  (resp.  $J$ ) est une matrice dilatée de  $M$  (resp.  $C$ ) de vecteur de dilatation  $(k_1, \dots, k_m)$ . Vu la première partie de la preuve,

$$\rho(D_s) \leq \rho(M_s) \quad \forall s \in \mathbb{N}_0. \quad (\text{E4})$$

Puisque la suite de matrices  $(M_s)_{s \in \mathbb{N}_0}$  (resp.  $(D_s)_{s \in \mathbb{N}_0}$ ) converge vers la matrice  $M$  (resp.  $D$ ), nous avons aussi

$$\lim_{s \rightarrow +\infty} \rho(M_s) = \rho(M) \quad \text{et} \quad \lim_{s \rightarrow +\infty} \rho(D_s) = \rho(D)$$

puisque l'opérateur  $\rho$  est continu. En effet, par définition, le rayon spectral d'une matrice carrée dépend du module des valeurs propres de cette matrice. Ainsi, le rayon spectral en dépend continûment puisque le module est une fonction continue. Or il est possible de démontrer que les zéros d'un polynôme dépendent continûment des coefficients de ce polynôme<sup>4</sup>. De plus, nous savons que les coefficients du polynôme caractéristique d'une matrice carrée dépendent des composantes de cette matrice<sup>5</sup>. Comme les valeurs propres d'une matrice carrée sont les zéros de son polynôme caractéristique, ces valeurs propres dépendent continûment des composantes de la matrice. On en tire que le rayon spectral d'une matrice carrée dépend continûment des composantes de cette matrice par composition de fonctions continues. On en déduit la continuité de la fonction  $\rho$ . En passant finalement à la limite pour  $s$  qui tend vers  $+\infty$  dans l'inégalité (E4), nous obtenons  $\rho(D) \leq \rho(M)$ , ce que nous attendions.  $\square$

Illustrons la proposition précédente.

**Exemple E.2.6.** Reprenons l'exemple E.2.2. Il est facile de vérifier que la matrice

$$D = \left( \begin{array}{c|cc} 0 & \frac{1}{3} & \frac{2}{3} \\ \hline 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{array} \right)$$

est une matrice dilatée positive de  $M$  de vecteur de dilatation  $(1, 2)$ . En utilisant le logiciel R, on voit que  $\text{Spec}(D) = \{-1, 0, 1\}$ . Ainsi,  $\rho(D) = 1 = \rho(M)$ .

### E.3 Lien avec la version morphique du théorème de Cobham

Dans la proposition qui suit, nous caractérisons la matrice du morphisme  $\sigma$  donné dans l'algorithme 3.3.18 pour compléter la proposition 3.3.19.

**Proposition E.3.1.** *Soit  $\mathbf{w} = g(f^\omega(a))$  un mot infini morphique tel que  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  et  $g : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  sont deux morphismes non effaçants vérifiant les inégalités (3.8). Considérons les deux morphismes  $\tau$  et  $\sigma$  construits dans l'algorithme 3.3.18. Alors  $\text{Mat}_\sigma$  est une matrice dilatée de  $\text{Mat}_f$ .*

*Démonstration.* Puisque  $\Sigma$  est un alphabet fini, nous pouvons écrire  $\Sigma = \{b_1, \dots, b_m\}$  pour  $m \in \mathbb{N}_0$ . Montrons que  $\text{Mat}_\sigma$  est une matrice dilatée de  $\text{Mat}_f$  de vecteur de dilatation donné par  $(|g(b_1)|, \dots, |g(b_m)|)$ . La première condition de la définition E.1.1 est remplie par définition de l'alphabet  $\Pi$  de l'algorithme 3.3.18. Nous pouvons donc indexer les lignes et les colonnes de  $\text{Mat}_\sigma$  par

4. Consulter par exemple [1].

5. Voir [23] à la page 222.

des couples  $(b_i, k)$  où  $1 \leq i \leq m$  et  $0 \leq k \leq |g(b_i)| - 1$ . Pour tous  $i, j \in \{1, \dots, m\}$  et tout  $k \in \{0, 1, \dots, |g(b_i)| - 1\}$ , nous avons

$$\begin{aligned}
\sum_{\ell=0}^{|g(b_j)|-1} (\mathbf{Mat}_\sigma)_{(b_i, k), (b_j, \ell)} &= \sum_{\ell=0}^{|g(b_j)|-1} |\sigma((b_j, \ell))|_{(b_i, k)} \\
&= \sum_{\ell=0}^{|g(b_j)|-1} |w_{b_j, \ell}|_{(b_i, k)} \\
&= |w_{b_j, 0} w_{b_j, 1} \cdots w_{b_j, |g(b_j)|-1}|_{(b_i, k)} \\
&= |\alpha(f(b_j))|_{(b_i, k)} \\
&= (\mathbf{Mat}_f)_{b_i, b_j}.
\end{aligned}$$

Dans cette suite d'égalités<sup>6</sup>, seule la dernière est encore à expliquer. Si  $(\mathbf{Mat}_f)_{b_i, b_j} = r \in \mathbb{N}$  pour  $i, j \in \{1, \dots, m\}$ , alors la lettre  $b_i$  apparaît  $r$  fois dans le mot  $f(b_j)$  et le mot

$$\alpha(b_i) = (b_i, 0)(b_i, 1) \cdots (b_i, |g(b_i)| - 1)$$

apparaît  $r$  fois dans  $\alpha(f(b_j))$ . Ainsi, si  $k \in \{0, 1, \dots, |g(b_i)| - 1\}$ , la lettre  $(b_i, k)$  apparaît aussi  $r$  fois dans  $\alpha(f(b_j))$  et on a  $|\alpha(f(b_j))|_{(b_i, k)} = r$  pour tout  $k \in \{0, 1, \dots, |g(b_i)| - 1\}$ .  $\square$

**Remarque E.3.2.** Plaçons-nous dans les hypothèses de la proposition précédente. Soit  $\mathbf{w} = g(f^\omega(a))$  un mot infini morphique tel que  $f : \Sigma^* \rightarrow \Sigma^*$  et  $g : \Sigma^* \rightarrow \Gamma^*$  sont deux morphismes non effaçants vérifiant les inégalités (3.8). Considérons les deux morphismes  $\tau$  et  $\sigma$  construits dans l'algorithme 3.3.18. En utilisant les propositions E.2.5 et E.3.1, nous voyons directement que les morphismes  $f$  et  $\sigma$  ont la même valeur propre dominante.

**Exemple E.3.3.** Reprenons l'exemple 3.3.20. La matrice d'incidence du morphisme  $f$  est donnée par

$$\mathbf{Mat}_f = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

et celle du morphisme  $\sigma$  est donnée par

$$\mathbf{Mat}_\sigma = \left( \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ \hline 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \end{array} \right).$$

Il s'agit bien d'une matrice dilatée de  $\mathbf{Mat}_f$  de vecteur de dilatation donné par  $(|g(a)|, |g(b)|) = (3, 3)$ .

Cet exemple termine ce complément sur les matrices de dilatation.

---

6. La troisième égalité est obtenue en choisissant des découpages adéquats comme dans l'algorithme 3.3.18.

# Bibliographie

- [1] Alen Alexanderian, *On continuous dependence of roots of polynomials on coefficients*, (2013), disponible via l'URL <<http://users.ices.utexas.edu/~alen/articles/polyroots.pdf>>, consulté le 25 mars 2015.
- [2] Jean-Paul Allouche et Jeffrey Shallit, *Automatic sequences : Theory, applications, generalizations*, Cambridge University Press, Cambridge, 2003.
- [3] Jean Berstel et Juhani Karhumäki, *Combinatorics on words — A tutorial*, Bulletin of the European Association for Theoretical Computer Science. EATCS (2003), n° 79, 178–228.
- [4] Jean Berstel et Dominique Perrin, *Theory of codes*, Pure and Applied Mathematics, vol. 117, Academic Press, Inc., Orlando, Florida, 1985.
- [5] Jean Berstel et Dominique Perrin, *The origins of combinatorics on words*, European Journal of Combinatorics **28** (2007), n° 3, 996–1022.
- [6] Valérie Berthé et Michel Rigo (éds), *Combinatorics, automata and number theory*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 135, Cambridge University Press, 2010.
- [7] Nicolas Bourbaki, *Éléments de mathématique : Fonctions d'une variable réelle*, Springer-Verlag, Berlin Heidelberg, 2007.
- [8] Véronique Bruyère, Georges Hansel, Christian Michaux, et Roger Villemaire, *Logic and p-recognizable sets of integers*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society. Simon Stevin **1** (1994), n° 2, 191–238, Journées Montoises (Mons, 1992).
- [9] Julien Cassaigne et François Nicolas, *Quelques propriétés des mots substitutifs*, Bulletin of the Belgian Mathematical Society **10** (2003), n° suppl., 661–677.
- [10] Émilie Charlier, Julien Leroy, et Michel Rigo, *Asymptotic properties of free monoid morphisms*, (2015), à paraître (version de travail avril 2015).
- [11] Alan Cobham, *On the base-dependence of sets of numbers recognizable by finite automata*, Mathematical Systems Theory. An International Journal on Mathematical Computing Theory **3** (1969), 186–192.
- [12] Alan Cobham, *Uniform tag sequences*, Mathematical Systems Theory. An International Journal on Mathematical Computing Theory **6** (1972), 164–192.
- [13] Fabien Durand, *Cobham's theorem for substitutions*, Journal of the European Mathematical Society **13** (2011), n° 6, 1799–1814.
- [14] Fabien Durand, *Decidability of the HDOL ultimate periodicity problem*, RAIRO Theoretical Informatics and Applications **47** (2013), n° 2, 201–214.
- [15] Fabien Durand et Michel Rigo, *On Cobham's theorem*, Handbook of Automata : from Mathematics to Applications, European Mathematical Society Publishing House, 2010, disponible via l'URL <<http://hdl.handle.net/2268/39461>>, consulté le 27 mai 2015, à paraître.
- [16] Dominique Foata, *Eulerian polynomials : From Euler's time to the present*, The legacy of Alladi Ramakrishnan in the mathematical sciences, Springer, New York, 2010, p. 253–273.

- 
- [17] N. Pytheas Fogg, *Substitutions in dynamics, arithmetics and combinatorics*, Lecture Notes in Mathematics, vol. 1794, Springer-Verlag, Berlin, 2002, edited by Valérie Berthé, Sébastien Ferenczi, Christian Mauduit, Anne Siegel.
- [18] Felix R. Gantmacher, *The theory of matrices*, vol. 2, Chelsea Publishing Company, New York, 1959.
- [19] Juha Honkala, *On the simplification of infinite morphic words*, Theoretical Computer Science **410** (2009), n° 8-10, 997–1000.
- [20] Douglas Lind et Brian Marcus, *An introduction to symbolic dynamics and coding*, Cambridge University Press, Cambridge, 1995.
- [21] Arnaud Maes et Michel Rigo, *More on generalized automatic sequences*, Journal of Automata, Languages and Combinatorics **7** (2002), n° 3, 351–376.
- [22] Carl Meyer, *Matrix analysis and applied linear algebra*, Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 2000.
- [23] Michel Rigo, *Algèbre linéaire : Notes de cours 2009-2010*, Université de Liège, Faculté des Sciences.
- [24] Michel Rigo, *Mathématiques discrètes : Notes de cours 2009-2010*, Université de Liège, Faculté des Sciences.
- [25] Michel Rigo, *Théorie des automates et langages formels : Notes de cours 2009-2010*, Université de Liège, Faculté des Sciences.
- [26] Michel Rigo, *Théorie des graphes : Notes de cours 2009-2010*, Université de Liège, Faculté des Sciences.
- [27] Michel Rigo, *Generalization of automatic sequences for numeration systems on a regular language*, Theoretical Computer Science **244** (2000), n° 1-2, 271–281.
- [28] Michel Rigo, *Formal languages, Automata and Numeration Systems. Volume 1 : Introduction to Combinatorics on Words*, ISTE-Wiley, 2014.
- [29] Michel Rigo, *Formal languages, Automata and Numeration Systems. Volume 2 : Applications to Recognizability and Decidability*, ISTE-Wiley, 2014.
- [30] Jean Schmets, *Analyse mathématique : Notes de cours 2004-2005*, Université de Liège, Faculté des Sciences.
- [31] Eugene Seneta, *Non-negative matrices and Markov chains*, Springer Series in Statistics, Springer, New York, 2006.

# Liste des figures

1.1	Graphe $G(M)$ associé à la matrice carrée non naturelle positive $M$ . . . . .	15
1.2	Graphe $G(M)$ associé à la matrice carrée positive $M$ . . . . .	16
1.3	Condensé du graphe $G(M)$ de la figure 1.2. . . . .	17
1.4	Graphe ayant plusieurs sommets isolés et sans boucle. . . . .	19
1.5	Graphe $G(M)$ associé à la matrice carrée positive $M$ . . . . .	21
1.6	Arc entre deux ensembles $C_r$ et $C_{r'}$ . . . . .	23
1.7	Chemins entre les sommets 1 et $j$ . . . . .	25
1.8	Chemins entre les sommets 1, $i$ et $j$ . . . . .	25
1.9	Chemins entre les sommets 1, $i$ et $j$ . . . . .	27
1.10	Graphe $G(M^3)$ associé à la matrice carrée positive $M^3$ . . . . .	28
1.11	Chemins entre les sommets $i$ et $k$ , $k$ et $\ell$ , $\ell$ et $j$ , $i$ et $j$ . . . . .	35
2.1	Graphe de chemins $G_C(M)$ associé à la matrice naturelle triangulaire inférieure par blocs $M$ . . . . .	42
2.2	Graphe de chemins $G_C(M)$ associé à la matrice naturelle triangulaire inférieure par blocs $M$ . . . . .	44
2.3	Trois graphes montrant différents comportements asymptotiques. . . . .	47
2.4	Graphe $G(M)$ associé à la matrice carrée positive $M$ . . . . .	50
2.5	Chemins entre les sommets $i$ et $i'$ . . . . .	53
2.6	Graphe $G(M)$ associé à la matrice carrée positive $M$ . . . . .	54
1	Automate acceptant l'ensemble de Thue–Morse $T$ . . . . .	87
A1	Chemins entre les sommets 1, $i$ et $j$ . . . . .	89
A2	Graphe de chemins $G_C(P^{-1}MP)$ associé à la matrice carrée positive par blocs $P^{-1}MP$ . . . . .	91



# Liste des tableaux

2.1	Valeurs des quantités $\lambda(6, 1, r)$ et $d(6, 1, r)$ en fonction du reste $r \in \{0, 1\}$ . . . . .	51
2.2	Valeurs des quantités $\lambda(i, 1, r)$ et $d(i, 1, r)$ au sein des triplets $(i, 1, r)$ pour tout $i \in \{1, \dots, 6\}$ et tout $r \in \{0, 1\}$ . . . . .	58
3.1	Valeurs des quantités $\lambda(\ell)$ et $d(\ell)$ pour toute lettre $\ell$ de $\Sigma = \{a, b, c, d, e, f\}$ . . . . .	63
3.2	Définition du codage $\tau$ sur l'alphabet $\Pi$ . . . . .	83
3.3	Définition du morphisme $\sigma$ sur l'alphabet $\Pi$ . . . . .	84
A1	Nouvelle classification des sommets par rapport au sommet initial $i = 3$ . . . . .	90





# Errata

- Page *vii* : Dans la première note de bas de page, si un mot infini  $\mathbf{w}$  est point fixe d'un morphisme  $f$  et commence par la lettre  $a$ , alors  $f$  n'est pas forcément prolongeable en  $a$ . Il suffit de considérer le morphisme  $f : \{a, b, c\}^* \rightarrow \{a, b, c\}^*$  défini par  $f(a) = \varepsilon$ ,  $f(b) = abc$  et  $f(c) = cc$  et le mot infini  $\mathbf{w} = abc^\omega$ . La tournure de phrase est mal choisie.
- Page 8 : Dans le point (*vi*) du théorème de Perron–Frobenius, remplacer « inéquations » par « inégalités ».
- Page 13 : Dans la proposition 1.3.5, remplacer  $(MP)_{i,j} = M_{i,\sigma^{-1}}$  par  $(MP)_{i,j} = M_{i,\sigma^{-1}(j)}$ .
- Page 44 : Dans la preuve du lemme 2.2.2, ajouter des virgules entre les matrices  $B_{h_1,h_2}, B_{h_2,h_3}, \dots, B_{h_{r-1},h_r}$ .
- Page 45 : Dans la preuve du lemme 2.2.2, corriger la phrase « Autrement dit, nous supposons qu'il est possible de joindre  $k$  à  $\ell$  dans  $G_C(M)$  en empruntant des sommets  $h_1 = k, h_2, \dots, h_r = \ell$  tels que les  $(\beta_s)_{s \in \{1, \dots, r\}}$  ne sont pas tous nuls. » en « Autrement dit, nous supposons qu'il est possible de joindre  $k$  à  $\ell$  dans  $G_C(M)$  en empruntant des sommets  $h_1 = k, h_2, \dots, h_r = \ell$  tels que les réels  $(\beta_s)_{s \in \{1, \dots, r\}}$  ne sont pas tous nuls. »
- Page 47 : Dans la preuve du lemme 2.2.2, la phrase « le naturel

$$d + 1 = \max_{\substack{k=h_1 > h_2 > \dots > h_{r-1} > h_r = \ell \\ B_{h_1,h_2} \neq 0, B_{h_2,h_3} \neq 0, \dots, B_{h_{r-1},h_r} \neq 0}} \#\{s \in \{1, \dots, r\} \mid \rho(P_{h_s}) = \lambda\}$$

étant le plus grand nombre, diminué de 1, de blocs diagonaux de  $M$  possédant une valeur propre dominante égale à  $\lambda$  et correspondant aux sommets par lesquels nous passons pour joindre  $k$  à  $\ell$  dans le graphe de chemins. » est fausse. Il faut retirer « diminué de 1 ».

- Page 75 : Dans la preuve du lemme 3.3.7, enlever le premier « que » de la phrase « Alors que  $f' : \Sigma'^* \rightarrow \Sigma'^*$  et  $g' : \Sigma'^* \rightarrow \Gamma^*$  sont deux morphismes non effaçants tels que  $g'(f'^\omega(a)) = g'(f_\ell^\omega(a)) = \mathbf{w}$  et tels que

$$\text{Mat}_{f'} = \text{Mat}_{f_\ell} = (\text{Mat}_{f^p})_{\Sigma_\ell} = (\text{Mat}_{f^p})_{\Sigma'},$$

ce qui achève la preuve. »

- Page 82 : Dans la preuve de la proposition 3.3.19, la phrase « De plus, puisque les mots  $w_{b,i}$  définis pour tout  $b \in \Sigma$  et tout  $i \in \{0, \dots, |g(b)| - 1\}$  sont vides,  $\sigma$  est un morphisme non effaçant. » est fausse. Les mots en question sont non vides.
- Page 83 : Dans la preuve de la proposition 3.3.19, transformer  $\Theta(\lambda^n n^d)$  en  $\Theta(n^d \lambda^n)$  par souci de cohérence.
- Page 91 : Dans la preuve de la proposition A.0.5, compléter la phrase « Ensuite, le graphe de chemins  $G_C(P^{-1}MP)$  associé à la matrice est donné à la figure A2 puisque tous les blocs sont non nuls. » en ajoutant « à la matrice  $P^{-1}MP$  ».