



**“Seuls les sages, même réduits à
l’extrême mendicité, sont riches.”**

Cicéron, 1er siècle avant J.-C.

9 Éléments d'optique de Fourier

9.2 Théorème de convolution

- 9.2.1 Source étendue
- 9.2.2 Rappels sur le produit de convolution

9.2 Théorème de convolution

9.2.1 Source étendue

9.2.2 Rappels sur le produit de convolution

9 Éléments d'optique de Fourier

9.2 Théorème de convolution

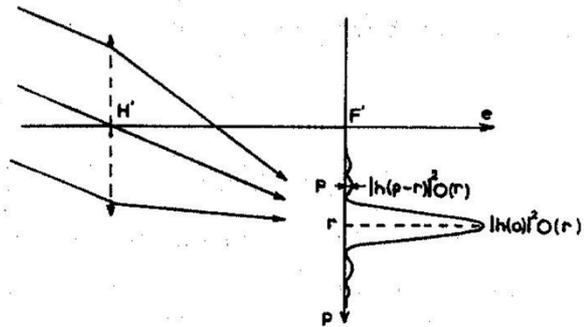
9.2.1 Source étendue

$$O(p, q) = \frac{\partial^2 E}{\partial p \partial q} \quad (9.2.1.1)$$

$$O(r, s) |h(p-r, q-s)|^2 \quad (9.2.1.2)$$

$$e(p, q) = \int_{R^2} O(r, s) |h(p-r, q-s)|^2 dr ds \quad (9.2.1.3)$$

$$e(p, q) = O(p, q) * |h(p, q)|^2 \quad (9.2.1.4)$$



Convolution par focalisation: contribution d'un point de l'objet de coordonnée r à l'éclairement au point de coordonnée p du plan focal. L'éclairement résultant en p est la somme des contributions des différents points de l'objet.

9.2 Théorème de convolution

9.2.1 Source étendue

Considérons maintenant, non plus le cas d'une source ponctuelle, mais celui d'un objet de diamètre apparent sensible. Les variables p et q (cf. relation (9.1.3.8)) du plan focal d'un instrument seront utilisées pour repérer un point de cet objet.

Restant toujours dans le cas monochromatique, nous allons représenter photométriquement l'objet par la distribution $O(p, q)$ définie par

$$O(p, q) = \frac{\partial^2 E}{\partial p \partial q} \quad (9.2.1.1)$$

Remarquons que, l'objet étant à l'infini, un élément $\partial p \partial q$ délimite un nombre infini de centres émetteurs indépendants (i.e. incohérents) de l'objet. Il est donc naturel que ce soit l'éclat et non l'amplitude qui soit proportionnelle au nombre de centre émetteurs (i.e. à $\partial p \partial q$).

Considérons un point (r, s) de l'objet. Il va donner dans le plan focal une réponse impulsionnelle centrée en (r, s) . Au point (p, q) de ce plan, cette réponse aura l'intensité (cf. Fig. ci-dessus)

$$O(r, s) |h(p-r, q-s)|^2 \quad (9.2.1.2)$$

Toujours en raison de l'incohérence de la source, l'éclairement total en (p, q) sera obtenu en sommant les éclaircements provenant de ses différents points

$$e(p, q) = \int_{R^2} O(r, s) |h(p-r, q-s)|^2 dr ds \quad (9.2.1.3)$$

ce qui est, par définition, le produit de convolution de $O(p, q)$ et de $|h(p, q)|^2$ et que l'on note

$$e(p, q) = O(p, q) * |h(p, q)|^2 \quad (9.2.1.4)$$

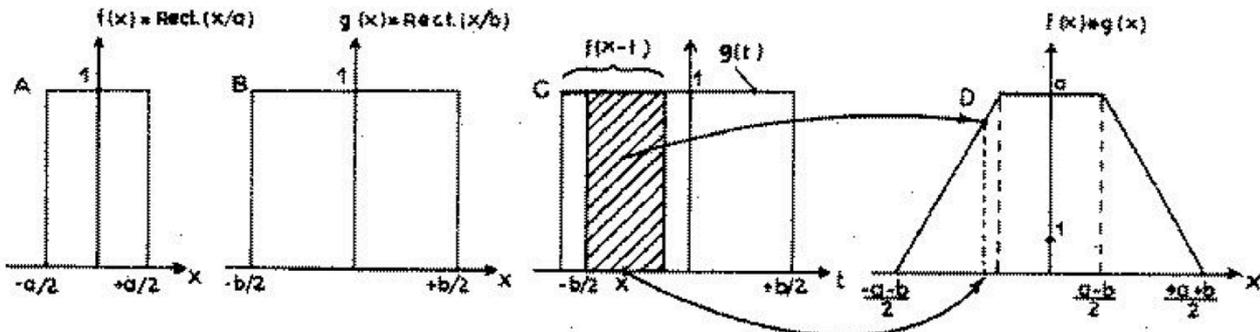
On peut, très schématiquement, énoncer ce théorème sous la forme: l'image au foyer d'un télescope est le produit de convolution de l'objet par la réponse impulsionnelle.

9 Éléments d'optique de Fourier

9.2 Théorème de convolution

9.2.2 Rappels sur le produit de convolution

$$f(x) * g(x) = (f * g)(x) = \int_{R^n} f(x-t)g(t)dt \quad (9.2.2.1)$$



Produit de convolution de deux fonctions rectangles à une dimension. A) $f(x)$, B) $g(x)$, C) $g(t)$ et $f(x-t)$; l'aire hachurée représente l'intégrale du produit de $f(x-t)$ par $g(t)$ pour le décalage x , D) $f(x) * g(x) = (f * g)(x)$ décrit l'évolution de l'intégrale précédente en fonction de x .

9.2 Théorème de convolution

9.2.2 Rappels sur le produit de convolution

Le produit de convolution est défini sur les fonctions localement sommables par

$$f(x) * g(x) = (f * g)(x) = \int_{R^n} f(x-t)g(t)dt \quad (9.2.2.1)$$

à la condition, bien sûr, que l'intégrale converge. Un exemple de convolution de deux fonctions simples est donné à la figure ci-dessus.

Chaque fois que le diamètre apparent d'un astre sera d'un ordre de grandeur inférieur à celui des structures de réponse impulsionnelle (c'est-à-dire si $\phi \ll \lambda/D$), on pourra le représenter approximativement -sur l'axe optique- par la distribution

$$O(p,q) = E \delta(p,q), \quad (9.2.2.2)$$

$\delta(p,q)$ représentant la distribution de Dirac. Pour rappel

$$\delta(x) = 0 \text{ si } x \neq 0, \delta(x) = \infty \text{ si } x = 0 \text{ et } \int_{R^n} \delta(x)dx = 1. \quad (9.2.2.3)$$

Aucune distribution ne peut être représentée exactement par la distribution δ . On peut toutefois considérer δ comme la limite d'une suite de distributions physiques. Pour le cas qui nous intéresse à deux dimensions, on peut par exemple adopter la fonction $\text{Circ}(r)$ définie sur R^2 par $\text{Circ}(x,y) = 1$ si $x^2+y^2-r^2 \leq 0$ et $\text{Circ}(x,y) = 0$ si $x^2+y^2-r^2 > 0$. On peut alors représenter $\delta(r)$ par la limite lorsque $n \rightarrow \infty$ de $[n \text{Circ}[(\pi n)^{-1/2}]]$. Cette suite, dont δ est la limite, est représentée à la figure suivante. On peut vérifier qu'elle décrit bien une suite d'astres, d'éclat constant et unitaire, devenant de plus en plus ponctuels. On trouve alors facilement (cf. Eq. (9.2.1.4)) que

$$e(p,q) = O(p,q) * |h(p,q)|^2 = E \delta(p,q) * |h(p,q)|^2 = E |h(p,q)|^2. \quad (9.2.2.4)$$

9 Éléments d'optique de Fourier

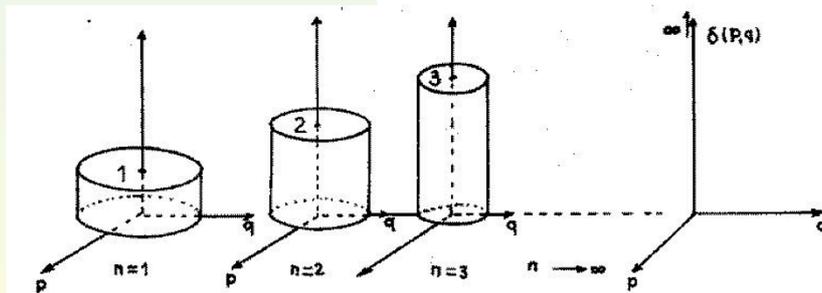
9.2 Théorème de convolution

9.2.2 Rappels sur le produit de convolution

$$O(p,q) = E \delta(p,q), \quad (9.2.2.2)$$

$$\delta(x) = 0 \text{ si } x \neq 0, \delta(x) = \infty \text{ si } x = 0 \text{ et } \int_{R^n} \delta(x) dx = 1. \quad (9.2.2.3)$$

$$e(p,q) = O(p,q) * |h(p,q)|^2 = E \delta(p,q) * |h(p,q)|^2 = E |h(p,q)|^2. \quad (9.2.2.4)$$



Suite de $[n \text{ Circ}[(\pi n)^{-1/2}]]$ représentant des astres d'éclat 1 devenant de plus en plus ponctuels et dont la distribution de Dirac $\delta(p,q)$ sert à représenter abusivement la limite.

9.2 Théorème de convolution

9.2.2 Rappels sur le produit de convolution

On retrouve bien ici la réponse impulsionnelle.

On peut démontrer à partir de la définition du produit de convolution que

$$\delta(x-u) * f(x) = f(x-u). \quad (9.2.2.5)$$

Cette propriété permet de retrouver le résultat (9.1.5.10) pour le cas d'un objet ponctuel positionné hors de l'axe optique.

Enfin, la TF d'un produit de convolution est égale au produit simple des TF (théorème d'échange)

$$\text{TF}_-(f * g) = \text{TF}_-(f) \text{TF}_-(g). \quad (9.2.2.6)$$

La réciproque est vraie

$$\text{TF}_-^{-1}(f g) = \text{TF}_-^{-1}(f) * \text{TF}_-^{-1}(g). \quad (9.2.2.7)$$

La propriété déconvolutive de la TF a une importance théorique considérable.

Nous venons de voir que l'image enregistrable $e(p,q)$ d'un objet $O(p,q)$ par un instrument de réponse impulsionnelle $|h(p,q)|^2$ est

$$e(p,q) = O(p,q) * |h(p,q)|^2. \quad (9.2.2.8)$$

Or $|h(p,q)|^2$ est mesurable puisque c'est l'image d'un objet ponctuel (étoile suffisamment lointaine). Si on réalise la TF de $e(p,q)$

$$\text{TF}_-(e(p,q)) = \text{TF}_-(O(p,q)) \text{TF}_-(|h(p,q)|^2). \quad (9.2.2.9)$$

9 Éléments d'optique de Fourier

9.2 Théorème de convolution

■ 9.2.2 Rappels sur le produit de convolution

$$\delta(x-u) * f(x) = f(x-u). \quad (9.2.2.5)$$

$$\text{TF}_-(f * g) = \text{TF}_-(f) \text{TF}_-(g). \quad (9.2.2.6)$$

$$\text{TF}_-^{-1}(f g) = \text{TF}_-^{-1}(f) * \text{TF}_-^{-1}(g). \quad (9.2.2.7)$$

$$e(p,q) = O(p,q) * |h(p,q)|^2. \quad (9.2.2.8)$$

$$\text{TF}_-(e(p,q)) = \text{TF}_-(O(p,q)) \text{TF}_-(|h(p,q)|^2). \quad (9.2.2.9)$$

9.2 Théorème de convolution

9.2.2 Rappels sur le produit de convolution

Comme on peut également réaliser la TF de $|h(p,q)|^2$, on obtient la connaissance de $\text{TF}_-(O(p,q))$ qui par une TF_-^{-1} peut, théoriquement, nous fournir $O(p,q)$, c'est-à-dire une image de l'objet débarrassée des phénomènes de diffraction, de turbulence, d'aberrations, ...

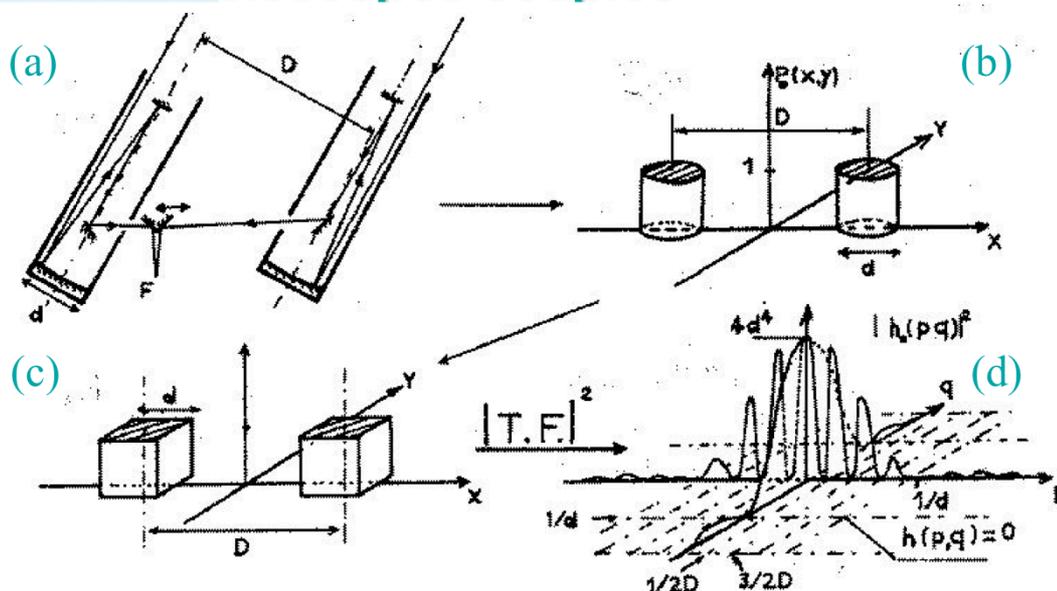
En fait, on verra plus loin que l'on n'obtient qu'un morceau de $\text{TF}_-(O(p,q))$ mais cela n'empêche pas la restitution de l'objet si celui-ci a des dimensions finies.

Le théorème d'échange (9.2.2.6) et les propriétés de la TF semblent montrer le caractère artificiel de la notion de limite de résolution souvent associée au phénomène de diffraction. Mais le modèle mathématique utilisé conduit au paradoxe contraire. De même que l'intuition nous amène à penser que la légère déformation de la tache d'Airy que cause un objet non strictement ponctuel est déjà une résolution implicite de celui-ci (au problème de l'unicité près), de même il semble illusoire d'espérer pouvoir un jour résoudre à 10^{-4} " d'arc un astre de magnitude 30 à l'aide d'un objectif de 2 cm de diamètre (dixit ... Dr. H. Reboul).

9 Elements d'optique de Fourier

9.3 Applications aux télescopes

9.3.2 Télescopes couplés



Télescopes optiques couplés: (a) schéma optique simplifié; (b) distribution d'amplitude pupillaire; (c) idem mais simplifié; (d) réponse impulsionnelle

9.3 Applications aux télescopes

9.3.2 Télescopes couplés

La figure (a) ci-dessus représente le principe du couplage optique de deux télescopes. Un tel système est équivalent à un énorme télescope devant lequel on aurait placé un écran percé de deux ouvertures correspondant aux pupilles d'entrée des télescopes réels. La fonction pupille $P_0(x,y)$ de ce système est représenté à la figure (b).

Calculons la réponse impulsionnelle $h_0(p,q)$ de ce système en l'absence de perturbation. Pour simplifier le calcul, nous supposons que les pupilles des deux télescopes sont des carrés de côté d et que la distance de leur axes optiques est D .

La fonction pupille $P_0(x,y)$ ainsi approximée a alors le graphe représenté à la figure (c) et la réponse impulsionnelle $h_0(p,q)$ correspondante vaut:

$$h_0(p, q) = \int_{R^2} P(x, y) \exp[-2i\pi(px + qy)] dx dy \quad (9.3.1)$$

qui se simplifie comme suit

$$h_0(p, q) = \int_{-d/2}^{d/2} \exp(-2i\pi qy) dy \left[\int_{-D/2-d/2}^{-D/2+d/2} \exp(-2i\pi px) dx + \int_{D/2-d/2}^{D/2+d/2} \exp(-2i\pi px) dx \right] \quad (9.3.2)$$

$$h_0(p, q) = 2d^2 \left(\frac{\sin(\pi qd)}{\pi qd} \right) \left(\frac{\sin(\pi pd)}{\pi pd} \right) \cos(\pi pD) \quad (9.3.3)$$

$$\text{et } |h_0(p, q)|^2 = 4d^4 \left(\frac{\sin(\pi qd)}{\pi qd} \right)^2 \left(\frac{\sin(\pi pd)}{\pi pd} \right)^2 \cos^2(\pi pD). \quad (9.3.4)$$

9 Elements d'optique de Fourier

9.3 Applications aux télescopes

9.3.2 Télescopes couplés

$$h_0(p, q) = \int_{R^2} P(x, y) \exp[-2i\pi(px + qy)] dx dy \quad (9.3.1)$$

$$h_0(p, q) = \int_{-d/2}^{d/2} \exp(-2i\pi qy) dy \left[\int_{-D/2-d/2}^{-D/2+d/2} \exp(-2i\pi px) dx + \int_{D/2-d/2}^{D/2+d/2} \exp(-2i\pi px) dx \right] \quad (9.3.2)$$

$$h_0(p, q) = 2d^2 \left(\frac{\sin(\pi qd)}{\pi qd} \right) \left(\frac{\sin(\pi pd)}{\pi pd} \right) \cos(\pi pD) \quad (9.3.3)$$

$$|h_0(p, q)|^2 = 4d^4 \left(\frac{\sin(\pi qd)}{\pi qd} \right)^2 \left(\frac{\sin(\pi pd)}{\pi pd} \right)^2 \cos^2(\pi pD) \quad (9.3.4)$$

9.3 Applications aux télescopes

9.3.2 Télescopes couplés

Cette distribution est représentée à la figure (d) précédente. Il s'agit de la réponse impulsionnelle sur le ciel. Les miroirs de renvoi, négligés dans notre calcul, permettent d'adapter à volonté la largeur des franges d'interférence dans le plan focal.

Remarque: on peut réécrire (9.3.3) comme suit:

$$\begin{aligned} h_0(p, q) &= 2d^2 \left(\frac{\sin(\pi qd)}{\pi qd} \right) \left(\frac{\sin(\pi pd)}{\pi pd} \right) 2 \cos(\pi pD) \left(\frac{\sin(\pi pD)}{2 \sin(\pi pD)} \right) \\ &= 2d^2 \left(\frac{\sin(\pi qd)}{\pi qd} \right) \left(\frac{\sin(\pi pd)}{\pi pd} \right) \left(\frac{\pi pD}{\sin(\pi pD)} \right) \left(\frac{\sin(2\pi pD)}{2\pi pD} \right) \end{aligned}$$

et il est aisé de démontrer (voir section 9.3.4, équation (9.3.26)) que ce résultat se déduit tout simplement du cas plus général indiqué ci-dessous, pour $N = 2$, où N représente le nombre d'éléments d'un interféromètre optique séparés d'une distance a , telle que $D = N a$

$$h_0(p, q) = Nd^2 \left(\frac{\sin(\pi qd)}{\pi qd} \right) \left(\frac{\sin(\pi pd)}{\pi pd} \right) \left(\frac{\pi pa}{\sin(\pi pa)} \right) \left(\frac{\sin(N\pi pa)}{N\pi pa} \right)$$

9 Elements d'optique de Fourier

9.3 Applications aux télescopes

9.3.2 Télescopes couplés

$$h_0(p, q) = 2d^2 \left(\frac{\sin(\pi qd)}{\pi qd} \right) \left(\frac{\sin(\pi pd)}{\pi pd} \right) 2 \cos(\pi pD) \left(\frac{\sin(\pi pD)}{2 \sin(\pi pD)} \right)$$

$$= 2d^2 \left(\frac{\sin(\pi qd)}{\pi qd} \right) \left(\frac{\sin(\pi pd)}{\pi pd} \right) \left(\frac{\pi pD}{\sin(\pi pD)} \right) \left(\frac{\sin(2\pi pD)}{2\pi pD} \right),$$

$$h_0(p, q) = Nd^2 \left(\frac{\sin(\pi qd)}{\pi qd} \right) \left(\frac{\sin(\pi pd)}{\pi pd} \right) \left(\frac{\pi pa}{\sin(\pi pa)} \right) \left(\frac{\sin(N\pi pa)}{N\pi pa} \right), \quad \text{si } N=2.$$

9.3 Applications aux télescopes

9.3.2 Télescopes couplés

Dans certaines conditions, ce montage peut se montrer directement aussi résolvant qu'un télescope unique de diamètre D. En effet; si nous considérons une étoile de diamètre apparent $\phi_x \cdot \phi_y = \phi \cdot \phi$, d'éclat E et de brillance uniforme, son profil O(p,q) peut être représenté par

$$O(p, q) = (\lambda^2 E / \phi^2) \Pi(p \lambda / \phi) \Pi(q \lambda / \phi). \quad (9.3.5)$$

Ce résultat vient du fait que $O(x', y') = (E / f^2 \phi^2) \Pi(x' / f\phi) \Pi(y' / f\phi)$ et pour rappel $x' = p \lambda f$, $y' = q \lambda f$, $O(x', y') dx' dy' = O(p, q) dp dq$ et $\int O(x', y') dx' dy' = \int O(p, q) dp dq = E$.

Son image focale sera (cf. Eq. (9.2.1.4))

$$e(p, q) = O(p, q) * |h_0(p, q)|^2.$$

La séparation des variables dans les fonctions O et h_0 permet d'écrire

$$e(p) = O(p) * |h_0(p)|^2, \quad (9.3.6)$$

$$e(p) = 2d^2 \left(\frac{\lambda}{\phi} \right) \sqrt{E} \int_{p-\phi/2\lambda}^{p+\phi/2\lambda} \left(\frac{\sin(\pi rd)}{\pi rd} \right)^2 \cos^2(\pi rD) dr \quad (9.3.7)$$

Si l'étoile ne peut pas être résolue avec un seul télescope de diamètre d, c'est que $\phi \ll \lambda / d$ (cas non perturbé). Dans ce cas

9 Elements d'optique de Fourier

9.3 Applications aux télescopes

■ 9.3.2 Télescopes couplés

$$O(p,q) = (\lambda^2 E / \phi^2) \Pi(p \lambda / \phi) \Pi(q \lambda / \phi) \quad (9.3.5)$$

$$e(p,q) = O(p,q) * |h_0(p,q)|^2$$

$$e(p) = O(p) * |h_0(p)|^2 \quad (9.3.6)$$

$$e(p) = 2d^2 \left(\frac{\lambda}{\phi} \right) \sqrt{E} \int_{p-\phi/2\lambda}^{p+\phi/2\lambda} \left(\frac{\sin(\pi r d)}{\pi r d} \right)^2 \cos^2(\pi r D) dr \quad (9.3.7)$$

$$\left(\frac{\sin(\pi r d)}{\pi r d} \right)^2 \approx \text{constante sur } \left[p - \frac{\phi}{2\lambda}, p + \frac{\phi}{2\lambda} \right] \quad (9.3.8) \quad \text{et}$$

$$e(p) = 2d^2 \left(\frac{\lambda}{\phi} \right) \sqrt{E} \left(\frac{\sin(\pi p d)}{\pi p d} \right)^2 \int_{p-\phi/2\lambda}^{p+\phi/2\lambda} \cos^2(\pi r D) dr \quad (9.3.9)$$

9.3 Applications aux télescopes; 9.3.2 Télescopes couplés

$$\left(\frac{\sin(\pi r d)}{\pi r d} \right)^2 \approx \text{constante sur } \left[p - \frac{\phi}{2\lambda}, p + \frac{\phi}{2\lambda} \right], \text{ et} \quad (9.3.8)$$

$$e(p) = 2d^2 \left(\frac{\lambda}{\phi} \right) \sqrt{E} \left(\frac{\sin(\pi p d)}{\pi p d} \right)^2 \int_{p-\phi/2\lambda}^{p+\phi/2\lambda} \cos^2(\pi r D) dr \quad (9.3.9)$$

Les franges d'interférence apparaissent dans l'intégrale. Si $\phi \ll \lambda / D$, cette intégrale est peu différente de $(\phi / \lambda) \cos^2(\pi p D)$ et $e(p) \sim E^{1/2} |h(p)|^2$. C'est le cas où l'objet peut être approximativement représenté par la distribution de Dirac (cf. Eq. (9.1.6.1)). Le contraste des franges est maximum. Si on augmente D , le contraste va diminuer progressivement. En effet, lorsqu'on atteindra $\phi = \lambda / D$, on intégrera une fonction périodique ($\cos^2(\pi r D)$) sur une période: le résultat ne sera plus fonction de p . Les franges d'interférence auront disparu. Il en sera de même chaque fois que $\phi = k \lambda / D$ (avec k entier). Dans le cas plus réaliste d'un objet à contour circulaire et de brillance de surface uniforme, le calcul amènerait, pour la disparition des franges à la relation bien connue $\phi = 1,22 \lambda / D$. Pour rappel, cette méthode a été utilisée par Michelson et Pease avec leur interféromètre stellaire (cf. section (7.4)). Ils se servaient en fait d'un seul télescope occulté par un écran percé de deux ouvertures (cf. la distribution pupillaire à la figure (b) ci-avant). Un jeu de miroirs plans placés en avant des ouvertures permettait de faire varier D et de dépasser le diamètre réel du télescope. Le couplage optique de deux télescopes, représenté à la figure (a) précédente, n'a pu être mené à bien que vers la fin des années 70 par Labeyrie. Les images sont enregistrées et traitées selon une technique qu'il a mise au point. De grands réseaux de télescopes optiques couplés ont été construits (cf. le VLTI de l'ESO, etc.). Il n'est pas nécessaire d'obtenir la disparition totale des franges pour déterminer ϕ , et même le profil de brillance de surface de l'objet étudié (voir Eq. (9.3.17)).