

Bref résumé du cours précédent

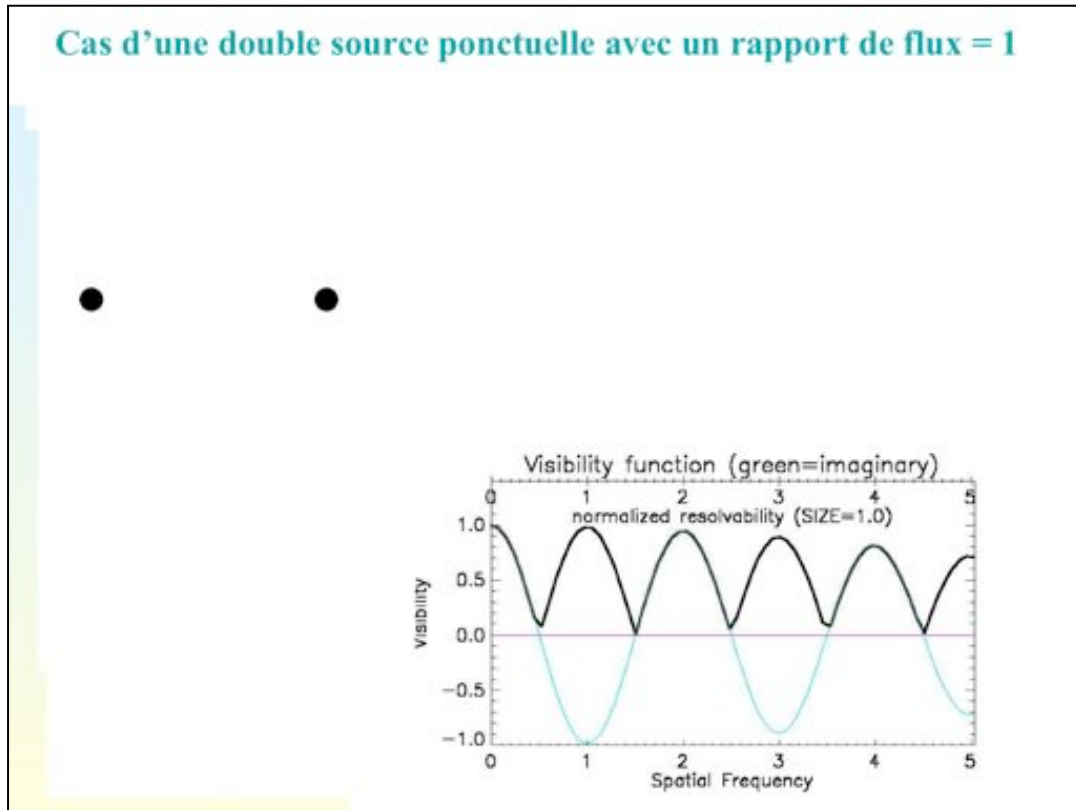
$$V = |\gamma_{12}(0, u, v)| = \left| \iint_S I'(\zeta, \eta) \exp\{-i2\pi(u\zeta + v\eta)\} d\zeta d\eta \right|$$

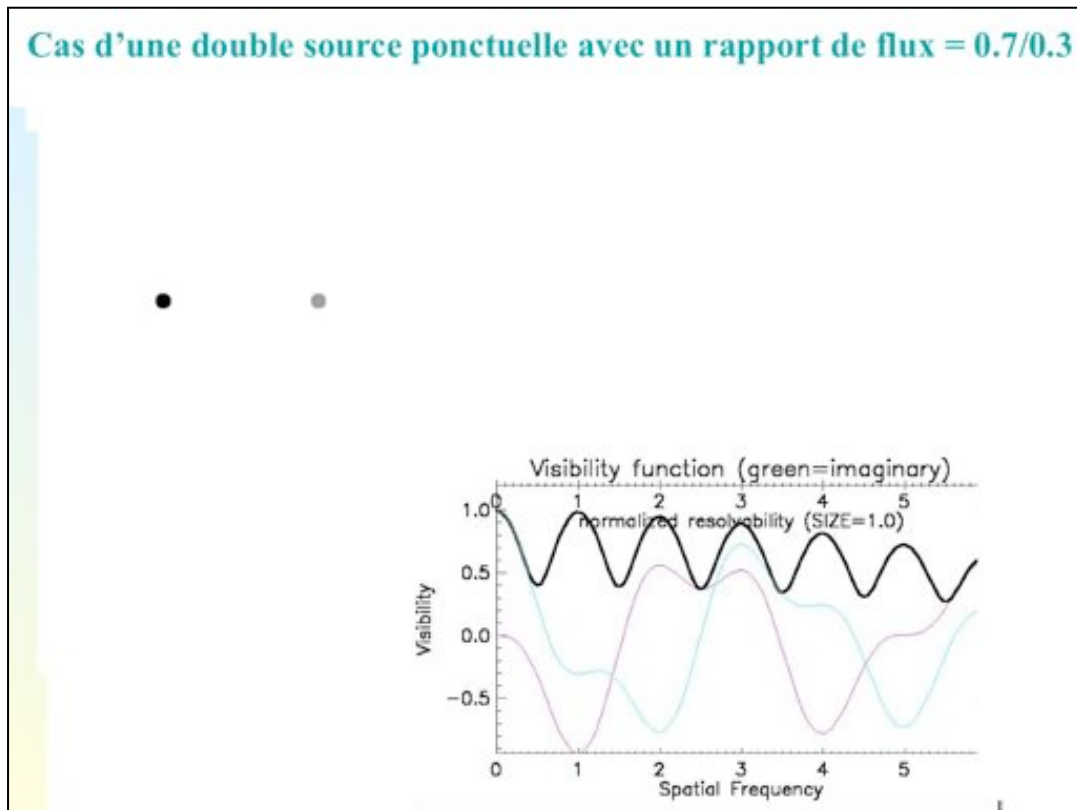
$$I'(\zeta, \eta) = \iint \gamma_{12}(0, u, v) \exp\{i2\pi(\zeta u + \eta v)\} d(u)d(v)$$

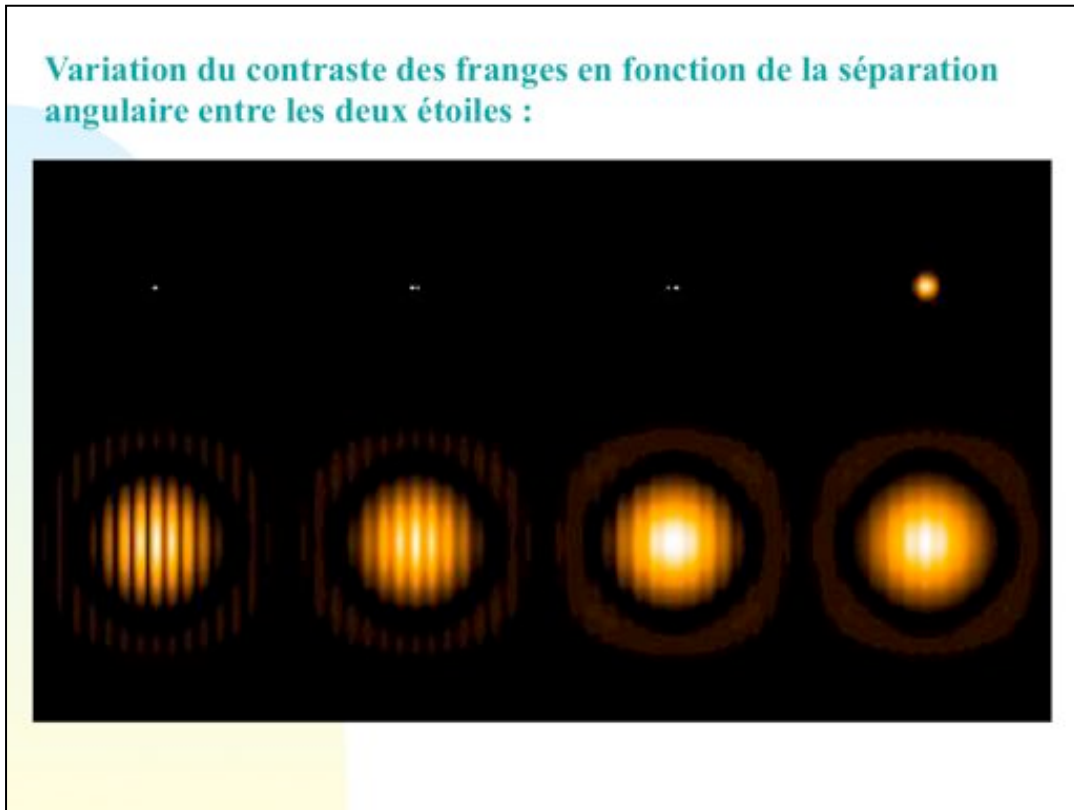


- Pour le cas d'une étoile à une dimension, possédant une brillance de surface uniforme, et dont le diamètre angulaire est $\phi = b/z'$, nous avons trouvé que la visibilité des franges d'interférence est nulle lorsque $\lambda/B = b/z' = \phi$ où B représente la base de l'interféromètre

- Pour le cas d'une étoile double dont la séparation angulaire est $\phi = b/z'$, nous avons trouvé que la visibilité des franges d'interférence est nulle lorsque $\lambda/2B = b/z' = \phi$

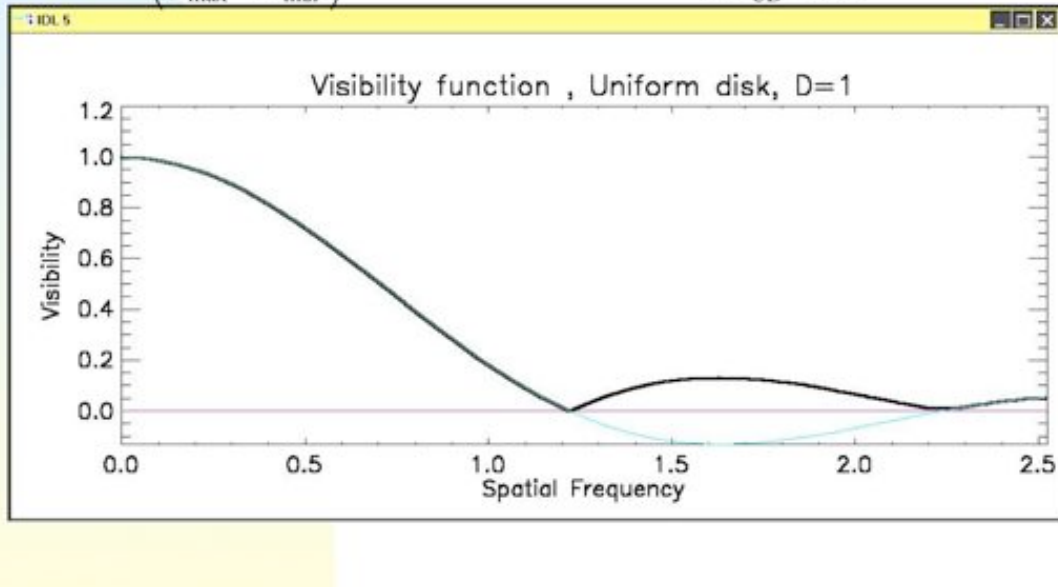


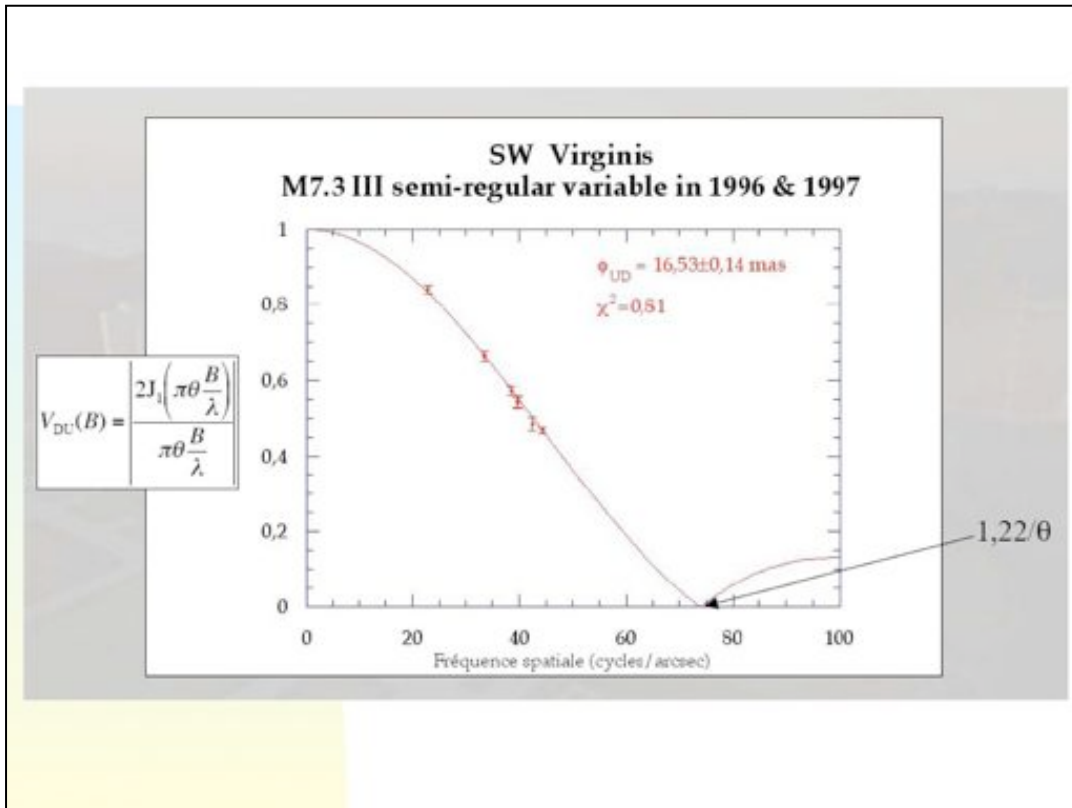


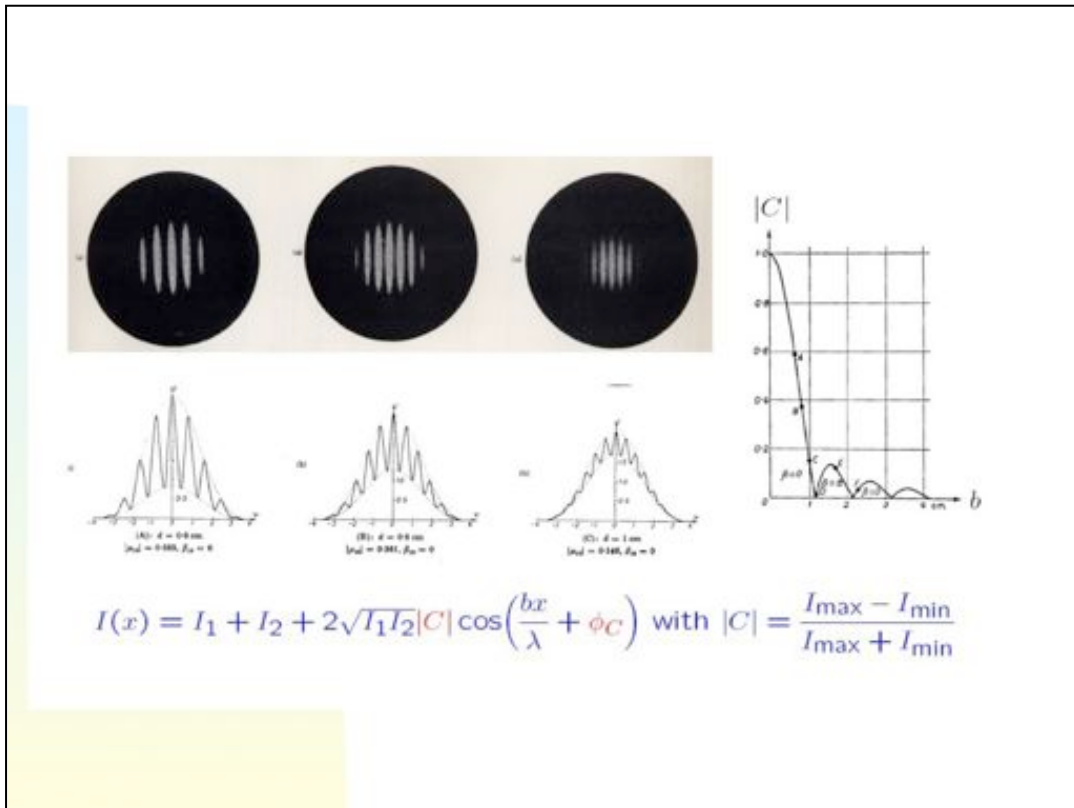


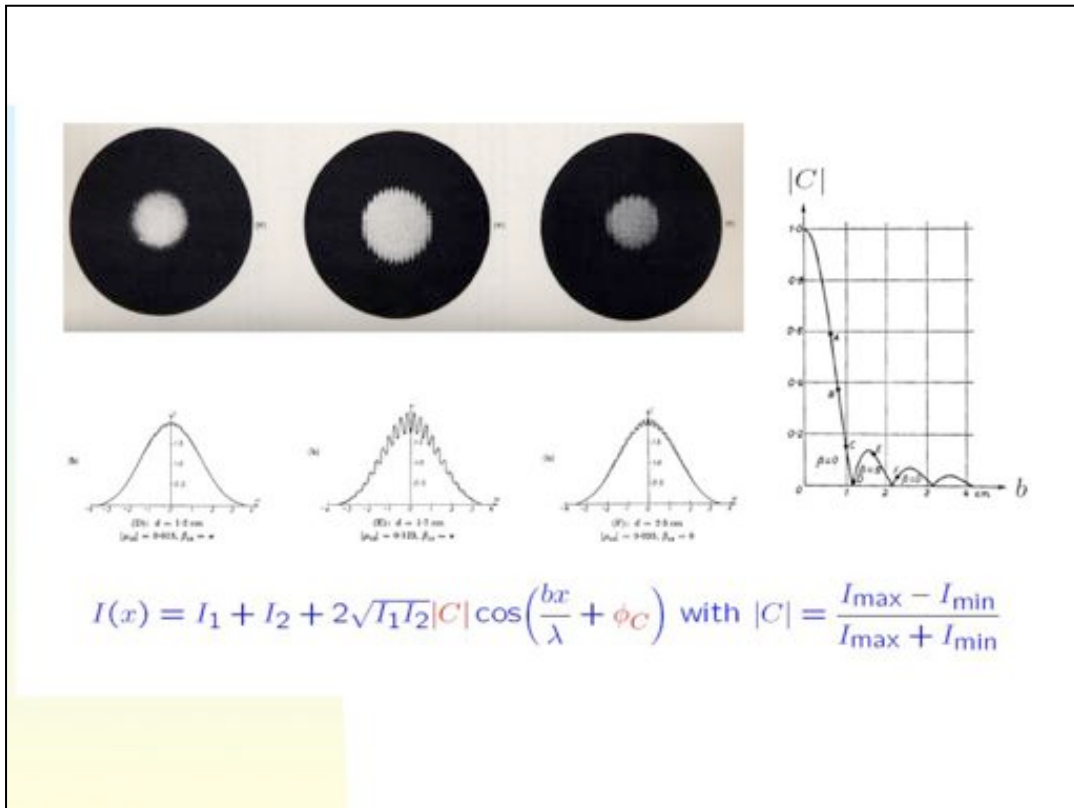
**Disque avec une brillance de surface uniforme :
visibilité correspondante**

$$v = \left(\frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \right) = |\gamma_{12}(0)| = TF(I) = \frac{2J_1(\pi\theta_{UD}B/\lambda)}{\pi\theta_{UD}B/\lambda}$$









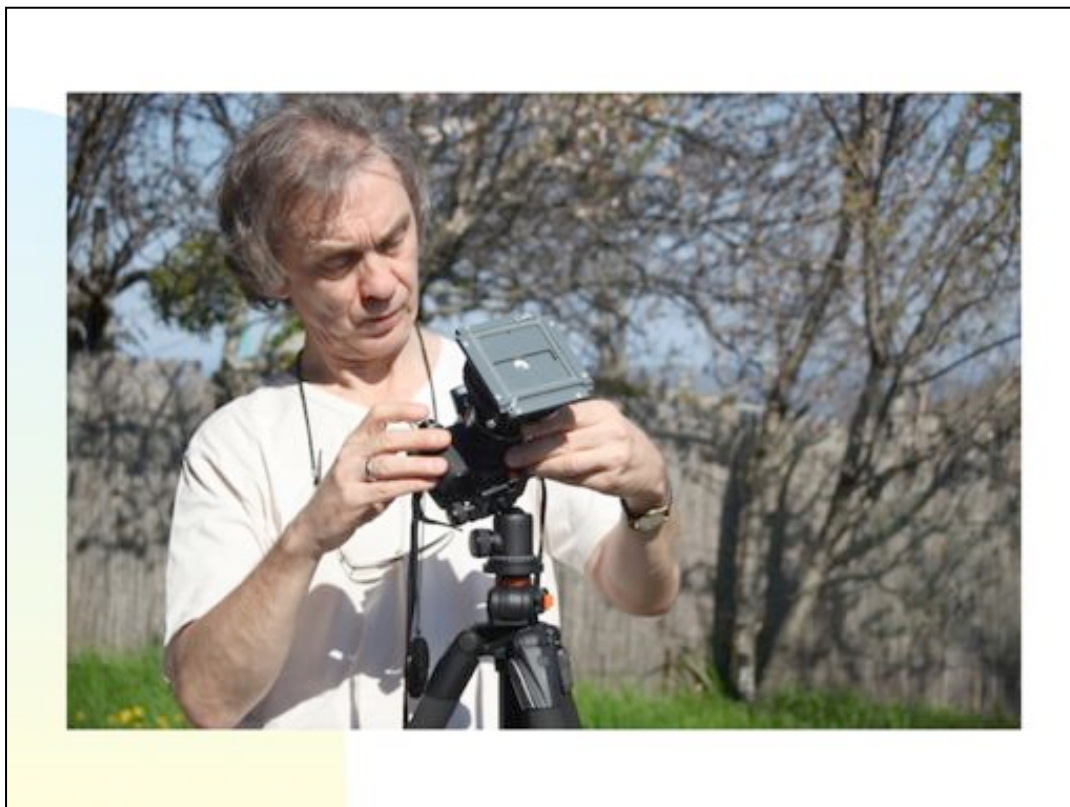
Pour le cas du Soleil:

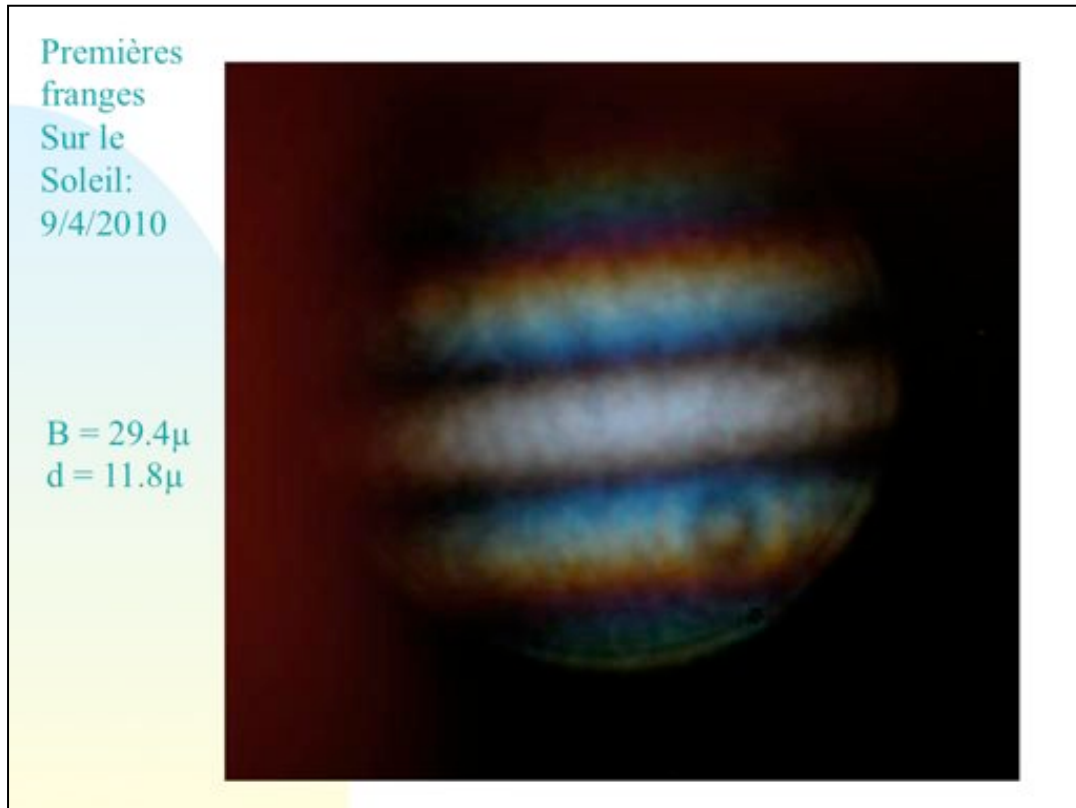
$$\vartheta_{UD} = 1.22 \lambda / B = 1.22 \cdot 0.55 / B(\mu) = 30' \times 60'' / 206265$$

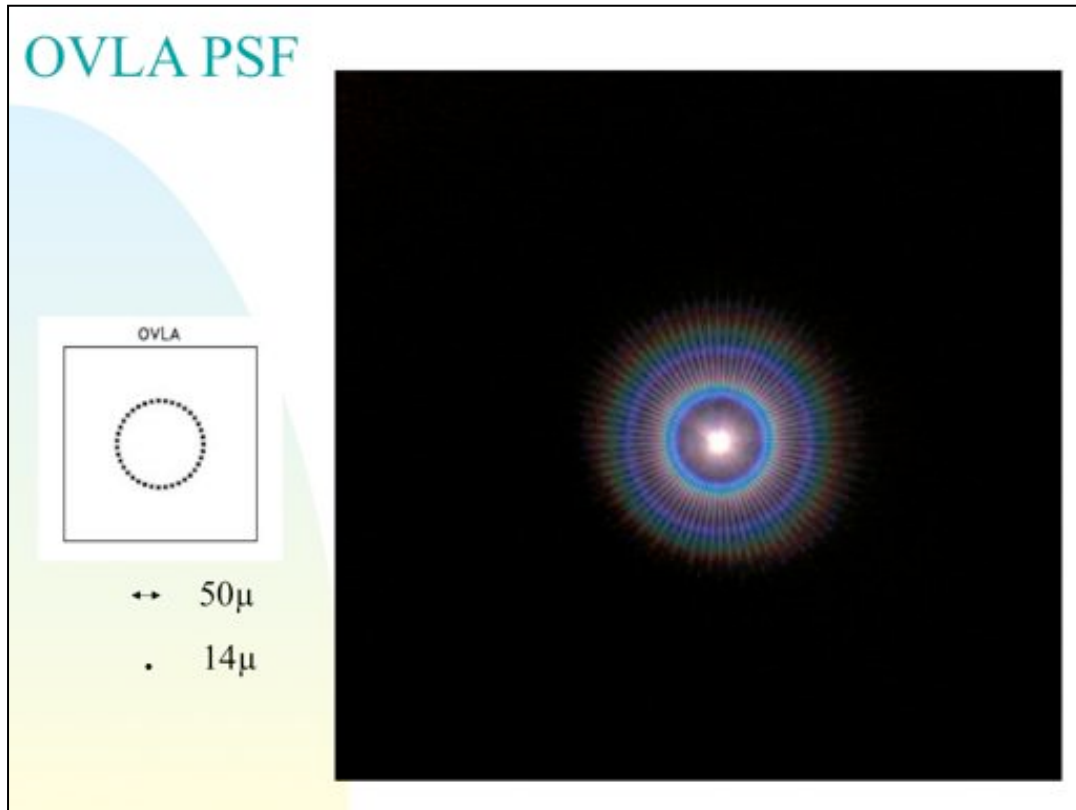
$$B(\mu) = 206265 \times 1.22 \times 0.55 / (30 \times 60) = 76.9 \mu$$

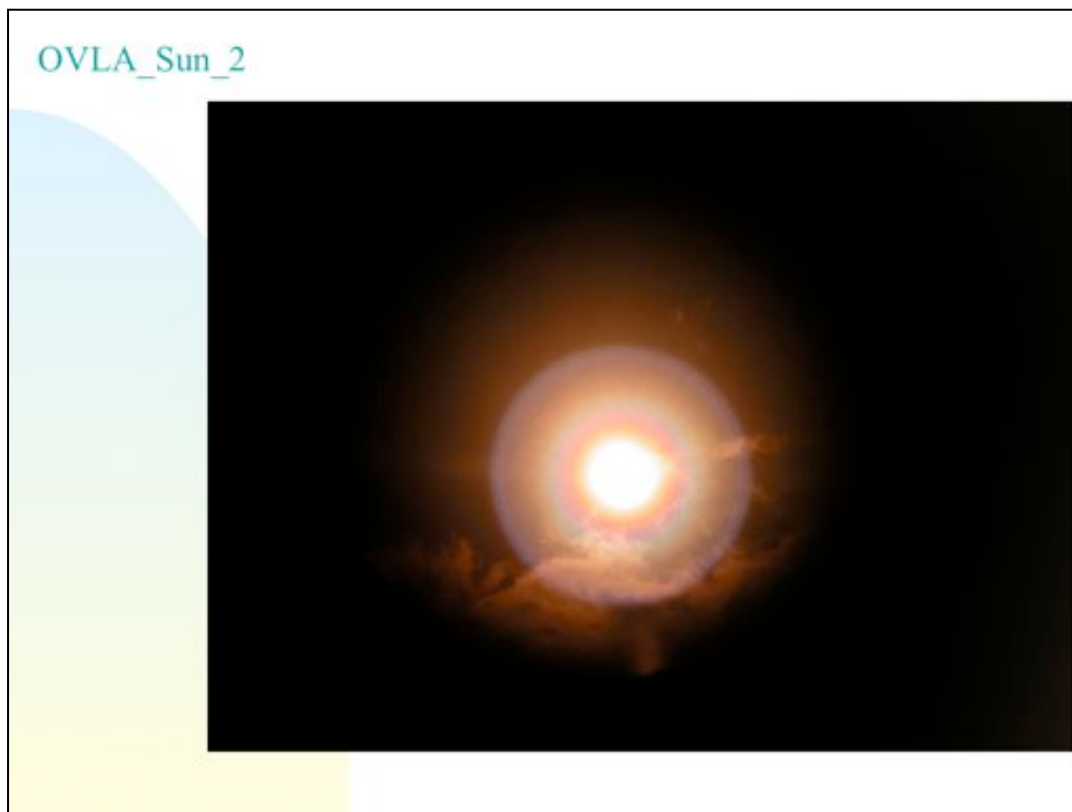
$$d(\mu) = 7.2 \text{ or } 14.4 \mu \rightarrow \sigma = 2.44 \lambda / d = 7.8^\circ \text{ or } 3.9^\circ$$

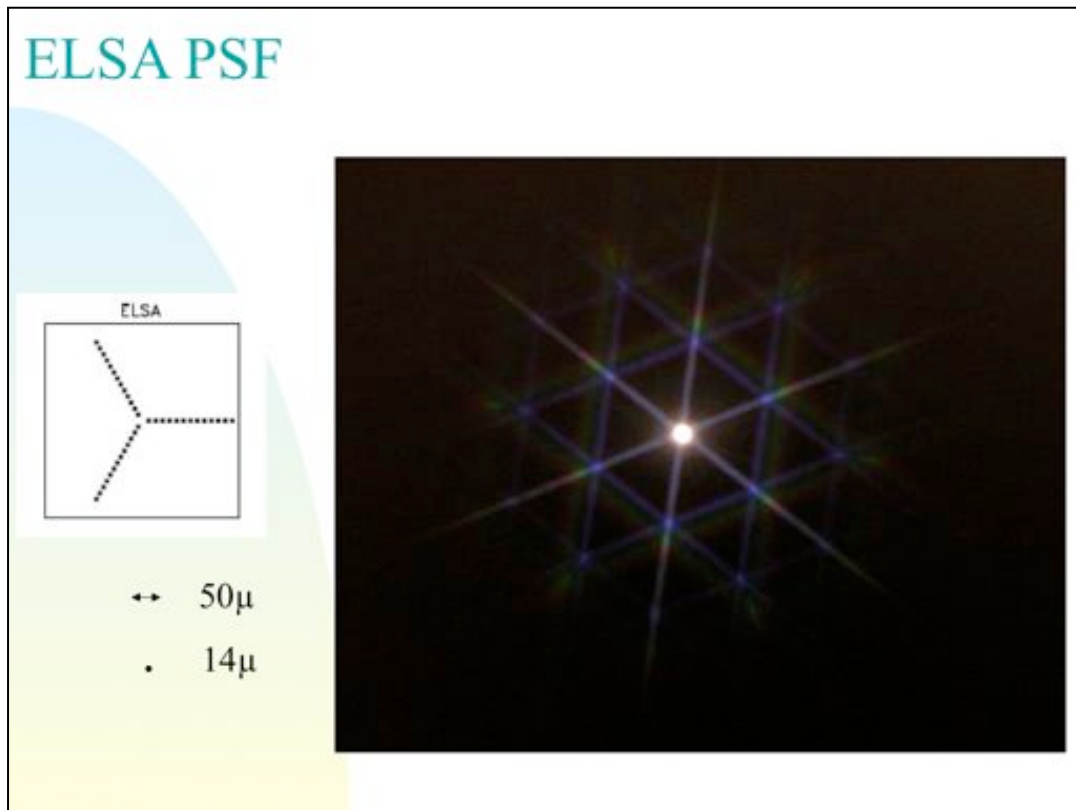
Voir les masques correspondants!









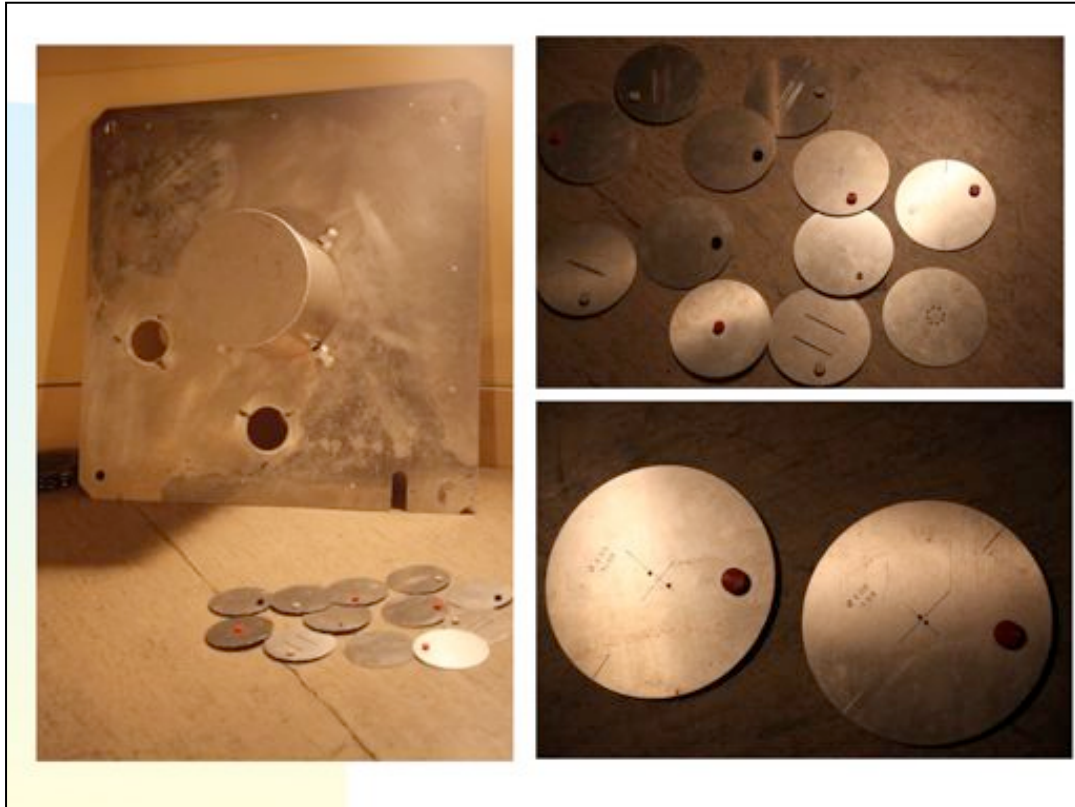






Observations interférométriques
réalisées le 10/4/2010 pour
Procyon, Mars et Saturne, en
utilisant le télescope de 80cm de
l'Observatoire de Haute-Provence
(coll. Avec Hervé le Coroller) ...





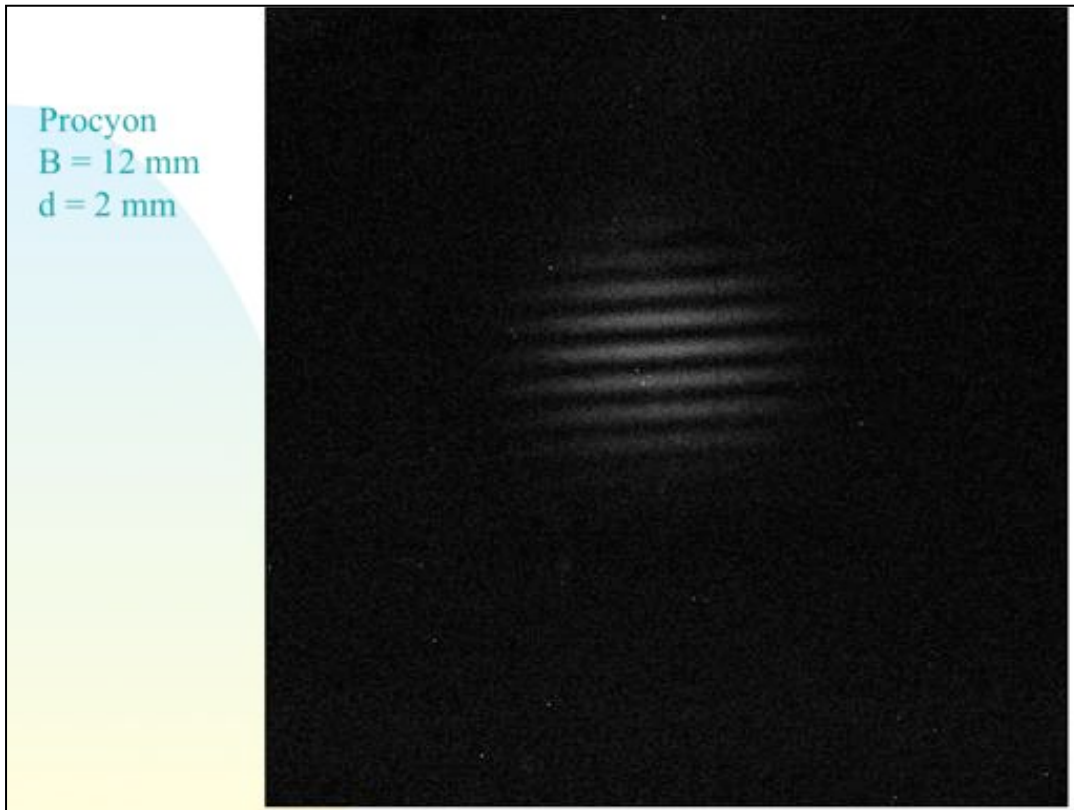


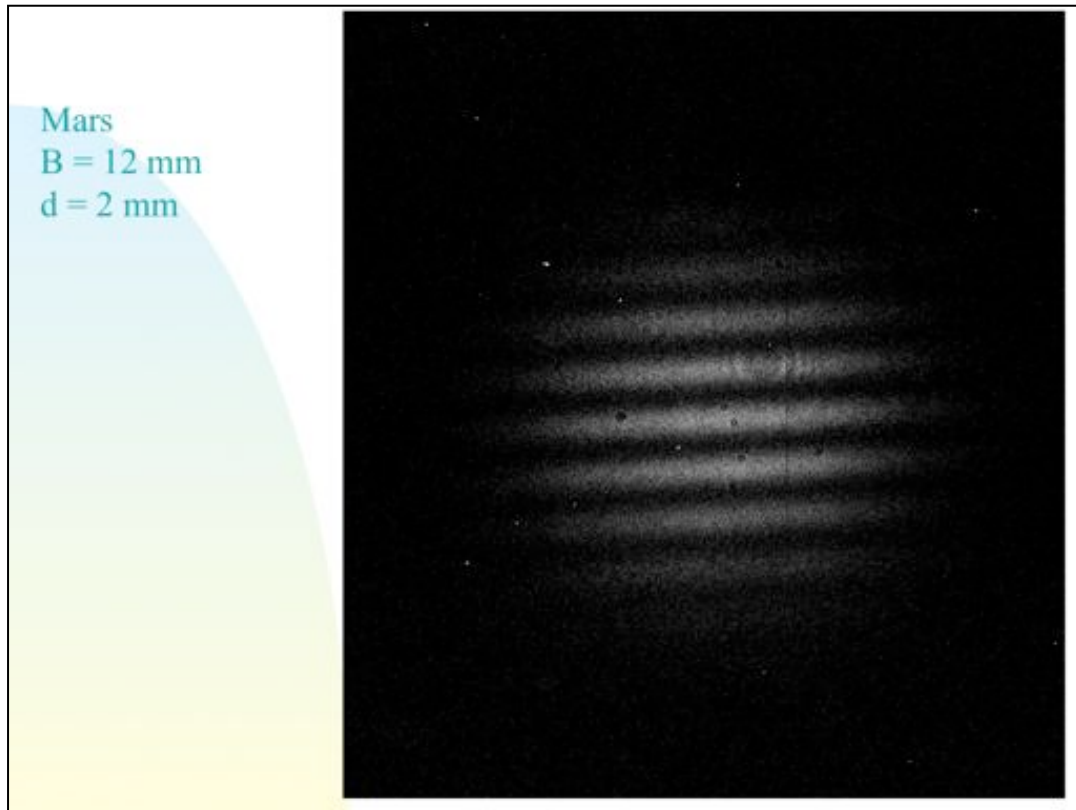
Diamètre des trous	Base
2 mm	12, 8, 5, 4, 3 mm

Largeur de fente	Base
2 mm	30, 15, 10, 2 mm

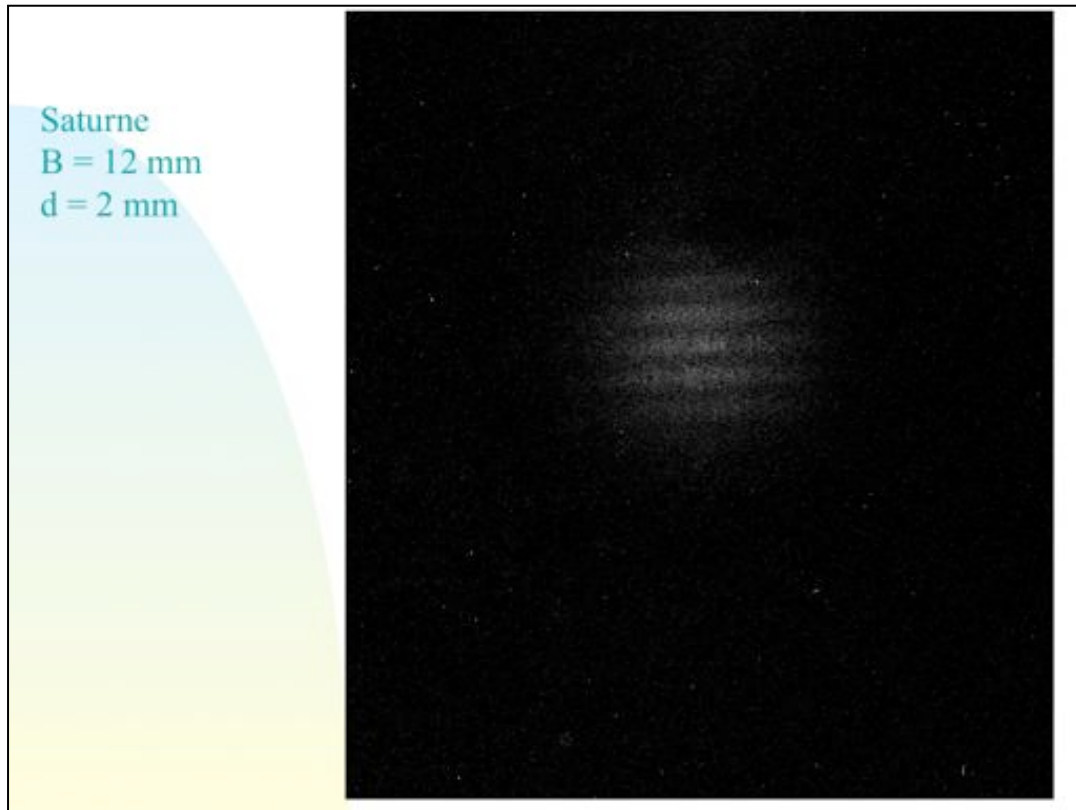
Diamètre des trous	Base
4 mm	full, 30, 20, 12, 8 mm

Diamètre des trous	Base	/ fente	Base / 3 trous
Dist / 3 trous	Dist / 8 trous	Dist /	
1 mm	2 mm	1 mm	2 mm / 1 mm 2 mm /
2 mm 3 mm/ 4 mm	20 mm		









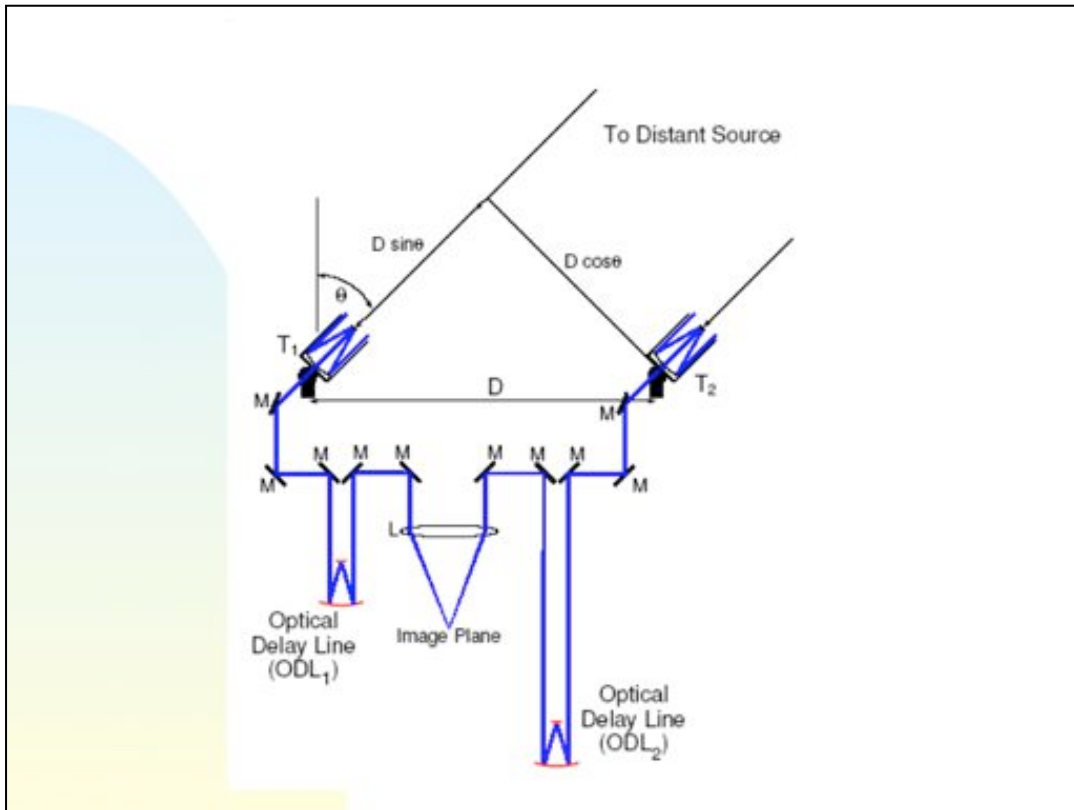
7 Rayons angulaires des étoiles

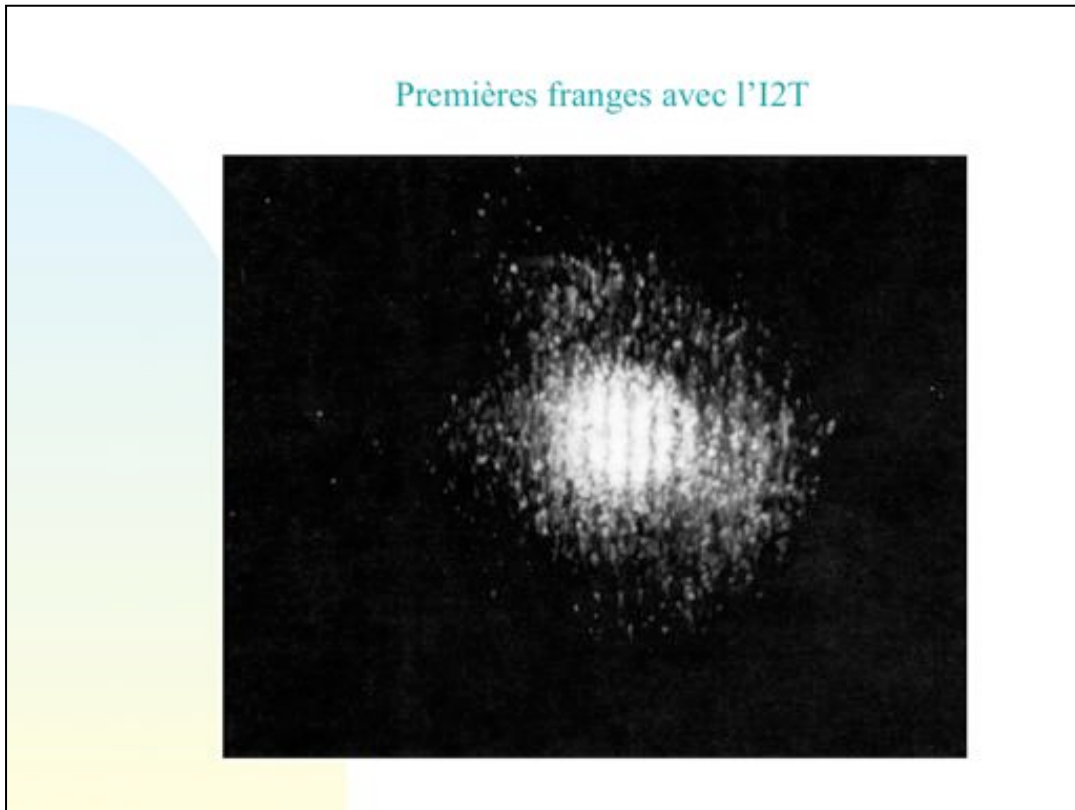
■ 7.6 Exemples d'interféromètres de type Fizeau



7.6 Exemples d'interféromètres de type Fizeau

Un des sanctuaires très respectés de l'interférométrie optique se situe sur le plateau de Caussols, au nord de Grasse, dans le sud de la France. L'I2T, fait de 2 télescopes de 26cm d'ouverture distants de 144m est caractérisé par une résolution angulaire $\phi \sim 0,001''$ atteignable pour des objets dont la magnitude apparente limite est $V_{\text{lim}} \sim 6$ (voir photo). Près d'une vingtaine de diamètres angulaires ont été déterminés au moyen de l'I2T.







7.6 Exemples d'interféromètres de type Fizeau

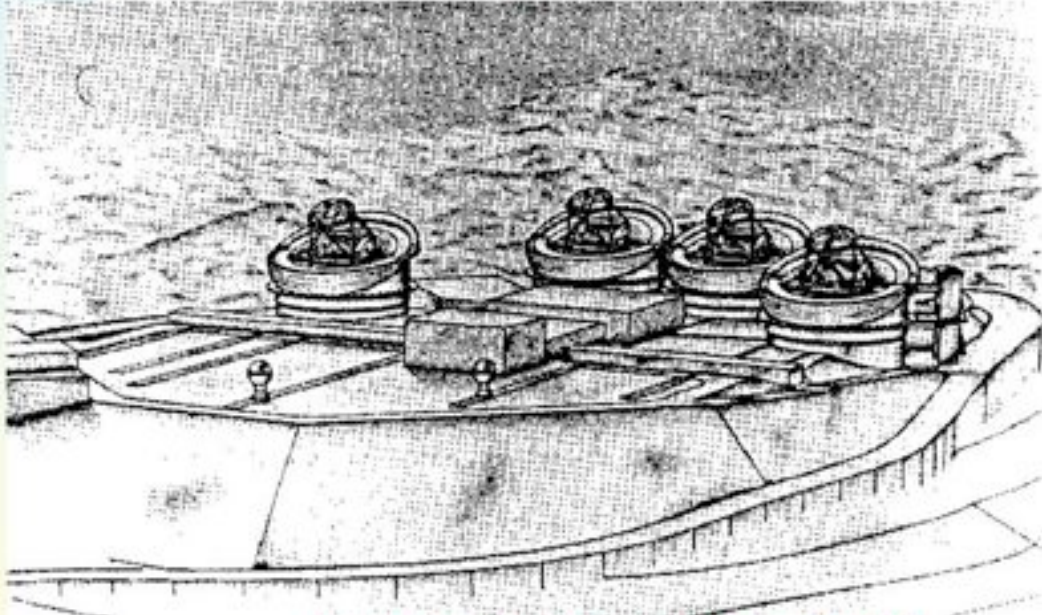
Par interféromètre de “type Fizeau”, nous entendons des instruments effectuant de l’interférométrie dans le plan focal (et non dans le plan pupille). Ne pas confondre avec “l’interféromètre de Fizeau”, composé d’une lame semi-réfléchissante et de deux surfaces réfléchissantes parallèles (cf. cours d’optique).

Le GI2T est formé de 2 télescopes boules de 1,5m qui en principe pourraient être distants de 2 km, correspondant à une résolution angulaire $\phi \sim 0,0001''$ pour $V_{\text{lim}} = 15-17$ (voir photo).

A. Labeyrie espère pouvoir un jour construire un grand réseau de (27?) télescopes optiques dont les diamètres individuels pourraient être de l’ordre de 10m.

7 Rayons angulaires des étoiles

- 7.6 Exemples d'interféromètres (de type Fizeau) à plusieurs télescopes indépendants



<http://www.aeos.ulg.ac.be/HARI/>

7.6 Exemples d'interféromètres de type Fizeau

En ce début du XXIème, le sanctuaire moderne de l'interférométrie stellaire et de la synthèse d'ouverture est sans aucun doute le VLTI (Very Large Telescope Interferometer) de l'ESO (Observatoire Européen Austral), installé au Chili sur le Mont Paranal.

7 Rayons angulaires des étoiles

■ 7.6 Exemples d'interféromètres (de type Fizeau) à plusieurs télescopes indépendants

L'interférométrie aujourd'hui c'est:

Very Large Telescope Interferometer (VLTI)

- 4 collecteurs de 8.2m
- 4 collecteurs de 1.8m
- Base max: 200m



34

7.4 Interférométrie à deux télescopes indépendants

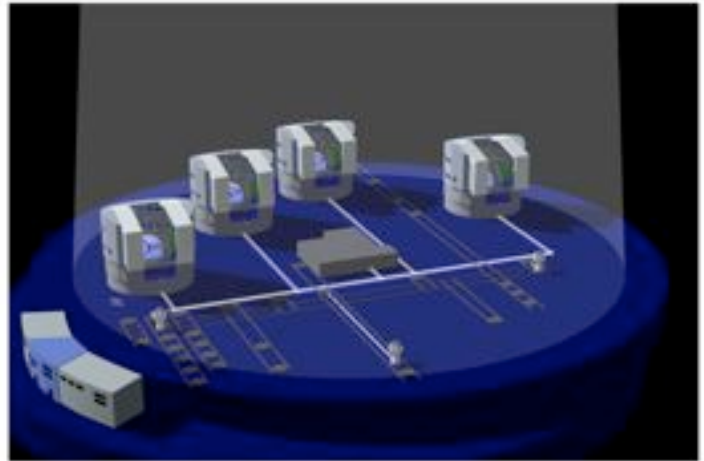
c) L'interférométrie aujourd'hui c'est:

Le VLTI (Very Large Telescope Interferometer) est un interféromètre européen construit à Paranal (Chili). Il peut re-combiner le signal venant de 2 ou 3 télescopes suivant l'instrument utilisé. Il dispose de 4 télescopes de 8.2m et de 4 télescopes mobiles de 1.8m. Seuls les télescopes de même taille peuvent être re-combinés ensemble. Les télescopes auxiliaires de 1.8m peuvent être facilement déplacés permettant ainsi d'obtenir une meilleure couverture du plan u,v. La longueur de base maximale de cet interféromètre est d'environ 200m.

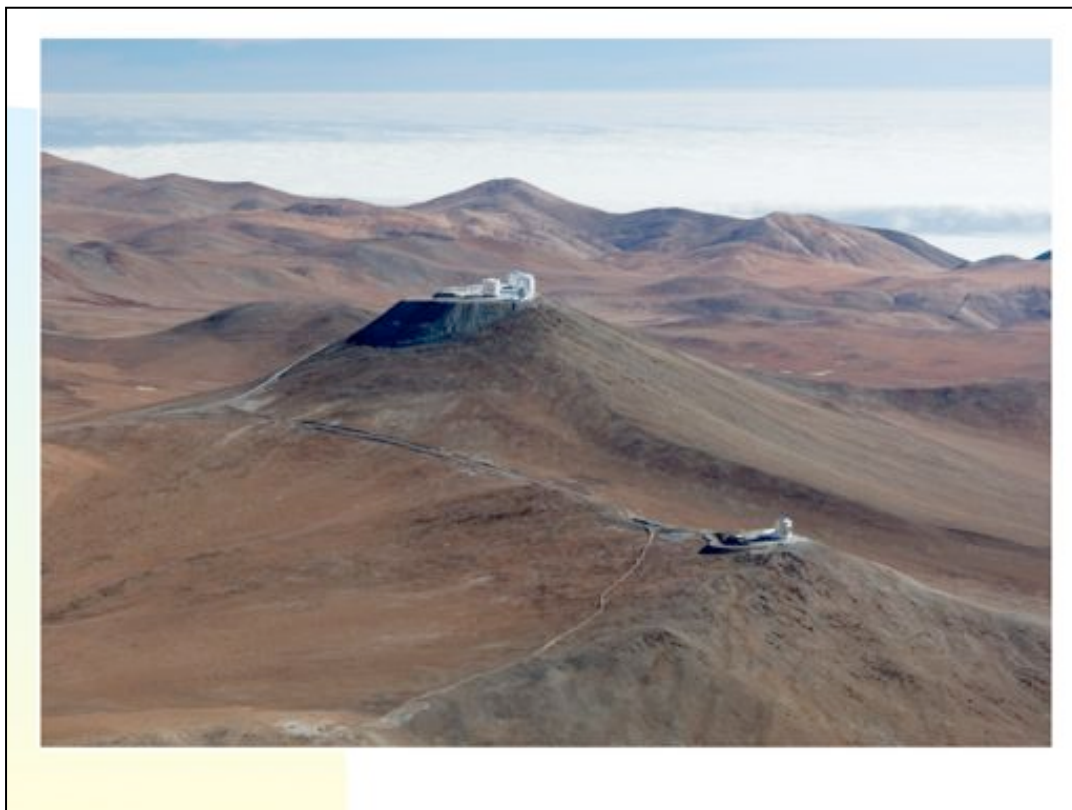
Notons que les 4 télescopes de 1.8m mobiles sont de réelles prouesses technologiques de par leur compacité. Ils ont par ailleurs été conçus et construits par la société AMOS (Advanced Mechanical and Optical Systems) implantée dans le parc scientifique du Sart Tilman.

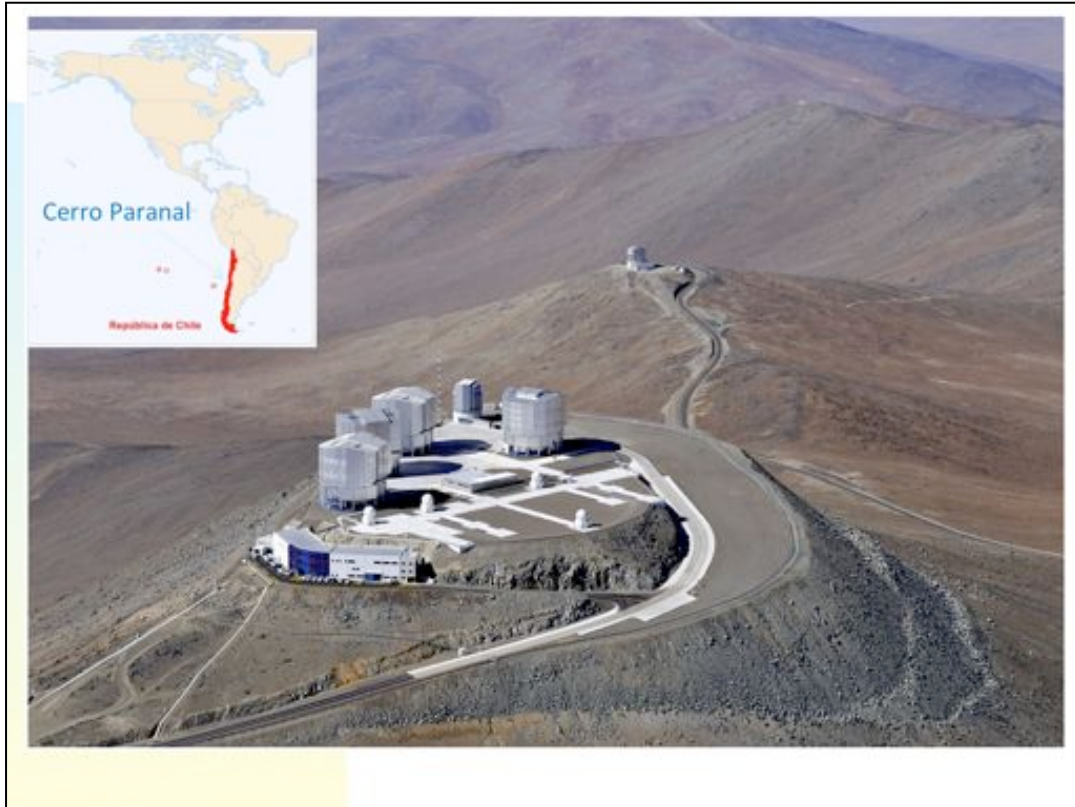
7 Rayons angulaires des étoiles

- 7.6 Exemples d'interféromètres (de type Fizeau) à plusieurs télescopes indépendants



7.6 Exemples d'interféromètres de type Fizeau



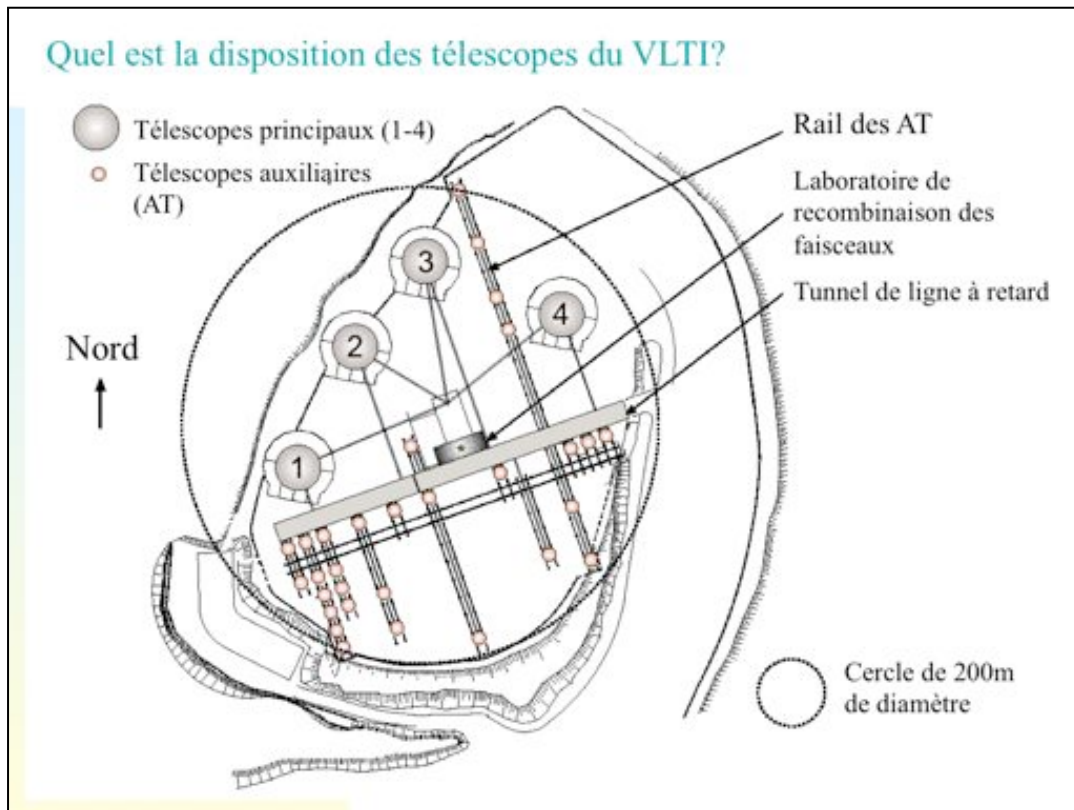


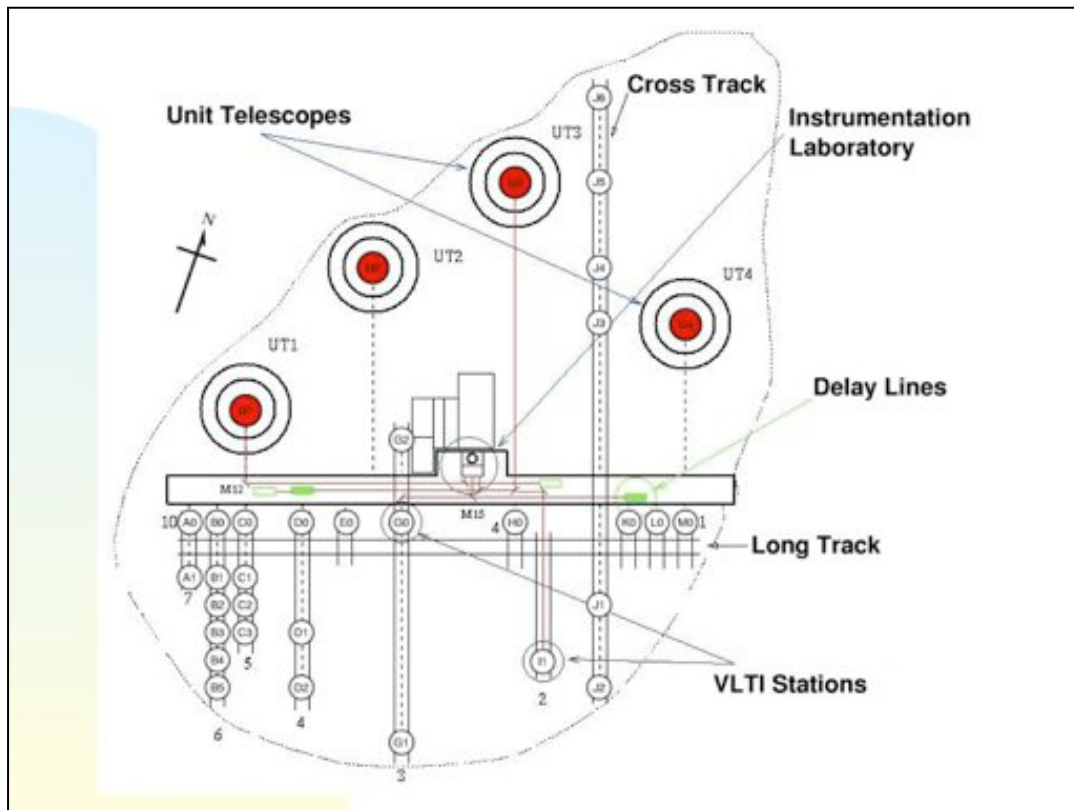
7 Rayons angulaires des étoiles

- 7.6 Exemples d'interféromètres (de type Fizeau) à plusieurs télescopes indépendants



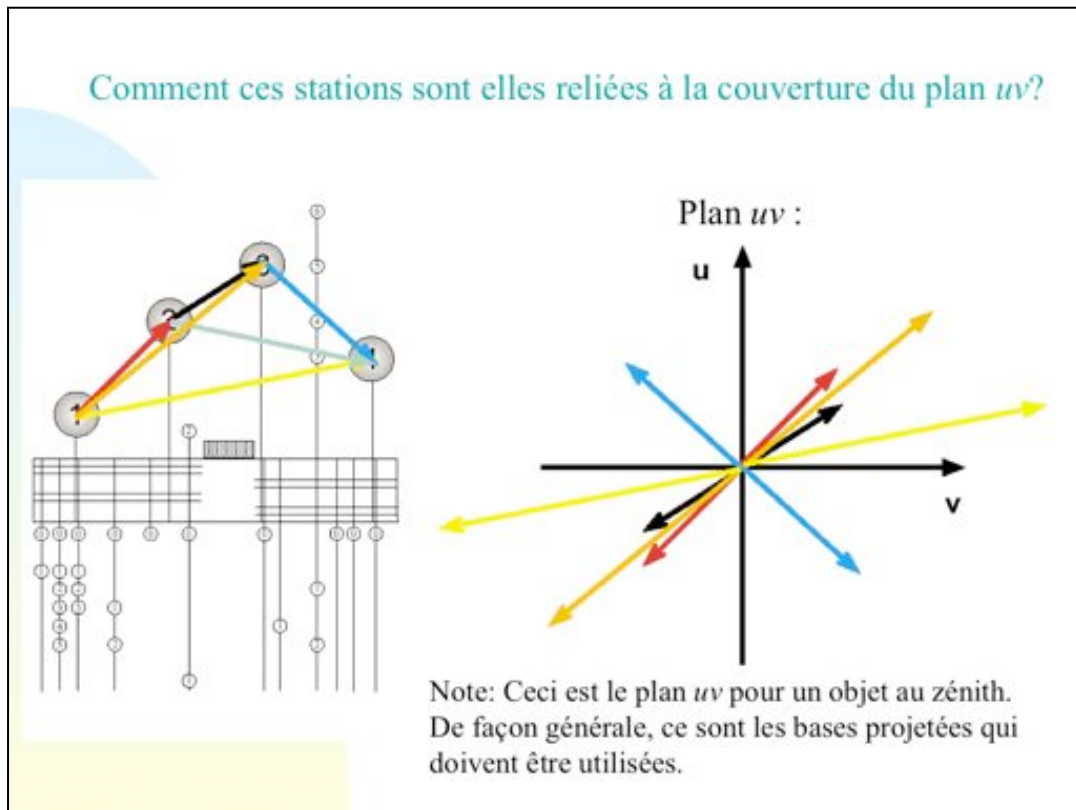
7.6 Exemples d'interféromètres de type Fizeau

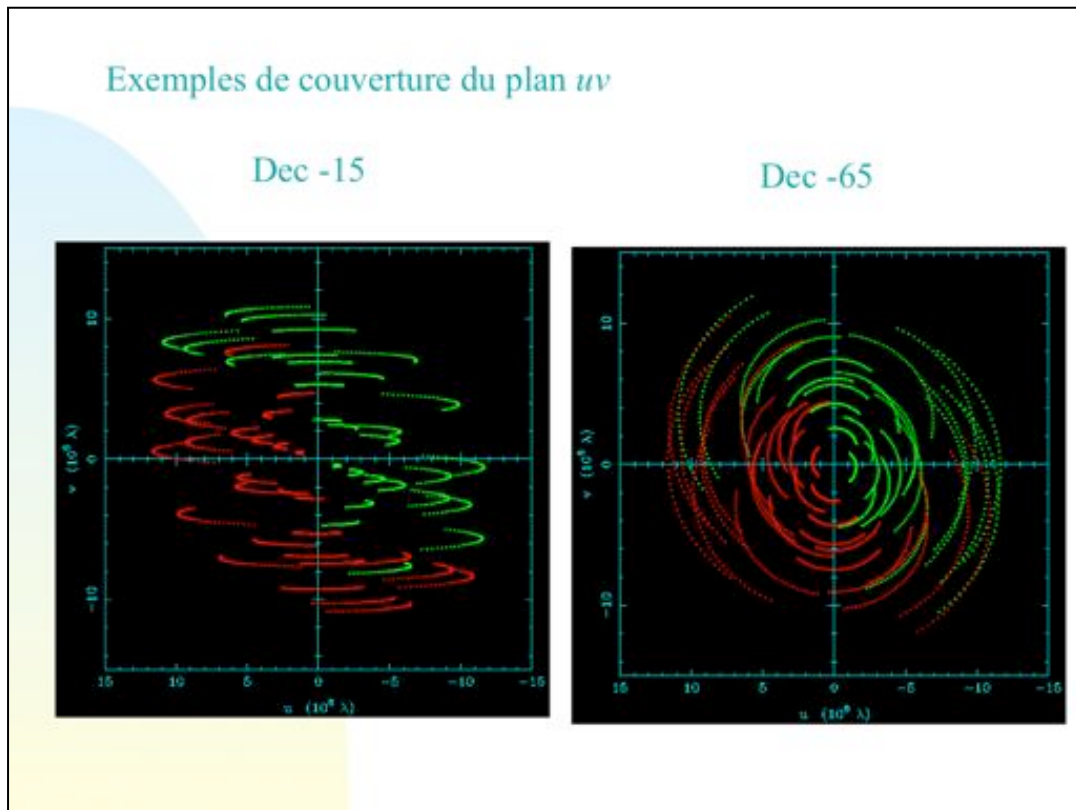




Lignes à retard du VLTI







7 Rayons angulaires des étoiles

7.6 Exemples d'interféromètres (de type Fizeau) à plusieurs télescopes indépendants

L'interférométrie aujourd'hui c'est aussi:

Le réseau
interférométrique
CHARA

- 6 x 1m collecteurs
- Base max: 330m



10/10/08

45

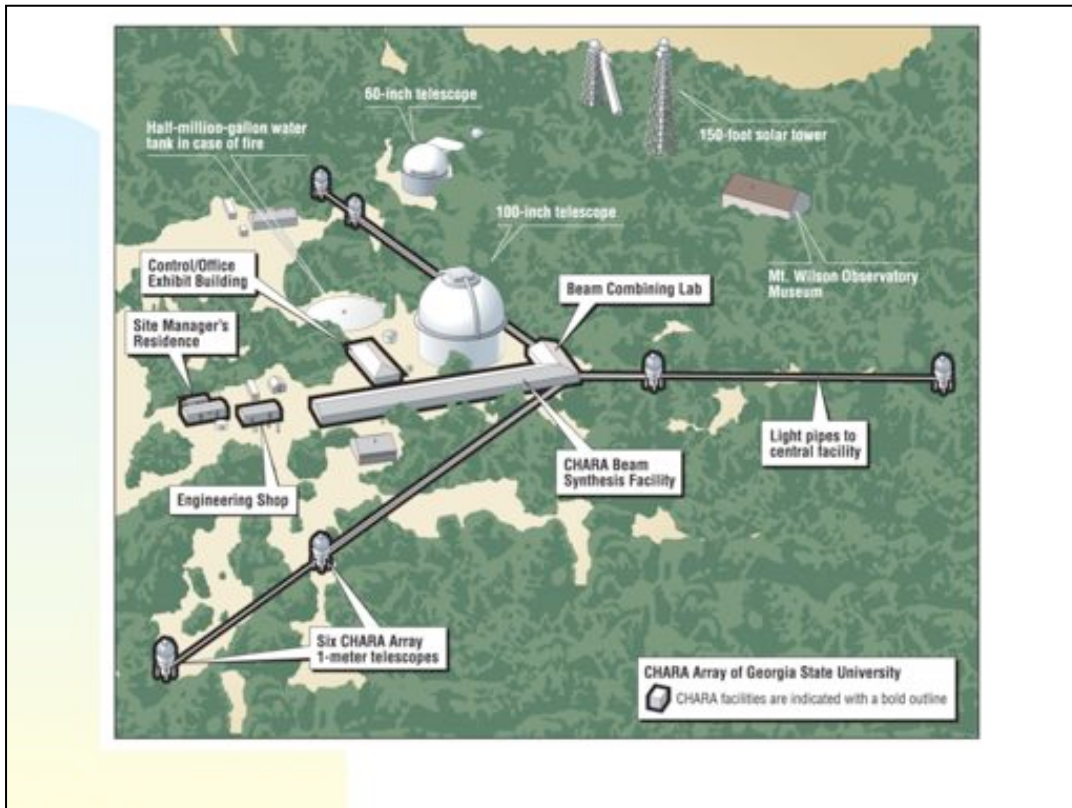
7.4 Interférométrie à deux télescopes indépendants

c) L'interférométrie aujourd'hui c'est aussi:

L'histoire de l'interférométrie ne s'est fort heureusement pas terminée dans les années 50, bien au contraire. A l'heure actuelle, de nombreux interféromètres sont en activité. Nous allons maintenant en présenter quelques uns.

CHARA est un interféromètre situé sur les hauteurs de Los Angeles en Californie. Il est installé sur l'observatoire historique -du point de vue de l'interférométrie- du Mont Wilson. Rappelons que c'est sur le télescope de 2.5m de cet observatoire que la première mesure d'un diamètre stellaire avait été réalisée par Michelson et Pease en installant une poutre de 7m au sommet du télescope. Le "CHARA interferometric array", opérationnel depuis 1999 est composé de 6 télescopes de 1m de diamètre. Ces 6 télescopes peuvent être soit re-combinés 2 a 2, soit, depuis 2008 par 3. La longueur de base maximale de cet interféromètre est de 330m permettant d'atteindre une résolution angulaire de 200 μ arcsec.

Il est utilisé principalement pour les mesures de diamètres angulaires mais également pour la détection et la caractérisation d'étoiles binaires serrées ainsi que pour la détection de nuages exozodiacaux (nuages de poussières gravitant autour des étoiles).



7 Rayons angulaires des étoiles

- 7.6 Exemples d'interféromètres (de type Fizeau) à plusieurs télescopes indépendants

L'interférométrie aujourd'hui c'est aussi:

Palomar Testbed
Interferometer (PTI)

- 3 collecteurs de 40cm
- Base max: 110m



10/10/08

47

7.4 Interférométrie à deux télescopes indépendants

c) L'interférométrie aujourd'hui c'est aussi:

PTI (Palomar Testbed Interferometer) est un interféromètre qui est installé à l'observatoire du Mont Palomar, sur les hauteurs de San Diego (Californie). Il est composé de trois petits télescopes de 40cm. La longueur de base maximale est de 110m. En plus d'étudier des objets binaires, les diamètres stellaires et les nuages exo-zodiacaux (et bien d'autres choses), cet interféromètre a pour but de démontrer des aspects importants de futures missions interférométriques spatiales comme TPF-I (Terrestrial Planet Finder Interferometer) et SIM (Space Interferometry Mission).

7 Rayons angulaires des étoiles

- 7.6 Exemples d'interféromètres (de type Fizeau) à plusieurs télescopes indépendants

L'interférométrie aujourd'hui c'est aussi:

Keck interferometer

- 2 collecteurs de 10m
- Base: 85m



10/10/08

48

7.4 Interférométrie à deux télescopes indépendants

c) L'interférométrie aujourd'hui c'est aussi:

Le "Keck interferometer" est situé a Hawaii et re-combine les signaux collectés par ses 2 télescopes segmentés de 10m séparés de 85m. Les objectifs scientifiques de cet interféromètre sont d'une part de caractériser les nuages exo-zodiacaux et d'autre part de préparer aux futures grandes missions spatiales de détection d'exo-planètes.



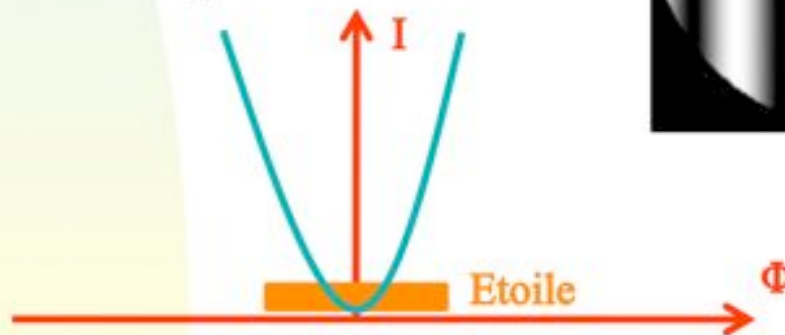
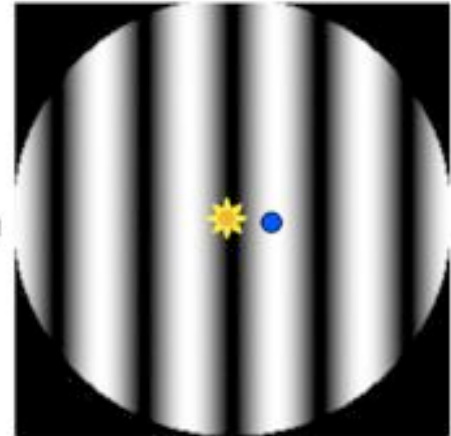
7 Rayons angulaires des étoiles

7.6 Exemples d'interféromètres (de type Fizeau) à plusieurs télescopes indépendants

c) L'interférométrie aujourd'hui c'est aussi:

Interférométrie de nulling

- Mesure de « fuite de flux »
- Permet de résoudre des étoiles avec un interféromètre de petite taille



10/10/08

50

7.4 Interférométrie à deux télescopes indépendants

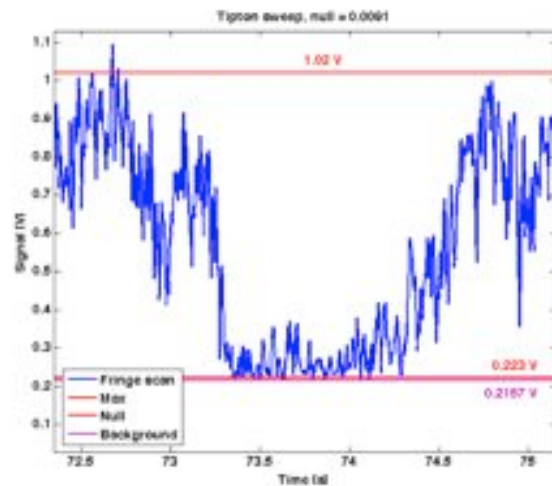
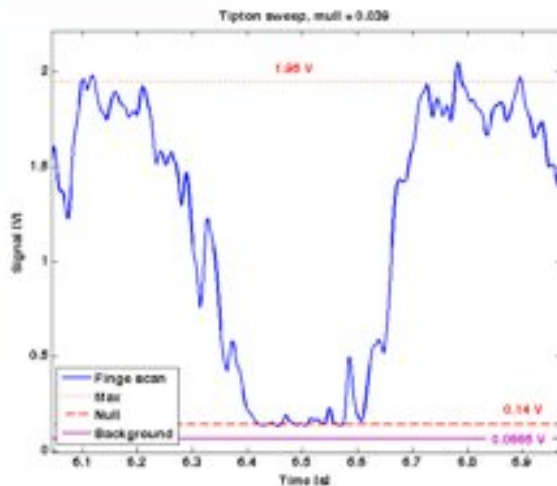
En plus de l'interférométrie "classique", il existe une autre technique d'interférométrie qui permet entre autres choses, de déterminer assez simplement le diamètre angulaire d'une étoile. Cette méthode, appelée interférométrie de Nulling, a été développée pour observer des objets faibles rendus indétectables par des méthodes de détections classiques à cause de leur proximité par rapport à un objet brillant (par exemple, une planète de type terre se situant proche d'une étoile comme le soleil est entre 1×10^6 et 1×10^9 moins lumineuse que son étoile hôte).

Le principe de l'interférométrie de nulling est d'introduire un déphasage constant de π entre les 2 bras de l'interféromètre. Cela a pour effet de créer une frange sombre sur l'axe optique. Cela veut dire que tout flux venant d'un objet ponctuel se situant sur l'axe optique sera parfaitement supprimé: aucun flux de cet objet n'arrivera jusqu'au détecteur de l'instrument. Cependant, dès qu'une étoile commence à être résolue et donc qu'elle n'apparaît plus comme ponctuelle telle que vue par l'instrument, seul le point de cette étoile se situant exactement sur l'axe optique sera parfaitement supprimé. Les autres ne sont que fortement atténués et cette atténuation décroît comme le carré de la distance du point en question à l'axe optique. Il en résulte donc que plus une étoile est résolue par un interféromètre de nulling, plus le pourcentage de flux de l'étoile qui arrive au détecteur est grand. Cela nous permet donc de mesurer en pratique les diamètres angulaires.

7 Rayons angulaires des étoiles

7.6 Exemples d'interféromètres (de type Fizeau) à plusieurs télescopes indépendants

c) L'interférométrie aujourd'hui c'est aussi:



10/10/08

51

7.4 Interférométrie à deux télescopes indépendants

Voici 2 exemples de mesures de diamètres angulaires d'étoiles à l'aide d'un interféromètre de nulling. Sur la gauche, nous voyons la frange sombre centrale obtenue en observant une étoile de grand diamètre angulaire (Alpha Herculis ~ 30 milli arc-secondes). Nous voyons que le bas de la frange ne descend pas jusqu'à 0 (i.e. jusqu'au niveau du fond d'arrière plan en pratique). Le minimum de la frange sombre est représenté par la ligne rouge pointillée et le fond est représenté par la ligne mauve.

Au contraire, à droite, nous observons cette fois une étoile de faible diamètre angulaire. On peut remarquer que le minimum de la frange sombre coïncide avec le niveau du fond d'arrière plan.

7 Rayons angulaires des étoiles

■ 7.6 Autre exemple d'interféromètre: ALMA

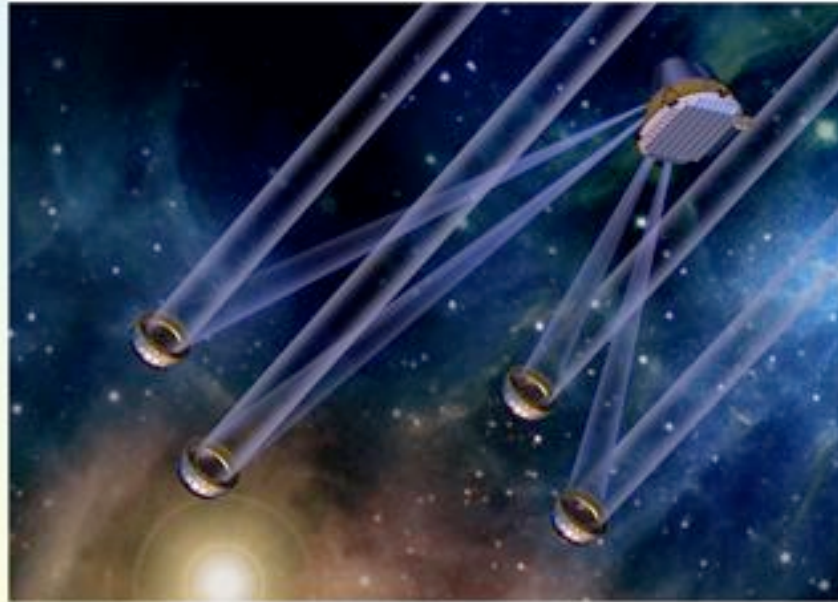


7.6 Exemples d'interféromètres de type Fizeau

En plus du VLTI, l'ESO, en collaboration avec le NRAO (National Radio Astronomical Observatory) et le Japon, sont actuellement en train de construire sur le plateau de Chajnantor, dans le nord du Chili, un gigantesque réseau interférométrique d'une soixantaine d'antennes millimétriques et sub-millimétriques de 12m de diamètre.

7 Rayons angulaires des étoiles

■ 7.6 Autre exemple d'interféromètre: DARWIN



7.6 Exemples d'interféromètres de type Fizeau

Un peu plus tard, ce sera vraisemblablement un interféromètre spatial (cf. Darwin) avec des bases variables entre 5m et 500m et un pouvoir de résolution angulaire correspondant $\phi \sim 0,001''$. Une mission telle que Darwin sera capable de détecter et d'étudier des planètes similaires à la Terre dans le voisinage d'étoiles proches.

7 Rayons angulaires des étoiles

7.7 Résultats

Star	Spectral type	Luminosity class	Angular diameter $\times 10^{-3}$ seconds of arc
α Boo	K2	Giant	20
α Tau	K5	Giant	20
α Sco	M1-M2	Super-giant	40
β Peg	M2	Giant	21
σ Cet	M6e	Giant	47
α Ori	M1-M2	Super-giant variable	34→47

Table 2.1. Stars measured with Michelson's interferometer.
 From Pease (1931).

7.7 Résultats

Liste des diamètres stellaires mesurés:

- 1) Moyen âge: 2'
- 2) Galilée (1632) 5"
- 3) Newton (1717) $2 \cdot 10^{-3}$ "
- 4) Stéphan (1873) $< 0,16$ "
- 5) Michelson et Pease (1920) $47 \cdot 10^{-3}$ "

Voir les mesures précises (cf. Michelson et Pease, I2T, etc.) des rayons stellaires dans les différentes tables.

7 Rayons angulaires des étoiles

7.7 Résultats

Table 2. Diamètres stellaires mesurés à l'IZT

NOM	SPECTRE	DIAMÈTRE $\lambda = 0,55 \mu\text{m}$ en ms. d'arc	MESURÉ $\lambda = 2,2 \mu\text{m}$ en ms. d'arc	R/R \odot	TEMPÉRATURE EFFECTIVE		DISTANCE en parsecs (1 pc = 3,26 al)
					$\lambda = 0,55 \mu\text{m}$ en degrés Kelvin	$\lambda = 2,2 \mu\text{m}$ en degrés Kelvin	
α Cas	K0III	$5,4 \pm 0,6$		26 ± 8	4700 ± 300		45 ± 9
β And	M0III	$13,2 \pm 1,7$	$14,4 \pm 0,5$	33 ± 9	3800 ± 260	3711 ± 84	23 ± 3
γ And	K3II	$6,8 \pm 0,6$		80 ± 14	4650 ± 250		75 ± 15
α Per	F5Ib	$2,9 \pm 0,4$		55 ± 9	7000 ± 600		175 ± 6
α Cyg	A2Ia	$2,7 \pm 0,3$		145 ± 45	8200 ± 600		500 ± 100
α Ari	K2III	$7,8 \pm 1$		15 ± 5	4300 ± 350		23 ± 4
β Gem	K0III	$7,8 \pm 0,6$		8 ± 2	4800 ± 220		11 ± 1
β Umi	K4III	$8,9 \pm 1$		30 ± 9	4220 ± 300		31 ± 11
γ Dra	K5III	$8,7 \pm 0,8$	$10,2 \pm 1,4$	45 ± 10	4300 ± 220	3960 ± 270	59 ± 21
δ Dra	G8III	$3,8 \pm 0,3$		15 ± 5	4530 ± 220		36 ± 8
μ Gem	M3III		$14,6 \pm 0,8$	94 ± 30		3960 ± 95	60 ± 15
α Tau	K5III		$20,7 \pm 0,4$	47 ± 7		3904 ± 34	21 ± 3
α Boo	K2III		$21,5 \pm 1,2$	25 ± 6		4240 ± 120	11 ± 2
α Aur _A	G5III	$8,0 \pm 1,2$		$11,7 \pm 2$	5400 ± 200		$13,7 \pm 0,6$
α Aur _B	G0III	$4,8 \pm 1,5$		$7,1 \pm 2$	5950 ± 200		$13,7 \pm 0,6$
α Lyr	A0V	$3,0 \pm 0,2$		$2,6 \pm 0,2$			$8,1 \pm 0,3$

7.7 Résultats

Lors du calcul des visibilités des franges dans l'expérience de Young, nous n'avons bien sûr considéré que le cas où les ouvertures de l'interféromètre sont des trous. Après avoir décrit l'interféromètre de Hanbury Brown et la méthode des occultations lunaires pour déterminer la mesure des rayons angulaires et, par voie de conséquence, la température effective des étoiles, nous reviendrons plus tard aux méthodes d'interférométrie de type Fizeau et ferons appel à l'optique de Fourier pour donner une description plus réaliste des divers interféromètres optiques et radio existant actuellement.

9 Éléments d'optique de Fourier

Réfs.: 1) P. Léna; Astrophysique: méthodes physiques de l'observation (Savoirs Actuels / CNRS Editions)
2) H. Reboul, Mesures en astrophysique (collection "Techniques de l'ingénieur", 10-1982)

9.1 Théorème fondamental

9.2 Théorème de convolution

9.3 Le théorème de Wiener-Khintchin

9.1 Théorème fondamental

9.2 Théorème de convolution

Note à l'attention de J.S.: Il est recommandé de projeter en permanence la 1^{ère} figure (cf. transparent indépendant) et de présenter de suite les rappels sur la transformée de Fourier, les fonctions de Bessel, les produits de convolution et la distribution de Dirac.

9 Éléments d'optique de Fourier

9.1 Théorème fondamental

- 9.1.1 Hypothèses
- 9.1.2 Enoncé
- 9.1.3 Démonstration
- 9.1.4 Remarques sur la transformée de Fourier
- 9.1.5 Réponse impulsionnelle
- 9.1.6 Retour aux grandeurs photométriques
- 9.1.7 Facteur de concentration énergétique d'un collecteur

9.1 Théorème fondamental

9.1.1 Hypothèses

9.1.2 Enoncé

9.1.3 Démonstration

9.1.4 Remarques sur la transformée de Fourier

9.1.5 Réponse impulsionnelle

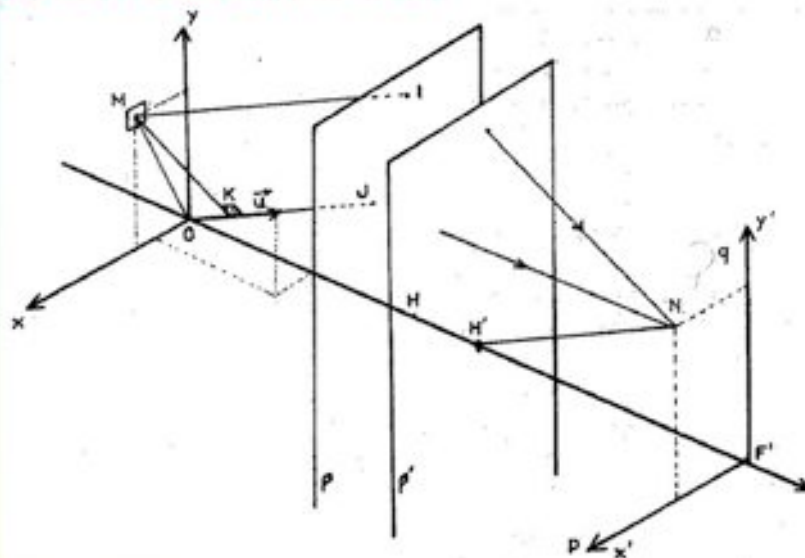
9.1.6 Retour aux grandeurs photométriques

9.1.7 Facteur de concentration énergétique d'un collecteur

9 Éléments d'optique de Fourier

9.1 Théorème fondamental:

■ 9.1.1 Hypothèses (H1-H6)



Transformation de Fourier par focalisation. Le système optique est représenté par ses plans principaux P et P' . On peut les supposer confondus avec celui d'une lentille mince.

9.1 Théorème fondamental

La figure ci-dessus représente un système optique convergent, son foyer image F' , ses plans principaux P , P' et ses points principaux H et H' . Ces derniers se confondent avec le centre optique dans le cas d'une lentille mince ou avec le sommet du paraboloïde dans celui d'un miroir unique.

Deux trièdres orthonormaux (O, x, y, z) et (F', x', y', z) permettent de repérer le plan pupillaire d'entrée et le plan focal image du système optique. Le plan pupillaire serait normalement au niveau du miroir primaire mais, pour simplifier les calculs, nous le décalerons arbitrairement en le plaçant au foyer objet F de l'instrument. Pour un télescope à miroir, les plans O, x, y et F', x', y' sont mathématiquement confondus ($F \equiv F'$) mais dans tous les cas, l'appellation 'plan pupillaire' servira de support pour la définition de l'état vibratoire à l'entrée du collecteur alors que le 'plan focal' servira de support pour la définition de l'image que le collecteur donne de l'objet situé à l'infini. Définir l'action du collecteur revient donc à établir la transformation qu'il opère sur le rayonnement entre ces deux plans.

9.1.1 Hypothèses

H1. Le système optique est exempt de toute aberration géométrique

H2. Les contours du diaphragme ne perturbent pas le champ électromagnétique, c'est-à-dire que le diaphragme se comporte comme une fonction "tout ou rien" vis-à-vis de ce champ. Ceci revient à supposer que les longueurs d'onde de la lumière sont petites par rapport aux dimensions du collecteur.

H3. Aucune perturbation, autre que celles imposées par le système optique réalisé, n'intervient entre le plan pupillaire et le plan focal. Les éléments optiques sont parfaitement transparents ou réfléchissants.

9 Éléments d'optique de Fourier

9.1 Théorème fondamental

9.1.1 Hypothèses

9.1.2 Enoncé

A un coefficient de dilatation des variables près, la distribution d'amplitude dans le plan focal est la transformée de Fourier de la distribution d'amplitude dans le plan pupillaire.

9.1.3 Démonstration

$$A(x,y) \exp(i2\pi vt), \quad (9.1.3.1)$$

$$A(x,y) = A(x,y) \exp(i\phi(x,y)) P_0(x,y). \quad (9.1.3.2)$$

9.1 Théorème fondamental

9.1.1 Hypothèses

H4. La source est à l'infini et ponctuelle.

H5. Les perturbations intervenant entre la source et le plan pupillaire sont faibles et ont des temps d'évolution très grands par rapport aux périodes du rayonnement.

H6. Le rayonnement est monochromatique et a un plan de polarisation fixe.

9.1.2 Enoncé

A un coefficient de dilatation des variables près, la distribution d'amplitude dans le plan focal est la transformée de Fourier de la distribution d'amplitude dans le plan pupillaire.

9.1.3 Démonstration

Considérons les différents points (x,y) du plan pupillaire. H6 (i.e. l'hypothèse 6 précédente) permet de représenter la composante électrique du champ électromagnétique par la partie réelle de la distribution vibratoire

$$A(x,y) \exp(i2\pi vt), \quad (9.1.3.1)$$

avec pour représentation très générale de l'expression de l'amplitude complexe $A(x,y)$

$$A(x,y) = A(x,y) \exp(i\phi(x,y)) P_0(x,y), \quad (9.1.3.2)$$

où $A(x,y)$ et $\phi(x,y)$ sont l'amplitude et la phase du champ électrique et $P_0(x,y)$ la fonction pupille d'entrée qui vaut 1 à l'intérieur de la pupille et 0 à l'extérieur (en accord avec H2 et H3).

9 Éléments d'optique de Fourier

9.1 Théorème fondamental

9.1.3 Démonstration

$$A(x,y) \exp(i2\pi vt + i\psi), \quad (9.1.3.3)$$

$$\delta = d(M I N) - d(O J N), \quad (9.1.3.4)$$

$$\psi = 2\pi \delta / \lambda. \quad (9.1.3.5)$$

9.1 Théorème fondamental

9.1.3 Démonstration

En accord avec le principe de Huygens-Fresnel, nous considérerons dans la suite que tout point atteint par une onde peut être considéré comme une source secondaire réémettant une vibration avec la même amplitude, la même fréquence ν , la même polarisation et la même phase (à un déphasage constant de $\pi/2$ près) que celles de la vibration incidente en ce point.

Un point $N(x',y')$ du plan focal recevra ainsi des vibrations émises par tous les points du plan pupillaire. Les lois de l'optique géométrique, déduites du principe de Fermat rappelé à la page suivante, permettent d'écrire que les rayons qui, après le système optique, convergent au point N du plan focal image, étaient, avant le système optique, parallèles à $H'N$. Ayant supposé que l'objet est à l'infini, l'amplitude va se conserver entre le plan pupillaire et le plan focal.

Du point $M(x,y)$ du plan pupillaire, le point $N(x',y')$ du plan focal va recevoir la vibration

$$A(x,y) \exp(i2\pi vt + i\psi). \quad (9.1.3.3)$$

Prenons comme zéro de déphasage celui du rayon issu de O : OJN . Le déphasage ψ peut alors s'exprimer à l'aide de la différence des chemins optiques

$$\delta = d(M I N) - d(O J N), \quad (9.1.3.4)$$

par la relation

$$\psi = 2\pi \delta / \lambda. \quad (9.1.3.5)$$

Si K est la projection orthogonale de M sur OJ , M et K appartiennent au même plan d'onde qui, après le système optique, convergera au point N du plan focal.

9 Éléments d'optique de Fourier

9.1 Théorème fondamental

9.1.3 Démonstration

$$\delta = -d(O, K) = -|(\mathbf{OM} \mathbf{u})|, \quad (9.1.3.6)$$

$$A(x,y) \exp(i2\pi(\nu t - xx'/\lambda f - yy'/\lambda f)). \quad (9.1.3.7)$$

$$p = x'/\lambda f, q = y'/\lambda f, \quad (9.1.3.8)$$

$$\exp(i2\pi\nu t) A(x,y) \exp(-i2\pi(xp + yq)). \quad (9.1.3.9)$$

9.1 Théorème fondamental

9.1.3 Démonstration

Le principe de Fermat, suivant lequel le chemin optique entre un point et son image est constant (stigmatisme rigoureux) ou extremum (stigmatisme approché) permet d'écrire que la différence de chemin optique (M I N) - (K J N) se comporte au voisinage de zéro comme un infiniment petit du second ordre par rapport à d(I, J) et donc aussi par rapport à d(O, M) et d(O, K), qui sont du même ordre que d(I, J). En conséquence (voir Fig. du système optique),

$$\delta = -d(O, K) = -|(\mathbf{OM} \mathbf{u})|, \quad (9.1.3.6)$$

\mathbf{u} désignant le vecteur unitaire de la direction H'N et $(\mathbf{OM} \mathbf{u})$ le produit scalaire entre les vecteurs \mathbf{OM} et \mathbf{u} .

Si l'angle que fait H'N avec l'axe optique est faible, le vecteur de composantes $(x'/f, y'/f, 1)$ est vecteur directeur de H'N et a une norme proche de 1 (au premier ordre car $f \gg |x'|, |y'|$). Par ailleurs, \mathbf{OM} a pour composantes $(x,y,0)$. En utilisant (9.1.3.6) dans (9.1.3.5), l'expression (9.1.3.3) devient

$$A(x,y) \exp(i2\pi(\nu t - xx'/\lambda f - yy'/\lambda f)). \quad (9.1.3.7)$$

En choisissant comme nouvelles variables dans le plan focal

$$p = x'/\lambda f \text{ et } q = y'/\lambda f, \quad (9.1.3.8)$$

le coefficient $1/\lambda f$ étant une constante, on obtient

$$\exp(i2\pi\nu t) A(x,y) \exp(-i2\pi(xp + yq)). \quad (9.1.3.9)$$

La vibration résultante en N sera la résultante des vibrations émises vers N par tous les points du plan pupillaire.

9 Éléments d'optique de Fourier

9.1 Théorème fondamental

■ 9.1.3 Démonstration

$$a(p, q) = \int_{R^2} A(x, y) \exp[-i2\pi(px + qy)] dx dy, \quad (9.1.3.10)$$

$$a(p, q) = TF_{-}[A(x, y)](p, q) \quad (9.1.3.11)$$

9.1 Théorème fondamental

9.1.3 Démonstration

Les surfaces d'onde (équiphases) qui atteignent ce plan pupillaire ne sont pas des plans si le rayonnement a été perturbé entre la source et la pupille d'entrée.

Mais les hypothèses H4 et H5 permettent d'affirmer que le plan pupillaire est spatialement cohérent, c'est-à-dire qu'à l'échelle de temps des périodes vibratoires, le déphasage relatif de ses différents points est constant.

En conséquence, pour calculer la vibration résultante au point N(p,q) du plan focal, il y a lieu de sommer les amplitudes que N reçoit des différents points du plan pupillaire. La distribution d'amplitude a(p,q) dans le plan focal sera

$$a(p, q) = \int_{R^2} A(x, y) \exp[-i2\pi(px + qy)] dx dy, \quad (9.1.3.10)$$

c'est-à-dire que la distribution d'amplitude complexe dans le plan focal a(p,q) est la transformée de Fourier de la distribution d'amplitude complexe A(x,y) dans le plan pupillaire, i.e.

$$a(p, q) = TF_{-}[A(x, y)](p, q) \quad (9.1.3.11)$$

9 Éléments d'optique de Fourier

9.1 Théorème fondamental

9.1.4 Remarques sur la transformée de Fourier

$$F(\bar{u}) = \int_{R^n} f(\bar{x}) \exp[-2i\pi(\bar{u}\bar{x})] \cdot d\bar{x} \quad (9.1.4.1)$$

$$\int_{R^n} |f(x)|^2 dx = \int_{R^n} |F(u)|^2 du \quad (9.1.4.2)$$

$$TF_{-}[TF_{-}(f(x))] = f(-x) \quad (9.1.4.3)$$

$$f(\bar{x}) = \int_{R^n} F(\bar{u}) \exp[2i\pi(\bar{u}\bar{x})] d\bar{u} \quad (9.1.4.4)$$

9.1 Théorème fondamental

9.1.4 Remarques sur la transformée de Fourier

Pour rappel (cf. Eq. 7.5.4.4), la TF d'une fonction f de R^n dans C est définie par

$$F(\bar{u}) = \int_{R^n} f(\bar{x}) \exp[-2i\pi(\bar{u}\bar{x})] d\bar{x} \quad (9.1.4.1)$$

C'est une application linéaire de $L^1(R^n)$ dans l'espace vectoriel des fonctions continues sur R^n , tendant vers 0 à l'infini ($L^p(R^n)$ désigne l'ensemble des fonctions f de R^n dans C telles que l'intégrale de $|f(x)|^p$ dans R^n converge).

C'est une isométrie sur $L^2(R^n)$

$$\int_{R^n} |f(x)|^2 dx = \int_{R^n} |F(u)|^2 du \quad (9.1.4.2)$$

Cette identité (formule de Plancherel) est, pour le cas qui nous intéresse, la traduction mathématique de la conservation du flux énergétique entre le plan pupillaire et le plan focal et justifie, a posteriori, la conservation de l'amplitude qui avait été introduite en cours de calcul.

La TF est quasi-involutive, i.e.

$$TF_{-}[TF_{-}(f(x))] = f(-x) \quad (9.1.4.3)$$

Par ailleurs, la T.F. réciproque (T.F.⁻¹) est définie par

$$f(\bar{x}) = \int_{R^n} F(\bar{u}) \exp[2i\pi(\bar{u}\bar{x})] d\bar{u} \quad (9.1.4.4)$$

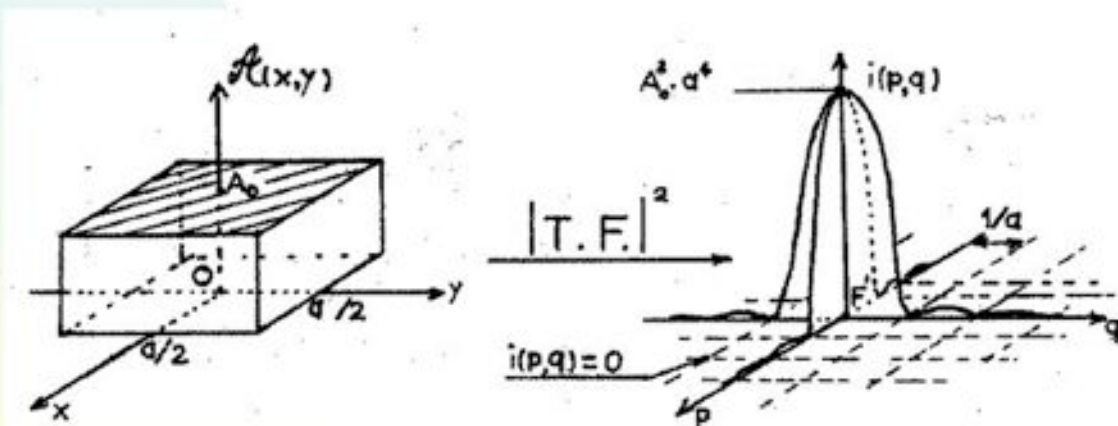
9 Éléments d'optique de Fourier

9.1 Théorème fondamental

9.1.5 Réponse impulsionnelle

$$A(x,y) = A_0 P_0(x,y), \quad (9.1.5.1)$$

$$P_0(x,y) = \Pi(x/a) \Pi(y/a). \quad (9.1.5.2)$$



Pupille carrée $A(x,y)$ et réponse impulsionnelle $i(p,q) = |\text{TF}_-(A(x,y))(p,q)|^2$. Les lignes pointillées dans le plan (p,q) représentent le lieu des points où $i(p,q) = 0$

9.1 Théorème fondamental

9.1.5 Réponse impulsionnelle

On appelle "réponse impulsionnelle" l'image que l'instrument donne d'un objet ponctuel situé à l'infini sur l'axe.

En l'absence de perturbation, les ondes qui arrivent dans le plan pupillaire sont planes et parallèles à ce plan. L'amplitude correspondant à une vibration monochromatique est constante, de même que la phase

$$A(x,y) = A_0 P_0(x,y). \quad (9.1.5.1)$$

Supposons que la pupille d'entrée soit de forme carrée de côté a (cf. Fig. gauche ci-dessus)

$$P_0(x,y) = \Pi(x/a) \Pi(y/a), \quad (9.1.5.2)$$

$\Pi(x/a)$ désignant la fonction porte (ou fenêtre ou en créneau, cf. Eq. (7.5.4.12)) qui prend la valeur 1 dans l'intervalle $(-a/2, a/2)$ et 0 ailleurs.

9 Éléments d'optique de Fourier

9.1 Théorème fondamental

9.1.5 Réponse impulsionnelle

$$a(p, q) = TF [A(x, y)](p, q) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} A_0 \exp[-i2\pi(px + qy)] dx dy \quad (9.1.5.3)$$

$$a(p, q) = A_0 \int_{-a/2}^{a/2} \exp[-i2\pi px] dx \int_{-a/2}^{a/2} \exp[-i2\pi qy] dy \quad (9.1.5.4)$$

$$a(p, q) = A_0 a^2 \frac{\sin(\pi pa)}{\pi pa} \frac{\sin(\pi qa)}{\pi qa} \quad (9.1.5.5)$$

$$i(p, q) = a(p, q) a^*(p, q) = |a(p, q)|^2 \quad (9.1.5.6)$$

$$= i_0 a^4 \left(\frac{\sin(\pi pa)}{\pi pa} \right)^2 \left(\frac{\sin(\pi qa)}{\pi qa} \right)^2$$

9.1 Théorème fondamental

9.1.5 Réponse impulsionnelle

Le calcul de l'amplitude dans le plan focal est très simple dans ce cas (on peut aussi combiner tout simplement les Eqs. (7.5.4.14) et (9.1.3.10))

$$a(p, q) = TF [A(x, y)](p, q) = \int_{-a/2}^{a/2} \int_{-a/2}^{a/2} A_0 \exp[-i2\pi(px + qy)] dx dy \quad (9.1.5.3)$$

$$a(p, q) = A_0 \int_{-a/2}^{a/2} \exp[-i2\pi px] dx \int_{-a/2}^{a/2} \exp[-i2\pi qy] dy \quad (9.1.5.4)$$

$$a(p, q) = A_0 a^2 [\sin(\pi pa) / (\pi pa)] [\sin(\pi qa) / (\pi qa)]. \quad (9.1.5.5)$$

C'est la réponse impulsionnelle, en amplitude, pour une pupille carrée et en l'absence de perturbation. Adoptant la définition (7.5.2.1) pour la mesure de l'intensité des vibrations, nous trouvons que

$$i(p, q) = a(p, q) a^*(p, q) = |a(p, q)|^2 = i_0 a^4 \left(\frac{\sin(\pi pa)}{\pi pa} \right)^2 \left(\frac{\sin(\pi qa)}{\pi qa} \right)^2 \quad (9.1.5.6)$$

Jusqu'à présent, nous avons considéré que l'objet S, ponctuel et à l'infini, était sur l'axe optique de l'instrument. Supposons maintenant qu'il en soit écarté d'un angle faible. Soit (b/f, c/f, 1) le vecteur quasi-unitaire qui représente la direction orientée S0, et donc la direction H'N correspondante. Le déphasage d'un point M(x, y) du plan pupillaire par rapport au point O sera

$$\psi = 2\pi \delta / \lambda = 2\pi(xb/f + yc/f) / \lambda, \quad (9.1.5.7)$$

et par conséquent

$$A(x, y) = P_0(x, y) A_0 \exp[i2\pi(xb/f + yc/f) / \lambda]. \quad (9.1.5.8)$$

9 Éléments d'optique de Fourier

9.1 Théorème fondamental

9.1.5 Réponse impulsionnelle

$$\psi = 2\pi \delta / \lambda = 2\pi(xb/f + yc/f) / \lambda, \quad (9.1.5.7)$$

$$A(x,y) = P_0(x,y) A_0 \exp[2i\pi(xb/f + yc/f) / \lambda]. \quad (9.1.5.8)$$

$$a(p,q) = A_0 \int_{-a/2}^{a/2} \exp[-2i\pi(p - b/f\lambda)x] dx \int_{-a/2}^{a/2} \exp[-2i\pi(q - c/f\lambda)y] dy \quad (9.1.5.9)$$

$$a(p,q) = A_0 a^2 \left(\frac{\sin(\pi(p - b/f\lambda)a)}{\pi(p - b/f\lambda)a} \right) \left(\frac{\sin(\pi(q - c/f\lambda)a)}{\pi(q - c/f\lambda)a} \right) \quad (9.1.5.10)$$

9.1 Théorème fondamental

9.1.5 Réponse impulsionnelle

On obtient la distribution d'amplitude focale par transformation de Fourier (cf. Eq. (9.1.3.10))

$$a(p,q) = A_0 \int_{-a/2}^{a/2} \exp[-i2\pi(p - b/f\lambda)x] dx \int_{-a/2}^{a/2} \exp[-i2\pi(q - c/f\lambda)y] dy \quad (9.1.5.9)$$

$$a(p,q) = A_0 a^2 \left(\frac{\sin(\pi(p - b/f\lambda)a)}{\pi(p - b/f\lambda)a} \right) \left(\frac{\sin(\pi(q - c/f\lambda)a)}{\pi(q - c/f\lambda)a} \right) \quad (9.1.5.10)$$

et, finalement, la réponse impulsionnelle

$$i(p,q) = i_0 a^4 \left(\frac{\sin(\pi(p - b/f\lambda)a)}{\pi(p - b/f\lambda)a} \right)^2 \left(\frac{\sin(\pi(q - c/f\lambda)a)}{\pi(q - c/f\lambda)a} \right)^2 \quad (9.1.5.11)$$

On retrouve la même distribution que précédemment mais centrée autour du point $(p,q) \equiv (b/f\lambda, c/f\lambda)$. Si l'on revient aux variables x' et y' , ce point a pour coordonnées (cf. Eq. (9.1.3.8)) (b,c) . Il coïncide donc avec l'image géométrique de l'objet.

Lorsqu'un objet ponctuel à l'infini se déplace par rapport à l'axe optique, la figure de diffraction (réponse impulsionnelle) se déplace sans se déformer en suivant l'image géométrique, tant que l'on reste bien sûr dans le cadre des hypothèses précitées.

Pour établir ce résultat plus directement, on peut tout simplement effectuer le changement de variables $p' = p - b/f\lambda$ et $q' = q - c/f\lambda$. On trouve immédiatement alors que:

$$\begin{aligned} a(p,q) &= A_0 TF_{-}[\Pi(x/a)](p') TF_{-}[\Pi(y/a)](q') \\ &= A_0 TF_{-}[\Pi(x/a)](p - b/f\lambda) TF_{-}[\Pi(y/a)](q - c/f\lambda) \end{aligned} \quad (9.1.5.12)$$

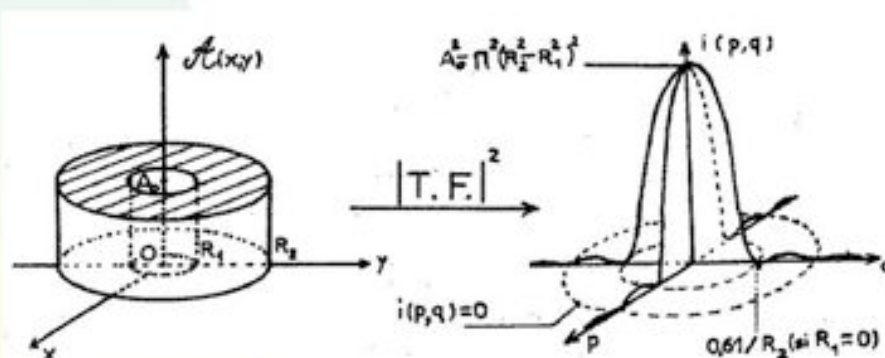
9 Éléments d'optique de Fourier

9.1 Théorème fondamental

9.1.5 Réponse impulsionnelle

$$i(p, q) = i_0 a^4 \left(\frac{\sin(\pi(p-b/f\lambda)a)}{\pi(p-b/f\lambda)a} \right)^2 \left(\frac{\sin(\pi(q-c/f\lambda)a)}{\pi(q-c/f\lambda)a} \right)^2 \quad (9.1.5.11)$$

$$a(p, q) = TF_{-}[\Pi(x/a)](p' = p - b/f\lambda) TF_{-}[\Pi(y/a)](q' = q - c/f\lambda) \quad (9.1.5.12)$$



Pupille circulaire et réponse impulsionnelle. La T.F. conserve la symétrie circulaire.

9.1 Théorème fondamental

9.1.5 Réponse impulsionnelle

Le retour aux coordonnées normales x' et y' permet de définir les dimensions de la figure de diffraction dans les deux cas précédents. La tache centrale (ou tache d'Airy) dans la figure précédente a une largeur égale à $2\lambda f / a$ (séparation entre les deux minima situés de part et d'autre du maximum central). Les autres taches sont deux fois moins larges et leur amplitude décroît très rapidement lorsqu'on s'éloigne du centre.

Dans le cas général, la pupille d'entrée est circulaire avec une obstruction circulaire au centre. Pour définir la réponse impulsionnelle, on est amené à chercher la transformée de Fourier représentée à la figure ci-dessus.

Pour rendre les intervalles d'intégration indépendants, on se place en coordonnées polaires $x = \rho \cos(\theta)$, $y = \rho \sin(\theta)$, $p = \rho' \cos(\theta') / (\lambda f)$, $q = \rho' \sin(\theta') / (\lambda f)$. (9.1.5.13)

On obtient ainsi

$$a(\rho', \theta') = A_0 \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \exp[-2i\pi\rho\rho' \cos(\theta - \theta') / (\lambda f)] d(\theta - \theta') \rho d\rho \quad (9.1.5.14)$$

L'intégration se poursuit en effectuant des changements de variables adéquats et en utilisant les fonctions de Bessel J_0 et J_1 (voir le rappel ci-après). On obtient

$$a(\rho', \theta') = a(\rho') = A_0 \pi \left[\frac{2R_2^2}{Z_2} J_1(Z_2) - \frac{2R_1^2}{Z_1} J_1(Z_1) \right] \quad (9.1.5.15)$$

avec
$$Z_2 = 2\pi R_2 \frac{\rho'}{\lambda f} \quad \text{et} \quad Z_1 = 2\pi R_1 \frac{\rho'}{\lambda f} \quad (9.1.5.16)$$

Pour le cas $R_1 = 0$, le résultat $i(p, q) = i(\rho')$, visualisé dans la figure ci-dessus, a pour expression

$$i(\rho') = |a(\rho')|^2 = 4(A_0 \pi)^2 R_2^4 \left(\frac{J_1(Z_2)}{Z_2} \right)^2 \quad (9.1.5.17)$$

9 Éléments d'optique de Fourier

■ PARENTHÈSE SUR LES FONCTIONS DE BESSEL (RAPPEL)

Représentation intégrale des fonctions de Bessel

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos [x \sin(\theta)] d\theta \quad J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos [n\theta - x \sin(\theta)] d\theta$$

Intégrale indéfinie

$$\int x' J_0(x') dx' = x J_1(x)$$

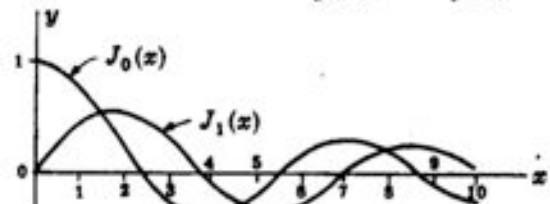
Développement

$$J_0(x) = 1 - x^2/2^2 + x^4/(2^2 4^2) - x^6/(2^2 4^2 6^2) + \dots$$

$$J_1(x) = x/2 - x^3/(2^2 4) + x^5/(2^2 4^2 6) - x^7/(2^2 4^2 6^2 8) + \dots$$

$$J_n(x) = (2 / (\pi x))^{1/2} \cos(x - n\pi/2 - \pi/4) \dots \text{lorsque } x \text{ est grand!}$$

Graphes des fonctions $J_0(x)$ et $J_1(x)$



A noter que dans le cas d'observations purement limitées par le seeing, la PSF est uniquement approximée par la fonction de Moffat $I_{\alpha,\beta}(r)$, donnant l'intensité à la distance r avec les paramètres α et β . En comparaison avec la distribution gaussienne, la distribution de Moffat possède plus d'intensité dans les ailes.

β est le paramètre permettant de fixer l'intensité dans les lobes alors que α est le paramètre permettant de fixer la largeur à mi-hauteur $FWHM$ pour un β fixé (via $FWHM = 2 \alpha \sqrt{2^{1/\beta} - 1}$).

PARENTHÈSE SUR LES FONCTIONS DE BESSEL (RAPPEL)

Représentation intégrale des fonctions de Bessel

$$J_0(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos [x \sin(\theta)] d\theta \quad J_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos [n\theta - x \sin(\theta)] d\theta$$

Intégrale indéfinie

$$\int x' J_0(x') dx' = x J_1(x)$$

Développement

$$J_0(x) = 1 - x^2/2^2 + x^4/(2^2 4^2) - x^6/(2^2 4^2 6^2) + \dots$$

$$J_1(x) = x/2 - x^3/(2^2 4) + x^5/(2^2 4^2 6) - x^7/(2^2 4^2 6^2 8) + \dots$$

$$J_n(x) = (2 / (\pi x))^{1/2} \cos(x - n\pi/2 - \pi/4) \dots \text{lorsque } x \text{ est grand!}$$

9 Éléments d'optique de Fourier

9.1 Théorème fondamental

9.1.5 Réponse impulsionnelle

$$x = \rho \cos(\theta), y = \rho \sin(\theta), p = \rho' \cos(\theta') / (\lambda f), q = \rho' \sin(\theta') / (\lambda f).$$

(9.1.5.13)

$$a(\rho', \theta') = A_0 \int_{R_1}^{R_2} \int_0^{2\pi} \exp[-2i\pi\rho\rho' \cos(\theta - \theta') / (\lambda f)] d(\theta - \theta') \rho d\rho$$

(9.1.5.14)

$$a(\rho', \theta') = a(\rho') = A_0 \pi \left[\frac{2R_2^2}{Z_2} J_1(Z_2) - \frac{2R_1^2}{Z_1} J_1(Z_1) \right]$$

(9.1.5.15)

$$Z_2 = 2\pi R_2 \frac{\rho'}{\lambda f} \quad \text{et} \quad Z_1 = 2\pi R_1 \frac{\rho'}{\lambda f}$$

(9.1.5.16)

$$\text{Pour le cas } R_1 = 0 \quad i(\rho') = |a(\rho')|^2 = 4(A_0\pi)^2 R_2^4 \left(\frac{J_1(Z_2)}{Z_2} \right)^2$$

(9.1.5.17)

9.1 Théorème fondamental

9.1.5 Réponse impulsionnelle

Comme le premier minimum d'intensité se situe en $Z_2 = 3,9$, le rayon de la tache centrale est égal à (voir graphe de la fonction $J_1(x)$)

$$\rho' (= r) = 1,22 \lambda f / D \quad (D = 2 R_2, R_1 = 0). \quad (9.1.5.18)$$

Poser $R_1 = 0$ revient à négliger l'obstruction du miroir secondaire. Il est alors à noter qu'environ 84% de l'énergie se retrouve dans la tache centrale, i.e.

$$\frac{2\pi \int_0^r i(\rho') \rho' d\rho'}{2\pi \int_0^\infty i(\rho') \rho' d\rho'} = 0,84 \quad (9.1.5.19)$$

Si maintenant on considère des obstructions croissantes, le rayon de la tache centrale va diminuer (d'un facteur qui tend vers $2^{-1/2}$ lorsque R_1 tend vers R_2). Mais dans le même temps, l'importance relative des anneaux secondaires augmente. Comme, par ailleurs, le flux total est diminué, l'obstruction centrale est un moyen très limité pour améliorer la finesse des images.

Dans le cas où le rayonnement est polychromatique et non polarisé, les trains d'onde élémentaires sont généralement incohérents et il suffit d'ajouter dans le plan focal les distributions d'intensité de chaque composante.

Si le rayonnement est perturbé entre la source et le plan pupillaire, on appellera, par définition, "distribution de pupille perturbée", la distribution d'amplitude pupillaire que causerait un astre ponctuel, d'éclat unité, situé à l'infini sur l'axe optique. On la notera $P(x,y)$.

La réponse impulsionnelle $h(p,q)$ sera la distribution d'amplitude focale correspondante

9 Éléments d'optique de Fourier

9.1 Théorème fondamental

■ 9.1.5 Réponse impulsionnelle

$$\rho' (=r) = 1,22 \lambda f / D \quad (D = 2 R_2, R_1 = 0). \quad (9.1.5.18)$$

$$\frac{2\pi \int_0^r i(\rho') \rho' d\rho'}{2\pi \int_0^\infty i(\rho') \rho' d\rho'} = 0,84 \quad (9.1.5.19)$$

$$h(p,q) = \text{TF}_-(P(x,y))(p,q). \quad (9.1.5.20)$$

9.1 Théorème fondamental

9.1.5 Réponse impulsionnelle

En fait, on appellera aussi réponse impulsionnelle $|h(p,q)|^2$.

Par ailleurs, il est possible de faire figurer dans $P(x,y)$ les défauts optiques de l'instrument ou les perturbations des ondes électromagnétiques qui sont produites entre le plan pupillaire et le plan focal. Cela revient à remplacer l'instrument réel par un instrument idéal en avant duquel serait placée une lame reproduisant les défauts de l'instrument. La distribution pupillaire ainsi définie est appelée distribution de pupille perturbée généralisée et est notée $P_G(x,y)$. Les hypothèses H1 et H3 du théorème fondamental ne sont plus alors nécessaires.