



Introduction à l'interférométrie visible et IR

Bref résumé des résultats établis lors de la dernière leçon:

$$\rho = R / z$$

$$T_{\text{eff}} = (F/\sigma)^{1/4} = (f / \sigma \rho^2)^{1/4}$$

$$E = A(z) \exp[i2\pi\nu t]$$

$$E = A(z, t) \exp[i2\pi\nu t]$$

$$\tau = 1 / \Delta\nu \quad \lambda_{\text{eff}} = \lambda^2 / \Delta\lambda$$

$$I = A A^* = |A|^2 = a^2 .$$





Si $\Delta \geq \lambda / (2B)$, brouillage des franges!

$$I_q = I + I + 2I |\gamma_{12}(0)| \cos(\beta_{12} - 2\pi\nu\tau)$$

$$\gamma_{12}(\tau) = \langle V_1^*(t) V_2(t - \tau) \rangle / I$$

Visibilité des franges:
$$v = \left(\frac{I_{\max} - I_{\min}}{I_{\max} + I_{\min}} \right) = |\gamma_{12}(0)|$$

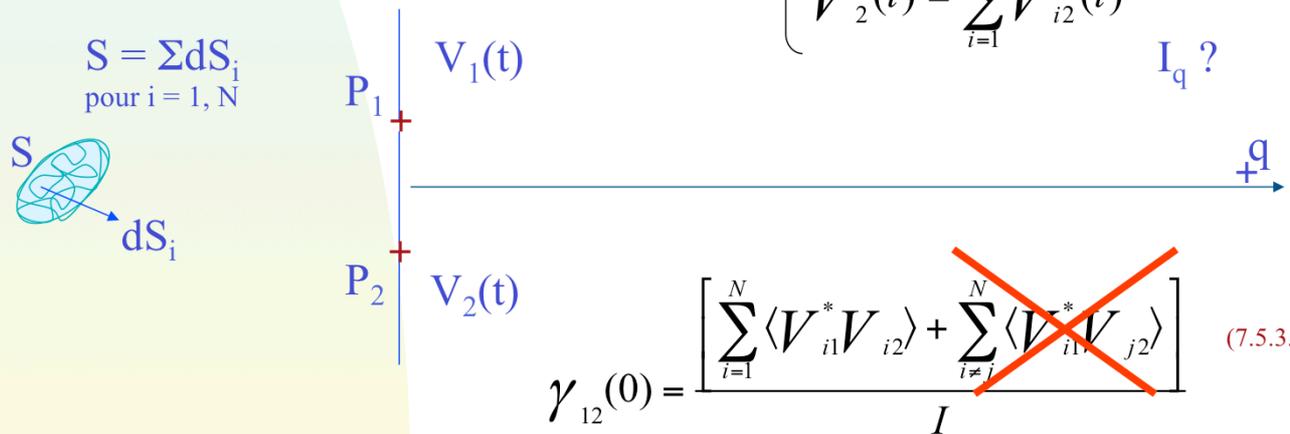
7 Rayons angulaires des étoiles

- 7.5 Cohérence de la lumière
- 7.5.3 Cohérence spatiale

??
$$\gamma_{12}(\tau = 0) = \frac{\langle V_1^*(t) V_2(t) \rangle}{I} \quad (7.5.3.1)$$

$$\begin{cases} V_1(t) = \sum_{i=1}^N V_{i1}(t) \\ V_2(t) = \sum_{i=1}^N V_{i2}(t) \end{cases} \quad (7.5.3.2)$$

$I_q ?$



7.5 Cohérence de la lumière

7.5.3 Cohérence spatiale

Evaluons donc ce que vaut (7.5.3.1), évaluée à partir de (7.5.2.6). Si $V_{i1}(t)$ et $V_{i2}(t)$ représentent les champs électriques en P_1 et P_2 dus à un petit élément de surface dS_i sur la source S , on trouve que les champs $V_1(t)$ et $V_2(t)$ peuvent être exprimés suivant (7.5.3.2). On suppose que les points distincts i de la source (cf. atomes) sont séparés de distances petites par rapport à la longueur d'onde λ de la lumière qu'ils émettent de façon mutuellement incohérente. L'obtention de l'expression (7.5.3.3) pour $\gamma_{12}(0)$ est alors immédiate. Pour une source de lumière incohérente, la seconde sommation apparaissant dans (7.5.3.3) est évidemment nulle.

7 Rayons angulaires des étoiles

- 7.5 Cohérence de la lumière
- 7.5.3 Cohérence spatiale

$$\left\{ \begin{array}{l} V_{i1}(t) = \left(\frac{a_i(t - r_{i1}/c)}{r_{i1}} \right) \exp[2i\pi\nu(t - r_{i1}/c)] \\ V_{i2}(t) = \left(\frac{a_i(t - r_{i2}/c)}{r_{i2}} \right) \exp[2i\pi\nu(t - r_{i2}/c)] \end{array} \right. \quad (7.5.3.4)$$

$$V_{i1}^*(t)V_{i2}(t) = \frac{|a_i(t - r_{i1}/c)|^2}{r_{i1}r_{i2}} \exp[-2i\pi\nu(r_{i2} - r_{i1})/c] \quad (7.5.3.5)$$

pour autant que: $|r_{i1} - r_{i2}| \leq \frac{c}{\Delta\nu} = \frac{\lambda^2}{\Delta\lambda} = l \quad (7.5.3.6)$

7.5 Cohérence de la lumière

7.5.3 Cohérence spatiale

Pour rappel, les contributions $V_{ij}(t)$ peuvent être exprimées suivant les expressions (7.5.3.4) où r_{i1} et r_{i2} représentent respectivement les distances entre l'élément i de la source et les points P_1 et P_2 . Les produits $V_{i1}^*(t)V_{i2}(t)$ se simplifient comme (7.5.3.5) pour autant que la condition (7.5.3.6) soit vérifiée.

On voit ainsi s'introduire naturellement la longueur de cohérence l qui caractérise la précision avec laquelle on doit obtenir l'égalité des chemins optiques afin de pouvoir observer des franges d'interférence (typiquement 2,5 microns dans le visible pour $\Delta\lambda = 1000 \text{ \AA}$).

7 Rayons angulaires des étoiles

- 7.5 Cohérence de la lumière
- 7.5.3 Cohérence spatiale

$$I(s) ds = |a_i(t - r/c)|^2 \quad (7.5.3.7)$$

$$\gamma_{12}(0) = \frac{\int \frac{I(s)}{r_1 r_2} \exp\left[-\frac{2i\pi}{\lambda}(r_2 - r_1)\right] ds}{I} \quad (7.5.3.8)$$

Théorème de Zernicke-van Cittert

7.5 Cohérence de la lumière

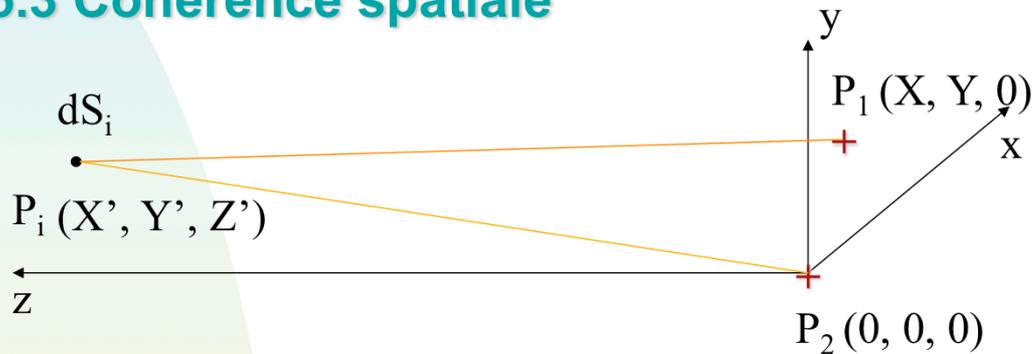
7.5.3 Cohérence spatiale

Pour obtenir l'intensité mutuelle due à toute la source, il suffit d'insérer dans l'expression (7.5.3.3), la relation (7.5.3.5) en se servant de (7.5.3.7). Il en résulte l'équation (7.5.3.8), aussi connue sous le nom du théorème de Zernicke-van Cittert.

Lorsque la distance entre la source et l'écran est très grande, l'expression de ce théorème se simplifie comme suit.

7 Rayons angulaires des étoiles

- 7.5 Cohérence de la lumière
- 7.5.3 Cohérence spatiale



$$|r_2 - r_1| = |P_2 P_i - P_1 P_i| = \left| -\frac{X^2 + Y^2}{2Z'} + (X\xi + Y\eta) \right| \quad (7.5.3.9)$$

$$\text{où } \xi = \frac{X'}{Z'} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{Y'}{Z'} \quad (7.5.3.10)$$

7.5 Cohérence de la lumière

7.5.3 Cohérence spatiale

Soit le repère orthonormé (x, y, z) représenté à la Fig. ci-dessus tel que les coordonnées des deux éléments P_1 et P_2 de l'interféromètre valent respectivement $(X, Y, 0)$ et $(0,0,0)$ et celles d'un élément dS_i de la source (X', Y', Z') . On trouve alors aisément, au moyen d'une relation analogue à (7.4.3), que

$$|r_2 - r_1| = |P_2 P_i - P_1 P_i| = \left| -\frac{X^2 + Y^2}{2Z'} + (X\xi + Y\eta) \right| \quad (7.5.3.9)$$

$$\text{Où } \xi = \frac{X'}{Z'} \quad \text{et} \quad \eta = \frac{Y'}{Z'} \quad (7.5.3.10)$$

représentent les coordonnées angulaires de la source mesurées à partir de l'interféromètre. En se servant des deux dernières relations, on transforme sans aucune difficulté l'expression (7.5.3.8) en (7.5.3.11). Les coordonnées X, Y dans le premier membre de $\gamma_{12}(0, X/\lambda, Y/\lambda)$ représentent la position d'un élément de l'interféromètre par rapport à l'autre.

An introduction to optical/IR interferometry

- 7.5 Cohérence de la lumière
- 7.5.3 Cohérence spatiale

$$\gamma_{12}(0, X/\lambda, Y/\lambda) = \exp(-i\phi_{x,y}) \frac{\iint_S I(\xi, \eta) \exp\{-i2\Pi(X\xi + Y\eta)/\lambda\} d\xi d\eta}{\iint_S I(\xi', \eta') d\xi' d\eta'} \quad (7.5.3.11)$$

$$I'(\xi, \eta) = I(\xi, \eta) / \iint_S I(\xi', \eta') d\xi' d\eta' \quad (7.5.3.12)$$

Définissant: $u = X/\lambda, v = Y/\lambda$

$$\gamma_{12}(0, u, v) = \exp(-i\phi_{u,v}) \iint_S I'(\xi, \eta) \exp\{-i2\Pi(u\xi + v\eta)\} d\xi d\eta \quad (7.5.3.13)$$

$$I'(\xi, \eta) = \iint \gamma_{12}(0, u, v) \exp(i\phi_{u,v}) \exp\{i2\Pi(\xi u + \eta v)\} d(u) d(v) \quad (7.5.3.14)$$

8

7.5 Cohérence de la lumière

7.5.3 Cohérence spatiale

A un facteur multiplicatif près (voir Eqs. (7.5.3.11) & (7.5.3.13)), nous trouvons donc que la visibilité des franges (fonction $|\gamma_{12}(0)|$) vaut simplement le module de la transformée de Fourier de la brillance de surface normalisée (I') de la source (Eq. (7.5.3.12)). Il doit donc être possible, par une simple transformée de Fourier inverse, de retrouver la brillance de surface (normalisée) de la source avec une résolution angulaire équivalente à celle d'un télescope dont le diamètre effectif serait égal à la base de l'interféromètre constitué des deux télescopes indépendants (Eq. (7.5.3.14)). Les équations (7.5.3.13) et (7.5.3.14) mettent donc bien en évidence la puissance du degré complexe de cohérence mutuelle puisqu'il permet de lier la visibilité et l'intensité normalisée à la surface de la source moyennant la transformée de Fourier $V = |\gamma_{12}(0)| = |TF(I')|$, et de son inverse. La synthèse d'ouverture consiste à observer un maximum de visibilités de la source, en essayant donc de couvrir au mieux le plan $u=X/\lambda, v=Y/\lambda$, plus communément appelé dans la littérature le plan u,v , à partir desquelles on essaiera, moyennant parfois des hypothèses ad-hoc supplémentaires, de déterminer la structure de la source à partir de la transformée (7.5.3.14) dans laquelle l'intégrant n'est pas la visibilité (i.e. le module du degré complexe de cohérence mutuelle) mais bien le degré complexe de cohérence mutuelle lui-même, à un facteur $\exp(i\phi_{x,y})$ près.

7 Rayons angulaires des étoiles

■ 7.5.4 La transformation de Fourier (cf. Léna 1996)

7.5.4.1 Définitions:

$$TF_f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi s x} dx, \quad (7.5.4.1)$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} TF_f(s) e^{2i\pi s x} ds, \quad (7.5.4.2)$$

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx. \quad (7.5.4.3)$$

7.5.4 La transformation de Fourier (cf. Léna 1996)

7.5.4.1 Définitions:

Soit une fonction $f(x)$, où $x \in \mathfrak{R}$. La transformée de Fourier de $f(x)$, notée $TF_f(s)$, est la fonction

$$TF_f(s) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2i\pi s x} dx, \quad (7.5.4.1)$$

où $s \in \mathfrak{R}$. Les fonctions f et TF_f forment une paire de Fourier. La fonction $TF_f(s)$ existe si la fonction $f(x)$ est bornée, sommable et possède un nombre fini d'extréma et de discontinuités. Ceci n'implique pas nécessairement que la transformée de TF_f soit f . Pour que la transformation de Fourier soit réciproque,

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} TF_f(s) e^{2i\pi s x} ds, \quad (7.5.4.2)$$

il suffit que f soit de carré sommable, c'est-à-dire qu'existe l'intégrale

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(x)|^2 dx \quad (7.5.4.3)$$

La définition de la TF peut être étendue aux distributions. La TF d'une distribution n'est pas nécessairement de carré sommable. Les fonctions f et TF_f peuvent être réelles ou complexes.

7 Rayons angulaires des étoiles

■ 7.5.4 La transformation de Fourier (cf. Léna 1996)

7.5.4.1 Définitions: Généralisation:

$$TF_{-} f(\vec{w}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}) e^{-2i\pi\vec{r}\vec{w}} d\vec{r} \quad . \quad (7.5.4.4)$$

7.5.4.2 Quelques propriétés:

a) Linéarité:

$$TF_{-}(af) = a TF_{-}(f) \quad , \quad a \in \mathfrak{R}, a \text{ étant une constante}, \quad (7.5.4.5)$$

$$TF_{-}(f + g) = TF_{-}(f) + TF_{-}(g) \quad . \quad (7.5.4.6)$$

7.5.4 La transformation de Fourier (cf. Léna 1996)

7.5.4.1 Définitions:

Généralisation:

On peut généraliser la TF à plusieurs dimensions, en définissant f sur l'espace \mathfrak{R}^n . Soit $\mathbf{r}, \mathbf{w} \in \mathfrak{R}^n$, on a alors

$$TF_{-} f(\vec{w}) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\vec{r}) e^{-2i\pi\vec{r}\vec{w}} d\vec{r} \quad (7.5.4.4)$$

Interprétation simple:

Si f(t) désigne une fonction du temps, $TF_{-}f(s)$ représente son contenu en fréquences temporelles. De même, si f(**r**) est défini sur \mathfrak{R}^2 , \mathfrak{R}^2 représentant un espace à deux dimensions, la fonction $TF_{-}f(\mathbf{w})$ représente le contenu en fréquences spatiales de f(**r**), où $\mathbf{w} \in \mathfrak{R}^2$.

7.5.4.2 Quelques propriétés:

a) Linéarité:

$$TF_{-}(af) = a TF_{-}(f) \quad , \quad a \in \mathfrak{R}, a \text{ étant une constante}, \quad (7.5.4.5)$$

$$TF_{-}(f + g) = TF_{-}(f) + TF_{-}(g) \quad (7.5.4.6)$$

7 Rayons angulaires des étoiles

7.5.4 La transformation de Fourier (cf. Léna 1996)

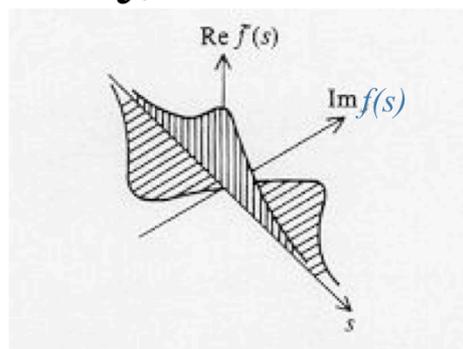
7.5.4.2 Quelques propriétés:

b) Symétrie et parité:

$$f(x) = P(x) + I(x) \tag{7.5.4.7}$$

$$TF_f(s) = 2 \int_0^\infty P(x) \cos(2\pi xs) dx - 2i \int_0^\infty I(x) \sin(2\pi xs) dx . \tag{7.5.4.8}$$

Représentation de la TF_f(s) d'une fonction réelle quelconque f(x): parties réelle et imaginaire de TF_f(s)



7.5.4 La transformation de Fourier (cf. Léna 1996)

7.5.4.2 Quelques propriétés:

b) Symétrie et parité:

Les considérations de symétrie sont très utiles lors de l'étude de la TF. Soit P(x) et I(x) les parties paires et impaires de f(x) telles que

$$f(x) = P(x) + I(x) , \tag{7.5.4.7}$$

on trouve que

$$TF_f(s) = 2 \int_0^\infty P(x) \cos(2\pi xs) dx - 2i \int_0^\infty I(x) \sin(2\pi xs) dx \tag{7.5.4.8}$$

De ce résultat, on déduit le tableau suivant (symétrie des paires de Fourier) et la figure ci-dessus:

f(x)	TF_f(s)
réelle et paire	réelle et paire
réelle et impaire	imaginaire et impaire
imaginaire et paire	imaginaire et paire
complexe et paire	complexe et paire
complexe et impaire	complexe et impaire
réelle quelconque	partie réelle paire et partie imaginaire impaire
imaginaire quelconque	partie imaginaire paire et partie réelle impaire

7 Rayons angulaires des étoiles

■ 7.5.4 La transformation de Fourier (cf. Léna 1996)

c) Similitude:

$$TF_{-}[f(ax)](s) = \frac{1}{|a|} TF_{-}\left[f\left(\frac{s}{a}\right)\right] \quad (7.5.4.9)$$

où $a \in \mathfrak{R}$, est une constante.

d) Translation:

$$TF_{-}[f(x-a)](s) = e^{-2i\pi as} TF_{-}f(s) \quad (7.5.4.10)$$

7.5.4 La transformation de Fourier (cf. Léna 1996)

c) Similitude:

La relation de similitude s'écrit

$$TF_{-}[f(ax)](s) = \frac{1}{|a|} TF_{-}\left[f\left(\frac{s}{a}\right)\right], \quad (7.5.4.9)$$

où $a \in \mathfrak{R}$, est une constante. La dilatation d'une fonction entraîne une contraction de sa transformée de Fourier. Cette propriété très visuelle est fort utile pour comprendre qu'une fonction dont le support est très compact, possède une transformée très étalée: en analyse des fréquences temporelles, on énoncera qu'une impulsion de très courte durée possède un spectre en fréquences très large, c'est-à-dire contient des fréquences d'autant plus élevées que l'impulsion est brève. C'est la relation classique du spectre d'un paquet d'ondes, selon laquelle la connaissance des propriétés d'un signal ne peut être arbitrairement précise à la fois en temps et en fréquence.

d) Translation:

La relation de translation s'écrit

$$TF_{-}[f(x-a)](s) = e^{-2i\pi as} TF_{-}f(s) \quad (7.5.4.10)$$

Une translation dans un espace correspond à une rotation de phase dans l'espace transformé.

7 Rayons angulaires des étoiles

■ 7.5.4 La transformation de Fourier (cf. Léna 1996)

e) Dérivation:

$$\left\{ \begin{array}{l} TF \left(\frac{df}{dx} \right) (s) = 2i\pi s TF _ f (s) \\ TF \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right) (s) = (2i\pi s)^n TF _ f (s) \end{array} \right. \quad (7.5.4.11)$$

7.5.4.3 Cas particuliers importants (une dimension):

a) Fonction porte:

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-1/2, 1/2[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1/2] \cup [1/2, +\infty[\end{cases} \quad (7.5.4.12)$$

7.5.4 La transformation de Fourier (cf. Léna 1996)

e) Dérivation:

Les dérivations suivantes découlent directement de la définition d'une paire de Fourier

$$\begin{aligned} TF \left(\frac{df}{dx} \right) (s) &= 2i\pi s TF _ f (s) \\ TF \left(\frac{d^n f}{dx^n} \right) (s) &= (2i\pi s)^n TF _ f (s) \end{aligned} \quad (7.5.4.11)$$

7.5.4.3 Cas particuliers importants (une dimension):

a) Fonction porte:

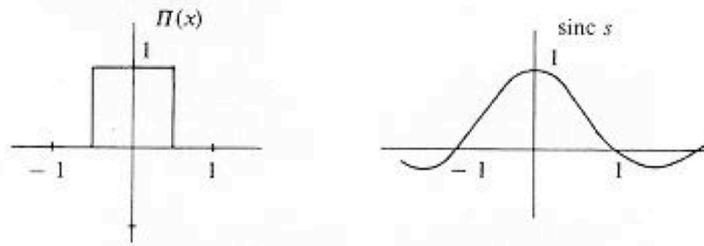
La fonction porte, dénotée $\Pi(x)$, est définie par (cf. Fig. ci-dessous)

$$\Pi(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in]-1/2, 1/2[\\ 0 & \text{si } x \in]-\infty, -1/2] \cup [1/2, +\infty[\end{cases} \quad (7.5.4.12)$$

7 Rayons angulaires des étoiles

■ 7.5.4 La transformation de Fourier (cf. Léna 1996)

La fonction porte
 et sa transformée
 de Fourier (sinus
 cardinal)



$$TF_{-} [\Pi(x)](s) = \text{sinc}(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} \quad (7.5.4.13)$$

$$TF_{-} \left[\Pi\left(\frac{x}{a}\right) \right](s) = |a| \text{sinc}(as) = |a| \frac{\sin(\pi as)}{\pi as} \quad (7.5.4.14)$$

7.5.4 La transformation de Fourier (cf. Léna 1996)

a) Fonction porte:

On trouve aisément que

$$TF_{-} [\Pi(x)](s) = \text{sinc}(s) = \frac{\sin(\pi s)}{\pi s} \quad (7.5.4.13)$$

En appliquant la relation de similitude, on trouve aussi

$$TF_{-} \left[\Pi\left(\frac{x}{a}\right) \right](s) = |a| \text{sinc}(as) = |a| \frac{\sin(\pi as)}{\pi as} \quad (7.5.4.14)$$

La fonction porte est aussi parfois dénommée fonction fenêtre ou simplement fenêtre.

7 Rayons angulaires des étoiles

■ 7.5.4 La transformation de Fourier (cf. Léna 1996)

b) Distribution de Dirac:

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi s x} ds. \quad (7.5.4.15)$$

sa transformée de Fourier vaut donc 1 dans l'intervalle $]-\infty, \infty[$.

7.5.4 La transformation de Fourier (cf. Léna 1996)

b) Distribution de Dirac:

La distribution de Dirac, aussi appelée pic de Dirac est notée $\delta(x)$. Elle est définie par l'intégrale suivante, qui n'existe qu'au sens des distributions

$$\delta(x) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{2i\pi s x} ds \quad (7.5.4.15)$$

sa transformée de Fourier vaut donc 1 dans l'intervalle $]-\infty, \infty[$ car $\delta(x)$ apparaît ci-avant comme étant la transformée de Fourier inverse de 1.

7 Rayons angulaires des étoiles

- 7.5 Cohérence de la lumière
- 7.5.5 Synthèse d'ouverture

$$v = \left| \gamma_{12}(0, B/\lambda) \right| = \left| \frac{\sin(\pi Bb / \lambda z')}{\pi Bb / \lambda z'} \right| \quad (7.5.5.2)$$

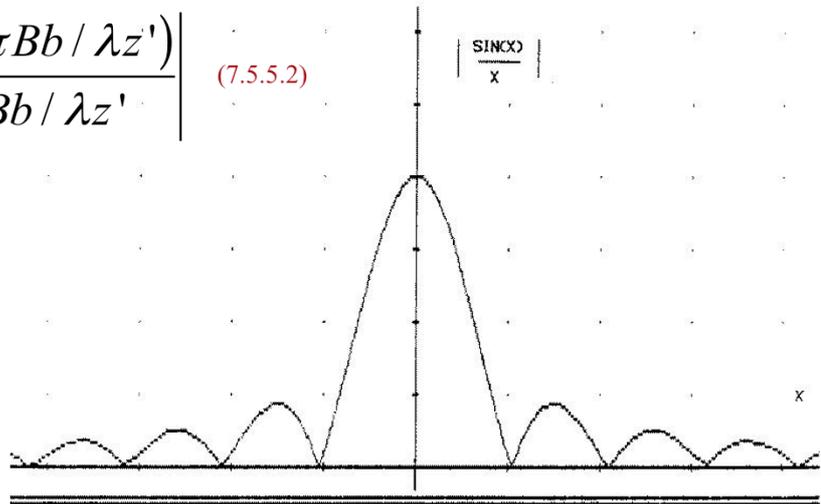
$$\pi Bb / \lambda z' = \pi \quad (7.5.5.3)$$

$$\Delta \sim \lambda / B, \text{ si } \quad (7.5.5.4)$$

source rectangulaire.

$$\Delta \sim 1,22 \lambda / B, \text{ si } \quad (7.5.5.5)$$

source circulaire!



7.5 Cohérence de la lumière

7.5.4 Synthèse d'ouverture

Pour une source de forme rectangulaire, ayant une brillance de surface uniforme et dont les abscisses extrêmes suivant l'axe des x valent $-b/2$ et $b/2$, on trouve facilement l'expression de la visibilité des franges (Eq. (7.5.5.2) ci-dessus, voir aussi la Fig.). En effet, si B représente la séparation entre les deux trous de l'interféromètre suivant l'axe des x , z' étant la distance entre la source et l'interféromètre, nous trouvons au moyen de (7.5.3.11) que

$$\left| \gamma_{12}(0, B, 0) \right| = \left| \int_{-\infty}^{\infty} \Pi(\xi / (b/z')) \exp\{-2i\pi\xi B / \lambda\} d\xi / (b/Z') \right| = \left| \int_{-b/(2Z')}^{b/(2Z')} \exp\{-2i\pi\xi B / \lambda\} d\xi / (b/Z') \right| \quad (7.5.5.1)$$

où la fonction fenêtre est telle que $\Pi(\xi/(b/z')) = 1$ si $\xi \in [-b/2z', b/2z']$ et zéro en dehors de cet intervalle ((7.5.4.12)-(7.5.4.14)). La dernière intégrale se réduit facilement à (7.5.5.2). Le résultat (7.5.5.2) peut aussi être obtenu plus directement de la façon suivante: effectuer le changement de variable $\zeta' = \xi/\lambda$ dans (7.5.5.1) et en nous servant de la propriété (7.5.4.14), où on a posé $a = b/(z'\lambda)$, on trouve immédiatement (7.5.5.2).

La visibilité des franges s'annule lorsque la condition (7.5.5.3) est vérifiée, c'est-à-dire de façon équivalente lorsque le diamètre angulaire Δ de la source satisfait la relation (7.5.5.4) (à comparer avec la condition (7.4.7)). De même, pour une source ayant une forme circulaire, on trouverait la condition (7.5.5.5), à comparer avec le diamètre de la tache d'Airy donné par l'équation (7.2.2.1).

7 Rayons angulaires des étoiles

- 7.5 Cohérence de la lumière
- 7.5.5 Synthèse d'ouverture

Exercices (voir ci-dessous)

7.5 Cohérence de la lumière

7.5.4 Synthèse d'ouverture

Exercices: A partir de la visibilité observée en (7.5.5.2), recherchez l'expression de l'intensité normalisée $I(\xi)$ correspondante à partir de la transformée de Fourier inverse (voir Eq. 7.5.3.12). Quelle est l'expression de la visibilité des franges pour une source gaussienne, une source ponctuelle, une double source ponctuelle pour laquelle les deux composantes ont une même intensité et une source ponctuelle triple dont les intensités sont différentes? A partir des visibilités obtenues, recherchez les intensités normalisées correspondantes au moyen de la transformée de Fourier inverse (voir Eq. 7.5.3.12). De même pour une source carrée et une source circulaire, possédant une brillance de surface uniforme. Savoir établir l'expression (7.5.5.5).