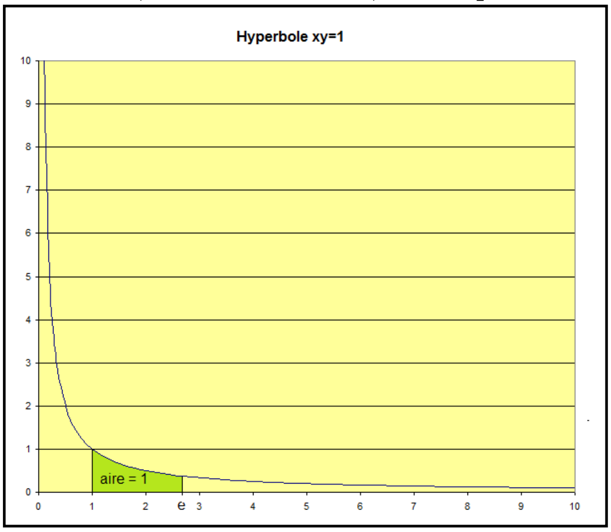
Pourquoi travailler systématiquement avec des exponentielles de base *e* ?

Jacques Bair, Valérie Henry, Daniel Justens

Chapeau : le nombre *e* est omniprésent en mathématiques ; on le retrouve en analyse, en trigonométrie et en calcul des probabilités. Il apparaît dans nombre d'applications en finance, en physique, en actuariat. Qu'est ce qui fait de ce nombre une base incontournable ?

Au début du 17[e] siècle, le mathématicien écossais John Napier (1550 – 1617) introduisit la notion de logarithme dans le but de simplifier les calculs de produits et de quotients. En gros, il s'agit de transposer ces opérations arithmétiques au moyen d'une représentation exponentielle de tout réel positif (les remplaçant ainsi par des sommes et différences). Henry Briggs (1556 - 1630) choisit la base dix pour l'exponentielle et publia sa célèbre table en 1624. Vers 1647, le mathématicien belge Grégoire de Saint-Vincent (1584 - 1667) étudia l'aire comprise entre un segment de droite et un arc d'hyperbole et relia cette aire à un logarithme de la longueur du segment. Plus tard, en 1661, Christian Huygens (1629 - 1695) fit le lien entre les logarithmes et la quadrature de l'hyperbole d'équation $x.y=1$, mettant en évidence le logarithme qualifié de *naturel* (d'où la notation *ln*) ; mais sa base (le futur nombre *e*) n'était pas encore totalement identifiée. Ce n'est que 30 ans plus tard, dans une lettre que Leibniz envoya à Huygens, que l'éclectique scientifique approcha la base du logarithme *naturel* en la notant « *b* ». La définition implicite du nombre *e* apparaît dans la représentation de l'hyperbole $y=1/x$ ci-contre. On calcule l'aire sous l'hyperbole en question, comprise entre la verticale $x=1$, et une autre à déterminer (e) de façon que cette aire soit rigoureusement égale à 1. En utilisant la notation intégrale, on peut écrire :

Grégoire de Saint-Vincent



$$\int_1^e \frac{1}{x}dx = 1$$

En 1728 Euler (voir le HS 29 entièrement consacré à ce « génie des Lumières ») utilisa la notation *e* pour la première fois pour quantifier la limite

$$e = \lim_{K \to 0} (1+K)^{\left(\frac{1}{K}\right)}$$

qu'il identifia à la base du logarithme naturel. Il fit part de sa notation à Goldbach dans un courrier daté de 1731. La notation *e* est-elle un hommage au patronyme d'Euler ou plus simplement une référence à l'exponentielle par excellence ? La question reste posée. De nombreuses propriétés de *e* ont été mises en évidence, permettant de l'approcher sous forme de fraction continue ou de série et donc de le quantifier avec une précision satisfaisante bien qu'il soit transcendant. Euler montra par exemple que l'on peut écrire :

$$e = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} = 1 + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{6} + \frac{1}{24} + \ldots = 2{,}71828\ldots$$

Phénomènes à taux de croissance constant

Considérons un phénomène dont le taux de croissance est constant. Comment le modéliser ? Définissons la notion de taux de croissance. Notons par exemple *a(t)* la mesure objective du phénomène à l'instant *t* et optons pour une certaine unité de temps. Le taux de croissance relatif à cette unité est égal au rapport entre la croissance observée sur cet intervalle et la mesure initiale. Avec nos notations et un taux de croissance constant, nous avons :

$$g(t)=\frac{a(t+1)-a(t)}{a(t)}=g$$

dont on tire :

$$a(t+1)=a(t)(1+g)\ .$$

Les observations successives du phénomène étudié sont en suite géométrique de raison ($1+g$). Partant d'une origine de temps (arbitraire), on peut donc écrire pour toute valeur naturelle de t :

$$a(t)=a(0)(1+g)^t$$

En étendant le domaine de validité du modèle à l'ensemble des réels positifs, on retrouve une modélisation exponentielle. Comment l'interpréter ? Le taux de croissance calibrant notre modèle est relatif à l'unité de temps choisie et n'a aucune signification intrinsèque. Pour donner une représentation universelle du phénomène, l'idée est de mesurer sa croissance relative instantanée par unité de temps. Entre t et $t+\Delta t$, la croissance relative est :

$$c(\Delta t)=\frac{a(o)(1+g)^{t+\Delta t}-a(0)(1+g)^t}{a(0)(1+g)^t}=(1+g)^{\Delta t}-1$$

Calculons le taux de croissance par unité de temps et passons à la limite pour des horizons Δt tendant vers 0.

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{c(\Delta t)}{\Delta t}=\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(1+g)^{\Delta t}-1}{\Delta t}$$

On calcule aisément cette limite en utilisant la règle du marquis de l'Hôpital (publiée en 1696). Mais il est intéressant d'effectuer un calcul direct qui va faire apparaître explicitement le nombre e. Posons $(1+g)=e^c$ et notons $e^{c\Delta t}-1=K.$. Lorsque Δt tend vers 0, il en va de même pour K. Il faut calculer Δt comme fonction de K ce qui introduit le logarithme naturel. La limite devient :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{(1+g)^{\Delta t}-1}{\Delta t}=\lim_{K\to 0}\frac{K}{\frac{\ln(1+K)}{c}}=c\lim_{K\to 0}\frac{1}{\ln(1+K)^{\frac{1}{K}}}=\frac{c}{\ln e}=c$$

La taux de croissance instantané par unité de temps coïncide avec la puissance de e exprimant l'évolution du phénomène. Pour pouvoir interpréter un modèle de croissance, il faut le mettre sous la forme $a(t) = a_0\, e^{ct}$. C'est le seul formalisme interprétable directement.

Résolution d'équations différentielles

Dans nombre d'applications, des phénomènes dépendant du temps prennent à tout moment des valeurs proportionnelles à leur taux de variation. Mathématiquement ceci se traduit par une équation différentielle. Nous en détaillons un exemple en finance dans le paragraphe qui suit mais on rencontre ce cas de figure en physique (en radio-activité le nombre de particules radio-actives diminue d'autant plus vite que ce nombre est important). Le même phénomène se retrouve en biologie : le nombre de bactéries d'une population croît d'autant plus rapidement que la population est abondante. Pour modéliser de telles situations, on procède en deux étapes : on construit un modèle local exprimant qu'en tout instant t, le taux de variation $\Delta f/\Delta t$ d'un phénomène quantifié par la fonction $f(t)$ sur un horizon Δt, est proportionnel à cette fonction. On passe ensuite à la limite pour l'horizon Δt tendant vers 0. Formellement, $f(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta f(t)}{\Delta t}=f'(t)=k\,f(t)$$

où k désigne une constante de proportionnalité. Revenons à la notation x pour désigner la variable considérée ; la solution à l'équation vérifiant la condition initiale $f(0)=y_0$ est donnée par :

$$f(x)=y_0e^{kx}$$

En particulier pour $k=y_0=1$, on retrouve la fonction $f(x)=e^x$ pour tout x, qui est caractérisée par le fait que sa valeur coïncide partout avec celle de sa dérivée.

Intérêt composé et capitalisation continue en finance

L'intérêt simple exprime la croissance d'un capital au moyen d'une fonction linéaire du temps ; l'accroissement de capital (ou intérêt) est proportionnel au capital investi et à la durée de placement. Le coefficient de proportionnalité, le taux d'intérêt *i*, est défini relativement à une certaine unité de temps (année, mois). La valeur à l'instant *t* d'un capital initial (origine des temps *t*=0) C_0 est alors donnée par :

$$C_0(1+i\,t)$$

L'usage est de limiter l'utilisation de cette modélisation linéaire aux durées inférieures à l'unité de temps et de recapitaliser toutes les unités de temps. Cette façon de faire conduit à l'intérêt composé dont une représentation continue est fournie dans les mêmes conditions que ci-dessus par :

$$C_0(1+i)^t$$

Cette dernière peut être utilisée concrètement pour toute valeur réelle de *t*, ce qui n'était pas le cas dans le modèle linéaire, notamment parce qu'il peut générer des valeurs négatives. Mais ce nouveau modèle ne donne pas de formules simples de changement d'unité de temps. Considérons un capital placé pendant 2 ans au taux annuel i_a et un capital identique placé pendant 24 mois au taux mensuel i_m. Ces taux sont équivalents si les valeurs acquises sont égales :

$$C_0(1+i_a)^2=C_0(1+i_m)^{24} \text{ c'est-à-dire si } i_a=(1+i_m)^{12}-1 .$$

Les taux équivalents ne sont pas proportionnels ! Pour obtenir cette propriété agréable, on convient de modifier le modèle en capitalisant à taux proportionnels pour des durées de plus en plus petites. Cette façon de faire modifie les valeurs acquises et pour éviter des confusions, on note *r* le nouveau taux d'intérêt utilisé, le taux dit *instantané*. Pour un horizon quelconque *t*, décomposons l'unité de temps en *n* intervalles de durée *1/n*, et procédons à *nt* capitalisations à taux proportionnels à *r*. La valeur acquise par un capital C_0 au taux instantané *r* est donnée par :

$$C(t)=\lim_{n\to\infty} C_0\left(1+\frac{r}{n}\right)^{nt}=C_0e^{rt}$$

Lorsque la banque capitalise des intérêts *n* fois par an pendant un an à un taux proportionnel à 100%, la valeur acquise par un euro après un an devient :

$$(1+\frac{1}{n})^n$$

Lorsque *n* grandit « indéfiniment », cette valeur croît sans cesse mais se stabilise assez vite pour converger vers le nombre *e*. On peut ainsi donner une interprétation économique de ce nombre : il est égal à la valeur acquise au bout d'un an, par un euro placé continûment au taux instantané de 100% (voir Tangente HS 41, p. 41).

Encadré

Dans le *Théorème du perroquet*, le regretté Denis Guedj utilise la capitalisation continue pour introduire le nombre *e* avec le style bien particulier qui était le sien.

Suppose qu'il y a un an tu aies amassé un beau pécule qui nous permettra de payer notre voyage pour Manaus. Soit P, ce pécule. Tu l'as placé en attendant. Coup de bol, ton banquier t'a proposé un taux d'intérêt mirobolant : 100 % ! Ne rigole pas, ça s'est vu. Pas avec les pauvres, mais avec les riches. Rêve ! Calcule ! Au bout d'un an, tu aurais eu P + P = 2P. Tu aurais doublé ton pécule. Si au lieu de toucher les intérêts à la fin de l'année, tu les avais touchés tous les six mois et que tu les aies replacés, au bout d'un an ça t'aurait fait $P(1+1/2)^2$*. Calcule ! Tu aurais plus que doublé ton pécule : tu aurais 2,25P. Si au lieu de toucher les intérêts tous les six mois, tu les avais touchés tous les trimestres et que tu les aies replacés, au bout de l'année, ça t'aurait fait* $P(1+1/4)^4$*. Calcule ! Tu aurais gagné encore plus : 2,441P. Si tu les avais touchés tous les mois et que tu les aies replacés, ça t'aurait fait* $P(l+1/12)^{12}$*. Calcule ! 2, 596. Encore plus ! Puis, tous les jours :* $P(1+1/365\ )^{365}$*.*

Encore plus toutes les secondes, encore plus. Et puis, tous les riens du tout, « en continu ». Tu n'en peux plus, tu t'envoles, tu planes, tu te dis que c'est Byzance, que ton pécule va quadrupler, décupler, centupler, millionupler, milliardupler ... Tes intérêts composés, ils ont beau se décomposer, eh bien, à l'arrivée, tu n'as même pas le triple de ton pécule, ni même 2,9 fois plus, ni même 2,8 fois plus, ni même 2,75 fois plus, ni même 2,72 fois plus... Tu as seulement 2, 71 828 1828 ... Mon pauvre John, après toute cette richesse, te voilà seulement e fois moins pauvre qu'au départ !

Fin d'encadré

Les qualités du nombre magique ne s'arrêtent pas là ! Imposons à l'équation de capitalisation d'être dérivable et de vérifier une condition économiquement incontournable : les accroissements de capital doivent être proportionnels au capital investi. La dérivabilité impose une linéarisation locale relativement au temps. La proportionnalité des accroissements au taux éventuellement variable *r(t)* achève de livrer la condition :

$$C(t+\Delta t)-C(t)=r(t)C(t)\Delta t$$

À la limite pour Δt tendant vers 0, ceci livre :

$$C'(t)=r(t)C(t)$$

La solution générale à notre équation différentielle s'écrit :

$$C(t)=C_0 e^{\int_0^t r(s)\,ds}$$

Cette notation ne doit leurrer personne : toute fonction continue à valeurs strictement positives et à variation bornée peut être mise sous cette écriture formelle ! Tout capital investi aujourd'hui peut dans certain contexte économique favorable ou non prendre n'importe quelle valeur non négative à n'importe quel moment ! En se rappelant qu'une dérivée est un quotient de différentielles, notre équation différentielle peut s'écrire sous la forme équivalente

$$dC(t) = C(t)r(t)dt \quad \text{ou encore} \quad \frac{dC(t)}{C(t)}=r(t)\,dt$$

exprimant explicitement la croissance relative du capital dans le membre de gauche Cette écriture permet de faire du processus de croissance une variable aléatoire en lui ajoutant une perturbation prenant la forme d'un processus wienérien de coefficient de diffusion σ. On a alors :

$$\frac{dC(t)}{C(t)}=r(t)\,dt+\sigma(t)\,dw(t)$$

Dans cette expression, $r(t)dt$ représente la partie déterministe de la croissance relative, proportionnelle au temps, et $\sigma(t)\ dw(t)$ décrit sa perturbation aléatoire, proportionnelle à un mouvement brownien qui se comporte en moyenne proportionnellement à la racine du temps écoulé ! La solution de la nouvelle équation différentielle qualifiée de *stochastique* peut être calculée explicitement (à l'aide de la formule d'Itô) :

$$C(t)=C_0 e^{\int_0^t r(s)-\sigma^2/2(s)\,ds}\, e^{\int_0^t \sigma(s)\,dw(s)}$$

En comparant les deux modèles, déterministe et stochastique, on a l'impression fausse que la diffusion σ tempère d'une valeur $\sigma^2/2$ le taux d'accroissement du capital initial. Il n'en est rien : il s'agit d'un processus de compensation qui corrige les effets de l'exponentielle d'intégrale stochastique qui introduit structurellement une tendance à éliminer.

Équations fonctionnelles

La fonction exponentielle de base *e* peut aussi être introduite comme une fonction *f* partout dérivable, telle que $f(0)=1$ et $f(x+y)=f(x).f(y)$ pour tous réels *x* et *y. P*our *x* fixé arbitrairement, on a, par hypothèse et pour tout h : $f(x+h)=f(x).f(h)$. On en tire :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h}=f(x)\frac{1-f(h)}{h}$$

Le passage à la limite pour *h* tendant vers zéro conduit à l'équation différentielle envisagée ci-dessus (on constate la proportionnalité de la fonction à sa dérivée) .

L'équation fonctionnelle $f(x+y)=f(x).\ f(y)$ apparaît chaque fois que l'on entend modéliser une grandeur q variant au cours du temps t, respectant deux hypothèses. On suppose qu'à tout instant t, la grandeur $q(t)$ est proportionnelle à sa valeur initiale q_0. On impose ensuite que la variation de q ne dépende que du temps écoulé et non de l'instant où cette variation est considérée. Montrons que ces deux hypothèses conduisent à notre équation fonctionnelle. La valeur de q au temps t dépend de q_0 et de t : $q(t)=F(q_0,t)$. En vertu de la première de nos hypothèses : $q(t)=q_0F(1,t)$. Notons $F(1,t)=f(t)$ et donc $q(t)=q_0f(t)$. Décomposons l'horizon t en $t=x+y$. On peut évidemment écrire $q(x)=q_0f(x)$. Considérons une durée y mesurée à partir de l'instant x. On a alors $q(t)=q(x+y)$ et, conformément à notre seconde hypothèse et en prenant x comme nouvel instant initial : $q(t)=q(x)\ f(y)$. On en tire dès lors $q(t)=q_0f(x)f(y)=q_0f(x+y)$, et donc en fait : $f(x+y)=f(x)f(y)$.

La présentation « non-standard » de Léonard Euler

Voici comment Euler introduisit la fonction exponentielle en 1748. Considérons un réel a supérieur à l'unité. On a $a^0=1$. Si l'exposant de a augmente, la puissance correspondante croît également. Il en résulte que si l'exposant de a est « infiniment petit » positif, alors la puissance en question dépasse 1 d'une quantité également « infiniment petite ». Désignons formellement un « infiniment petit » par *ip*. Si ε est un *ip*, alors il existe un *ip* que nous notons φ, tel que $a^{\varepsilon}= 1+\varphi$. Cette dernière égalité reste valable pour a positif quelconque, mais on peut avoir soit $\varphi=\varepsilon$, soit $\varphi>\varepsilon$, soit $\varphi<\varepsilon$, selon la valeur de a. On peut écrire dans tous les cas φ sous la forme d'un produit du type $\lambda\varepsilon$. Dès lors, $a^{\varepsilon}= 1+\lambda\varepsilon$. Considérons à présent un réel (fixé) x et posons $K=x/\varepsilon$. En exploitant le « théorème binomial » (la formule du binôme de Newton étendue à un exposant quelconque), on trouve :

$$a^x=a^{K\times\varepsilon}=(a^{\varepsilon})^K=(1+\lambda\varepsilon)^K=\left(1+\frac{\lambda x}{K}\right)^K=1+\frac{1}{1}\lambda x+\frac{K-1}{1\times 2K}\lambda^2x^2+\frac{(K-1)(K-2)}{1\times 2K\times 3K}\lambda^3x^3+\ldots$$

Suivant le raisonnement d'Euler, il faut admettre que K doit être *infiniment grand* puisque x est fini et que ε est *ip*. En passant outre à tout ce que le raisonnement qui suit a de peu rigoureux, on en *déduit* qu'à la limite, lorsque K devient vraiment très grand, on peut approcher toutes les fractions $(K\text{-}1)/K$, $(K\text{-}2)/K$, $(K\text{-}3)/K$, ... par ... 1, ce qui permet d'écrire :

$$a^x=1+\lambda x+\frac{1}{2!}\lambda^2x^2+\frac{1}{3!}\lambda^3x^3+\ldots$$

Euler s'est intéressé au cas où la base a est telle que $\lambda=1$. En langage moderne, cela se produit lorsque la base de l'exponentielle est le nombre e. On peut alors écrire

$$e^x=1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots$$

Le raisonnement d'Euler paraît bien peu rigoureux aux matheux d'aujourd'hui et soulève bien des questions. Mais l'utilisation des nombres hyperréels (rigoureusement introduits par Robinson à la fin du siècle dernier dans le cadre de l'analyse non-standard), font apparaître que le raisonnement d'Euler était parfaitement valide et fort en avance sur son époque, établissant une fois de plus qu'il fut bien le prince des mathématiciens !