

Table des matières

Introduction	vii
1 Préliminaires : algèbre et théorie des ensembles	1
1.1 Ensembles, relations et applications	1
1.1.1 Rudiments de logique mathématique	2
1.1.2 Logique de la théorie des ensembles de von Neumann, Bernays et Gödel	3
1.1.3 Théorie des ensembles de von Neumann, Bernays et Gödel	4
1.1.4 Relations	8
1.1.5 Applications	10
1.1.6 Injections, surjections, bijections	11
1.1.7 Produit d'une famille d'ensembles	14
1.2 Relations binaires particulières	15
1.2.1 Relations d'équivalence	15
1.2.2 Décomposition canonique d'une application	16
1.2.3 Relations d'ordre	18
1.2.4 Ensembles bien ordonnés	20
1.3 L'axiome du choix	23
1.3.1 Définition	24
1.3.2 Chaîne d'un ensemble partiellement ordonné	26
1.3.3 Principe du maximum	28
1.3.4 Le théorème du bon ordre	29
1.4 Notions d'algèbre	30
1.4.1 Monoïdes	30
1.4.2 Groupes : définition	32
1.4.3 Sous-groupes	33
1.4.4 Morphismes de groupes	35
1.4.5 Noyau d'un morphisme de groupes	36
1.4.6 Groupe quotient	36
1.4.7 Anneaux	39
1.4.8 Corps	40
1.4.9 Idéal	41
1.4.10 Anneau quotient	42
1.4.11 Groupes ordonnés	43
1.4.12 Corps ordonnés	44
1.5 Suites sur un corps ordonné	45
1.5.1 Valeur absolue	45

1.5.2	Suites convergentes	48
1.5.3	Suites de Cauchy	49
1.5.4	Séries	50
1.6	Espaces métriques	52
1.6.1	Définition d'un espace métrique	52
1.6.2	Suites convergentes	53
1.6.3	Suites de Cauchy	54
1.6.4	Applications continues	55
1.6.5	Théorème de prolongement	56
1.6.6	Isométries	57
2	Les Nombres naturels	59
2.1	Définition des nombres naturels	60
2.1.1	L'ensemble des nombres naturels	60
2.1.2	Axiomes de Peano	61
2.1.3	Récursion finie	63
2.2	Arithmétique des nombres naturels	65
2.2.1	Somme de nombres naturels	65
2.2.2	Le monoïde totalement ordonné $(\mathbb{N}, +, \leq)$	68
2.2.3	Le monoïde (\mathbb{N}, \cdot)	70
2.2.4	Puissance de nombres naturels et exposant algébrique	73
2.2.5	Unicité des nombres naturels	76
2.3	Ensembles finis et infinis	77
2.3.1	Ensembles équipotents	78
2.3.2	Ensembles infinis dénombrables	82
2.3.3	Propriétés des ensembles dénombrables	85
3	Les nombres entiers	89
3.1	Définition de \mathbb{Z}	89
3.1.1	Le groupe abélien $(\mathbb{Z}, +)$	90
3.1.2	Le groupe abélien totalement ordonné $(\mathbb{Z}, +, \leq)$	91
3.1.3	Optimalité du prolongement	93
3.1.4	L'anneau totalement ordonné $(\mathbb{Z}, +, \cdot, \leq)$	95
3.2	Propriétés de \mathbb{Z}	96
3.2.1	Diviseurs	97
3.2.2	L'anneau euclidien \mathbb{Z}	97
3.2.3	Représentation des éléments de \mathbb{Z}	99
3.2.4	Arbres b -adiques	102
3.2.5	L'anneau principal \mathbb{Z}	105
3.2.6	Identité de Bézout	106
3.2.7	Lemmes d'Euclide et de Gauß	108
3.2.8	L'anneau factoriel \mathbb{Z}	109
3.2.9	Factorisation dans \mathbb{N}	111
3.2.10	Théorème des nombres premiers	112
3.3	Généralisation	113
3.3.1	Anneaux euclidiens	113
3.3.2	Anneaux principaux	114
3.3.3	Identité de Bézout	114

3.3.4	Lemmes d'Euclide et de Gauß	116
3.3.5	Anneaux factoriels	117
4	Les nombres rationnels	119
4.1	Définition de \mathbb{Q}	119
4.1.1	Le corps $(\mathbb{Q}, +, \cdot)$	119
4.1.2	Cardinal de \mathbb{Q}	123
4.1.3	Optimalité du prolongement	129
4.1.4	Le corps totalement ordonné $(\mathbb{Q}, +, \cdot, \leq)$	131
4.1.5	Nombres décimaux	133
4.2	Généralisations	136
4.2.1	Corps de fractions d'un anneau commutatif intègre	136
4.2.2	Localisation	138
5	Les nombres réels	141
5.1	Motivation pour l'introduction de \mathbb{R} : les limitations de \mathbb{Q}	141
5.1.1	Sur l'irrationalité de la racine carrée	141
5.1.2	Sur l'incomplétude de \mathbb{Q}	142
5.1.3	Sur la propriété de la borne supérieure	143
5.1.4	Sur la propriété des suites adjacentes	144
5.2	Définition d'un nombre réel	145
5.2.1	Le corps \mathbb{R}	146
5.2.2	Le corps totalement ordonné $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$	149
5.3	Propriétés des suites réelles	153
5.3.1	Convergence dans \mathbb{R}	153
5.3.2	Propriété de la borne supérieure	154
5.3.3	Théorème des suites adjacentes	156
5.4	Théorème d'isomorphie	158
5.4.1	Corps archimédiens complets	158
5.4.2	Propriété de la borne supérieure	160
5.4.3	Propriété des suites adjacentes	161
5.4.4	Caractérisations du corps \mathbb{R}	162
5.4.5	Propriété des intervalles emboîtés	163
5.4.6	Le lemme de Cousin	164
5.5	Représentation des nombres réels	167
5.5.1	Existence de la représentation d'un nombre de $[0, 1[$	167
5.5.2	Unicité de la représentation d'un nombre de $[0, 1[$	170
5.5.3	Représentation d'un nombre réel quelconque	173
5.5.4	Cardinal de \mathbb{R} et hypothèse du continu	174
5.6	La fonction exponentielle en base b	179
5.6.1	Résultats préliminaires	179
5.6.2	Définition des fonctions logarithme et exponentielle en base b	182
5.7	Généralisation	185
5.7.1	Complétion d'un corps totalement ordonné et archimédien	185
5.7.2	Complétion d'un corps valué	187
5.7.3	Complétion d'un espace métrique	190
5.7.4	Unicité du complété d'un espace métrique	192
5.8	Construction des nombres réels à partir de coupures	194

5.8.1	Définition de \mathbb{R}	194
5.8.2	Le groupe $(\mathbb{R}, +)$	196
5.8.3	Le groupe totalement ordonné $(\mathbb{R}, +, \leq)$	197
5.8.4	Le corps totalement ordonné $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$	199
5.8.5	Le corps \mathbb{R} prolonge le corps \mathbb{Q}	204
5.8.6	Densité de \mathbb{Q} dans \mathbb{R}	205
5.8.7	Propriété de la borne supérieure	206
5.8.8	Le corps valué \mathbb{R} est archimédien et complet	207
5.8.9	Construction d'un isomorphisme entre les nombres réels définies par coupures et les nombres réels définis via les suites de Cauchy	209
5.9	Définition des nombres réels par quasi-morphismes	211
5.9.1	Définition de \mathbb{R}	211
5.9.2	Le groupe $(\mathbb{R}, +)$	212
5.9.3	Quelques résultats intermédiaires	213
5.9.4	Le groupe totalement ordonné $(\mathbb{R}, +, \leq)$	216
5.9.5	Le corps totalement ordonné $(\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$	218
5.9.6	Propriété de la borne supérieure	222
5.9.7	Construction d'un isomorphisme entre \mathbb{R} et les nombres réels définis via les suites de Cauchy	224
6	Les nombres hyperréels	229
6.1	Filtres et ultrafiltres	230
6.1.1	Définitions et premières propriétés	230
6.1.2	Mesures finiment additives	231
6.1.3	Mesures finiment additives et ultrafiltres	233
6.1.4	Existence d'ultrafiltres libres	234
6.2	Définition des nombres hyperréels	235
6.2.1	L'ensemble ${}^*\mathbb{R}$	235
6.2.2	Le corps commutatif $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot)$	236
6.2.3	Le corps commutatif totalement ordonné $({}^*\mathbb{R}, +, \cdot, \leq)$	237
6.2.4	Cardinal de ${}^*\mathbb{R}$	239
6.3	Nombres infinitésimaux et partie standard	239
6.3.1	Nombres infinitésimaux et infinis	239
6.3.2	Halos et galaxies	241
6.3.3	Partie standard d'un nombre hyperréel	243
6.3.4	Représentation des nombres finis sous forme de couples	244
6.4	Principe de transfert	245
6.4.1	Transformation d'ensembles	245
6.4.2	Transfert de fonctions	248
6.5	Applications de la théorie des nombres hyperréels	249
6.5.1	Les nombres entiers non-standards	249
6.5.2	Une définition de \mathbb{R} à partir des nombres rationnels non-standards	251
6.5.3	Topologie	251
6.5.4	Définitions des notions de limite, continuité et dérivabilité	254
6.5.5	Application aux fonctions continues	256
	Bibliographie	259