

MODELES MATHEMATIQUES EN HYDROGEOLOGIE ET PARAMETRISATION¹

par

A. DASSARGUES²

(3 figures et 1 tableau)

ABSTRACT.- Mathematical models are more and more used to simulate groundwater. A short review of the basic physical principles and mathematical framework of groundwater flow and modelling is given. Physically based models are needed to provide reliable results in the future. The flow and the solute transport equations are presented and the part of each parameter is pointed out. By the same way, all the data needed for a simulation, the different kinds of boundary conditions and the validation of the model by the calibration procedure are discussed.

RESUME.- Des modèles mathématiques sont de plus en plus souvent utilisés afin de simuler le comportement des nappes souterraines. Les principes physiques et les bases mathématiques relatifs aux écoulements souterrains, et à leur simulation numérique, sont repris de façon synthétique. Il est indispensable d'utiliser des modèles physiquement significatifs afin d'assurer la fiabilité des résultats prévisionnels. Les lois utilisées pour les écoulements et pour le transport de produit dissout, en milieu poreux, sont présentées et le rôle des différents paramètres intervenant dans ces lois est souligné. De même, sont discutés les différents types de données indispensables à une simulation; les diverses conditions aux frontières possibles et la validation du modèle via sa phase de calibration.

I.- INTRODUCTION

Les écoulements souterrains constituent la partie «cachée» du cycle hydrologique. C'est la raison pour laquelle certaines de leurs caractéristiques, mesurables ponctuellement seulement, restent parfois incertaines. Cependant l'étude de ces écoulements et des ressources qu'ils sont susceptibles de nous fournir ne peut être négligée dans la gestion générale des eaux.

Le mouvement de l'eau dans le sous-sol est très lent par rapport aux vitesses de ruissellement en surface, ce qui implique un long temps de séjour dans le sous-sol et de faibles flux. Le coût d'extraction de l'eau hors des nappes aquifères est souvent plus élevé que le simple prélèvement des eaux de surface, lorsque celles-ci ne doivent pas être traitées. Mis à part les incertitudes liées au caractère souterrain de ces écoulements, leur exploitation offre des avantages certains:

- une meilleure protection contre la pollution;
- une température relativement constante;

- de faibles distances entre la source et l'utilisation;
- une réponse à la demande peu variable dans le temps et dont les extrema sont décalés de un à six mois par rapport aux extrema pluviométriques.

L'exploitation optimum des ressources souterraines implique une connaissance préalable des conditions hydrologiques, permettant le calcul du bilan et de la courbe de tarissement. Les informations hydrogéologiques étant fournies par des essais de pompages et des piézomètres, leur nombre est forcément limité. Dans le cas d'une étude quantitative, le rôle d'un modèle mathématique est d'intégrer toutes les données disponibles, d'approximer de façon logique et fiable les données manquantes et de fournir une réponse globale montrant toutes les tendances de la nappe en régime permanent ou transitoire.

1. Manuscrit reçu en décembre 1989.

2. Laboratoires de Géologie de l'Ingénieur, d'Hydrogéologie et de Prospection géophysique, Université de Liège.

De nos jours, la gestion des nappes aquifères comprend également des aspects qualitatifs: les problèmes de pollution. Les décharges de déchets industriels et ménagers, officielles ou sauvages, situées au gré de la topographie ou d'anciennes exploitations, sont autant de sources potentielles de pollution si certaines précautions ne sont pas prises. Bien souvent dans ce cas, la contamination éventuelle des eaux de la nappe est constatée, alors que les décharges sont «oubliées» depuis des années sous une couverture de terrain cultivé. A quelques exceptions près (roches calcaires fracturées ou karstifiées), les écoulements d'eau, et les phénomènes de dispersion et de diffusion peuvent, en effet, être considérés comme relativement lents dans le sous-sol.

L'épandage des fertilisants, les puits perdus et les accidents routiers impliquant des camions contenant des produits toxiques, sont autant de sources de polluants pouvant déboucher sur une contamination grave des aquifères.

Ce type de pollution comporte de très longs effets dans le temps et son élimination reste le plus souvent partielle.

De nombreux pays dont la Belgique ont souffert et souffrent actuellement de problèmes de contaminations. L'élimination de celles-ci et l'étude de leur évolution sont très onéreuses. Toute mesure de sauvetage ou de prévention doit être précédée d'une excellente compréhension des conditions existantes. Les modèles mathématiques fournissent un moyen d'intégrer tous les paramètres d'un tel problème. Ils constituent un outil, indispensable, pour guider l'interprétation et la ligne de conduite à appliquer dans les problèmes de pollution.

II.- MODELES MATHÉMATIQUES DETERMINISTES ET STOCHASTIQUES

Un modèle est par définition une représentation simplifiée de la réalité. Cette représentation doit cependant être la plus conforme possible du point de vue des mécanismes et processus simulés.

Il existe des modèles physiques ou électriques représentant différents phénomènes, mais actuellement, les modèles mathématiques sont les plus utilisés de par leur applicabilité plus générale.

Un modèle mathématique est constitué d'un ensemble d'équations qui, moyennant certaines hypothèses et certaines approximations, décrivent le phénomène étudié.

Deux types de modèles mathématiques sont possibles:

- les modèles déterministes,
- les modèles stochastiques (probabilistes).

L'approche déterministe d'un problème physique se base sur le principe de causalité liant par une relation unique la cause et les résultats. En appliquant ce principe aux écoulements souterrains (fig.1), on obtient:

une nappe aquifère représentée par ses caractéristiques (paramètres p_1, p_2, \dots, p_k), recevant une «sollcitation» extérieure représentée par des variables indépendantes (x_1, x_2, \dots, x_n), elle réagit d'une seule manière et les variables dépendantes (y_1, y_2, \dots, y_n) fournissent une mesure de cette réaction.

Les paramètres de la nappe peuvent être par exemple la porosité et la transmissivité. Les variables indépendantes peuvent représenter l'infiltration dans la nappe ou le taux de pompage et les variables dépendantes peuvent être les pressions ou les hauteurs piézométriques.

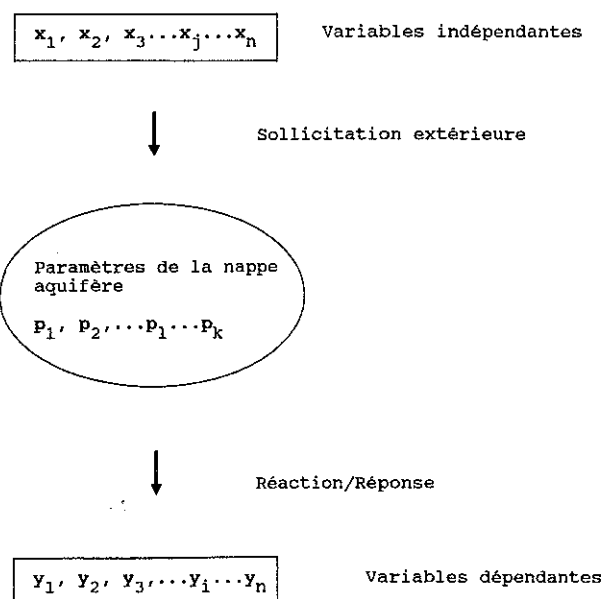


Fig.1.- Schéma physique lors de la sollicitation d'une nappe aquifère

Une loi ayant la forme d'une fonctionnelle

$$y_i = F(x_j, p_l) \quad i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, n \quad l = 1, \dots, k \quad (1)$$

peut être trouvée le plus souvent, en intégrant une équation aux dérivées partielles. La valeur réelle de la réponse y_i peut s'écrire :

$$y_{r,i} = y_{\text{dét},i} + \varepsilon_{\text{dét},i} \quad i = 1, \dots, n \quad (2)$$

où ε_i est l'erreur.

Cette erreur peut être due à plusieurs raisons :

- des incertitudes dans la paramétrisation et la définition de la nappe aquifère;
- des erreurs de mesure;
- des erreurs numériques et dues à l'approximation faite lors de l'intégration.

L'approche stochastique ou probabiliste postule que les paramètres représentant la nappe et les variables indépendantes sont des variables aléatoires ou stochastiques possédant des fonctions de probabilité déterminées (de Marsily, 1982). En utilisant les mêmes équations différentielles que les modèles déterministes ou des lois statistiques empiriques, les modèles probabilistes déterminent la loi de distribution de probabilités de la variable Y_i :

$$P(Y_i \leq t) = \phi(x_j, p_1, Y_i) \quad (3)$$

$$\text{avec } i = 1, \dots, n \quad j = 1, \dots, m \quad l = 1, \dots, k$$

(probabilité que y_i prenne une valeur inférieure ou égale à une valeur donnée t).

La valeur réelle de la réponse à la sollicitation

$$s'écrit : Y_{r,i} = \langle Y_{\text{prob},i} \rangle + e_{\text{prob},i} \quad (4)$$

En comparant les relations (2) et (4) on obtient :

$$\langle Y_{\text{prob},i} \rangle + e_{\text{prob},i} = Y_{\text{dét},i} + e_{\text{dét},i}$$

$$\text{avec } Y_{\text{dét},i} = Y_{\text{prob},i}$$

L'approche probabiliste permet de quantifier exactement l'erreur ($\epsilon_{\text{prob},i}$) mais cette précision est illusoire car elle suppose que le milieu est parfaitement représenté par les fonctions de probabilité des paramètres et des sollicitations. Cette dernière condition est rarement satisfaite.

Dans la suite de cette synthèse, seuls les modèles déterministes seront abordés. Dans ce type de modèles, deux catégories peuvent être distinguées:

- les modèles de type «boîte noire» qui fournissent des résultats calculés par une relation totalement empirique;
- les modèles physiquement significatifs qui se servent de l'expression mathématique des lois physiques qu'ils simulent.

Il est évident que les modèles du premier groupe sont peu recommandables car pour qu'une simulation par ordinateur soit fiable, il est non seulement nécessaire que les méthodes numériques utilisées soient précises et fiables, mais également que la description physique, convertie en données mathématiques, du processus devant être simulé, soit correcte. Ils ne peuvent donc en aucun cas être utilisés pour des prédictions.

Les modèles hydrogéologiques, physiquement significatifs, sont basés sur des lois d'écoulement en milieu poreux utilisant comme paramètres la transmissivité (ou la perméabilité), le coefficient d'emmagasinement et des coefficients d'infiltration. Le calcul est réalisé en résolvant l'équation différentielle avec les paramètres spécifiés, les sollicitations extérieures et les conditions aux limites imposées. La solution proposée par le

modèle consiste en une description de la piézométrie (ou du champ de pression).

Cette solution peut être obtenue analytiquement ou par des méthodes numériques. Les solutions analytiques sont exactes dans leurs développements mathématiques mais supposent des conditions géologiques homogènes et des sollicitations uniformes. Les simulations les plus réalistes sont obtenues à l'aide de méthodes numériques telles que les méthodes des différences finies, éléments finis et éléments frontiers.

III.- LOIS ET BASES MATHÉMATIQUES

3.1.- ECOULEMENT EN MILIEU POREUX

3.1.1.- Equations et hypothèses

La loi de Darcy, établissant que le flux est inversement proportionnel au gradient hydraulique s'écrit:

$$q_i = -K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (5)$$

$$\text{avec } K_{ij} = \text{tenseur des perméabilités du milieu} \\ [LT^{-1}]$$

$$q_i = \text{vecteur flux} \quad [LT^{-1}] \\ x_j = \text{coordonnée} \quad [L] \\ h = \text{hauteur piézométrique} \quad [L]$$

Cette loi, écrite sous forme scalaire, consiste en fait en 3 équations avec 4 inconnues: les q_i et la hauteur piézométrique h . La 4^{ème} équation scalaire est fournie par l'expression du principe de conservation de la masse. En combinant la loi de Darcy et l'équation de continuité (fig.2), on obtient l'expression de l'«équation de diffusivité»:

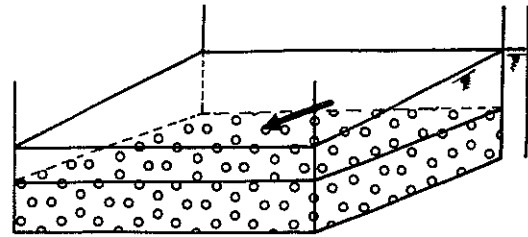
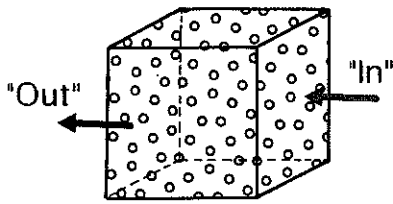
$$\frac{\partial}{\partial x_i} \left(K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j} \right) - Q = S_s \frac{\partial h}{\partial t} \quad (6) \\ i, j = 1, 2, 3$$

$$\text{avec } S_s = \text{coefficient d'emmagasinement spécifique} \\ [L^{-1}] \\ t = \text{temps} \quad [T] \\ Q = \text{terme de flux externes (pompages,} \\ \text{réinjections, infiltrations)} \quad [T^{-1}]$$

Lorsque la nappe étudiée peut se réduire à un problème 2D, l'équation est ramenée à 2 dimensions par intégration sur l'épaisseur de la hauteur saturée. Cette simplification repose sur l'hypothèse que les vitesses d'écoulement horizontales sont très supérieures aux vitesses verticales (hypothèse de Dupuit).

$$S \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \left(T_x \frac{\partial h}{\partial x} \right) + \frac{\partial}{\partial y} \left(T_y \frac{\partial h}{\partial y} \right) - Q \quad (7)$$

$$\text{avec } S = \text{coefficient d'emmagasinement} \\ Q = \text{flux externe} \\ T = \text{transmissivité} \quad [L^2 T^{-1}] \\ x, y = \text{coordonnées horizontales}$$



Emmagasinement+Recharge -Pompage="In"- "Out"

$$q_i = -K_{ij} \frac{\partial h}{\partial x_j}$$

CONSERVATION DE LA MASSE

+

LOI DE DARCY

=

EQUATION DE DIFFUSIVITE

Fig.2.- Combinaison de la loi de Darcy au principe de conservation de la masse pour obtenir l'équation de diffusivité.

Cette équation est uniquement valable pour des flux horizontaux en nappe captive, mais elle est également utilisée comme approximation en nappe libre avec $T = K.e$, e représentant l'épaisseur des terrains saturés de la nappe.

3.1.2.- Paramètres

- Perméabilité et transmissivité

Le coefficient de proportionnalité apparaissant dans la loi de Darcy est appelé en fait «conductivité hydraulique» ou «coefficient de perméabilité» dépendant de la «perméabilité intrinsèque» du milieu poreux par rapport au fluide:

$$K = k \cdot \rho \cdot g / \mu \quad (8)$$

avec K = coefficient de perméabilité [LT^{-1}]
 k = perméabilité intrinsèque [L^2]
 ρ = densité du fluide [ML^{-3}]
 μ = viscosité dynamique du fluide [$ML^{-1}T^{-1}$]

Il existe de nombreuses relations empiriques liant la perméabilité à la porosité, aux diamètres des grains, à l'indice des vides, à l'indice de plasticité. De par leur formulation, elles nécessitent la détermination de constantes, caractéristiques de chaque milieu poreux étudié.

Dans certaines conditions, la perméabilité peut varier dans le temps à cause de changements de structure et de texture de la matrice, dus à des phénomènes de subsidence (consolidation), de dissolution, de fluage ou de gonflement (des couches argileuses).

Il a été constaté, par la pratique, que la loi de Darcy est valide quand le nombre de Reynolds caractérisant l'écoulement est compris entre 1 et 10; ce qui est vérifié dans la plupart des milieux poreux.

$$Re = \frac{qd}{\nu}$$

avec q = débit spécifique
 d = longueur représentative du diamètre des grains, le plus souvent on prend d_{10} (telle que 10 % des grains en poids ont un diamètre inférieur à d)
 ν = viscosité cinématique du fluide

Dans beaucoup de cas, les aquifères sont anisotropes et le tenseur des perméabilités comporte 9 composantes:

$$K = \begin{bmatrix} K_{xx} & K_{xy} & K_{xz} \\ K_{yx} & K_{yy} & K_{yz} \\ K_{zx} & K_{zy} & K_{zz} \end{bmatrix}$$

Dans le cas où les directions principales d'anisotropie sont parallèles aux axes de coordonnées, il se ramène à:

$$K = \begin{bmatrix} K_x & 0 & 0 \\ 0 & K_y & 0 \\ 0 & 0 & K_z \end{bmatrix}$$

La transmissivité est définie lorsque l'on considère que le flux s'effectue sur l'épaisseur saturée totale de l'aquifère et on a :

$$T = K.e$$

Bien que l'épaisseur saturée (e) n'est pas nécessairement constante, ce concept est sans signification en écoulement 3D (comme signalé précédemment).

- **Coefficient d'emmagasinement (spécifique)**

Dans le cas des nappes captives, l'expression de l'emmagasinement spécifique d'un fluide dans un milieu poreux saturé est la suivante:

$$s_s = \rho \cdot g \cdot h \left(\beta - \beta_s + \frac{\alpha}{n} \right) \quad (9)$$

avec β = coefficient de compressibilité du fluide
 β_s = coefficient de compressibilité du solide
 α = coefficient de compressibilité de la matrice poreuse, due à la diminution de porosité.

Dans le cas où la compressibilité du fluide et la compressibilité des grains solides sont considérées comme négligeables par rapport à la compressibilité due à la diminution de porosité, on obtient:

$$s_s = \rho \cdot g \cdot \alpha \quad (10)$$

La valeur α dépend de l'état de contrainte et des caractéristiques de compressibilité du matériau poreux.

Par la théorie de Terzaghi et les lois oedométriques on a:

$$\alpha = m_v = \frac{1}{E_{oed}} = \frac{dc}{d\sigma'} = \begin{cases} \gamma_w / \lambda \cdot \sigma' & \text{en régime élastique} \\ \gamma_w / c \cdot \sigma' & \text{en régime plastique} \end{cases} \quad (11)$$

Le coefficient d'emmagasinement spécifique (fig.3) varie donc en fonction des éventuelles modifications du milieu par subsidence (consolidation).

Dans le cas des nappes libres, il faut considérer l'emmagasinement de fluide lors du passage de l'état non-saturé à l'état saturé. Cet emmagasinement correspond alors à la porosité efficace du milieu poreux (n_e) et dans ce cas, l'emmagasinement par déformation du milieu en conditions saturées est négligé.

3.1.3.- Conditions aux frontières

Une nappe aquifère a une extension limitée dans l'espace et, sur ces limites les échanges d'eau avec l'extérieur sont régis par les conditions aux frontières.

Ces conditions sont de trois types:

1. Condition de Dirichlet ou de potentiel imposé:

$$h = h \quad (12)$$

La valeur du potentiel h est alors spécifiée sur la frontière considérée, cette condition est typiquement celle d'un contact nappe-

rivière, le potentiel constant imposé étant égal à la cote de la surface libre.

2. Condition de Neuman ou de flux imposé:

$$\frac{\partial h}{\partial n} = \frac{\partial h}{\partial x} l_x + \frac{\partial h}{\partial y} l_y = \phi \quad (13)$$

avec n = la normale extérieure à la frontière considérée
 l_x et l_y = les cosinus directeurs de cette normale
 ϕ = flux imposé à la frontière

La valeur du gradient de potentiel normal à la frontière est alors imposée. Dans le cas particulier où $\phi = 0$, cette condition exprime, par application de la loi de Darcy, que la composante d'écoulement normale à la frontière est nulle. Les équipotentielles sont donc perpendiculaires à cette frontière et les lignes de flux, parallèles.

3. Condition de Fourier ou mixte:

$$h + \lambda \frac{\partial h}{\partial n} \text{ imposé} \quad (14)$$

Ce troisième type de condition permet d'imposer une relation entre le potentiel et le flux, comme cela est le cas lors:

- de la drainance par une frontière séparant la nappe aquifère d'un plan d'eau;
- du suintement à la frontière d'un milieu poreux, au contact de l'atmosphère.

La définition ad hoc de ces conditions aux frontières est indispensable à la résolution correcte du problème de champ posé.

3.2.- TRANSPORT DE POLLUANT EN MILIEU POREUX

Les phénomènes physicochimiques relatifs à la propagation des polluants dans les nappes aquifères sont très différents suivant que les polluants sont miscibles ou non dans l'eau. Les processus sont advectifs, dispersifs et diffusifs pour les substances miscibles, tandis qu'ils sont principalement capillaires pour les substances immiscibles.

Cependant, l'immiscibilité n'est pas totale et dans la plupart des cas, ces polluants peuvent être solubilisés dans l'eau jusqu'à une concentration limite (solubilité).

Dans la pratique, dans le cas de la pollution accidentelle d'une nappe aquifère par des fluides dit immiscibles (hydrocarbures par exemple), le polluant a tendance à surnager au-dessus de l'eau avant de pénétrer par solubilisation dans la nappe.

La modélisation de ce type de pollution nécessite donc l'analyse de deux processus de propagation de polluants, l'un résultant d'écou-

lements biphasiques dans la zone supérieure de la nappe, et l'autre résultant des phénomènes de transport de polluants miscibles dans le milieu poreux.

3.2.1.- Ecoulements biphasiques

Dans le domaine de saturation pour lequel les 2 fluides sont en écoulement, le système d'équation est le suivant (Biver *et al.*, 1989):

$$v_{i,1} = - \frac{k_{ij} \cdot k_{r,1}}{\mu_1} \left(\frac{\partial p_1}{\partial x_j} - \rho_1 g_i \right) \quad i, j = 1, 2, 3 \quad (15)$$

Equation de Darcy pour le fluide 1

$$v_{i,2} = - \frac{k_{ij} \cdot k_{r,2}}{\mu_2} \left(\frac{\partial p_2}{\partial x_j} - \rho_2 g_i \right) \quad (16)$$

Equation de Darcy pour le fluide 2

avec k_{ij} = perméabilité intrinsèque du milieu poreux
 $k_{r,1}$, μ_1 , ρ_1 = perméabilité relative, viscosité dynamique et densité du fluide 1
 $k_{r,2}$, μ_2 , ρ_2 = perméabilité relative, viscosité dynamique et densité du fluide 2

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_1 v_{i,1}) + n \frac{\partial}{\partial t} (\rho_1 \cdot s_1) = 0 \quad (17)$$

Equation de conservation de la masse pour le fluide 1.

$$\frac{\partial}{\partial x_i} (\rho_2 v_{i,2}) + n \frac{\partial}{\partial t} (\rho_2 \cdot s_2) = 0 \quad (18)$$

Equation de conservation de la masse pour le fluide 2.

avec n = porosité du milieu poreux
 s_1 et s_2 = saturations respectives en fluides 1 et 2

$$p_2 - p_1 = p_c(s_1) \quad (19)$$

Equation de capillarité

$$s_1 + s_2 = 1 \quad (20)$$

Equation de partage de la porosité

avec p_c = pression capillaire
 p_1 et p_2 = pressions existant dans les parties saturées respectivement par les fluides 1 et 2

Les conditions aux limites suivantes sont distinguées:

$$- \text{l'imperméabilité totale} \begin{cases} v_{i,1} \cdot n_i = 0 \\ v_{i,2} \cdot n_i = 0 \end{cases} \quad (21)$$

$i = 1, 2, 3$

n_i étant les composantes unitaires de la normale à la frontière

- le passage à un milieu de caractéristiques différentes, la continuité des pressions et des flux est imposée:

$$\begin{aligned} p_1^A &= p_1^B & p_2^A &= p_2^B \\ \left(v_{i,1} \cdot n_i \right)^A &= \left(v_{i,1} \cdot n_i \right)^A \\ \left(v_{i,2} \cdot n_i \right)^B &= \left(v_{i,2} \cdot n_i \right)^B \end{aligned} \quad (22)$$

Lorsque les 2 phases fluides ne sont plus totalement immiscibles, la composition de ces phases varie jusqu'à la réalisation d'un équilibre stationnaire régi par les conditions thermodynamiques.

3.2.2.- Transport de polluants miscibles

Les processus intervenant dans la propagation d'un polluant soluble dans un milieu poreux saturé sont les suivants (Biver *et al.*, 1989):

- la diffusion moléculaire: déplacement du polluant dû au gradient de concentration de ce polluant, décrit par l'équation de Fick:

$$f_i = \text{Cste} \cdot \frac{\partial c}{\partial x_i} \quad i = 1, 2, 3 \quad (23)$$

- l'adsorption, la désorption et l'échange d'ions: le polluant a tendance à s'adsorber pour minimiser la tension superficielle du solide et son énergie de surface; l'adsorption chimique met en jeu des liens chimiques entre les molécules du fluide pollué et les molécules du solide;

l'adsorption physique consiste en phénomènes de capillarité et de condensation.

- l'advection ou convection: transport de polluant dû au mouvement global de l'eau mobile. Si ce processus intervenait seul, les particules de polluant se déplaceraient de la même manière que l'eau dans laquelle elles sont dissoutes.

- la dispersion mécanique: la propagation d'un polluant dans l'eau mobile est caractérisée par l'apparition d'un certain étalement du polluant. La position de la zone d'étalement est déterminée par l'advection (définie ci-dessus), mais sa géométrie est due aux autres composantes du mouvement, et en particulier au régime d'écoulement.

Les composantes de l'étalement sont donc constituées de la diffusion, de l'adsorption et de la dispersion mécanique.

Pour décrire les équations relatives à ces processus, les hypothèses suivantes sont choisies:

- le polluant est miscible à l'eau interstitielle pour les concentrations envisagées, et ne modifie pas sensiblement la distribution de vitesse de l'eau dans laquelle il s'est mélangé.

- on suppose connu en tout point le mouvement de l'eau. L'écoulement est laminaire, caractérisé par un nombre de Reynolds compris entre 1 et 12.

- on admet qu'une proportion d'eau est immobile et ne participe pas à l'écoulement.

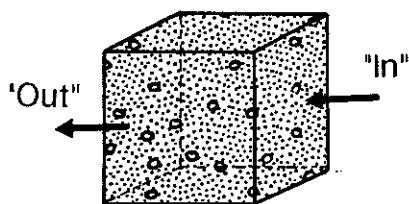
- la phase solide est considérée comme immobile (pas de déplacement relatif des grains, pas de subsidence).
- les mouvements d'eau et de polluant n'ont pas de composante thermique.

De plus, il faut poser le concept d'«Elément de Volume Représentatif» (EVR) introduit par Bear. On globalise les événements microscopiques et locaux sur un élément de volume qui serait «suffisamment grand par rapport aux événements et suffisamment petit par rapport aux variations qu'on désire étudier». Cette hypothèse est plus forte que la simple hypothèse géométrique d'un élément de volume suffisamment grand par rapport aux pores du milieu considéré. Cette méthode déterministe convient bien à un problème de grande dimension tel que ceux d'éventuelles pollutions de nappes aquifères.

En se limitant au terme relatif à la propagation du polluant au sein même de l'eau mobile on trouve (fig.3)

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_w \cdot c_w) = - c' \cdot Q' - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\theta_w [c_w \cdot v_i - (D_h)_{ij} \cdot \frac{\partial c_w}{\partial x_j}] \right]$$

- avec θ_w = volume d'eau mobile par unité de volume du milieu
 c_w = concentration volumique de polluant dans l'eau mobile
 $(D_h)_{ij}$ = composantes du tenseur de dispersion
 Q' = flux "externes"
 c' = concentration volumique de polluant dans l'eau des flux "externes".



Emmagasinement+ Adsorption-Abstraction="In"- "Out"

Dans le terme relatif aux flux «externes» sont regroupés:

- les sources/pertes de polluants externes;
- les échanges de polluant entre le solide d'une part et l'eau mobile et immobile d'autre part;
- l'éventuelle génération de polluant par réaction chimique, désintégration radioactive...

Dans l'équation (24), le terme $c_w \cdot v_i$ représente l'advection, et le terme

$$(D_h)_{ij} \frac{\partial}{\partial x_j} c_w$$

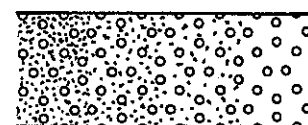
la dispersion. Pour un milieu isotrope et saturé, le tenseur de dispersion hydrodynamique peut s'exprimer par:

$$(D_h)_{ij} = a_T \cdot v_i \cdot \delta_{ij} + (a_L - a_T) \frac{v_i \cdot v_j}{v} + d_m \cdot \delta_{ij} \quad (25)$$

- avec a_T = dispersivité transversale
 a_L = dispersivité longitudinale
 d_m = coefficient de diffusion moléculaire
 $v = \sqrt{v_i \cdot v_i}$ = valeur absolue de la vitesse moyenne d'écoulement

Dans un référentiel de Frenet, lié aux lignes de courant, le tenseur D_h se ramène à:

$$D_h = \begin{bmatrix} D_L & 0 & 0 \\ 0 & D_T & 0 \\ 0 & 0 & D_T \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_L & 0 & 0 \\ 0 & a_T & 0 \\ 0 & 0 & a_T \end{bmatrix} \cdot v + \begin{bmatrix} d_m & 0 & 0 \\ 0 & d_m & 0 \\ 0 & 0 & d_m \end{bmatrix} \quad (26)$$



Diffusion+Convection+Dispersion

CONSERVATION DE LA MASSE

+

TRANSPORT

=

EQUATION DE TRANSPORT

$$\frac{\partial}{\partial t} (\theta_w \cdot c_w) = - c' \cdot Q' - \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\theta_w [c_w \cdot v_i - (D_h)_{ij} \cdot \frac{\partial c_w}{\partial x_j}] \right]$$

Fig.3.- Combinaison des termes de diffusion, convection, dispersion au principe de conservation de la masse pour obtenir l'équation de transport d'un polluant miscible.

IV.- TECHNIQUES DE RESOLUTION

Les équations aux dérivées partielles, présentées ci-avant, représentent des phénomènes physiques bien précis. En y incluant les paramètres représentant les propriétés physiques, les conditions aux frontières et les sollicitations du système, les solutions de ces équations fournissent la simulation mathématique du système et de son état.

Moyennant des hypothèses très restrictives quant aux propriétés de l'aquifère, aux conditions aux frontières et aux directions d'écoulement, des solutions analytiques peuvent être trouvées. L'exemple le plus connu et le plus utilisé est la solution de Theis appliquée au cas d'un essai de pompage. Ce type de solution est acceptable lors d'estimations relativement grossières mais inapplicable dans les cas où la géométrie complexe, le caractère transitoire des écoulements et l'hétérogénéité des propriétés, conditions aux frontières et sollicitations de l'aquifère étudié doivent être prises en compte.

Diverses solutions numériques permettent de résoudre les équations en s'affranchissant des hypothèses très contraignantes des solutions analytiques. Ces solutions numériques constituent des approximations de la solution, mais les erreurs numériques sont le plus souvent négligeables par rapport aux erreurs dues à l'estimation des paramètres, à la conceptualisation du système et surtout à l'imposition d'hypothèses trop restrictives.

Les méthodes des différences finies, des éléments finis et des éléments frontières sont très utilisées dans ce domaine. Elles se sont développées très rapidement dans les 20 dernières années et elles sont améliorées quotidiennement par les numériciens. Pour la description et le détail de ces méthodes le lecteur intéressé consultera la littérature spécialisée (Bear (1987), Zienkiewicz (1974), Ledoux (1978), Pinder (1977)...).

Ces méthodes demandent une discrétisation spatiale et temporelle du domaine. La discrétisation spatiale consiste en une division de la région étudiée en cellules, éléments ou sous-régions, qui peuvent être rectangulaires (différences finies), polygonales quelconques (éléments finis) ou de formes quelconques (éléments frontières).

La solution de l'équation différentielle est obtenue en résolvant un système d'équations algébriques valables sur le maillage réalisé et pour des paramètres et conditions aux frontières donnés.

Le système est résolu à chaque pas de temps, après actualisation des équations algébriques qui le composent.

Remarques:

Dans les sédiments meubles, les dépressions provoquées par l'exploitation des nappes engendrent dans les terrains compressibles avoisinants, des **phénomènes de subsidence**, dus à l'accroissement de la contrainte effective entre les grains de la matrice.

Les modèles simulant ce type de comportement doivent être «couplés» avec le modèle d'écoulement de la zone étudiée. Les tassements provoquent une diminution de la porosité des terrains, entraînant des diminutions de la perméabilité et du coefficient d'emmagasinement spécifique du milieu. Ces non-linéarités doivent être prises en compte dans les modèles écoulement-tassement, simulant de façon fiable les phénomènes de subsidence.

Dans le cas des équations différentielles représentant le **transport de polluants** en milieu poreux, les solutions numériques sont parfois extrêmement complexes et difficiles à trouver car elles doivent s'appliquer à des équations en même temps à caractère elliptique et parabolique. Lorsqu'on essaie de résoudre ces équations par des méthodes numériques classiques, des instabilités numériques apparaissent sous forme d'oscillations. De nouveaux schémas sont alors à utiliser: méthodes de décentrage, volumes finis, méthodes «upstream», méthodes spectrales etc...

De plus, par rapport au cas classique d'une équation elliptique et parabolique à coefficients constants, les problèmes de pollution présentent des particularités supplémentaires:

- Pour un polluant immiscible, il existe une non-linéarité due à la présence de coefficients intrinsèquement variables. Cette particularité amène des comportements numériques assez différents.
- Pour un polluant miscible, le problème réside en un couplage de l'équation de propagation du polluant avec l'équation d'écoulement de l'eau. Ce couplage est unilatéral en ce sens que l'écoulement peut être supposé indépendant de la propagation du polluant mais pas l'inverse.

Ces quelques remarques mettent en exergue les difficultés rencontrées lors de certaines simulations mathématiques relatives aux milieux poreux saturés. De nombreux modèles mathématiques, de plus en plus sophistiqués, ont vu le jour ces dernières années afin d'essayer de résoudre certains problèmes en choisissant différentes hypothèses de travail.

Pour l'hydrogéologue, utilisateur de ces modèles, il est essentiel de distinguer et de discerner les hypothèses et les approximations effectivement appliquées dans les modèles utilisés et d'autre part de juger si ces hypothèses ne sont pas trop restrictives, et si ces approximations n'entraînent

pas trop d'imprécisions dans les résultats par rapport aux phénomènes observés.

V.- DONNEES

L'application de modèles numériques en hydrogéologie requiert la détermination d'un certain nombre de paramètres à entrer dans le modèle. D'autre part, de nombreuses mesures doivent fournir les données géométriques, les sollicitations extérieures, les conditions aux frontières, les conditions initiales et enfin les valeurs à différentes époques de la variable de champ recherchée (*tableau 5.1.*). Ces dernières seront utilisées dans la phase de calibration du modèle.

La taille des éléments du maillage sera choisie en fonction des circonstances, de la densité des mesures disponibles, de la précision désirée pour les résultats, mais aussi des contingences informatiques (taille du système, temps CPU). Dans tous les cas, il s'agit donc d'un compromis entre ces différents impératifs.

Les données nécessaires aux différents types de modèles sont mentionnées de façon générale au *tableau 5.1.* Le modèle de transport d'un polluant miscible requiert également toutes les données nécessaires au modèle d'écoulement, en ce sens il peut être considéré comme une super-structure de celui-ci.

L'hydrogéologue doit alors réaliser l'assemblage de toutes ces données, transformant le système réel en un modèle mathématique préservant les éléments essentiels du système.

Tableau 5.1.

MODELE ECOULEMENT	MODELE TRANSPORT DE POLLUANT MISCIBLE
Données géométriques	Données géométriques
- Représentation du domaine étudié par un maillage; choix des dimensions des cellules ou des éléments du modèle	- Représentation du domaine étudié par un maillage; choix des dimensions des cellules ou des éléments du modèle
Paramètres	Paramètres
- Perméabilité ou transmissivité - Coefficient d'emmagasinement (spécifique) (spécifiés dans chaque élément du maillage)	- Dispersivités longitudinale et transversale - Porosité du milieu poreux - Perméabilités relatives des fluides
Sollicitations extérieures	Sollicitations extérieures
- Pompages et réinjections - Infiltrations, flux latéraux (spécifié là où c'est nécessaire)	- Concentrations volumiques dans les eaux pompées et injectées (ou infiltrées) (spécifiées là où c'est nécessaire)
Conditions aux frontières	Conditions aux frontières
- Imperméables - Flux imposés - Potentiels imposés (choix d'une des options pour chaque frontière)	- Concentrations volumiques imposées dans les flux de frontière (spécifiées aux frontières là où c'est nécessaire)
Conditions initiales	Conditions initiales
- Hauteurs piezométriques dans toute la zone au début de la simulation (spécifiées à chaque élément du maillage)	- Concentrations en polluant dans toute la zone au début de la simulation (spécifiée dans chaque élément du maillage)
Variables calculées à comparer aux mesures	Variables calculées à comparer aux mesures
- Hauteurs piezométriques dans tous les éléments du maillage, à tout moment - Flux - Bilan	- Concentrations en polluant dans tous les éléments du maillage et à tout moment.

Tableau 5.1. (suite)

MODELE D'ÉCOULEMENT BIPHASIQUE

Données géométriques

- Représentation du domaine étudié par un maillage; choix des dimensions des cellules ou des éléments du modèle

Paramètres

- Porosité du milieu
- Perméabilités relatives des fluides
- Pression capillaire
- Densités des fluides

Sollicitations extérieures

- Quantités respectives, pompées ou injectées, des différents fluides
(spécifiées là où c'est nécessaire)

Conditions aux frontières

- Imperméabilité totale
- Continuité des pressions et des flux
(à spécifier à chaque frontière)

Conditions initiales

- Saturations respectives en fluides 1 et 2 dans toute la zone étudiée

Variables calculées à comparer aux mesures

- Saturations respectives dans toute la zone et à tout moment

VI.- CALIBRATION DU MODELE

Ce n'est que lorsqu'un modèle mathématique représente de façon précise les phénomènes simulés que son application pourra être envisagée pour d'éventuelles prédictions.

Les lois fondamentales et les hypothèses choisies doivent tout d'abord représenter de façon acceptable les conditions réelles de la nappe. Par exemple, si le modèle écoulement suppose un écoulement bidimensionnel plan, il faut que l'on ait constaté que ce type de conditions est réellement prédominant dans l'aquifère étudié. De même, l'étude d'une coupe verticale 2D suppose qu'aucun flux important n'est constaté perpendiculairement à la coupe modélisée. Tous les écoulements naturels et les phénomènes de transports sont dans la réalité des processus transitoires et à 3 dimensions. Une réduction, par

hypothèse, à un régime permanent et à 2 dimensions engendre des risques qui doivent bien être évalués dans chaque application.

Ensuite, le modèle doit résoudre les équations du système le plus précisément possible. Les méthodes de résolution induisent toujours des erreurs numériques en relation avec la discrétisation spatio-temporelle choisie. En général ces erreurs peuvent être réduites de façon significative par une discrétisation adéquate, de manière à ce qu'elles soient négligeables par rapport aux autres approximations.

Dans la plupart des cas d'étude, la connaissance quantitative des propriétés de l'aquifère est le problème majeur lors de l'élaboration d'un modèle, à cause de l'insuffisante connaissance quantitative de la géologie. Les valeurs des paramètres ne sont connues que dans certaines zones locales et l'hydrogéologue doit fournir des estimations pour les autres zones. Ces constatations démontrent l'obligation de vérifier si les résultats d'un modèle sont réalistes ou non par rapport à la réalité.

Cette procédure est appelée «calibration», elle consiste à minimiser la différence entre mesures et résultats par l'ajustement des données d'entrée jusqu'à ce que le modèle reproduise les conditions du champ mesuré avec un niveau de précision acceptable. Le plus souvent les données modifiées sont essentiellement les valeurs et répartitions des paramètres car les autres données résultent de mesures plus fiables.

La manière de calibrer la plus souvent utilisée consiste à évaluer l'ajustement entre résultats et mesures sans autre outil mathématique (moyennes, moindres carrés etc...), car ceux-ci peuvent dans certains cas, apparemment favorables, masquer des situations inacceptables.

Cette approche est subjective et requiert de la part de l'hydrogéologue une bonne expérience en la matière, et un bon jugement afin d'obtenir finalement une calibration fiable. Les différents paramètres sont dépendants les uns des autres et la réponse du modèle constitue l'intégration des influences respectives. En fait, un résultat du modèle peut correspondre à différents jeux de données, ce qui explique qu'une bonne calibration n'est pas à elle seule une garantie de résultats fiables pour les prédictions.

La fiabilité d'un modèle est surtout garantie par l'expérience et l'honnêteté de l'hydrogéologue qui l'a réalisé de façon à respecter les phénomènes réels dans la définition du problème et durant la phase de calibration (les paramètres doivent être ajustés en respectant des intervalles de valeurs acceptables au vu des mesures). Dans certains cas, la phase de calibration peut remettre en cause

graduellement l'interprétation géologique du système.

L'intérêt d'utiliser un modèle est lié à sa capacité d'intégrer et d'utiliser toutes les données et informations relatives à la zone étudiée, d'une façon logique. Il permet en outre, de déterminer les zones où des mesures supplémentaires sont nécessaires à la bonne compréhension des processus en cours.

Bien sûr, les résultats du modèle ne sont pas plus précis que les données disponibles; le modèle ne peut remplacer les mesures, mais il peut synthétiser les données. Les prédictions doivent toujours être interprétées et utilisées en ayant à l'esprit le degré de certitude avec lequel le système réel est représenté.

VII.- ETUDE DE SENSIBILITE

· Une analyse de la sensibilité d'un modèle mathématique de simulation tente habituellement de couvrir les aspects suivants:

- étudier les interactions entre paramètres (relations éventuelles);
- déterminer la plage de variation optimum pour un paramètre et l'influence d'une variation (choisie dans cette plage) sur certains résultats;
- déterminer éventuellement les «importances» respectives des différents paramètres intervenant dans le modèle.

Ce type d'analyse est réalisé en principe au voisinage immédiat des valeurs optimum des paramètres pour lesquels la calibration a été jugée satisfaisante.

Une analyse de sensibilité peut être unidimensionnelle (relative à 1 seul paramètre) ou multidimensionnelle dans le cas où plus d'un paramètre est modifié par rapport à la valeur optimale.

VIII.- TYPE D'APPLICATION

Les modèles physiques ont la capacité de calculer des extrapolations dont les résultats constituent une aide précieuse lorsque des décisions concernant des modifications de sollicitation de l'aquifère sont à prendre. De nouvelles conditions peuvent être essayées dans le modèle par ajustement des données et les réponses permettent d'estimer les effets engendrés et fournissent donc une base solide de décision. Parmi les applications possibles des modèles écoulement **quantitatifs** on peut citer (Jensen, 1987):

- a) études de bilans:
 - détermination des tendances régionales des écoulements dans le réservoir et les interactions avec les eaux de surface, les autres réservoirs, les puits etc...
- b) puits de pompage
 - prédiction des effets du pompage sur la piézométrie et sur la suppression de certains flux;
 - détermination de périmètres de protection;
 - prédiction du mouvement de l'interface entre eau douce et eau salée;
 - prédiction de l'effet de l'épandage d'eau pompée lors de l'irrigation.
- c) changements dans la réalimentation de la nappe
 - prédiction des effets dus à l'urbanisation
 - prédiction des changements résultants de l'irrigation ou de l'infiltration en provenance d'un nouveau canal
 - analyse à long terme des influences des tendances climatiques sur les niveaux piézométriques et la distinction des effets dûs aux facteurs anthropiques.
- d) estimation des paramètres
 - dans certains cas, précision de la distribution régionale des paramètres hydrauliques (problème inverse)
- e) planning des mesures «*in situ*»
 - rationalisation dans la collecte ultérieure de données par la détermination des mesures les plus nécessaires
- f) gestion des eaux souterraines
 - planning idéal d'exploitation des ressources
 - stockage souterrain saisonnier d'eaux de surface

Parmi les applications possibles des modèles écoulement **qualitatifs** on peut citer (Jensen, 1987):

- a) contamination à partir d'une source ponctuelle (par exemple une décharge de déchets)
 - détermination des conditions existantes de contamination
 - détermination des concentrations
 - prédiction des conditions futures de contamination
 - identification des actions réparatrices à mener et prédictions concernant l'amélioration de la qualité de l'eau
- identification des mesures *in situ* à réaliser incluant la localisation et le monitoring
- sélection des sites possibles pour une éventuelle décharge

- b) contamination à partir de sources uniformes (par exemple l'épandage de fertilisants dans les champs cultivés)
- détermination de la qualité actuelle de l'eau des nappes
 - détermination de la concentration dans les eaux de recharge
 - prédiction de la qualité des eaux souterraines dans le futur
 - identification des options de gestion de l'aquifère
 - prédiction des conséquences possibles de ces choix
 - planning du réseau de mesure
- c) gestion de la qualité des eaux
- dans certains cas, identification de la stratégie de pompage pour éviter l'intrusion d'eaux salées ou polluées.

IX.- CONCLUSIONS

La gestion quantitative et qualitative des ressources en eau souterraine est devenue, de nos jours, d'une importance capitale. De par leur nature, les nappes aquifères sont le siège de phénomènes non observables directement et continûment, c'est pourquoi leur étude et la prévision d'évolutions futures comprennent certains éléments d'incertitude. Toutes les informations relatives au problème doivent être prises en compte.

Les modèles mathématiques déterministes et physiquement significatifs, fournissent une méthode intégrant toutes les informations d'une manière consistante avec les paramètres de la nappe choisis en harmonie avec les lois régissant les phénomènes étudiés. Ces modèles assurent la cohérence entre les données et les concepts utilisés, contrairement aux modèles de type «boîte noire» qui sont basés sur des relations empiriques.

Les paramètres estimés doivent être calibrés à l'aide de comparaisons entre les mesures et les résultats. Cette calibration doit être menée en gardant à l'esprit un solide bagage géologique et hydrogéologique, tout en étant familier avec les modèles utilisés et les approximations réalisées.

Les résultats fournis par les modèles restent une approximation de la réalité et des conditions complexes de la nappe, mais ils constituent des informations très utiles à la gestion des nappes.

BIBLIOGRAPHIE

- AHMED, H. et SUNEDA, D.K., 1969. Non linear flow in porous media. *Proc. A.S.C.E., Hydraulics Div.*, 95, HY6, 1847-59.
- ASSENS, G., 1974. Eléments d'hydrogéologie mathématique. Centre d'Informatique Géologique. *E.N.S.M.P.* 59 p.
- BATHE, K.J. et KHOSHGOFTAAR, M.R., 1979. Finite element free surface seepage analysis without mesh iteration. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 3, 13-22.
- BEAR, J. and VERRUIJT, A., 1987. Modeling groundwater flow and pollution, 414 p.
- BEAR, J. and CORAPCIOGLU, M.Y., 1984. Fundamentals of transport phenomena in porous media, *Nato Asi Series, Series E: Applied Sciences*, 82, 1003 p.
- BIVER, P., DASSARGUES, A., CHARLIER, R., CESCOTTO, S. et MONJOIE, A., 1989. Contrat d'étude de la modélisation des phénomènes de pollution dans l'aquifère de «Crétacé de Hesbaye», *Rapport L.G.I.H. pour la Région Wallonne, HESB/891*, non-publié.
- BLOCK, S.I.E., LEIJNSE, A., 1978. Report of the T.N.O., commission for Hydrological Research. Groundwater Models and Numerical Computer Software. The Hague. 72 p.
- BOLLY, P.Y., DASSARGUES, A., 1987. Modélisation mathématique des nappes aquifères, *Actes du Congrès Scientifique sur les Eaux souterraines en Wallonie, Mons*.
- BREBBIA, C.A., WANG, S.Y., 1984. Finite Elements in Water Resources. *Proceedings of the 5th International Conference Burlington, Vermont, U.S.A.* 823 p.
- BRUCH, E., 1984-1985. Résolution par éléments frontières des écoulements permanents en milieu poreux, à surface libre éventuellement indéterminée. Travail de fin d'étude, F.S.A., Université de Liège.
- CHARLIER, R., RADU, J.P., DASSARGUES, A., 1988. Numerical Simulation of Transient Unconfined Seepage Problems, *Proceedings of first International Conference on Computer Methods and Water Resources*, vol. 1. Groundwater and Aquifer Modelling, Rabat, Springer-Verlag.
- DASSARGUES, A., BOLLY, P.Y., 1987. Modélisation par différences finies et par éléments finis de la nappe aquifère de Hesbaye, *Actes du Congrès Scientifique sur les Eaux souterraines en Wallonie, Mons*.
- DASSARGUES, A., BOLLY, P.Y. et MONJOIE, A., 1988. Finite difference and finite element modelling of an aquifer in Cretaceous chalk, *Proceedings of the sixth International Conference on Numerical Methods in Geomechanics, Innsbruck, Balkema*.
- DASSARGUES, A., RADU, J.P. et CHARLIER, R., 1988. Finite elements modelling of a large water table aquifer in transient conditions, *Advances in Water Resources, Computational Mechanics Publications*. Juin 1988. 11 : 2.
- DASSARGUES, A., 1989. Applications hydrogéologiques d'un modèle mathématique 2D par différences finies sur Personal Computer, *Tribune de l'Eau*, 41 : 6. Editions CEBEDOC.
- DE MARSILY, G., 1982. Quantitative hydrogeology, *Groundwater Hydrology for Engineers*. 440 p.
- GHABOUSSI, J. et WILSON, E.L., 1973. Flow of compressible fluid in porous elastic media. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, 5, 419-442.
- JAVANDEL, I., 1982. Analytical solutions in subsurface fluid flow, in *Recent trends in Hydrogeology, Special Paper 189, The Geological Society of America*, 223-236.
- JENSEN, H., 1987. The value of groundwater models for planners and decision makers, *Technical Documents in Hydrology, IHP III, Project 2.4.b, Unesco, Paris*.
- LEDoux, E., 1978. Programme Newsam: principe et notice d'emploi. Centre d'Informatique Géologique. *E.N.S.M.P.* 55 p.

- LEWIS, R.W., ROBERT, G.K. et ZIENKIEWICZ, O.C., 1976. A non linear flow and deformation analysis of consolidated problems. Numerical methods in geomechanics. *Proc. of the 2nd Int. Conf. on Num. Meth. in geomechanics*. Ed. C.S. DESAI, 1106-1118.
- LITT, F.X., 1984. Analyse numérique. Notes de cours U.Lg.
- MONJOIE, A., 1984. Hydrogéologie. Notes de cours U.Lg.
- MONJOIE, A., 1985. Compléments de Géologie de l'Ingénieur et d'Hydrogéologie. Notes de cours. Inédit.
- NARASIMHAN, T.N., 1982. Numerical Modelling in Hydrogeology, in Recent trends in Hydrogeology, *Special Paper 189, The Geological Society of America*, 273-296.
- NEUMAN, S.P., 1982. Statistical Characterization of aquifer heterogeneities: An overview, in Recent trends in Hydrogeology, *Special Paper 189, The Geological Society of America*, 81-102.
- NEUMAN, S.P., 1973. Saturated-unsaturated seepage by finite elements. *ASCE, Hydraulics Div.*, 99, HY12, 2233-2250.
- NIHOUL, U.C.L., WOLLAST, R., 1983. Hydrodynamic and Dispersion Models. Boundary Fluxes and Boundary Conditions. 11-198.
- PIETTE, Ch., 1976. Application des éléments finis à la détermination de la surface piézométrique d'une nappe d'eau souterraine. Travail de fin d'étude, F.S.A., Université de Liège.
- PIETTE, Ch. et CESCOTTO, S., 1976. Application des éléments finis à la détermination de la surface piézométrique d'une nappe d'eau souterraine. Journée d'études. La méthode des éléments finis appliquée. Université de Liège.
- PINDER, G.F. et GRAY, W.G., 1977. Finite element, Simulation in Surface and Subsurface Hydrology, Academic Press, 288 p.
- SANDHU, R.S. et WILSON, E.L. Finite element analysis of seepage in elastic media. *Proc. A.S.C.E. Engineering Mechanics Div.*, 95, EM3, 641-651.
- SANDHU, R.S., LUI, H. et SINGH, K.J., 1977. Numerical performance of some finite element schemes for analysis of seepage in porous elastic media. *Int. J. Num. Anal. Meth. Geomech.*, 1 (3): 177-194.
- TAYLOR, R.L. et BROWN, C.B., 1972. Darcy flow solution with a free surface. *A.S.C.E., soil Mechanics and Foundation Div.*, 98, SM11, 1143-1162.
- VOLKER, R.E., 1969. Non linear flow in porous media by finite elements. *Proc. A.S.C.E., Hydraulics Div.*, 95, HY6, 1093-114.

