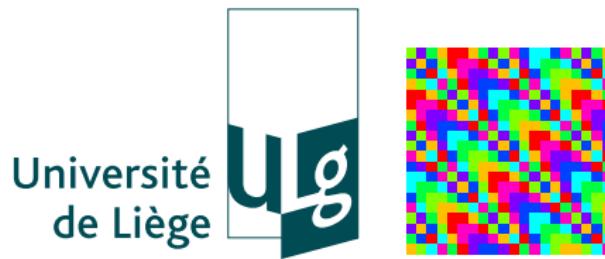


# JOUER AVEC LES MOTS, POURQUOI ET COMMENT ?

Michel Rigo

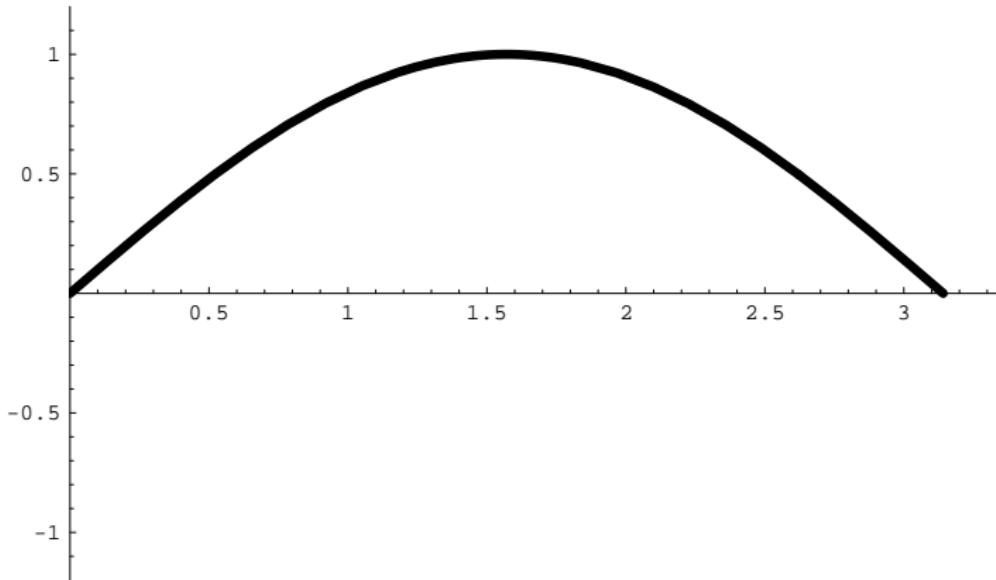
<http://www.discmath.ulg.ac.be/>  
<http://orbi.ulg.ac.be/handle/2268/184489>

BSSM — 4 août 2015  
Brussels Summer School of Mathematics



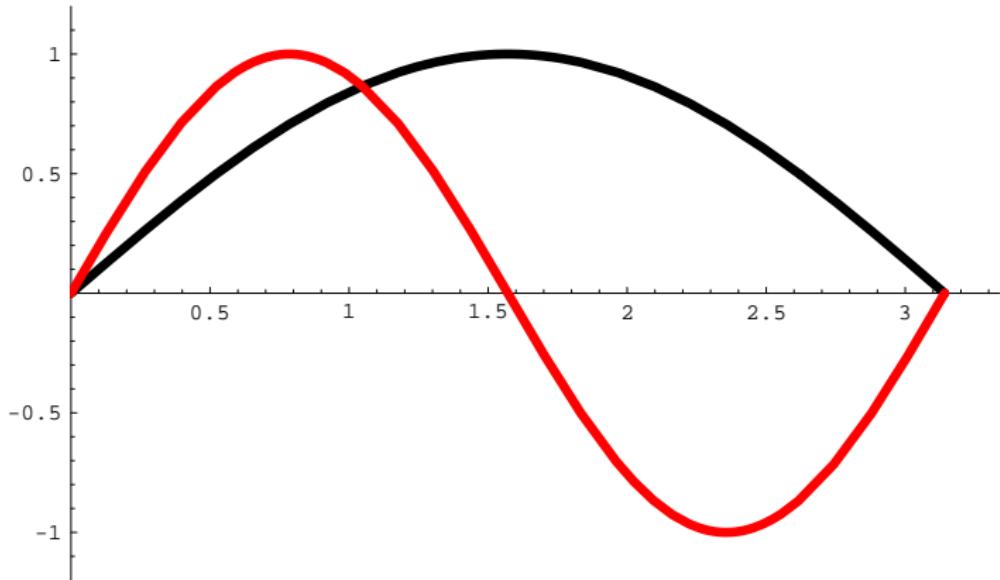
# EXERCICE D'ÉCHAUFFEMENT

Signe de la fonction  $\sin(x)$  sur  $[0, \pi]$  ?



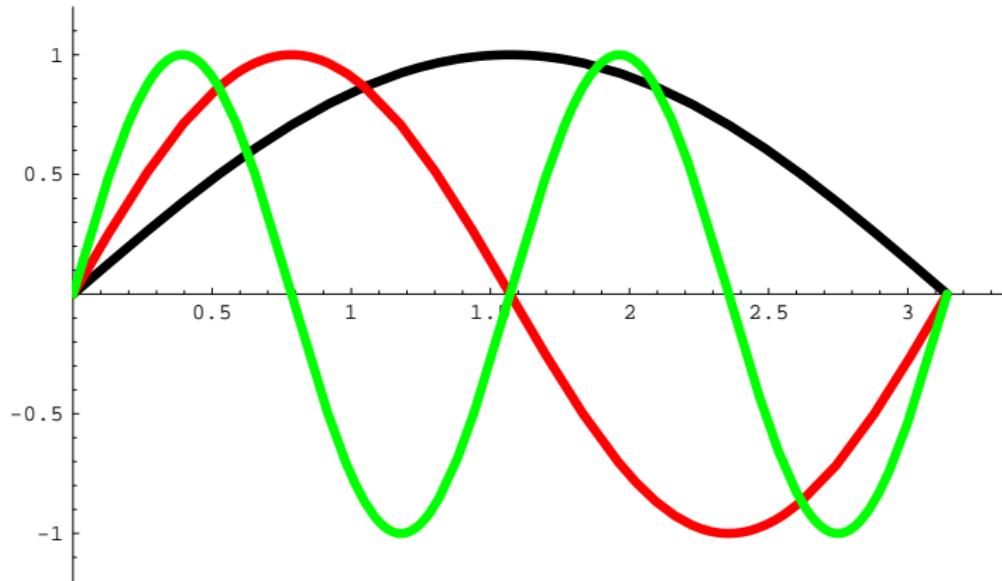
# EXERCICE D'ÉCHAUFFEMENT

Signe de la fonction  $\sin(x) \sin(2x)$  sur  $[0, \pi]$  ?



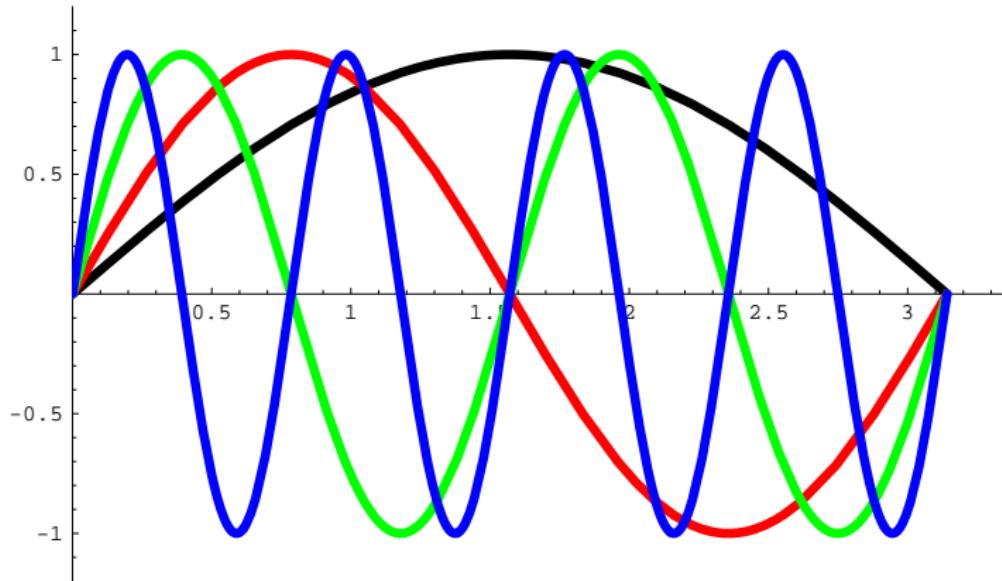
# EXERCICE D'ÉCHAUFFEMENT

Signe de la fonction  $\sin(x) \sin(2x) \sin(4x)$  sur  $[0, \pi]$  ?



# EXERCICE D'ÉCHAUFFEMENT

Signe de la fonction  $\sin(x) \sin(2x) \sin(4x) \sin(8x)$  sur  $[0, \pi]$  ?



# EXERCICE D'ÉCHAUFFEMENT

## QUESTION GÉNÉRALE

Signe sur  $[0, \pi]$  de la fonction

$$f_n(x) := \sin(x) \sin(2x) \sin(4x) \cdots \sin(2^n x)$$

L'intervalle  $[0, \pi]$  est divisé en  $2^n$  intervalles

$$I_j := \left[ \frac{j \pi}{2^n}, \frac{(j+1) \pi}{2^n} \right] \quad j = 0, \dots, 2^n - 1$$

## COMMENT CARACTÉRISER *facilement*

le signe de  $f_n$  sur  $I_j$  pour  $n$  grand et  $j < 2^n \dots$

Pour les cosinus, on dispose d'une formule :

$$\cos(x) \cos(2x) \cos(4x) \cdots \cos(2^n x) = \frac{\sin(2^{n+1}x)}{2^{n+1} \sin(x)}$$

## Un brin de formalisation

Un *alphabet* est un ensemble fini,  
e.g.,  $\{+, -\}$ ,  $\{a, b, c\}$ ,  $\{0, 1, \dots, 9\}$ ,  $\{A, C, G, T\}$ .

Soit  $A$  un alphabet. Un *mot (fini) de longueur  $n \geq 0$*  sur  $A$  est une application de  $\llbracket 0, n - 1 \rrbracket$  à valeurs dans  $A$ , i.e., une suite finie d'éléments de  $A$ .

$+-+-+, \quad abc bca, \quad \text{AGGCTACTTA}$

La longueur d'un mot est notée  $|w|$ .

Le *mot vide* est la suite vide de longueur 0, noté  $\varepsilon$ .

## STRUCTURE DE MONOÏDE

L'ensemble  $A^*$  des mots finis sur  $A$  muni de l'opération de *concaténation* est un monoïde dont le neutre est  $\varepsilon$

$$\textit{bon} \cdot \textit{jour} = \textit{bonjour}$$

# NOTION DE CONVERGENCE

Soit  $A$  un alphabet. Un *mot infini* sur  $A$  est une application  $\mathbf{w} : \mathbb{N} \rightarrow A$ , i.e., une suite d'éléments de  $A$

14159265358979323846264338327950288419716939937...

- ▶ suite de mots infinis convergeant vers un mot infini limite
- ▶ suite de mots *finis* convergeant vers un mot infini limite

## ESPACE MÉTRIQUE

Soit  $A^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des mots infinis sur  $A$ . Soient  $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A^{\mathbb{N}}$

$\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}$  : plus long préfixe commun

$$d : A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \begin{cases} 2^{-|\mathbf{x} \wedge \mathbf{y}|} & , \text{ si } \mathbf{x} \neq \mathbf{y} \\ 0 & , \text{ si } \mathbf{x} = \mathbf{y} \end{cases}$$

# NOTION DE CONVERGENCE

Soit  $A$  un alphabet. Un *mot infini* sur  $A$  est une application  $w : \mathbb{N} \rightarrow A$ , i.e., une suite d'éléments de  $A$

14159265358979323846264338327950288419716939937...

- ▶ suite de mots infinis convergeant vers un mot infini limite
- ▶ suite de mots *finis* convergeant vers un mot infini limite

## ESPACE MÉTRIQUE

Soit  $A^{\mathbb{N}}$  l'ensemble des mots infinis sur  $A$ . Soient  $x, y \in A^{\mathbb{N}}$

$x \wedge y$  : plus long préfixe commun

$$d : A^{\mathbb{N}} \times A^{\mathbb{N}} \rightarrow \mathbb{R}_{\geq 0}, \quad d(x, y) = \begin{cases} 2^{-|x \wedge y|} & , \text{ si } x \neq y \\ 0 & , \text{ si } x = y \end{cases}$$

## DISTANCE ULTRAMÉTRIQUE

1.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ,
2.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  si et seulement si  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ,
3.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,
4.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  (inégalité triangulaire),

$$\forall \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A^{\mathbb{N}}, \quad d(\mathbf{w}, \mathbf{x}) \leq \max\{d(\mathbf{w}, \mathbf{y}), d(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}.$$

*Digression.* Soient  $p \geq 2$  premier et  $x$  entier. On a  $x = p^n q$  et la valuation  $p$ -adique  $\nu_p(x) = n$ . Extension à  $\mathbb{Q}$  par  $\nu_p(a/b) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$  pour tous  $a, b \in \mathbb{Z}$  avec  $b \neq 0$ .

La valeur absolue  $p$ -adique (non archimédienne) sur le champ  $\mathbb{Q}$  est  $|x|_p = p^{-\nu_p(x)}$  si  $x \neq 0$  et  $|0|_p = 0$ .

On a  $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$  pour tous  $x, y \in \mathbb{Q}$  et la distance correspondante  $d(x, y) = |x - y|_p$  est ultramétrique.

## DISTANCE ULTRAMÉTRIQUE

1.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \geq 0$ ,
2.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = 0$  si et seulement si  $\mathbf{x} = \mathbf{y}$ ,
3.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = d(\mathbf{y}, \mathbf{x})$ ,
4.  $d(\mathbf{x}, \mathbf{z}) \leq d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) + d(\mathbf{y}, \mathbf{z})$  (inégalité triangulaire),

$$\forall \mathbf{w}, \mathbf{x}, \mathbf{y} \in A^{\mathbb{N}}, \quad d(\mathbf{w}, \mathbf{x}) \leq \max\{d(\mathbf{w}, \mathbf{y}), d(\mathbf{y}, \mathbf{x})\}.$$

*Digression.* Soient  $p \geq 2$  premier et  $x$  entier. On a  $x = p^n q$  et la valuation  $p$ -adique  $\nu_p(x) = n$ . Extension à  $\mathbb{Q}$  par  $\nu_p(a/b) = \nu_p(a) - \nu_p(b)$  pour tous  $a, b \in \mathbb{Z}$  avec  $b \neq 0$ .

La valeur absolue  $p$ -adique (non archimédienne) sur le champ  $\mathbb{Q}$  est  $|x|_p = p^{-\nu_p(x)}$  si  $x \neq 0$  et  $|0|_p = 0$ .

On a  $|x + y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$  pour tous  $x, y \in \mathbb{Q}$  et la distance correspondante  $d(x, y) = |x - y|_p$  est ultramétrique.

boule de centre  $abbbbb\cdots$  et de rayon  $1/2$

$$\{\mathbf{x} \in A^{\mathbb{N}} \mid d(\mathbf{x}, abbbbb\cdots) \leq 1/2\}$$

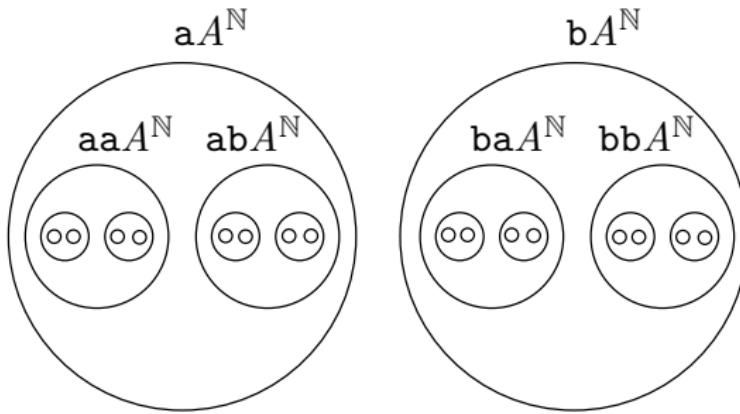


FIGURE : Une représentation de  $\{a, b\}^{\mathbb{N}}$ .

- ▶ Tout point appartenant à une boule en est le centre;
- ▶ si  $\mathcal{B} \cap \mathcal{B}' \neq \emptyset$ , alors  $\mathcal{B} \subseteq \mathcal{B}'$  ou  $\mathcal{B}' \subseteq \mathcal{B}$ .

## CONVERGENCE

Soit  $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$  une suite de mots infinis sur  $A$ .

Cette suite *converge* vers  $\mathbf{y} \in A^{\mathbb{N}}$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) < \epsilon.$$

Pour tout  $\ell$ , il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ , les mots infinis  $\mathbf{x}_n$  ont tous le *même préfixe de longueur*  $\ell$ .

NB :  $A^{\mathbb{N}}$  est un espace métrique complet et compact.

## CONVERGENCE DE MOTS FINIS

Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite de mots *finis* sur  $A$ . Soit  $z \notin A$ .

Cette suite *converge* vers  $\mathbf{y} \in A^{\mathbb{N}}$  si

la suite  $(x_n z^{\omega})_{n \geq 0}$  converge vers  $\mathbf{y}$ .

## CONVERGENCE

Soit  $(\mathbf{x}_n)_{n \geq 0}$  une suite de mots infinis sur  $A$ .

Cette suite *converge* vers  $\mathbf{y} \in A^{\mathbb{N}}$  si

$$\forall \epsilon > 0, \exists N : \forall n \geq N, d(\mathbf{x}_n, \mathbf{y}) < \epsilon.$$

Pour tout  $\ell$ , il existe  $N$  tel que pour tout  $n \geq N$ , les mots infinis  $\mathbf{x}_n$  ont tous le *même préfixe de longueur*  $\ell$ .

NB :  $A^{\mathbb{N}}$  est un espace métrique complet et compact.

## CONVERGENCE DE MOTS FINIS

Soit  $(x_n)_{n \geq 0}$  une suite de mots **finis** sur  $A$ . Soit  $z \notin A$ .

Cette suite *converge* vers  $\mathbf{y} \in A^{\mathbb{N}}$  si

la suite  $(x_n z^{\omega})_{n \geq 0}$  converge vers  $\mathbf{y}$ .

Exemple dans  $\{0, \dots, 9\}^{\mathbb{N}}$ , développement en fractions continues de  $\pi - 3$

$$\frac{1}{7}$$

$$\frac{1}{7 + \frac{1}{15}}$$

$$\frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1}}}$$

$$\frac{1}{7 + \frac{1}{15 + \frac{1}{1 + \frac{1}{292}}}}$$

142857142857 142857142857 142857142857 ...

141509433962264 1509433962264 15094339 ...

141592920353982300884955752212389380 ...

14159265301190260407226149477372968400 ...

## Suite convergente de mots finis

1 zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz ...

14 zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz ...

141 zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz ...

1415 zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz ...

14159 zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz ...

141592 zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz ...

1415926 zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz ...

14159265 zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz ...

141592653 zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz ...

1415926535 zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz ...

14159265358 zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz ...

141592653589 zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz ...

1415926535897 zzzzzzzzzzzzzzzzzzzzzz ...

⋮

14159265358979323846264338327950288419716939937 ...

Si  $\#A \geq 2$ ,  $A^{\mathbb{N}}$  est **non dénombrable**.

*Cependant, les “algorithmes pouvant engendrer un mot infini de  $A^{\mathbb{N}}$ ” (i.e., si on fournit  $n$  par exemple en base 2, l’algorithme calcule le  $n$ ième symbole du mot) forment un ensemble dénombrable.*

Turing, On **computable numbers**, with an application to the Entscheidungsproblem, Proc. London Math. Soc. 1937.

~~> On va chercher des algorithmes “simples”  
(hiérarchie de Chomsky, complexité de Chaitin–Kolmogorov).

# CONSTRUCTION SIMPLE DE MOTS INFINIS

Soit  $A^*$  le monoïde des mots finis sur  $A$ . Un *morphisme* est une application  $f : A^* \rightarrow A^*$  telle que  $f(uv) = f(u)f(v)$  pour tous  $u, v \in A^*$ .

## DÉFINITION

Un *morphisme prolongeable sur a* est tel que

- ▶  $f(a) = au$  avec  $u \neq \varepsilon$  et
- ▶  $\lim_{n \rightarrow +\infty} |f^n(a)| = +\infty$ .

## EXEMPLE 1 (LONGUEUR CONSTANTE)

$t : + \mapsto +-$ ,  $- \mapsto -+$  est prolongeable,  $|t^n(+)| = 2^n$ .

# CONSTRUCTION SIMPLE DE MOTS INFINIS

## EXEMPLE 2

$u : a \mapsto abc, b \mapsto ac, c \mapsto bac$  est prolongeable sur  $a$ ,  
 $|u^{n+1}(a)| \geq 2|u^n(a)|$ .

## EXEMPLE 3 (MORPHISME DE FIBONACCI)

$f : a \mapsto ab, b \mapsto a$  est prolongeable sur  $a$ ,  
 $|f^n(a)| = F_n$ .

## EXEMPLE 4

$g : a \mapsto ba, b \mapsto ab$  n'est pas prolongeable.

## EXEMPLE 5

$h : a \mapsto ab, b \mapsto \varepsilon$  n'est pas prolongeable,  
 $|h^n(a)| = 2$  pour tout  $n \geq 1$ .

# CONSTRUCTION SIMPLE DE MOTS INFINIS

Soit  $f : A^* \rightarrow A^*$  un morphisme prolongeable sur  $a$ .

## EXERCICE

1. Si  $f(a) = au$ , exprimer  $f^n(a)$ .
2. Montrer que  $f^n(a)$  est un préfixe de  $f^{n+1}(a)$ .
3. Conclure que  $(f^n(a))_{n \geq 0}$  converge vers un mot infini limite.
4. Etendre  $f$  sur  $A^{\mathbb{N}}$  et montrer que ce mot infini limite est un point fixe de  $f$ .

$$f^\omega(a) := \lim_{n \rightarrow +\infty} f^n(a).$$

Un morphisme prolongeable permet donc de définir aisément un mot infini (ensemble des mots purement morphiques).

# CONSTRUCTION SIMPLE DE MOTS INFINIS

## EXEMPLE 1

$$t : + \mapsto +- , \quad - \mapsto -+$$

$$t(+)=+-$$

$$t^2(+)=+--+$$

$$t^3(+)=+---+--+++-$$

$$t^4(+)=+---+--+++-+--++-+--+$$

⋮

# CONSTRUCTION SIMPLE DE MOTS INFINIS

## EXEMPLE 2

$f : a \mapsto abc, \ b \mapsto ac, \ c \mapsto bac$

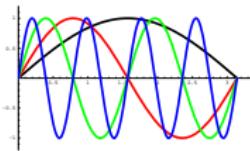
$$f(a) = abc$$

$$f^2(a) = abcacbac$$

$$f^3(a) = abcacbacabcbacacabcbac$$

$$f^4(a) = abcacbacabcbacacabcbacacabcbacacabc \cdots bac$$

$\vdots$



[Retour au problème initial](#)

## COMMENT CARACTÉRISER *facilement*

le signe de  $f_n$  sur  $I_j$  pour  $n$  grand et  $j < 2^n$ ...

En particulier, doit-on déterminer le signe de chaque intervalle pour déterminer le signe d'un seul d'entre eux ? Doit-on disposer de  $\text{sign}(I_0), \dots, \text{sign}(I_{j-1})$  pour déterminer  $\text{sign}(I_j)$  ?

$$+ \mapsto +- , \quad - \mapsto -+$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \hline + & - & - & + & - & + & + & - & - & - & + & + & - & + & - & - & \cdots \end{array}$$

$$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	1	1	1	1	1	1	1	...
⊕	—	—	+	—	+	+	—	—	+	+	+	—	+	—	—	—	—	...	

$$+ \mapsto +- , \quad - \mapsto -+$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & \cdots \\ \oplus & \ominus & - & + & - & + & + & - & - & + & + & - & - & + & - & - & \cdots \end{array}$$

$$+ \mapsto +- , \quad - \mapsto -+$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc} & \cdots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & \cdots \\ \hline + & \ominus & - & + & - & + & + & - & - & - & + & + & - & + & - & - & - & \cdots \end{array}$$

$+ \mapsto +-$ ,  $- \mapsto -+$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	1	1	1	1	...
+	-	$\ominus$	$\oplus$	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	-	...

$$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$$

$$\begin{array}{cccccccccccccccccc}
 & \dots \\
 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 0 & 1 & 1 & 2 & 3 & 4 & 1 & 1 & \dots \\
 + & - & \textcolor{red}{\ominus} & + & - & + & + & - & - & + & + & - & + & - & - & - & - & \dots
 \end{array}$$

$$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	1	1	1	1	...
+	-	-	+	⊕	⊕	+	-	-	+	+	-	+	-	-	...	

$$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	1	1	1	1	...
+	-	-	⊕	-	+	+	-	-	+	+	-	+	-	-	-	...

$$+ \mapsto +-, \quad - \mapsto -+$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	1	1	1	1	...
+	-	-	+	-	+	$\oplus$	$\ominus$	-	+	+	-	+	-	-	...	

$+ \rightarrow + -$ ,  $- \rightarrow - +$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	1	1	1	1	...
+	-	-	+	-	+	⊕	-	-	+	+	-	+	-	-	...	

$+ \rightarrow + -$ ,  $- \rightarrow - +$

										1	1	1	1	1	...	
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	2	3	4	...	
+	-	-	+	-	+	⊕	-	-	+	+	+	-	⊕	⊖	-	...

$$t_{2n} = t_n, \quad t_{2n+1} = -t_n$$

# MORPHISMES DE LONGUEUR CONSTANTE

Soit  $f : A^* \rightarrow A^*$  tel que  $|f(a)| = k$  pour tout  $a \in A$ .

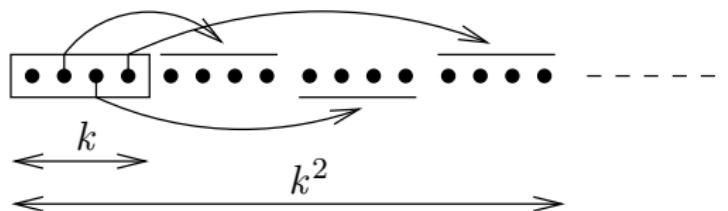


FIGURE : Morphisme de longueur constante  $k = 4$ .

$$\mathbf{x} = f^\omega(a) = x_0 x_1 x_2 \cdots \textcolor{blue}{x_q} \cdots \cdots \textcolor{red}{x_j} \cdots \cdots$$

## LEMME FONDAMENTAL (SIMPLE EXERCICE)

Soit  $j$ ,  $k^m \leq j < k^{m+1}$ . On a  $j = kq + r$ ,  $k^{m-1} \leq q < k^m$  et  $0 \leq r < k$ . Le symbole  $x_j$  est le  $(r+1)$ -ième symbole dans  $f(\textcolor{blue}{x}_q)$ .

$$t_{2n} = t_n, \quad t_{2n+1} = -t_n$$

0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	1	1	1	1	...
⊕	⊖	−	⊕	−	+	⊕	−	−	+	+	−	+	⊕	−	...	

$$\begin{aligned} 13 &= 2.6 + 1 = 2.(2.3 + 0) + 1 = 2.(2.(2.1 + 1) + 0) + 1 \\ &= 2.(2.(2.(2.0 + 1) + 1) + 0) + 1 \end{aligned}$$

$$\text{rep}_2(n) = 1101$$

Ainsi, connaissant l'écriture en base 2 de  $j$ , on détermine directement le signe de la fonction sur  $I_j$ .

$$t_{2n} = t_n, \quad t_{2n+1} = -t_n$$

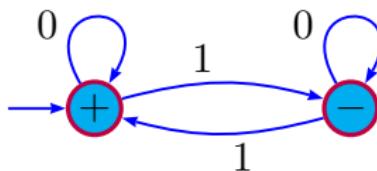
0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	1	1	1	1	1	...
⊕	⊖	−	⊕	−	+	⊕	−	−	+	+	−	+	⊕	−	...	

$$\begin{aligned}13 &= 2.6 + 1 = 2.(2.3 + 0) + 1 = 2.(2.(2.1 + 1) + 0) + 1 \\&= 2.(2.(2.(2.0 + 1) + 1) + 0) + 1\end{aligned}$$

$$\text{rep}_2(n) = 1101$$

Ainsi, connaissant l'écriture en base 2 de  $j$ , on détermine directement le signe de la fonction sur  $I_j$ .

$$+ \mapsto +- , \quad - \mapsto -+$$

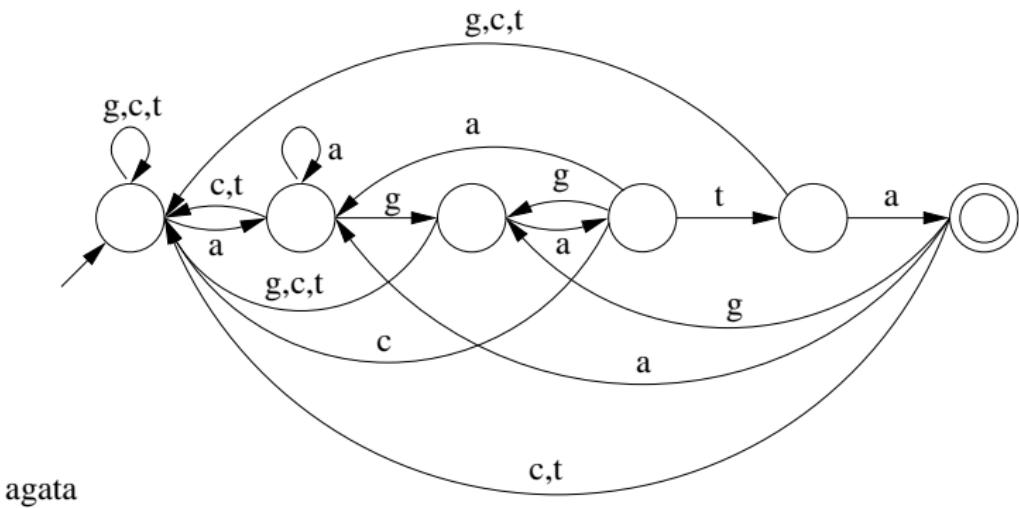


On introduit la notion d'*automate fini déterministe*

- ▶  $Q$  ensemble d'états
- ▶  $q_0 \in Q$  état initial
- ▶  $\delta : Q \times A \rightarrow Q$  fonction de transition

On étend la fonction de transition à  $\delta : Q \times A^* \rightarrow Q$

Recherche d'un mot dans un texte...

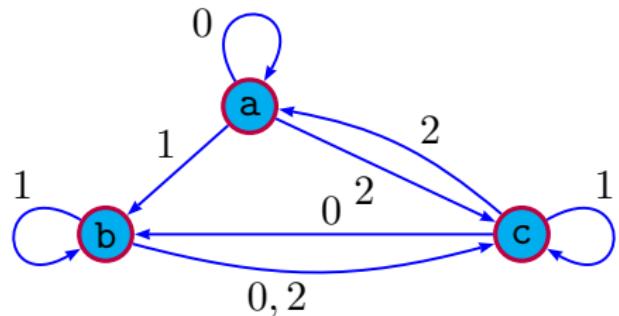


Complexité linéaire par rapport à l'entrée

# MORPHISMES DE LONGUEUR CONSTANTE

L'exemple de  $+-+-+ - + + - \dots$  se généralise :

$$f : \begin{cases} a \mapsto abc \\ b \mapsto cbc \\ c \mapsto bca \end{cases}$$



$$f^\omega(a) = abccbcabcacbcacbcacbcbaabc \dots$$

## PROPOSITION (A. COBHAM 1972)

Si  $x = x_0x_1x_2 \dots$  est point fixe d'un morphisme  $f$  de longueur constante  $k \geq 2$  et débutant par  $a$ , alors pour l'automate associé

$$\forall j, \quad x_j = \delta_f(a, \text{rep}_k(j))$$

# MORPHISMES DE LONGUEUR CONSTANTE

## RÉCIPROQUE (A. COBHAM 1972)

Soient  $k \geq 2$  et un automate fini déterministe

- ▶  $A$  comme ensemble d'états,
- ▶  $a \in A$  comme état initial,
- ▶  $\llbracket 0, k - 1 \rrbracket$  comme alphabet, ( $k$  arcs sortant de chaque état)
- ▶  $\delta(a, 0) = a$ .

Alors, le mot infini  $x$  défini par

$$\forall j, \quad x_j = \delta(a, \text{rep}_k(j))$$

est engendré par le morphisme prolongeable sur  $a$  de longueur constante  $k$  et associé à l'automate.

Ensemble des *mots infinis  $k$ -automatiques*.

## Généralisations

- ▶ Ajout d'un codage (projection) / automates avec sortie

$$f^\omega(a) = abcc\mathbf{bc}\mathbf{bc}\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{c}\mathbf{b}\mathbf{c}\mathbf{a}\mathbf{a}\mathbf{b}\mathbf{c}\dots$$

$$g(f^\omega(a)) = 010010100100010100010100010\dots$$

$\{\text{mots purement morphiques}\} \subsetneq \{\text{mots morphiques}\}$

- ▶ Etude des ensembles  $k$ -reconnaissables de nombres

$$\{1, 4, 6, 9, 13, 15, 19, 21, 25, \dots\}$$

- ▶ Longueur non constante,  $a \mapsto ab$ ,  $b \mapsto a$

$$abaababaabaababaab\dots$$

$\rightsquigarrow$  systèmes de numération non standards

- ▶ Cadre multi-dimensionnel
- ▶ Codage/représentation de systèmes dynamiques discrets

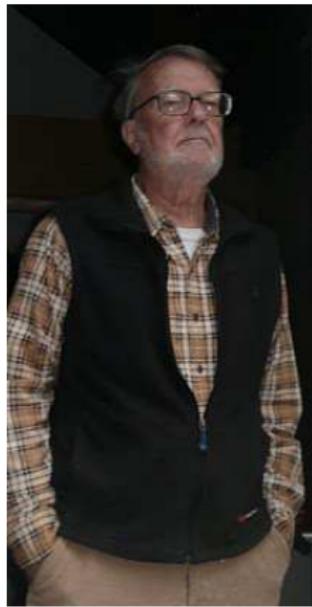
$$\{\text{mots automatiques}\} \subsetneq \{\text{mots morphiques}\}$$

- ▶ fréquence d'apparition d'un symbole
- ▶ ordre de croissance, thm. de Cobham de 1969
- ▶ fonction de complexité

$$f : a \mapsto ab, \quad b \mapsto a$$

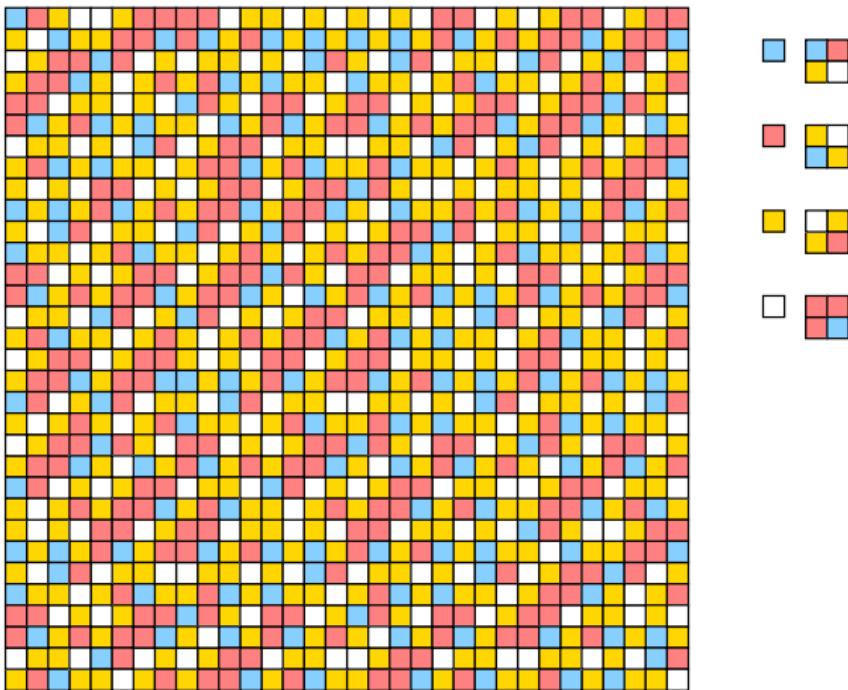
$$f^\omega(a) = abaababaabaababaababaabaababaabaababaabaabab \dots$$

*Est-ce qu'un mot infini engendré par un morphisme de longueur 2  
peut aussi l'être par un morphisme de longueur 3 ?*



A. Cobham

<http://recursed.blogspot.com/2010/04/alan-cobham.html>



J.-P. Allouche, T. Johnson, Finite automata and morphisms in **assisted musical composition**, Journal of New Music Research (1995).



Tom Johnson : "Les automates finis n'occupent qu'un chapitre dans mon livre *Self-Similar Melodies* (1996), mais en 1997 j'eus envie d'étudier des suites de cette sorte plus rigoureusement et de composer une collection de *Automatic Music for six percussionists*. Les sept premiers mouvements furent créés à Moscou par l'ensemble de Marc Pekarsky." 

## Applications

1. Combinatoire des mots : *étude des configurations, motifs évitables, dénombrement, énumération, structure,...*
2. Théorie des nombres
3. Géométrie discrète
- (4.) Système de numération, ensembles reconnaissables, vérification
- (5.) Théorie des jeux combinatoires

# COMBINATOIRE DES MOTS

Un **carré** : `coco`, `0120212101`, `uu`

## THÉORÈME

Si  $\#A = 2$ , tout mot suffisamment long contient un carré.

- ▶ Si  $\#A > 2$  ?
- ▶ Peut-on éviter les cubes sur deux lettres ?

# COMBINATOIRE DES MOTS

Un **carré** : coco, 0120212101, uu

## THÉORÈME

Si  $\#A = 2$ , tout mot suffisamment long contient un carré.

- ▶ Si  $\#A > 2$  ?
- ▶ Peut-on éviter les cubes sur deux lettres ?

# COMBINATOIRE DES MOTS

Un **chevauchement** : *cvcvc*, **ananas**

Tout cube débute/se termine par un chevauchement

## THÉORÈME (THUE 1906)

Le mot de Thue–Morse ne contient pas de chevauchement

+-+-+--++-++-+--+-+--++-+--+-+--...  
...+--+-+--++-++-+--+-+--++-+--+-+--...

M. Morse, Recurrent geodesics on a surface of negative curvature,  
*Trans. Amer. Math. Soc.* 22 (1921) 84–100.

# COMBINATOIRE DES MOTS

## Preuve (Lothaire)

### LEMME

Soit  $X = \{ab, ba\}$ .

Si  $x \in X^*$ , alors  $axa$  et  $bx b$  n'appartiennent aucun des deux à  $X^*$ .

Par récurrence sur  $|x|$ .

Cas de base,  $x = \varepsilon$ .

Supposons le résultat OK pour les mots de longueur  $< n$ .

Soit  $x \in X^*$  de longueur  $n$ .

Par l'absurde, supposons que  $u = axa \in X^*$ .

$$u = ab y ba, \quad |y| = |x| - 2$$

et  $y \in X^*$  donc  $x = byb \notin X^*$ , absurde.

# COMBINATOIRE DES MOTS

## Preuve (Lothaire)

### LEMME

Soit  $X = \{ab, ba\}$ .

Si  $x \in X^*$ , alors  $axa$  et  $bx b$  n'appartiennent aucun des deux à  $X^*$ .

Par récurrence sur  $|x|$ .

Cas de base,  $x = \varepsilon$ .

Supposons le résultat OK pour les mots de longueur  $< n$ .

Soit  $x \in X^*$  de longueur  $n$ .

Par l'absurde, supposons que  $u = axa \in X^*$ .

$$u = ab y ba, \quad |y| = |x| - 2$$

et  $y \in X^*$  donc  $x = byb \notin X^*$ , absurde.

# COMBINATOIRE DES MOTS

## Preuve (Lothaire)

### LEMME

Soit  $X = \{ab, ba\}$ .

Si  $x \in X^*$ , alors  $axa$  et  $bx b$  n'appartiennent aucun des deux à  $X^*$ .

Par récurrence sur  $|x|$ .

Cas de base,  $x = \varepsilon$ .

Supposons le résultat OK pour les mots de longueur  $< n$ .

Soit  $x \in X^*$  de longueur  $n$ .

Par l'absurde, supposons que  $u = axa \in X^*$ .

$$u = ab y ba, \quad |y| = |x| - 2$$

et  $y \in X^*$  donc  $x = byb \notin X^*$ , absurde.

# COMBINATOIRE DES MOTS

## LEMME “OVERLAP-FREE MORPHISM”

Soit  $f$  tel que  $f(a) = ab$ ,  $f(b) = ba$ .

Si  $w$  est sans chevauchement,  $f(w)$  aussi.

Supposons que  $f(w)$  contient un chevauchement

$$f(w) = x \mathbf{c} v c v \mathbf{c} y, \quad c \in \{a, b\}, \quad v, x, y \in \{a, b\}^*$$

Thèse :  $w$  contient un chevauchement.

↔ exploiter le fait que  $f$  est de **longueur constante**.

# COMBINATOIRE DES MOTS

$$f(w) = xcvcvcy$$

$|cvcvc| = 3 + 2|v|$  est impair,  $|f(w)|$  pair  $\Rightarrow |xy|$  impair.

- ▶ Montrer que  $|v|$  est impair
  - ▶ Si  $|x|$  pair, alors  $cvcv, cy \in X^*$ .  
supposons  $|v|$  pair, alors  $cvc \in X^*$ , contradiction.
  - ▶ Si  $|x|$  impair, alors  $vcvc, y \in X^*$ .  
supposons  $|v|$  pair, alors  $cvc \in X^*$ , contradiction.

# COMBINATOIRE DES MOTS

$$f(w) = xcvcvcy$$

$|cvcvc| = 3 + 2|v|$  est impair,  $|f(w)|$  pair  $\Rightarrow |xy|$  impair.

- ▶ Montrer que  $|v|$  est impair
  - ▶ Si  $|x|$  pair, alors  $cvcv, cy \in X^*$ .  
supposons  $|v|$  pair, alors  $cvc \in X^*$ , contradiction.
  - ▶ Si  $|x|$  impair, alors  $vcvc, y \in X^*$ .  
supposons  $|v|$  pair, alors  $cvc \in X^*$ , contradiction.

# COMBINATOIRE DES MOTS

On peut conclure

1. Si  $|x|$  pair.

$$f(w) = \underbrace{x}_{\text{pair}} \underbrace{c \underbrace{v}_{\text{impair}}}_{\text{pair}} \underbrace{cv}_{\text{pair}} cy \in X^*$$

$$x, cv, cy \in X^* \Rightarrow \exists r, s, t : f(r) = x, f(s) = \textcolor{red}{cv}, f(t) = \textcolor{red}{cy}$$

$$w = rsst$$

$s, t$  débutent par la même lettre,  
donc  $sst$  débute par un chevauchement.

2. Si  $|x|$  impair.

$$f(w) = \underbrace{xc}_{\text{pair}} \underbrace{v}_{\text{impair}} \underbrace{c}_{\text{pair}} \underbrace{vc}_{\text{pair}} y \in X^*$$

# COMBINATOIRE DES MOTS

On peut conclure

1. Si  $|x|$  pair.

$$f(w) = \underbrace{x}_{\text{pair}} \underbrace{c \overbrace{v}^{\text{impair}}}_{\text{pair}} \underbrace{cv}_{\text{pair}} cy \in X^*$$

$$x, cv, cy \in X^* \Rightarrow \exists r, s, t : f(r) = x, f(s) = \textcolor{red}{cv}, f(t) = \textcolor{red}{cy}$$

$$w = rsst$$

$s, t$  débutent par la même lettre,  
donc  $sst$  débute par un chevauchement.

2. Si  $|x|$  impair.

$$f(w) = \underbrace{xc}_{\text{pair}} \underbrace{v \overbrace{c}^{\text{impair}}}_{\text{pair}} \underbrace{vc}_{\text{pair}} y \in X^*$$

# COMBINATOIRE DES MOTS

On peut conclure

1. Si  $|x|$  pair.

$$f(w) = \underbrace{x}_{\text{pair}} \underbrace{c \underbrace{v}_{\text{impair}}}_{\text{pair}} \underbrace{cv}_{\text{pair}} cy \in X^*$$

$$x, cv, cy \in X^* \Rightarrow \exists r, s, t : f(r) = x, f(s) = \textcolor{red}{cv}, f(t) = \textcolor{red}{cy}$$

$$w = rsst$$

$s, t$  débutent par la même lettre,  
donc  $sst$  débute par un chevauchement.

2. Si  $|x|$  impair.

$$f(w) = \underbrace{xc}_{\text{pair}} \underbrace{v}_{\text{impair}} \underbrace{c}_{\text{pair}} \underbrace{vc}_{\text{pair}} y \in X^*$$

# COMBINATOIRE DES MOTS

On peut conclure

1. Si  $|x|$  pair.

$$f(w) = \underbrace{x}_{\text{pair}} \underbrace{c \underbrace{v}_{\text{impair}}}_{\text{pair}} \underbrace{cv}_{\text{pair}} cy \in X^*$$

$$x, cv, cy \in X^* \Rightarrow \exists r, s, t : f(r) = x, f(s) = \textcolor{red}{cv}, f(t) = \textcolor{red}{cy}$$

$$w = rsst$$

$s, t$  débutent par la même lettre,  
donc  $sst$  débute par un chevauchement.

2. Si  $|x|$  impair.

$$f(w) = \underbrace{xc}_{\text{pair}} \underbrace{v}_{\text{impair}} \underbrace{c}_{\text{pair}} \underbrace{vc}_{\text{pair}} y \in X^*$$

# COMBINATOIRE DES MOTS

## COROLLAIRE

Existence d'un mot sur 3 lettres sans carré

$\{a, ab, abb\}$  code

$abb|ab|a|abb|a|ab|abb|ab|a|ab|abb|a|abb|ab|a|ab \dots$

321312321231321  $\dots$

# COMBINATOIRE DES MOTS

Un **carré abélien** : abcbca

Peut-on construire un mot infini sur 3 lettres sans carré abélien ?

0102010

0102101

# COMBINATOIRE DES MOTS

Un **carré abélien** : abcbca

Peut-on construire un mot infini sur 3 lettres sans carré abélien ?

0102010

0102101

# COMBINATOIRE DES MOTS

V. Keränen (ICALP'1992) fournit un morphisme de longueur 85 répondant à la question !

$a \mapsto abcacdcbcdcadcdabacabababcbdbcbacbcdcacbabd$   
 $abacacdcbcdcacdbcbacbcdcacdcbdcdadbdcbca;$

$b \mapsto bcdbdadcdadbadacabcbdbcbacbcdcacdcbdcdadbdcbca$   
 $bcbdbadcdadbdacdcbdcdadbdadcadabacacdcb;$

$c \mapsto cdacabababacbabdbcdcacdcbdcdadbdadcadabacacdcb$   
 $cdcacbababacabdadcadabacababdabcdbdbadac;$

$d \mapsto dabdbcbabcbdbcbcacdadbdadcadabacababdabcdbdbadac$   
 $dadbdcbabcbdbcababdbabcbdbcbacbcdcacbabd;$

# COMBINATOIRE DES MOTS

J. Cassaigne, J. D. Currie, L. Schaeffer, J. Shallit, *Avoiding Three Consecutive Blocks of the Same Size and Same Sum*, [arXiv:1106.5204](https://arxiv.org/abs/1106.5204)

$$\varphi : 0 \mapsto 03, \ 1 \mapsto 43, \ 3 \mapsto 1, \ 4 \mapsto 01$$

$$\varphi^\omega(0) = 031430110343430310110110314303434303434\cdots$$

ne contient aucun cube additif, e.g., 041340.

# COMBINATOIRE DES MOTS

Le problème de Prouhet (1851) – Tarry – Escott

*Mémoire sur quelques relations entre les puissances de nombres*

Partitionner  $\{0, \dots, 2^n - 1\}$  de telle sorte que

$$\{0, \dots, 2^n - 1\} = \{a_1, \dots, a_{2^n-1}\} \cup \{b_1, \dots, b_{2^n-1}\}$$

$$\sum_{j=1}^{2^{n-1}} a_j = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j, \quad \sum_{j=1}^{2^{n-1}} a_j^2 = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j^2, \quad \dots, \quad \sum_{j=1}^{2^{n-1}} a_j^{n-1} = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j^{n-1}$$

$$\prod_{i=0}^{\infty} (1 - X^{2^i}) = \sum_{j=0}^{\infty} t_j X^j$$

# COMBINATOIRE DES MOTS

Le problème de Prouhet (1851) – Tarry – Escott

*Mémoire sur quelques relations entre les puissances de nombres*

Partitionner  $\{0, \dots, 2^n - 1\}$  de telle sorte que

$$\{0, \dots, 2^n - 1\} = \{a_1, \dots, a_{2^n-1}\} \cup \{b_1, \dots, b_{2^n-1}\}$$

$$\sum_{j=1}^{2^{n-1}} a_j = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j, \quad \sum_{j=1}^{2^{n-1}} a_j^2 = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j^2, \quad \dots, \quad \sum_{j=1}^{2^{n-1}} a_j^{n-1} = \sum_{j=1}^{2^{n-1}} b_j^{n-1}$$

$$\prod_{i=0}^{\infty} (1 - X^{2^i}) = \sum_{j=0}^{\infty} t_j X^j$$

# THÉORIE DES NOMBRES

Exhiber des **nombres transcendants** (sur  $\mathbb{Q}$ )

- ▶ nombres de Liouville (approximations diophantiennes)

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{10^{j!}}, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_j}{k^{j!}}, \quad k \geq 2, a_j \in \llbracket 0, k-1 \rrbracket$$

- ▶  $e$
- ▶  $\pi$

Quid des *nombres  $k$ -automatiques* ?

011010011001011010010110 $\cdots$   $\leftrightarrow$  0,4124540314078330 $\cdots$

$$x_0 x_1 x_2 \cdots \leftrightarrow \sum_{j \geq 0} \frac{x_j}{k^{j+1}}$$

## CONJECTURE COBHAM, HARTMANIS–STEARNS'1965

- ▶ mot ultimement périodique  $\leftrightarrow$  nombre rationnel
- ▶ mot  $k$ -automatique non périodique  $\rightarrow$  *nombre transcendant* ?
- ▶ Si  $\alpha$  est un nombre algébrique irrationnel, alors le développement en base  $k$  de  $\alpha$  ne peut pas être engendré par un **automate fini** ?
- ▶ Existe-t-il un nombre algébrique irrationnel dont les  $n$  premiers chiffres puissent être calculés en  $\mathcal{O}(n)$  opérations ?

# THÉORIE DES NOMBRES

Fonction de complexité  $p_w : \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $n \mapsto \#\text{Fac}_w(n)$

$$p_w(m+n) \leq p_w(m)p_w(n), \quad p_w(n) \leq (\#A)^n$$

$$p_w(n) \leq p_w(n+1)$$

## THÉORÈME (MORSE–HEDLUND)

Les conditions suivantes sont équivalentes

- ▶  $w$  est ultimement périodique,  $w = uv^\omega$
- ▶ il existe  $N$  tel que  $p_w(N) \leq N$
- ▶  $p_w$  est borné
- ▶ il existe  $m$  tel que  $p_w(m) = p_w(m+1)$

Si  $w$  non périodique, alors  $p_w(n) \geq n+1$  pour tout  $n$ .

# THÉORIE DES NOMBRES

## COMPLEXITÉ DES MOTS AUTOMATIQUES

Si  $w$  est un mot  $k$ -automatique, alors  $p_w(n)$  est en  $\mathcal{O}(n)$

### Preuve (*désubstitution*)

$$f^\omega(a) = ab\textcolor{red}{b}\textcolor{blue}{a}baabbaababbabaababbaabbabaab \dots$$

$$(f^2)^\omega(a) = ab|ba|\textcolor{red}{ba}|\textcolor{blue}{ab}|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ba|ab| \dots$$

$$(f^3)^\omega(a) = ab\ ba|ba\ ab|\textcolor{red}{ba}\ \textcolor{red}{ab}|\textcolor{blue}{ab}\ \textcolor{blue}{ba}|ba\ ab|ab\ ba|ab\ ba|ba\ ab| \dots$$

$$(f^4)^\omega(a) = ab\ ba\ ba\ ab|ba\ ab\ ab|ba|\textcolor{red}{ba}\ \textcolor{red}{ab}\ \textcolor{red}{ab}\ \textcolor{blue}{ba}|\textcolor{blue}{ab}\ ba\ ba\ ab| \dots$$

$$4 < n \leq 8, \quad k^{m-1} < n \leq k^m, \quad (\#A)^2 k^m < (\#A)^2 k n$$

## REMARQUE PANSIOT (1984)

Soit  $w$  un mot purement morphique (non périodique),  
alors  $p_w(n)$  est en  $\Theta(n)$ ,  $\Theta(n \log n)$ ,  $\Theta(n \log \log n)$  ou  $\Theta(n^2)$ .

# THÉORIE DES NOMBRES

## COMPLEXITÉ DES MOTS AUTOMATIQUES

Si  $w$  est un mot  $k$ -automatique, alors  $p_w(n)$  est en  $\mathcal{O}(n)$

## Preuve (désubstitution)

$$f^\omega(a) = ab\textcolor{red}{b}a\textcolor{blue}{ba}abbaababbabaababbaabbabaab \dots$$

$$(f^2)^\omega(a) = ab|ba|\textcolor{red}{ba}|\textcolor{blue}{ab}|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|\dots$$

## COMPLEXITÉ DES MOTS AUTOMATIQUES

Si  $w$  est un mot  $k$ -automatique, alors  $p_w(n)$  est en  $\mathcal{O}(n)$

### Preuve (*désubstitution*)

$$f^\omega(a) = ab\textcolor{red}{b}\textcolor{blue}{a}baabbaababbabaababbaabbabaab \dots$$

$$(f^2)^\omega(a) = ab|ba|\textcolor{red}{ba}|\textcolor{blue}{ab}|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ab|ab| \dots$$

$$(f^3)^\omega(a) = ab\ ba|ba\ ab|\textcolor{red}{ba}\ \textcolor{red}{ab}|\textcolor{blue}{ab}\ \textcolor{blue}{ba}|ba\ ab|ab\ ba|ab\ ba|ab|ba\ ab|\dots$$

$$(f^4)^\omega(a) = ab\ ba\ ba\ ab|ba\ ab\ ab|ba|\textcolor{red}{ba}\ \textcolor{red}{ab}\ \textcolor{red}{ab}\ \textcolor{red}{ba}|\textcolor{blue}{ab}\ \textcolor{blue}{ba}\ \textcolor{blue}{ba}\ \textcolor{blue}{ab}|\dots$$

$$4 < n \leq 8, \quad k^{m-1} < n \leq k^m, \quad (\#A)^2 k^m < (\#A)^2 k n$$

## REMARQUE PANSIOT (1984)

Soit  $w$  un mot purement morphique (non périodique),  
alors  $p_w(n)$  est en  $\Theta(n)$ ,  $\Theta(n \log n)$ ,  $\Theta(n \log \log n)$  ou  $\Theta(n^2)$ .

# THÉORIE DES NOMBRES

## COMPLEXITÉ DES MOTS AUTOMATIQUES

Si  $w$  est un mot  $k$ -automatique, alors  $p_w(n)$  est en  $\mathcal{O}(n)$

## Preuve (désubstitution)

$$f^\omega(a) = ab\textcolor{red}{b}a\textcolor{blue}{ba}abbaababbabaababbaabbabaab \dots$$

$$(f^2)^\omega(a) = ab|ba|\textcolor{red}{ba}|\textcolor{blue}{ab}|ba|ab|ab|ba|ab|ab|ba|ab|ba|\dots$$

$$(f^3)^\omega(a) = ab \ ba | ba \ ab | \color{red}{ba \ ab} | \color{blue}{ab \ ba} | ba \ ab | ab \ ba | ab \ ba | \color{red}{ba \ ab} | \cdots$$

$$(f^4)^\omega(a) = ab \ ba \ ba \ ab | ba \ ab \ ab \ ba | \color{red}{ba \ ab \ ab \ ba} | \color{blue}{ab \ ba \ ba \ ab} | \cdots$$

$$4 < n \leq 8, \quad k^{m-1} < n \leq k^m, \quad (\#A)^2 k^m < (\#A)^2 k n$$

## COMPLEXITÉ DES MOTS AUTOMATIQUES

Si  $w$  est un mot  $k$ -automatique, alors  $p_w(n)$  est en  $\mathcal{O}(n)$

### Preuve (*désubstitution*)

$$f^\omega(a) = ab\textcolor{red}{b}\textcolor{blue}{a}baabbaababbabaababbaabbabaab \dots$$

$$(f^2)^\omega(a) = ab|ba|\textcolor{red}{b}\textcolor{blue}{a}|\textcolor{red}{b}\textcolor{blue}{a}|ba|ab|ab|ba|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ab|ab| \dots$$

$$(f^3)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|\textcolor{red}{b}\textcolor{blue}{a}|\textcolor{red}{b}\textcolor{blue}{a}|\textcolor{blue}{b}\textcolor{red}{a}|ba|ab|ab|ba|ab|ba|ab|ba|ab| \dots$$

$$(f^4)^\omega(a) = ab|ba|ba|ab|ba|ab|ab|ba|\textcolor{red}{b}\textcolor{blue}{a}|\textcolor{red}{b}\textcolor{blue}{a}|\textcolor{red}{b}\textcolor{blue}{a}|\textcolor{blue}{b}\textcolor{red}{a}|ab|ba|ba|ab| \dots$$

$$4 < n \leq 8, \quad k^{m-1} < n \leq k^m, \quad (\#A)^2 k^m < (\#A)^2 k n$$

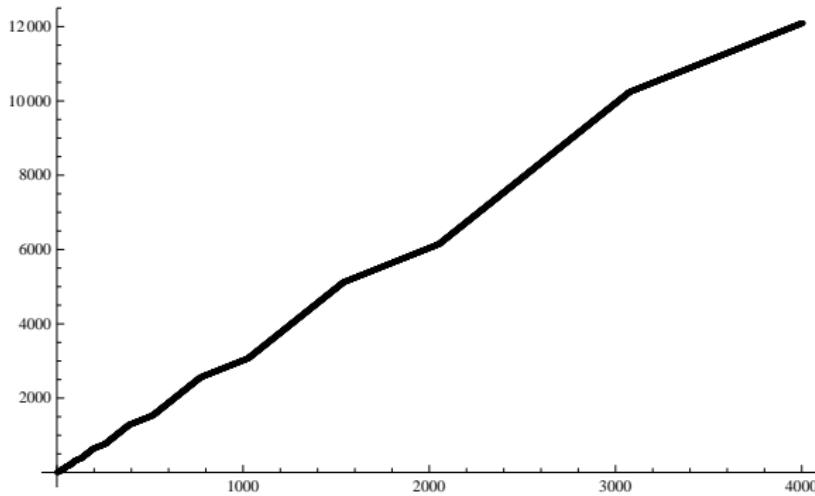
## REMARQUE PANSIOT (1984)

Soit  $w$  un mot purement morphique (non périodique),  
alors  $p_w(n)$  est en  $\Theta(n)$ ,  $\Theta(n \log n)$ ,  $\Theta(n \log \log n)$  ou  $\Theta(n^2)$ .

# THÉORIE DES NOMBRES

## Complexité du mot de Thue–Morse (de Luca, Varricchio; Cassaigne; Brlek)

$$p_t(n) = \begin{cases} 4n - 2 \cdot 2^m - 4, & \text{if } 2 \cdot 2^m < n \leq 3 \cdot 2^m; \\ 2n + 4 \cdot 2^m - 2, & \text{if } 3 \cdot 2^m < n \leq 4 \cdot 2^m. \end{cases}$$



# THÉORIE DES NOMBRES

## THÉORÈME BUGEAUD–ADAMCZEWSKI 2007

Si  $w$  est le développement en base  $k$  d'un nombre algébrique irrationnel, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{p_w(n)}{n} = +\infty$$

## COROLLAIRE

Les nombres automatiques non périodiques sont transcendants.

# THÉORIE DES NOMBRES

Soient  $\mathbb{K}$  un corps,  $a(n) \in \mathbb{K}^{\mathbb{N}}$  et  $k_1, \dots, k_d \in \mathbb{K}$ . La suite  $a(n)$  satisfait une *relation de récurrence linéaire* sur  $\mathbb{K}$  si

$$a(n) = k_1 a(n-1) + \dots + k_d a(n-d), \quad \forall n >>$$

## SKOLEM–MAHLER–LECH

Soit  $a(n)$  une suite linéaire récurrente sur un corps de **caractéristique 0**. Alors, l'ensemble

$$\mathcal{Z}(a) = \{n \in \mathbb{N} \mid a(n) = 0\} \text{ est **ultimement périodique**.}$$

## REMARQUE

Si  $\mathbb{K}$  est un **corps fini**,  $a(n)$  (et donc  $\mathcal{Z}(a)$ ) est trivialement **ultimement périodique**.

# THÉORIE DES NOMBRES

Si  $\mathbb{K}$  est un corps infini de caractéristique  $p > 0 \dots$

## EXEMPLE 1 (LECH)

$$a(n) := (1+t)^n - t^n - 1 \in \mathbb{F}_p(t).$$

La suite  $a$  satisfait la relation linéaire sur  $\mathbb{F}_p(t)$ , pour  $n > 3$

$$a(n) = (2+2t) a(n-1) + (1+3t+t^2) a(n-2) - (t+t^2) a(n-3).$$

On a

$$a(p^j) = (1+t)^{p^j} - t^{p^j} - 1 = 0$$

alors que  $a(n) \neq 0$  si  $n$  n'est pas une puissance de  $p$ . Dès lors, on obtient

$$\mathcal{Z}(a) = \{1, p, p^2, p^3, \dots\}.$$

## EXEMPLE 2 (DERKSEN)

Soit la suite  $a(n)$  de  $\mathbb{F}_p(x, y, z)$  définie par

$$a(n) := (x+y+z)^n - (x+y)^n - (x+z)^n - (y+z)^n + x^n + y^n + z^n.$$

On peut montrer que :

- ▶ La suite  $a(n)$  satisfait une relation de récurrence linéaire.
- ▶ L'ensemble des zéros est donné par

$$\mathcal{Z}(a) = \{p^n \mid n \in \mathbb{N}\} \cup \{p^n + p^m \mid n, m \in \mathbb{N}\}.$$

$\mathcal{Z}(a)$  peut sembler *plus pathologique* qu'en caractéristique nulle.  
Cependant, on peut penser aux mots  $p$ -automatiques !

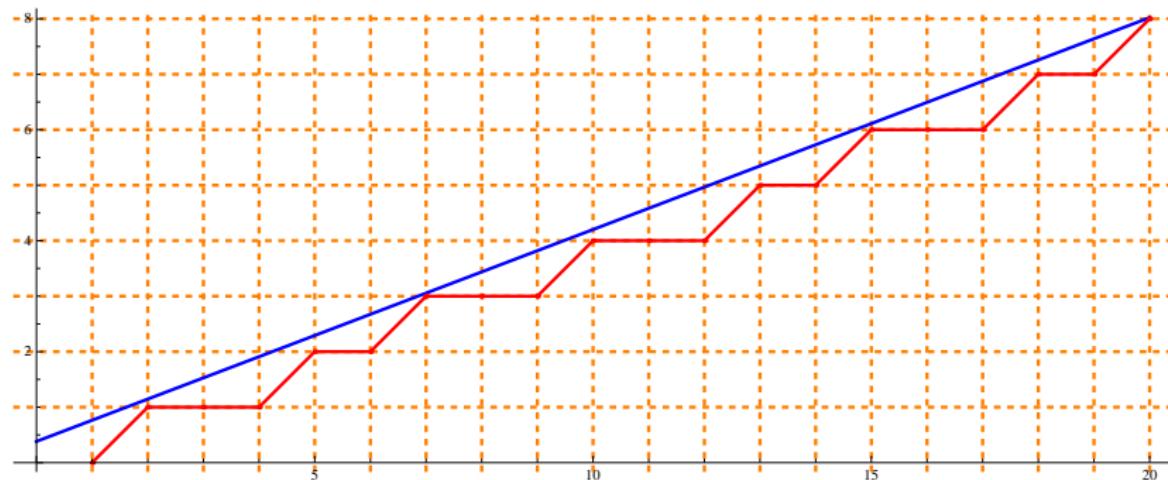
## THÉORÈME (H. DERKSEN'2007)

Soit  $a(n)$  une suite linéaire récurrente sur un corps de caractéristique  $p$ . Alors la suite caractéristique de l'ensemble  $\mathcal{Z}(a)$  est un mot *p-automatique*.

Derksen décrit précisément la forme des automates possibles :  
*Tout mot p-automatique n'est pas un ensemble  $\mathcal{Z}(a)$  pour une suite linéaire récurrente sur un corps de caractéristique p.*

## GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

## Discrétisation de droites (pente irrationnelle)



~> Tester si une suite de "pixels" décrit un segment de droite ?

# GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  est l'ensemble des points d'ordre fini dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$\alpha$  rationnel  $\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n, \{m\alpha\} = \{n\alpha\}.$

Si  $\alpha = p/q, \left\{ \frac{(q+1)p}{q} \right\} = \{p/q\}$

Supposons qu'il existe  $m < n$  tels que  $\{m\alpha\} = \{n\alpha\}.$

Alors  $(n - m)\alpha$  est un entier  $r$  et  $\alpha = r/(n - m) \in \mathbb{Q}$

# GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

$\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$  est l'ensemble des points d'ordre fini dans  $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$

$\alpha$  rationnel  $\Leftrightarrow \exists m, n \in \mathbb{Z}, m \neq n, \{m\alpha\} = \{n\alpha\}.$

Si  $\alpha = p/q, \left\{ \frac{(q+1)p}{q} \right\} = \{p/q\}$

Supposons qu'il existe  $m < n$  tels que  $\{m\alpha\} = \{n\alpha\}.$

Alors  $(n - m)\alpha$  est un entier  $r$  et  $\alpha = r/(n - m) \in \mathbb{Q}$

## EXERCICE (THM. DE KRONECKER)

Si  $\alpha$  est irrationnel, alors

l'ensemble des  $\{n\alpha\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est dense dans  $[0, 1]$ .

Soit  $N$ . On partitionne  $[0, 1]$  en intervalles de longueur  $1/N$ .

“Pigeonhole principle” : deux éléments  $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(N+1)\alpha\}$  appartiennent au même intervalle.

Si  $i < j \leq N+1$  tels que  $k/N < \{i\alpha\} < \{j\alpha\} < (k+1)/N$ ,

$\{(j-i)\alpha\} < 1/N$  et on considère les  $\{n(j-i)\alpha\}$

Si  $i < j \leq N+1$  tels que  $k/N < \{j\alpha\} < \{i\alpha\} < (k+1)/N$ ,

$1 - 1/N < \{(j-i)\alpha\} < 1$

# GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

## EXERCICE (THM. DE KRONECKER)

Si  $\alpha$  est irrationnel, alors l'ensemble des  $\{n\alpha\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est dense dans  $[0, 1]$ .

Soit  $N$ . On partitionne  $[0, 1]$  en intervalles de longueur  $1/N$ .

“Pigeonhole principle” : deux éléments  $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(N+1)\alpha\}$  appartiennent au même intervalle.

Si  $i < j \leq N+1$  tels que  $k/N < \{i\alpha\} < \{j\alpha\} < (k+1)/N$ ,

$\{(j-i)\alpha\} < 1/N$  et on considère les  $\{n(j-i)\alpha\}$

Si  $i < j \leq N+1$  tels que  $k/N < \{j\alpha\} < \{i\alpha\} < (k+1)/N$ ,

$1 - 1/N < \{(j-i)\alpha\} < 1$

## EXERCICE (THM. DE KRONECKER)

Si  $\alpha$  est irrationnel, alors

l'ensemble des  $\{n\alpha\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est dense dans  $[0, 1]$ .

Soit  $N$ . On partitionne  $[0, 1]$  en intervalles de longueur  $1/N$ .

“Pigeonhole principle” : deux éléments  $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(N+1)\alpha\}$  appartiennent au même intervalle.

Si  $i < j \leq N+1$  tels que  $k/N < \{i\alpha\} < \{j\alpha\} < (k+1)/N$ ,

$\{(j-i)\alpha\} < 1/N$  et on considère les  $\{n(j-i)\alpha\}$

Si  $i < j \leq N+1$  tels que  $k/N < \{j\alpha\} < \{i\alpha\} < (k+1)/N$ ,

$1 - 1/N < \{(j-i)\alpha\} < 1$

## EXERCICE (THM. DE KRONECKER)

Si  $\alpha$  est irrationnel, alors

l'ensemble des  $\{n\alpha\}$ ,  $n \in \mathbb{N}$ , est dense dans  $[0, 1]$ .

Soit  $N$ . On partitionne  $[0, 1]$  en intervalles de longueur  $1/N$ .

“Pigeonhole principle” : deux éléments  $\{\alpha\}, \{2\alpha\}, \dots, \{(N+1)\alpha\}$  appartiennent au même intervalle.

Si  $i < j \leq N+1$  tels que  $k/N < \{i\alpha\} < \{j\alpha\} < (k+1)/N$ ,

$$\{(j-i)\alpha\} < 1/N \text{ et on considère les } \{n(j-i)\alpha\}$$

Si  $i < j \leq N+1$  tels que  $k/N < \{j\alpha\} < \{i\alpha\} < (k+1)/N$ ,

$$1 - 1/N < \{(j-i)\alpha\} < 1$$

On a même un résultat plus fort de "distribution uniforme"

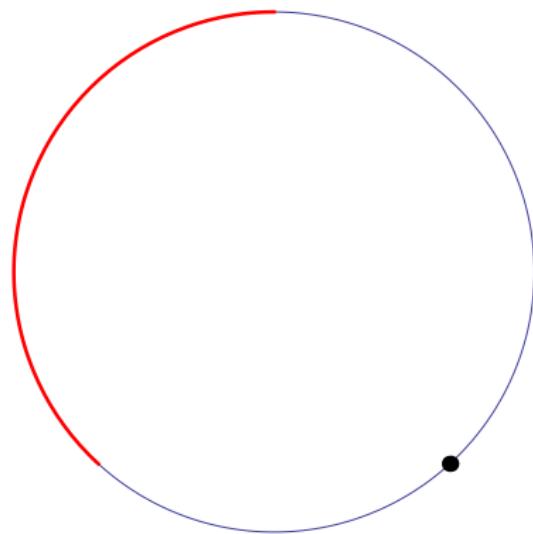
## THÉORÈME (WEYL 1916)

Soient  $0 < a < b < 1$ . Si  $\alpha$  est irrationnel, alors

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\#\{k < n \mid a < \{k\alpha\} < b\}}{n} = b - a.$$

Réalisation de systèmes dynamiques discrets

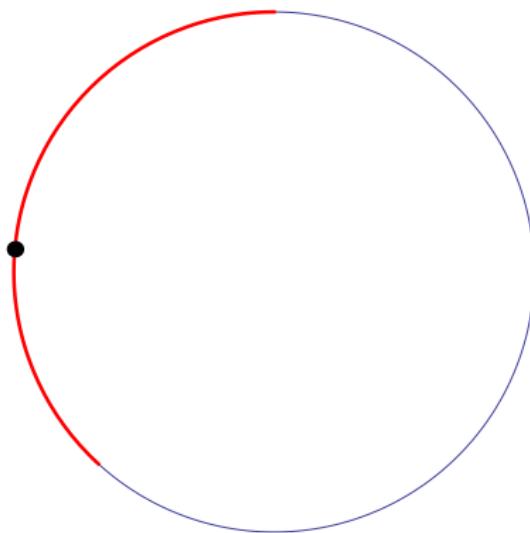
$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $R : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$



$$I_a = [0, 1 - \alpha[, I_b = [1 - \alpha, 1[, a$$

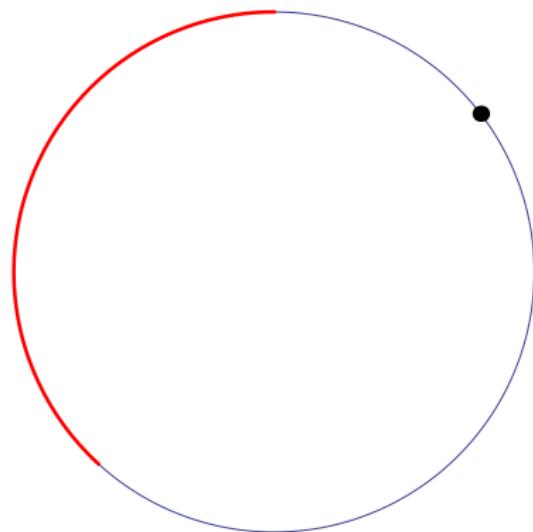
Réalisation de systèmes dynamiques discrets

$\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $R : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$



$$I_a = [0, 1 - \alpha[, I_b = [1 - \alpha, 1[, ab$$

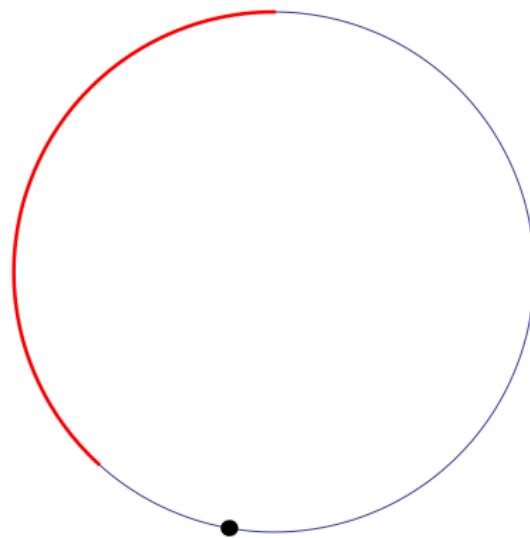
Réalisation de systèmes dynamiques discrets  
 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $R : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$



$$I_a = [0, 1 - \alpha[, I_b = [1 - \alpha, 1[, aba$$

# GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

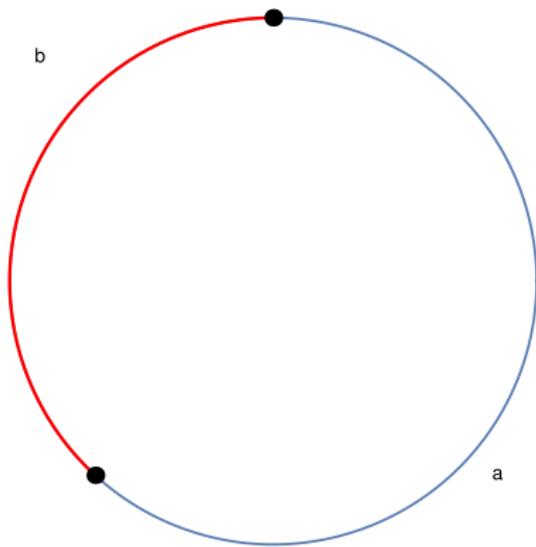
Réalisation de systèmes dynamiques discrets  
 $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ ,  $R : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$ ,  $x \mapsto x + \alpha \pmod{1}$



$$I_a = [0, 1 - \alpha[, I_b = [1 - \alpha, 1[, abaa$$

# GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

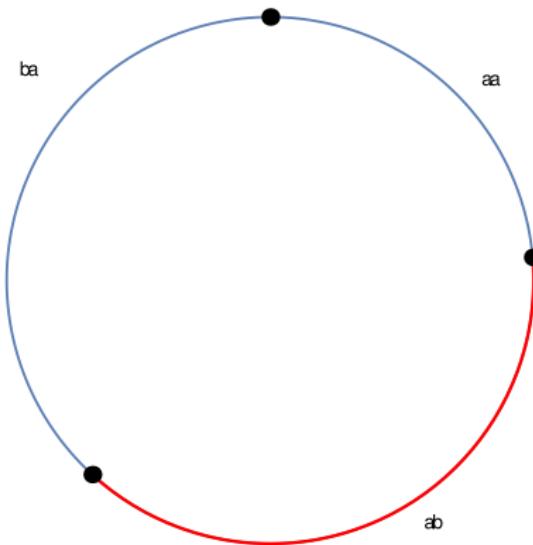
$I_b$



$I_a, I_b$

# GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

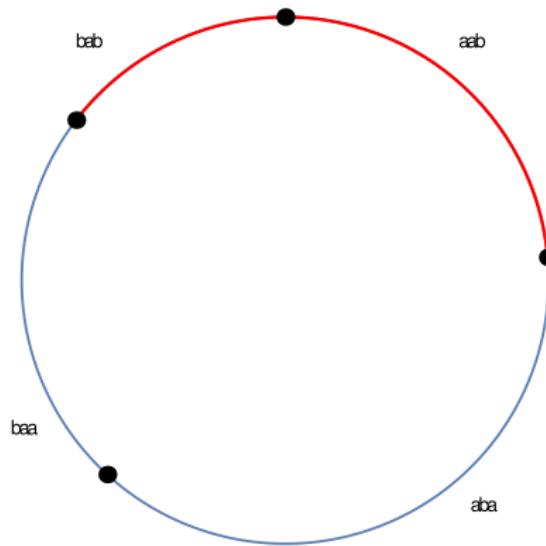
$$R^{-1}(I_b)$$



$$I_a \cap R^{-1}(I_a), I_a \cap R^{-1}(I_b), I_b \cap R^{-1}(I_a)$$

# GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

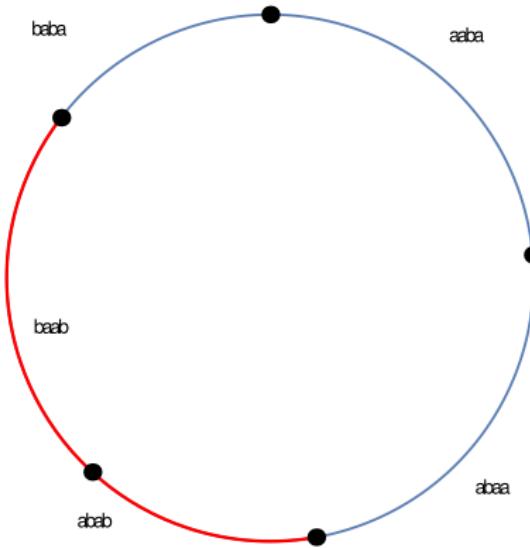
$$R^{-2}(I_b)$$



$$I_a \cap R^{-1}(I_a) \cap R^{-2}(I_b), \quad I_a \cap R^{-1}(I_b) \cap R^{-2}(I_a), \\ I_b \cap R^{-1}(I_a) \cap R^{-2}(I_a), \quad I_b \cap R^{-1}(I_a) \cap R^{-2}(I_b)$$

# GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

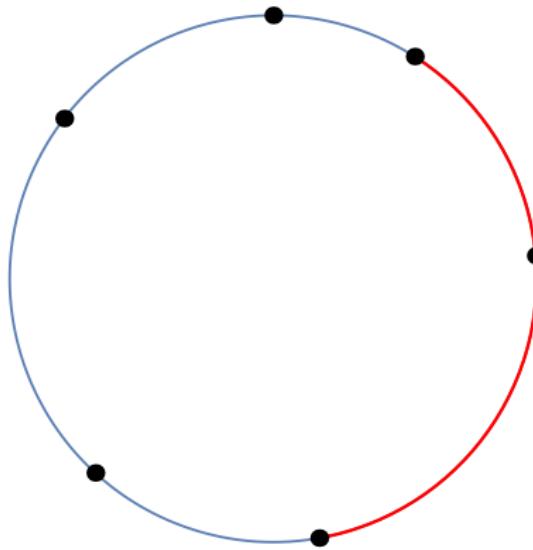
$$R^{-3}(I_b)$$



$$I_{aab} \cap R^{-3}(I_a), I_{aba} \cap R^{-3}(I_a), I_{aba} \cap R^{-3}(I_b)$$
$$I_{baa} \cap R^{-3}(I_b), I_{bab} \cap R^{-3}(I_a)$$

# GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

$$R^{-4}(I_b)$$



$I_{aabaa}, I_{aabab}, I_{abaab},$   
 $I_{ababa}, I_{baaba}, I_{babaa}$

# GÉOMÉTRIE DISCRÈTE

Les *mots sturmiens* sont caractérisés de diverses façons

- ▶ sont de complexité  $p(n) = n + 1$  (minimale)
- ▶ mots mécaniques de pente irrationnelle
- ▶ codage de rotations
- ▶ mots apériodiques et *équilibrés*,

$$\forall u, v \in \text{Fac}_n, \quad -1 \leq |u|_a - |v|_a \leq 1.$$

cf. aussi les suites de Beatty

$$\lfloor (n + 1)\varphi \rfloor - \lfloor n\varphi \rfloor$$

## COMPLEXITÉ DU MOT DE G. ROTE (JNT 1994)

$$x_n = \begin{cases} a & \text{si } \{n\alpha\} < 1/2 \\ b & \text{sinon} \end{cases}$$

Si  $\alpha = (1 + \sqrt{5})/2$ ,

$$\mathbf{x}_\varphi = ababaababbabaababbaba \cdots$$

n'est pas sturmien,  $p(2) = 4$ .

- ▶ J.-P. Allouche, M. Mendès France, Euler, Pisot, Prouhet-Thue-Morse, Wallis and the [duplication of sines](#), *Monatsh. Math.* **155** (2008), 301-315.
- ▶ M. Lothaire, *Combinatorics on Words*, Cambridge University Press, 1983.  
[ouvrage collectif jetant les bases de la combinatoire des mots](#)
- ▶ F. Gouvêa, *p-adic Numbers - An Introduction*, Universitext, Springer
- ▶ M. Rigo, *Formal Languages, Automata and Numeration Systems*, vol. 1, ISTE-Wiley, 2014.  
[se veut cours d'introduction à la combinatoire des mots](#)
- ▶ M. Rigo, *Théorie des automates et langages formels*, notes de cours ULg, <http://www.discmath.ulg.ac.be/>
- ▶ A. Cobham, Uniform tag sequences, *Math. Systems Theory* 6 (1972), 164–192.  
[article fondateur sur les suites automatiques](#)

- ▶ J.-P. Allouche, J. Shallit, *Automatic Sequences : Theory, Applications, Generalizations*, Cambridge University Press, (2003).  
[la bible des suites automatiques](#)
- ▶ V. Bruyère, G. Hansel, C. Michaux, R. Villemaire, Logic and  $p$ -recognizable sets of integers, *Bull. Belg. Math. Soc.* 1 (1994), 191–238.  
[très beau survol !](#)
- ▶ J. Berstel, D. Perrin, The origins of combinatorics on words, *European J. Combin.* 28 (2007), 996–1022.
- ▶ J.-P. Allouche, J. Shallit, The ubiquitous [Prouhet-Thue-Morse sequence](#), Sequences and their applications (Singapore, 1998), 1–16, Springer Ser. Discrete Math. Theor. Comput. Sci., Springer, London, 1999.
- ▶ M. Rigo, Le problème de Prouhet, *Losanges* 19 (2012), 42–53.  
[article de vulgarisation autour du problème de Prouhet](#)

- ▶ V. Berthé, M. Rigo (Eds), *Combinatorics, Automata and Number Theory*, vol. 135 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2010.  
ouvrage collectif : fonction de complexité, transcendance  
Bugeaud-Adamczewski,...
- ▶ H. Derksen, A [Skolem-Mahler-Lech theorem](#) in positive characteristic and finite automata, *Invent. Math.* 168 (2007), 175–224.
- ▶ G. Hansel, A [simple proof of the Skolem-Mahler-Lech theorem](#), *Theoret. Comput. Sci.* 43 (1986), 91–98.
- ▶ M. Lothaire, *Algebraic Combinatorics on Words*, vol. 90 of Encyclopedia of Mathematics and its Applications, Cambridge University Press, Cambridge, 2002.  
ouvrage collectif, chapitre sur les mots sturmiens
- ▶ V. Berthé, [Discrete Geometry](#) and Symbolic Dynamics, *The Kiselmanfest : An International Symposium in Complex Analysis and Digital Geometry* (2006).