

# APPLICATIONS HYDROGÉOLOGIQUES D'UN MODÈLE MATHÉMATIQUE 2D PAR DIFFÉRENCES FINIES SUR PERSONAL COMPUTER

par

A. DASSARGUES,

Laboratoires de Géologie de l'Ingénieur, d'Hydrogéologie et de Prospection Géophysique (L.G.I.H.), Université de Liège au Sart Tilman, B.19, B-4000 LIEGE (Belgique)

## RÉSUMÉ

Un programme BASIC résolvant l'équation des écoulements en milieu poreux par la méthode des différences finies, a été mis au point afin d'envisager de façon intégrée des problèmes d'hydrogéologie.

La dimension limitée des applications traitées résulte de la volonté de conserver une portabilité complète sur PC. De nombreuses situations peuvent être simulées et dans diverses conditions : aquifères captifs ou libres, hétérogènes, isotropes ou anisotropes, en régime permanent ou transitoire, pompages et recharges, infiltration uniforme, infiltrations à partir de la nappe ou vers la nappe... Quelques exemples sont repris et illustrés.

## ABSTRACT

A BASIC code solving the flow equation by the finite difference method has been completed and tested for hydrogeological purposes.

The hydrogeological problems are limited to local problems in order to be used on PC. Various situations

can be simulated in different conditions : confined or unconfined aquifer, heterogeneous, isotropic and anisotropic aquifers in transient or steady conditions, pumping and recharges, diffuse recharge, leakage from or to the aquifer... Some examples are shown and commented.

## 1. INTRODUCTION

L'accroissement des besoins en eau et l'augmentation de l'impact humain sur l'environnement rendent nécessaire d'assurer une gestion intégrée des nappes aquifères. De nos jours, les mathématiques appliquées et l'informatique fournissent des outils performants qui permettent de résoudre les équations différentielles régissant l'écoulement en milieu poreux.

Trois types de méthodes numériques sont utilisés dans la pratique : les méthodes analytiques, les méthodes d'approximation par différences finies et les méthodes d'approximation par éléments finis.

La méthode de calcul par différences finies est ici utilisée sur des phénomènes locaux afin de limiter la taille du problème.

La méthode est appliquée à des exemples à 2 dimensions. Les calculs sont effectués sur Personal Computer.

## 2. PRINCIPE DE LA MÉTHODE

La méthode générale de différenciation par différences finies consiste à transformer une équation différentielle du second degré en une équation aux différences finies dans un espace et un temps discrétisés.

La discrétisation spatiale consiste en la transformation du domaine en un assemblage de cellules élémentaires de formes rectangulaires, affectées d'un nœud central. Les  $N$  cellules discrétisées ont des côtes de longueur  $\Delta x$  et  $\Delta y$ , petits par rapport à la dimension de la nappe aquifère à modéliser. Plus les dimensions des cellules sont petites, plus le modèle est précis mais plus le temps de calcul sur ordinateur est important. L'épaisseur de chaque cellule correspond à la hauteur saturée  $m$  au droit du nœud central.

Le temps est discrétisé (dans le cas d'un régime transitoire) par le choix d'un pas de temps  $\Delta t$ . On démarre du temps initial  $t_0$  pour arriver à  $t_1 = t_0 + \Delta t$ ,  $t_2 = t_1 + \Delta t$ ,  $t_3 = \dots$

Pour chaque cellule rectangulaire (fig. 1), la condition fondamentale de continuité (ou d'équilibre) est exprimée de la façon suivante :

$$\Delta t (q_1 + q_2 + q_3 + q_4 + q) = [h_0(t + \Delta t) - h_0(t)] S_0 \Delta x \Delta y$$

où  $S_0$  est le coefficient d'emmagasinement du terrain;

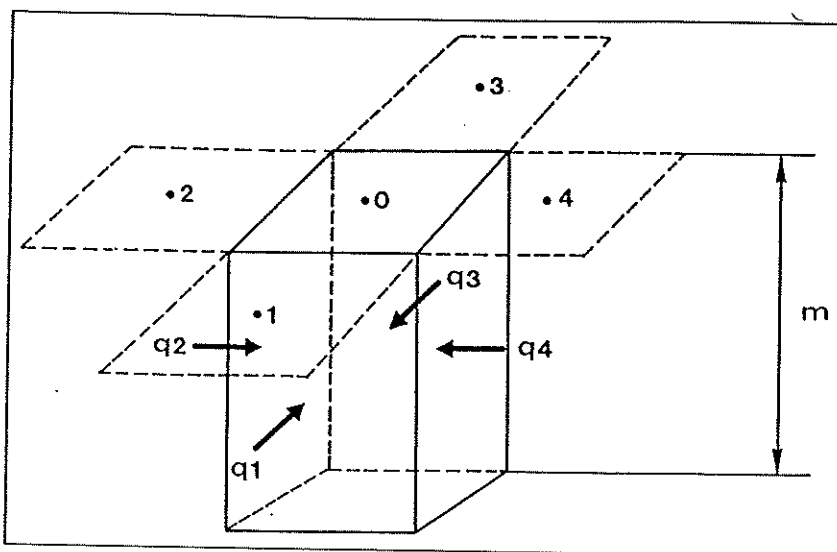


Figure 1 : Equilibre de la cellule.

$\Delta x$ ,  $\Delta y$  sont les dimensions de la cellule;  
 $h_o(t)$  et  $h_o(t + \Delta t)$  sont les hauteurs piézométriques au point central 0 de la cellule, aux temps  $t$  et  $t + \Delta t$ .

La condition d'équilibre (1) peut s'exprimer en fonction de la loi de Darcy. L'intervalle de temps  $t$  est choisi «très petit», ce qui permet de considérer les débits entre cellules comme constants durant cet intervalle et de les exprimer en fonction des moyennes des hauteurs piézométriques de chaque cellule à un instant  $t'$  compris dans l'intervalle  $\Delta t$ ,  $t + \Delta t$ . De cette façon, nous obtenons pour les différents débits entre cellules voisines (fig. 1) :

$$\begin{aligned} q_1 &= \Delta x T_{1,0} (h_1(t') - h_o(t')) / \Delta y \\ q_2 &= \Delta y T_{2,0} (h_2(t') - h_o(t')) / \Delta x \\ q_3 &= \Delta x T_{3,0} (h_3(t') - h_o(t')) / \Delta y \\ q_4 &= \Delta y T_{4,0} (h_4(t') - h_o(t')) / \Delta x \end{aligned}$$

où  $T_{i,0}$  ( $i = 1$  à 4) est la transmissivité moyenne valable entre les cellules  $i$  et 0. Elle est calculée à partir des transmissivités imposées à l'intérieur de chaque cellule :

$$T_{i,0} = \frac{2 T_i T_0}{T_i + T_0}$$

La relation (1) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{S_0}{\Delta t} (h_o(t + \Delta t) - h_o(t)) \\ = T_{1,0} (h_1(t') - h_o(t')) / \Delta y^2 \\ + T_{2,0} (h_2(t') - h_o(t')) / \Delta x^2 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} + T_{3,0} (h_3(t') - h_o(t')) / \Delta y^2 \\ + T_{4,0} (h_4(t') - h_o(t')) / \Delta x^2 \\ + q \end{aligned} \quad (2)$$

où  $q = \frac{Q}{\Delta x \cdot \Delta y}$  est le «flux externe»

Le «flux externe» est indépendant des hauteurs piézométriques et tient compte d'éventuelles opérations de pompage, recharge, évaporation, infiltration.

Dans l'équation (2), l'inconnue est la hauteur piézométrique au nœud 0 à la fin de l'intervalle de temps :  $h_o(t + \Delta t)$ .

Une équation de ce type est trouvée pour chaque cellule de l'aquifère idéalisé, ce qui amène à un système de  $N$  équations à  $N$  inconnues.

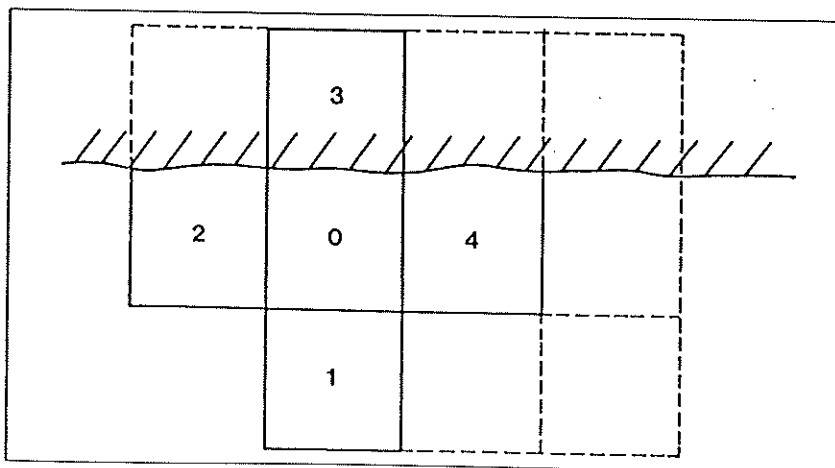


Figure 2 : Limite imperméable.

### 3. CONDITIONS AUX LIMITES ET HYPOTHÈSES DE CALCUL

Une limite imperméable d'un aquifère est exprimée en imposant la transmissivité nulle entre les cellules concernées. Dans le cas de la figure 2, nous imposons  $T_{3,0} = 2 T_3 T_0 / (T_3 + T_0) = 0$ ; la condition est respectée si  $T_3 = 0$ .

Une limite à flux imposé (condition de Neuman) est réalisée par l'introduction d'un flux constant au point central de la cellule concernée.

Une limite à potentiel imposé (condition de Dirichlet) est réalisée artificiellement en choisissant aux nœuds concernés un coefficient d'emmagasinement  $S$  très supérieur à 1 ( $S \gg 1$ ), de manière à ce que la hauteur piézométrique en ces nœuds ne varie pas, même si le flux dans cette cellule est très important.

Pour résoudre le système de  $N$  équations à  $N$  inconnues, il faut se fixer l'instant intermédiaire  $t'$  compris dans l'intervalle  $[t, t + \Delta t]$ . Si on considère que  $t' = t$ , les équations sont explicites en  $h(t + \Delta t)$ ; c'est la résolution du système par la formulation explicite.

Si on considère  $t' = t + \Delta t$ , on a alors 5 inconnues par équation. Pour l'équation relative à la cellule de point central 0, nous avons comme inconnues :  $h_o(t + \Delta t)$ ,  $h_1(t + \Delta t)$ ,  $h_2(t + \Delta t)$ ,  $h_3(t + \Delta t)$  et  $h_4(t + \Delta t)$ .

Le système comporte toujours  $N$  inconnues au total. Nous obtenons  $N$  équations couplées entre elles qui contiennent implicitement les  $N$  inconnues; c'est la résolution du système par la formulation implicite.

Dans le cas de conditions d'écoulement en régime permanent, nous avons  $\frac{\delta h}{\delta t} = 0$  et le terme

$S_o (h_0(t + \Delta t) - h_0(t)) / \Delta t = 0$ ; il suffit donc d'imposer  $S_o = 0$  pour simuler cette condition.

Jusqu'ici, seules les transmissivités  $T$  ont été prises en compte. Dans le cas d'une nappe libre, nous avons à chaque nœud ou point central de cellule :  $T = K(h - b)$  où  $K$  est la perméabilité du milieu (m/sec);  $h$  est la hauteur piézométrique (m);  $b$  est la hauteur de la base de l'aquifère (m).

L'équation (2) devient alors non-linéaire car la hauteur piézométrique intervient dans la définition de la transmissivité. A chaque pas de temps et éventuellement à chaque itération, la hauteur piézométrique est modifiée et donc la transmissivité change. De ce fait, les temps de calcul sur ordinateur sont nettement plus importants.

Le coefficient d'emmagasinement, en nappe libre, n'exprime plus seulement la quantité d'eau emmagasinable dans le terrain par compressibilité mais surtout la quantité d'eau stockable quand le terrain passe de

l'état non saturé à saturé. Dès lors, on néglige le premier de ces deux termes et le coefficient d'emmagasinement est considéré comme égal à la porosité efficace du milieu.

Dans les modélisations qui suivent, les hypothèses choisies sont les suivantes :

- écoulement en milieu poreux saturé, non-homogène, isotrope ou anisotrope;
- modèles en 2 dimensions dans le plan horizontal, en mode transitoire ou permanent.

#### 4. APPLICATIONS

A. Comme premier exemple, considérons le cas d'une nappe libre dont les hauteurs piézométriques dans la zone modélisée vont de 70 m à 100 m en augmentant de façon continue depuis l'aval vers l'amont (fig. 3).

Les perméabilités choisies sont de  $2 \cdot 10^{-4}$  m/s en aval — côté gauche et de  $1 \cdot 10^{-4}$  m/s en amont — côté droit (fig. 3). Les hauteurs piézométriques à l'aval et à l'amont sont imposées à 70 et 100 mètres. Les deux autres côtés sont considérés comme des frontières imperméables (transmissivité nulle aux nœuds sur la frontière).

En laissant s'équilibrer la nappe en fonction des valeurs de perméabilité choisies et à partir de l'état initial qui lui a été imposé, on constate (fig. 4) que le gradient des hauteurs piézométriques est bien sûr

d'autant plus grand que la perméabilité est faible (Loi de Darcy).

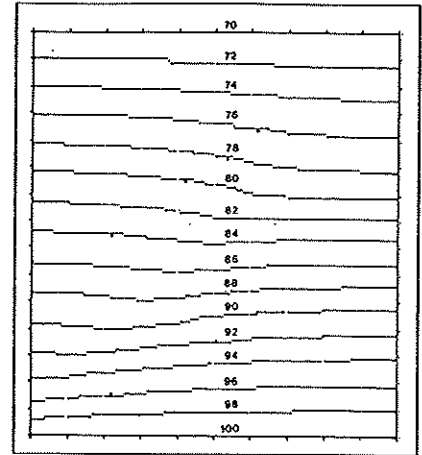


Figure 4 : Etat initial réel (calculé).

Pour la suite, on impose :

- le coefficient d'emmagasinement  $S = 0.01$ ;
- le débit pompé  $Q = - 0.25 \text{ m}^3/\text{sec}$ ;
- une infiltration efficace uniforme  $I = 1.585 \cdot 10^{-8} \text{ m}^3/\text{m}^2/\text{sec}$  (500 mm/an).

Après une durée de 1 jour, la piézométrie (fig. 5) montre clairement l'influence du pompage et des différentes perméabilités.

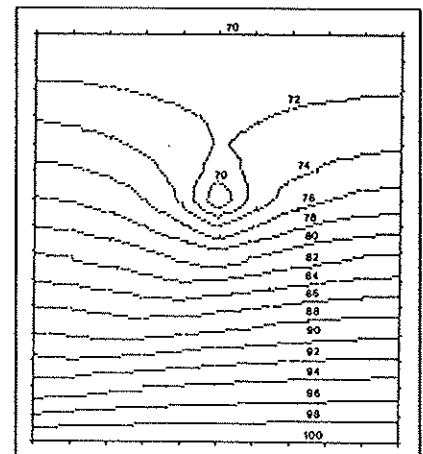


Figure 5 : Pompage de  $0.25 \text{ m}^3/\text{sec}$  pendant 1 jour - cas isotrope.

Dans les mêmes conditions que précédemment, en imposant une anisotropie telle que  $K_{yy} = 0.5 K_{xx}$ , nous obtenons (fig. 6) une carte piézométrique très différente montrant que la diminution de moitié de la perméabilité  $K_{yy}$  influence fortement le cône de rabattement.

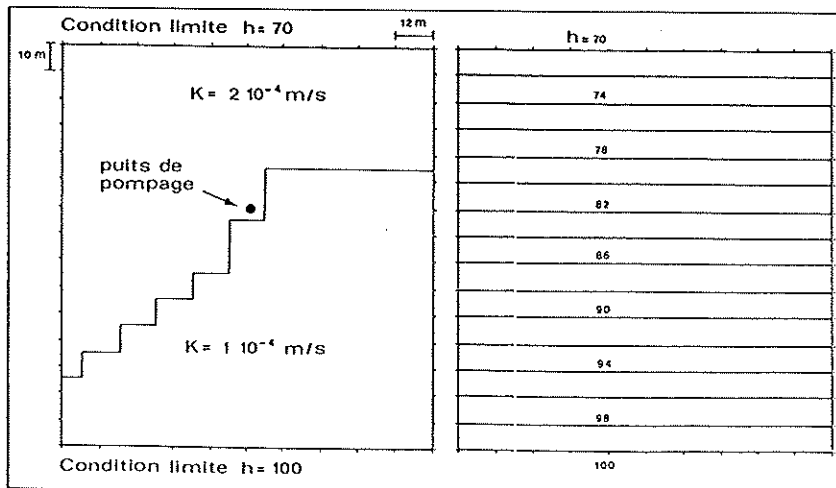


Figure 3 : Etat initial, répartition des perméabilités et localisation du pompage.

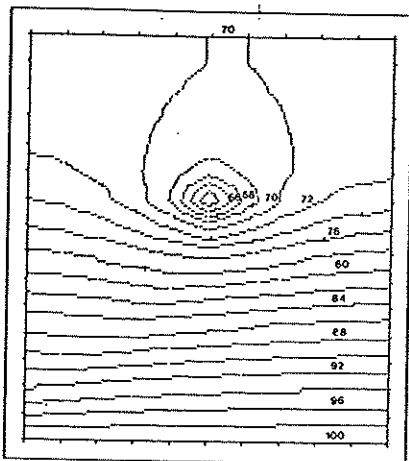


Figure 6 : Pompage de 0.25 m³/sec pendant 1 jour - cas anisotrope.

B. Dans un deuxième exemple, on considère une nappe libre dont les hauteurs piézométriques vont de 70 m en aval à 74 m en amont.

La répartition des valeurs de perméabilité est identique à l'exemple précédent, soit  $2.10^{-4}$  m/s en aval — côté gauche — et  $1.10^{-4}$  m/s en amont — côté droit.

Les hauteurs piézométriques, à l'aval et à l'amont sont imposées à 70 et 74 m. Comme précédemment, les deux autres côtés sont considérés comme des frontières imperméables.

De la même manière qu'au premier exemple, la nappe se met en équilibre (fig. 7) en fonction des valeurs de perméabilité et à partir de la piézométrie initiale qui lui avait été imposée.

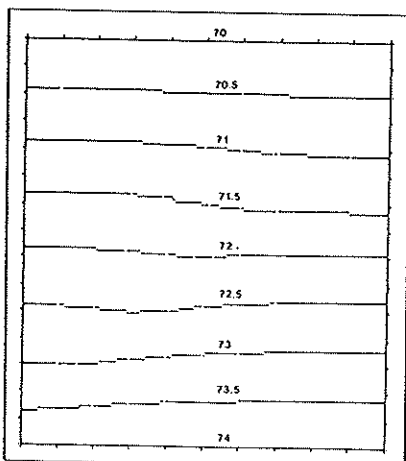


Figure 7 : Etat initial réel (calculé).

Ensuite, on fixe :

- le coefficient d'emmagasinement  $S = 0.05$ ;
- le débit pompé  $Q = -0.1$  m³/sec;
- une infiltration efficace uniforme  $I = 1.585 \cdot 10^{-8}$  m³/m²/sec.

Après une durée d'un jour, la piézométrie prend l'allure représentée figure 8.

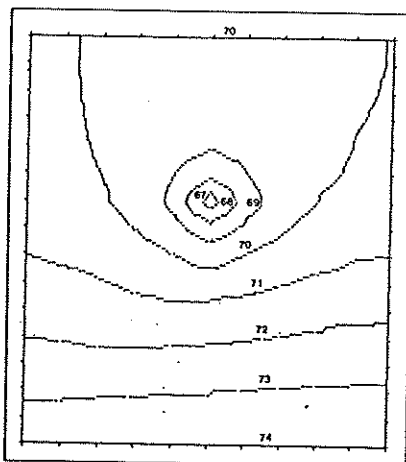


Figure 8 : Pompage de 0.1 m³/sec pendant 1 jour - cas isotrope.

Dans les mêmes conditions, est introduite à présent l'influence de l'infiltration d'eau dans la nappe, à partir d'un cours d'eau de surface (fig. 9).

Le coefficient d'infiltration «1» est défini de la façon suivante :

$$l = \frac{k_r}{d_r} \frac{A}{\Delta x \Delta y}$$

où  $k_r$  est la perméabilité du fond de la rivière,  
 $d_r$  est l'épaisseur du fond de la rivière,

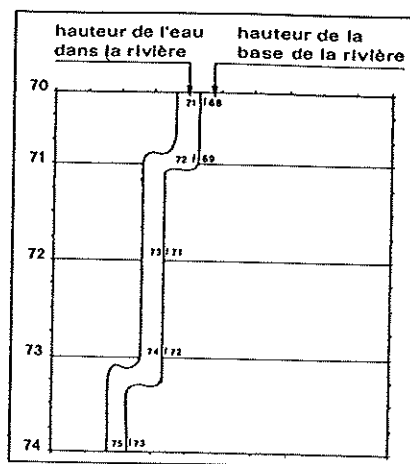


Figure 9 : Conditions initiales pour le modèle infiltration provenant d'une rivière.

A aire concernée par l'infiltration,

$\Delta x \cdot \Delta y$  aire de la cellule.

Dans le cas d'une rivière de 5 à 6 mètres de large pour laquelle nous supposons  $k_r = 2.10^{-8}$  m/sec et  $d_r = 1$  m on obtient  $l = 5.10^{-9}$  m/sec ( $1.10^{-5}$  litre/sec).

Ce coefficient d'infiltration est à imposer aux nœuds des cellules concernées par la rivière.

La piézométrie obtenue (fig. 10) comparée à la précédente (fig. 8) montre très clairement l'influence de l'infiltration provenant du cours d'eau. Une carte des flux calculés est reprise à la figure 11. Les flux sont exprimés en m³/s ou en m³/s par m de hauteur saturée de l'aquifère. L'introduction d'une anisotropie  $K_{yy} = 0.2 K_{xx}$  conduit à un cône de rabattement prononcé et très dissymétrique (fig. 12).

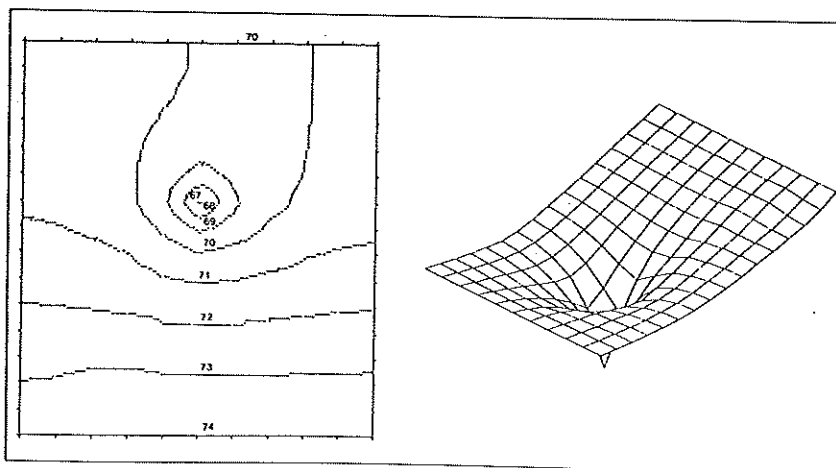


Figure 10 : Infiltration due à un cours d'eau et pompage - cas isotrope.

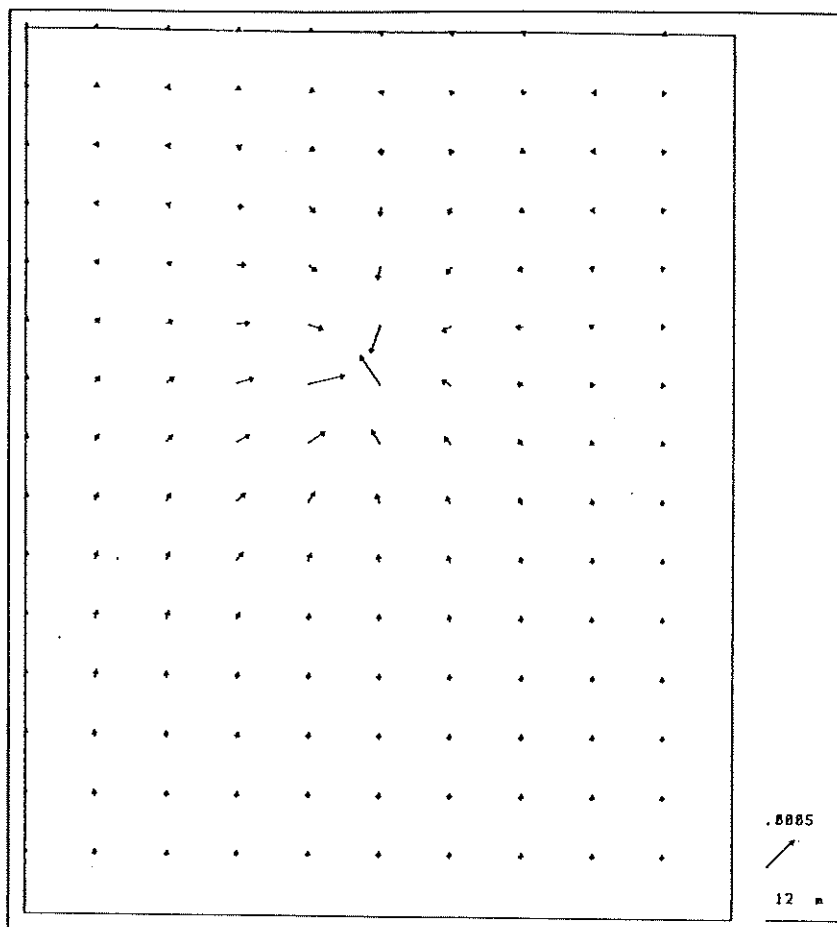


Figure 11 : Carte des flux calculés pour le cas de la figure 10.

## 5. CONCLUSIONS ET PERSPECTIVES

La méthode des différences finies est ici utilisée sur des problèmes limités, à l'échelle locale. Ces programmes, écrits en Basic, sont utilisables en régime permanent ou transitoire pour des nappes captives ou libres et des perméabilités isotropes ou anisotropes. Ils constituent la base pour la prise en compte de situations plus complexes comme la dispersion et le transport d'un polluant dans une nappe à l'échelle locale. Ces derniers modèles permettent notamment la détermination des périmètres de protection.

## BIBLIOGRAPHIE

- ASSENS G., 1974. Eléments d'hydrogéologie mathématique. Centre d'Informatique Géologique. E.N.S.M.P., 59 pp.
- CARNAHAN B., LUTHER H.A., WILKES J.O., 1969. Applied Numerical Methods, J. Wiley, 604 pp.
- DE MARSILY G., 1981. Hydrogéologie quantitative. Masson, Paris, pp. 1-215.
- ENSELLEM Y., 1971. Construction de modèles mathématiques en hydrogéologie. Centre d'Informatique Géologique. E.N.S.M.P. - 125 pp.

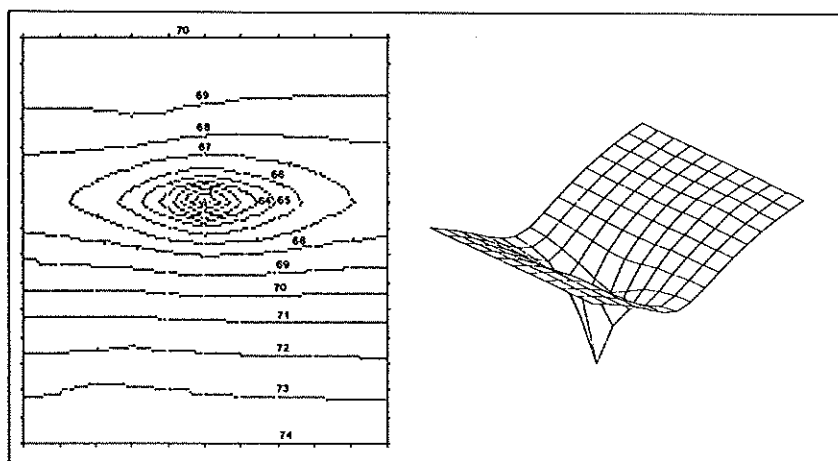


Figure 12 : Infiltration due à un cours d'eau et pompage - cas anisotrope.