

Simulations numériques sur des solides plongés, dans un contexte X-FEM

F. Duboeuf^{1*} and E. Béchet¹

¹ LTAS - Département d'aérospatiale et mécanique, Université de Liège Chemin des chevreuils, 1, B-4000 Liège, Belgique

* fduboeuf@ulg.ac.be

Résumé — Ce travail traite des différents enjeux pour conserver toutes les capacités des calculs par éléments finis, en s'affranchissant des maillages conformes à la géométrie. La représentation de la géométrie, la construction d'un espace fonctionnel adapté et l'imposition des conditions aux limites sont abordées dans le contexte de la méthode des éléments finis étendus, tout particulièrement en présence de solides plongés dans un espace de dimension supérieure. L'approche proposée permet de traiter tout type de plongement, c.-à-d. des problèmes 1, 2, et/ou 3D plongés dans des maillages 2 ou 3D.

Mots clés — espaces traces P1, espace stable de multiplicateurs de Lagrange, X-FEM.

1 Introduction

La Conception Assistée par Ordinateur (CAO) est de nos jours l'outil traditionnel pour le design, combinant des variétés telles des courbes et surfaces pour représenter la géométrie. Durant le processus de conception, elle est couramment associée à la méthode des Éléments Finis (EF) afin de dimensionner et optimiser les pièces. Les variétés géométriques sont alors discrétisées, nécessitant des algorithmes spécifiques de génération de maillage et parfois des interactions de l'utilisateur. Afin de simplifier la transition du modèle continu de la CAO vers le modèle EF discret, des techniques sans maillage ainsi que des approches permettant au maillage de ne pas se conformer aux frontières ont été proposées.

Parmi ces dernières, la méthode des éléments finis étendus (X-FEM) a bénéficié de la flexibilité offerte par le concept de partition de l'unité pour relaxer les contraintes lors de la génération de maillages. Cette méthode a été à l'origine introduite pour simuler la propagation de fissure dans un solide. Dans ce contexte, une fissure peut être considérée comme une sous-variété de codimension 1, c'est-à-dire une discontinuité ayant une dimension de moins que le solide qui la contient. Par analogie, les frontières du solide définissent des discontinuités géométriques, pouvant elles-aussi être plongées dans un maillage englobant. Le maillage ne dépend alors plus des frontières du domaine de calcul, dissociant ainsi l'approximation du champ solution de la représentation de la géométrie.

Dans le contexte de la méthode EF, ce paradigme amène à répondre aux trois questions suivantes :

- (i) Quelle approche permet de *représenter les solides plongés*, au regard de la méthode EF ?
- (ii) Quel *espace fonctionnel*, basé sur les fonctions de formes EF, est adapté au calcul sur un solide plongé dans un espace de dimension égale ou supérieure ?
- (iii) Comment les *conditions aux limites* peuvent être imposées le long de frontières plongées dans un maillage ?

Actuellement, l'approche X-FEM est seulement utilisée pour des problèmes définis sur des domaines de même dimension que le maillage EF, c'est-à-dire sur des sous-variétés de codimension 0. Ainsi une géométrie bidimensionnelle doit être contenue dans un maillage plan, tout comme un solide volumique peut être plongé dans un maillage tridimensionnel. Mais comment représenter une courbe ou une surface possédant une courbure non nulle ? De nouveaux outils sont nécessaires afin de pouvoir appréhender le calcul sur ces variétés de codimension 1 et 2.

2 Résultats

Afin de dissocier la description géométrique de l'approximation EF, les trois questions précédemment introduites avec ce paradigme sont abordées successivement. Pour chacune d'elles, le cas de solides plongés dans un espace de même dimension est tout d'abord analysé. Puis, l'approche est étendue afin de traiter tous les types de plongements tels qu'illustrés FIGURE 1.

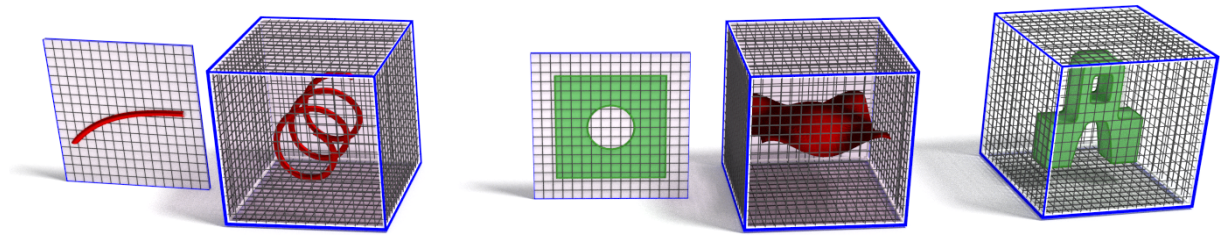


FIGURE 1 – Solides plongés (de gauche à droite) : sous-variétés 1D de codimension 1 ou 2, sous-variétés 2D de codimension 0 ou 1, sous-variété 3D de codimension 0

2.1 Représentation des solides plongés

Dans la plupart des cas, une représentation implicite de la géométrie convient. Les frontières peuvent par exemple être décrites comme des iso-zéros de level-sets [2]. Toutefois, en présence de courbes plongées dans un espace tridimensionnel, ces méthodes de représentation implicite ne sont pas adéquates. Une approche explicite est proposée afin de contourner cette difficulté et les résultats obtenus sur un cas test académique sont illustrés FIGURE 2.

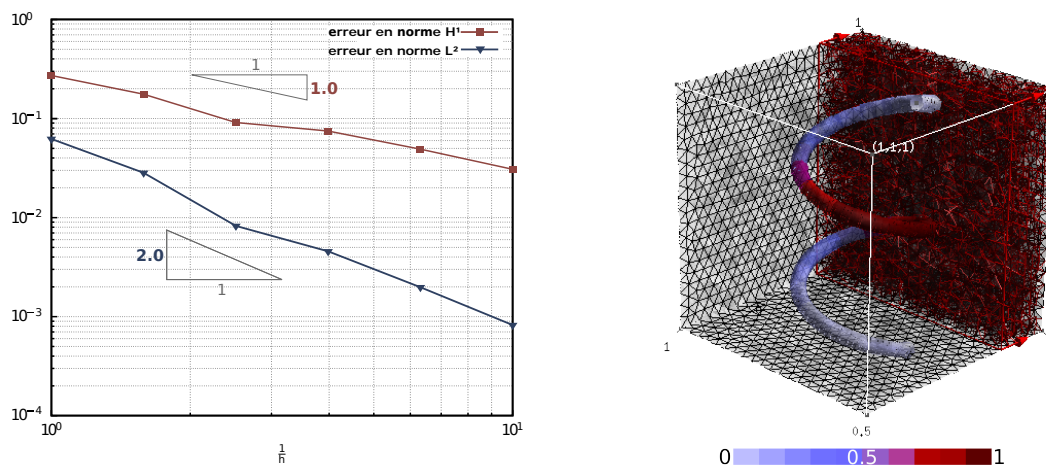


FIGURE 2 – Représentation géométrique et résolution d'un problème de conduction thermique le long d'une hélice.

2.2 Construction d'espaces fonctionnels adaptés

Dans le cas où le maillage EF possède la même dimension que le domaine du problème, les fonctions de formes EF définies sur le maillage peuvent directement être utilisées comme espace fonctionnel. Les éléments traversés par une interface doivent simplement être partitionnés en sous-éléments nécessaires lors du processus d'intégration. Cette approche ne permet cependant pas de construire un espace fonctionnel pour le calcul sur des courbes et surfaces plongées dans un maillage de dimension supérieure.

Nous commençons alors par examiner un problème de laplacien le long d'une barre, et cherchons à utiliser les traces des fonctions de forme issues de la méthode EF. La géométrie n'étant pas nécessairement alignée avec les arêtes du maillage, une réduction du nombre de fonctions de forme associées aux noeuds du maillage est requise pour éviter tout système singulier.

Un nouvel algorithme est introduit pour définir un espace fonctionnel P1 réduit (FIGURE 3) et permet d'appréhender tout plongement de solide de dimension arbitraire. Une construction analogue pour un espace stable de multiplicateurs de Lagrange est proposée en 2D dans [4] afin d'imposer une condition de contact avec une approximation quadratique des déplacements.

Une étude détaillée des propriétés d'approximation des espaces traces issus d'espaces EF linéaires est disponible dans [6], pour la résolution d'EDP définies sur des hyper-surfaces. Toutefois, l'imposition des conditions aux limites sur des arêtes immergées dans un maillage 3D n'y est pas abordés. Ce point fait l'objet de la section suivante.

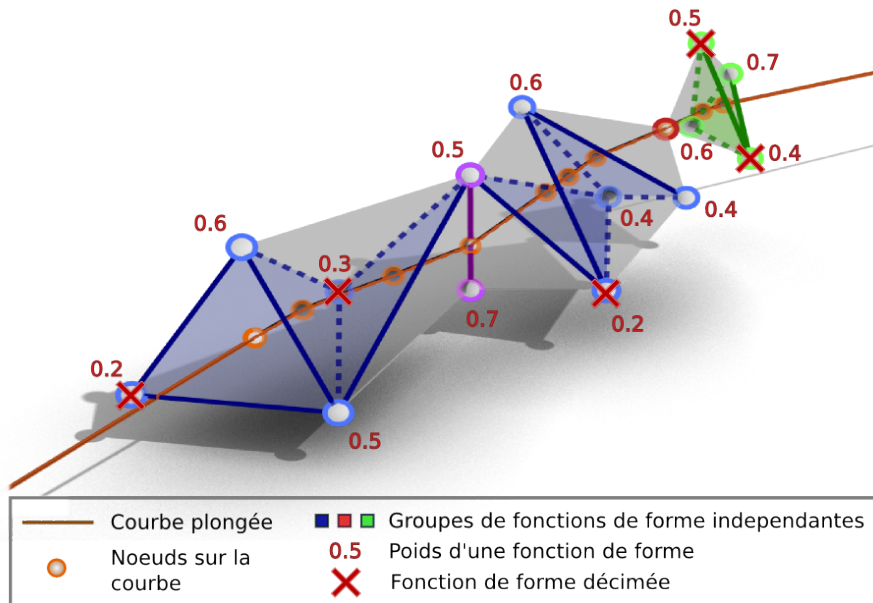


FIGURE 3 – Réduction de l'espace fonctionnel le long d'une courbe : identification de groupes de fonctions de forme indépendantes et décimation.

2.3 Imposition des conditions aux limites sur des frontières plongées

Le traitement des conditions aux limites nécessite une attention particulière en présence d'éléments traversés par une frontière. L'ajout d'une condition de Neumann sur une interface implicite peut être effectué aussi simplement qu'avec la méthode EF. En revanche, l'imposition d'une condition de Dirichlet nécessite un traitement spécifique.

Différentes approches sont proposées dans la littérature et peuvent être classées en deux catégories. Soit elles modifient l'interpolation pour s'adapter aux frontières, en utilisant par exemple la méthode de Galerkin discontinue. Soit elles changent la formulation, en se basant sur la méthode de pénalité, la méthode de Nitsche, ou les multiplicateurs de Lagrange. Parmi ces dernières, le problème de stabilité de Ladyzhenskaya-Babûska-Brezzi (LBB) ou condition inf-sup peut être traité à l'aide d'une méthode directement stable, ou d'une méthode stabilisée par ajout d'une contribution ad hoc.

Initialement développées pour imposer une condition aux limites de Dirichlet sur une arête d'un solide 2D [1, 3], puis étendues aux faces d'un solide 3D [5], aucune de ces méthodes n'est adaptée pour appliquer ce type de condition sur des arêtes en 3D. Nous proposons ici une méthodologie permettant d'imposer une telle condition de Dirichlet dans le cadre de l'approche X-FEM, valable pour toute combinaison de dimensions d'espace et de frontière. Elle s'appuie sur la construction d'un espace stable de multiplicateurs de Lagrange, réalisée grâce à un algorithme généralisé de sélection de sommets vitaux, basé sur des concepts appropriés à chaque dimension.

Plusieurs exemples numériques illustrant l'habileté de cette méthode seront analysés à travers des études de convergence pour valider l'approche (FIGURE 4).

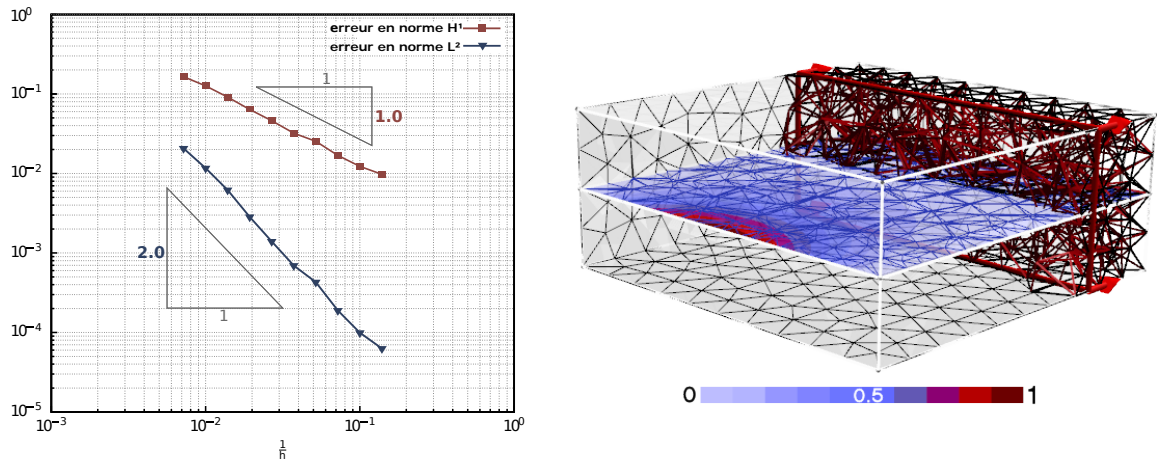


FIGURE 4 – Résolution de l'équation de Laplace-Beltrami sur une surface plongée dans un maillage 3D.

3 Conclusions

Finale­ment, la combinaison des différents algorithmes proposés permet de traiter tout type de plongement, c'est-à-dire de résoudre des problèmes de dimensions 1, 2 et 3, plongés dans des maillages englobant de dimension 2 ou 3. En vue de compléter l'intégration du calcul X-FEM dans le processus de CAO, les problèmes de couplage de dimensions et d'ordres supérieurs restent à aborder. Ils interviennent lors de l'idéalisation de structures, telle que des solides réduits à leur modèle équivalent de coque ou poutre.

Références

- [1] E. Béchet, N. Moës, W. Barbara. *A stable Lagrange multiplier space for stiff interface conditions within the extended finite element method*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 78 :931–954, 2009.
- [2] T. Belytschko, C. Parimi, N. Moës, N. Sukumar, S. Usui. *Structured extended finite element methods for solids defined by implicit surfaces*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 56 :609–635, 2003.
- [3] J.E. Dolbow, I. Harari. *An efficient finite element method for embedded interface problems*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 78 :229–252, 2009.
- [4] G. Ferté, P. Massin, et N. Moës, *Interface problems with quadratic X-FEM : design of a stable multiplier space and error analysis*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 100 :834–870, 2014.
- [5] M. Hautefeuille, C. Annavarapu, J.E. Dolbow. *Robust imposition of Dirichlet boundary conditions on embedded surfaces*, International Journal for Numerical Methods in Engineering, 90 :40–64, 2012.
- [6] M. Olshanskii, A. Reusken, J. Grande. *A finite element method for elliptic equations on surfaces*, SIAM Journal on Numerical Analysis, 47 :3339–3358, 2009.