

HÖLDER CONTINUITY AND WAVELETS

Dissertation présentée en vue de
l'obtention du grade de
Docteur en Sciences

Promoteurs :
Françoise BASTIN
Samuel NICOLAY

24 Juin 2015

Plan

Partie I

Continuité höldérienne de fonctions particulières

Partie II

Ondelettes non-stationnaires

Partie III

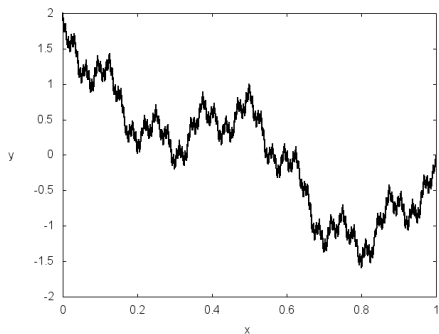
Espaces \mathcal{S}' revus avec les coefficients d'ondelettes dominants

Des fonctions continues nulle part dérivables ?

En 1872, Weierstrass montre que la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

avec $a \in (0, 1)$ et $b \in 2\mathbb{Z} + 1$ tels que $ab > 1 + 3\pi/2$ est une fonction continue nulle part dérivable.



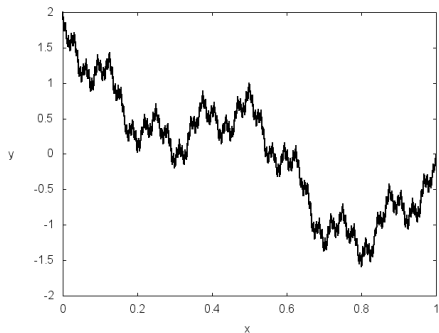
K. Weierstrass. *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre*, chapter Über kontinuierliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, pages 190-193. Springer, 1988.

Des fonctions continues nulle part dérivables ?

En 1872, Weierstrass montre que la fonction

$$x \mapsto \sum_{n=0}^{+\infty} a^n \cos(b^n \pi x)$$

avec $a \in (0, 1)$ et $b \in 2\mathbb{Z} + 1$ tels que $ab > 1 + 3\pi/2$ est une fonction continue nulle part dérivable.



K. Weierstrass. *Ausgewählte Kapitel aus der Funktionenlehre*, chapter Über continuirliche Funktionen eines reellen Arguments, die für keinen Werth des letzteren einen bestimmten Differentialquotienten besitzen, pages 190-193. Springer, 1988.

Continuité höldérienne et exposant de Hölder

Soient $\alpha > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Une fonction f est **continue au sens de Hölder avec un ordre α en x_0** s'il existe $C, \delta > 0$ et un polynôme P de degré strictement plus petit que α tels que

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

pour tout $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Notation : $\Lambda^\alpha(x_0)$ désigne l'espace des fonctions continues au sens de Hölder avec un ordre α en x_0 et est appelé **espace de Hölder d'ordre α en x_0** .

L'exposant de Hölder de f en $x_0 \in \mathbb{R}$ est

$$h_f(x_0) := \sup\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^\alpha(x_0)\}.$$

Continuité höldérienne et exposant de Hölder

Soient $\alpha > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Une fonction f est **continue au sens de Hölder avec un ordre α en x_0** s'il existe $C, \delta > 0$ et un polynôme P de degré strictement plus petit que α tels que

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

pour tout $x \in (x_0 - \delta, x_0 + \delta)$.

Notation : $\Lambda^\alpha(x_0)$ désigne l'espace des fonctions continues au sens de Hölder avec un ordre α en x_0 et est appelé **espace de Hölder d'ordre α en x_0** .

L'**exposant de Hölder de f en $x_0 \in \mathbb{R}$** est

$$h_f(x_0) := \sup\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^\alpha(x_0)\}.$$

Continuité höldérienne et exposant de Hölder

Soient $\alpha > 0$ et $x_0 \in \mathbb{R}$. Une fonction **bornée** f est **continue au sens de Hölder avec un ordre α en x_0** s'il existe $C > 0$ et un polynôme P de degré strictement plus petit que α tels que

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Notation : $\Lambda^\alpha(x_0)$ désigne l'espace des fonctions continues au sens de Hölder avec un ordre α en x_0 et est appelé **espace de Hölder d'ordre α en x_0** .

L'**exposant de Hölder de f en $x_0 \in \mathbb{R}$** est

$$h_f(x_0) := \sup\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^\alpha(x_0)\}.$$

Continuité höldérienne et exposant de Hölder uniformes

Soit $\alpha > 0$. Une fonction bornée f est **uniformément continue au sens de Hölder avec un ordre α (sur \mathbb{R})** s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un polynôme P de degré strictement plus petit que α tel que

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Notation : $\Lambda^\alpha(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions uniformément continues au sens de Hölder avec un ordre α (sur \mathbb{R}) et est appelé **espace de Hölder uniforme d'ordre α (sur \mathbb{R})**.

L'exposant uniforme de Hölder de f (sur \mathbb{R}) est

$$h_f(\mathbb{R}) := \sup\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^\alpha(\mathbb{R})\}.$$

Continuité höldérienne et exposant de Hölder uniformes

Soit $\alpha > 0$. Une fonction bornée f est **uniformément continue au sens de Hölder avec un ordre α (sur \mathbb{R})** s'il existe $C > 0$ tel que, pour tout $x_0 \in \mathbb{R}$, il existe un polynôme P de degré strictement plus petit que α tel que

$$|f(x) - P(x - x_0)| \leq C|x - x_0|^\alpha$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Notation : $\Lambda^\alpha(\mathbb{R})$ désigne l'espace des fonctions uniformément continues au sens de Hölder avec un ordre α (sur \mathbb{R}) et est appelé **espace de Hölder uniforme d'ordre α (sur \mathbb{R})**.

L'**exposant uniforme de Hölder de f (sur \mathbb{R})** est

$$h_f(\mathbb{R}) := \sup\{\alpha > 0 : f \in \Lambda^\alpha(\mathbb{R})\}.$$

Continuité höldérienne de fonctions particulières

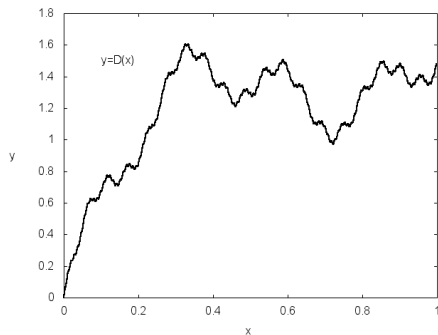
- Fonction de Darboux
- Bijection de Cantor
- Fonction de Riemann généralisée

1. Fonction de Darboux

En 1875, Darboux montre que la fonction D définie par

$$D(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)!x)}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

est continue et nulle part dérivable sur \mathbb{R} .



G. Darboux. *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Annales de l'Ecole Normale, 2(4):57-112, 1875.

Proposition

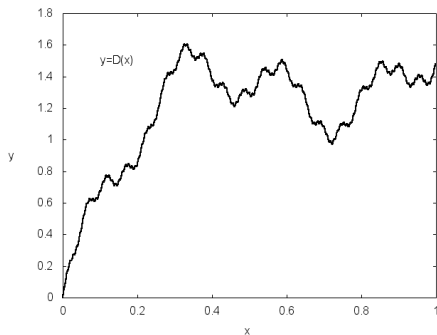
Pour tout $\delta \in (0, 1)$, $D \in \Lambda^{1-\delta}(\mathbb{R})$. Par conséquent, $h_D(\mathbb{R}) = 1$, $h_D(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et D est une fonction monofractale.

1. Fonction de Darboux

En 1875, Darboux montre que la fonction D définie par

$$D(x) := \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{\sin((n+1)!x)}{n!}, \quad x \in \mathbb{R},$$

est continue et nulle part dérivable sur \mathbb{R} .



G. Darboux. *Mémoire sur les fonctions discontinues*, Annales de l'Ecole Normale, 2(4):57-112, 1875.

Proposition

Pour tout $\delta \in (0, 1)$, $D \in \Lambda^{1-\delta}(\mathbb{R})$. Par conséquent, $h_D(\mathbb{R}) = 1$, $h_D(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}$ et D est une fonction monofractale.

2. Bijection de Cantor

En 1877, Cantor construit une bijection entre $[0, 1]$ et $[0, 1]^2$, définie à partir du développement en fractions continues des nombres réels.



G. Cantor. *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 84:242-258, 1877.

Une **fraction continue finie** est une expression de la forme

$$[a_1, \dots, a_n] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Les éléments a_1, \dots, a_n sont appelé **quotients partiels**.

2. Bijection de Cantor

En 1877, Cantor construit une bijection entre $[0, 1]$ et $[0, 1]^2$, définie à partir du développement en fractions continues des nombres réels.



G. Cantor. *Ein Beitrag zur Mannigfaltigkeitslehre*, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 84:242-258, 1877.

Une **fraction continue finie** est une expression de la forme

$$[a_1, \dots, a_n] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \frac{1}{\ddots + \frac{1}{a_n}}}}$$

où $a_1, \dots, a_n \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$. Les éléments a_1, \dots, a_n sont appelé **quotients partiels**.

Convergents

Soient $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ et $j \in \mathbb{N}$. On définit les quantités $p_j(\mathbf{a})$ et $q_j(\mathbf{a})$ par récurrence comme suit : $p_{-1}(\mathbf{a}) := 1$, $q_{-1}(\mathbf{a}) := 0$, $p_0(\mathbf{a}) := 0$, $q_0(\mathbf{a}) := 1$ et

$$\begin{cases} p_k(\mathbf{a}) := a_k p_{k-1}(\mathbf{a}) + p_{k-2}(\mathbf{a}) \\ q_k(\mathbf{a}) := a_k q_{k-1}(\mathbf{a}) + q_{k-2}(\mathbf{a}) \end{cases}$$

pour $k \in \{1, \dots, j\}$. Le quotient $\frac{p_j(\mathbf{a})}{q_j(\mathbf{a})}$ est appelé **convergent d'ordre j de \mathbf{a}** .

Proposition

Soit $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$. Pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\frac{p_j(\mathbf{a})}{q_j(\mathbf{a})} = [a_1, \dots, a_j].$$

De plus, la suite formée des convergents de \mathbf{a} converge.

Fractions continues infinies

Si $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, l'expression

$$[a_1, a_2, \dots] := \lim_{j \rightarrow +\infty} [a_1, a_2, \dots, a_j] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}}.$$

est appelée **fraction continue infinie**.

Notation : $I = [0, 1] \setminus ([0, 1] \cap \mathbb{Q})$

Proposition

Pour tout $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, $[a_1, a_2, \dots] \in I$. Inversement, pour tout $x \in I$, il existe $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ tel que $x = [a_1, a_2, \dots]$; de plus, \mathbf{a} est unique.

Fractions continues infinies

Si $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, l'expression

$$[a_1, a_2, \dots] := \lim_{j \rightarrow +\infty} [a_1, a_2, \dots, a_j] = \frac{1}{a_1 + \frac{1}{a_2 + \ddots}}.$$

est appelée **fraction continue infinie**.

Notation : $I = [0, 1] \setminus ([0, 1] \cap \mathbb{Q})$

Soit $x = [\mathbf{a}] \in I$. Pour $n \in \mathbb{N}$, on pose

$$I_n(x) := \{y = [\mathbf{b}] \in I : b_j = a_j \text{ si } j \in \{1, \dots, n\}\}$$

et cet ensemble est appelé **intervalle de rang** n de I . On a $I_{n+1}(x) \subset I_n(x) \subset I$ pour tout $n \in \mathbb{N}$ et

$$\bigcap_{n \in \mathbb{N}} I_n(x) = \{x\}.$$

Bijection de Cantor

Si $x = [a] \in I$, on pose

$$\mathcal{C}_1(x) := [a_1, a_3, \dots, a_{2j+1}, \dots] \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2(x) := [a_2, a_4, \dots, a_{2j}, \dots].$$

L'application

$$\mathcal{C} : I \rightarrow I^2 ; x \mapsto (\mathcal{C}_1(x), \mathcal{C}_2(x))$$

est une bijection et est appelée **bijection de Cantor**.

Remarque

Puisque les cardinaux de $[0, 1]$ et I sont égaux, \mathcal{C} peut être étendu en une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^2$.

Proposition

- La bijection de Cantor est continue sur I . C'est même un homéomorphisme entre I et I^2 .
- Toute extension à $[0, 1]$ de la bijection de Cantor est discontinue en tout point de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Bijection de Cantor

Si $x = [a] \in I$, on pose

$$\mathcal{C}_1(x) := [a_1, a_3, \dots, a_{2j+1}, \dots] \quad \text{et} \quad \mathcal{C}_2(x) := [a_2, a_4, \dots, a_{2j}, \dots].$$

L'application

$$\mathcal{C} : I \rightarrow I^2 ; x \mapsto (\mathcal{C}_1(x), \mathcal{C}_2(x))$$

est une bijection et est appelée **bijection de Cantor**.

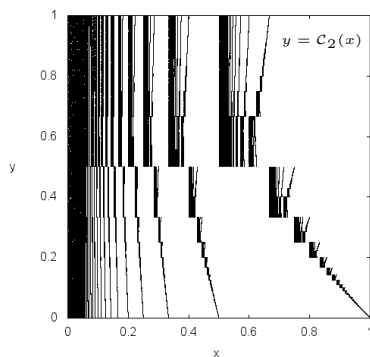
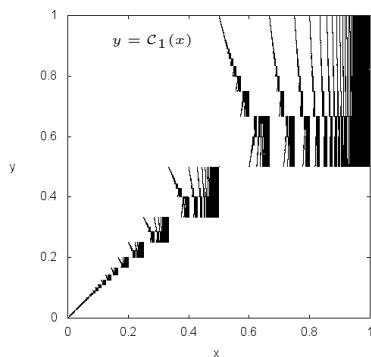
Remarque

Puisque les cardinaux de $[0, 1]$ et I sont égaux, \mathcal{C} peut être étendu en une bijection de $[0, 1]$ dans $[0, 1]^2$.

Proposition

- La bijection de Cantor est continue sur I . C'est même un homéomorphisme entre I et I^2 .
- Toute extension à $[0, 1]$ de la bijection de Cantor est discontinue en tout point de $[0, 1] \cap \mathbb{Q}$.

Bijection de Cantor



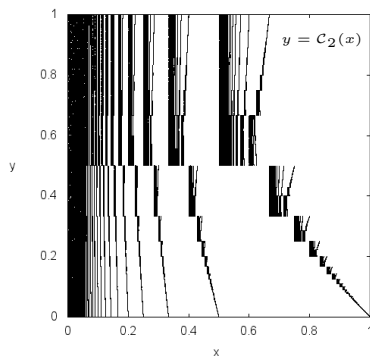
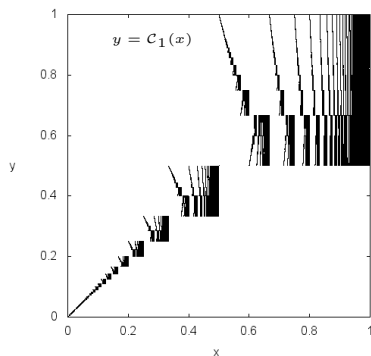
Proposition

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . Posons

$$F_f(x_0) := \liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{\log |f(x) - f(x_0)|}{\log |x - x_0|}.$$

- Si $F_f(x_0) \in [0, 1)$, alors $h_f(x_0) = F_f(x_0)$.
- Si $F_f(x_0) = 1$, alors $h_f(x_0) \geq 1$.

Bijection de Cantor



Proposition

Soient $x_0 \in \mathbb{R}$ et f une fonction définie sur un voisinage de x_0 . Posons

$$F_f(x_0) := \liminf_{x \rightarrow x_0} \frac{\log |f(x) - f(x_0)|}{\log |x - x_0|}.$$

- Si $F_f(x_0) \in [0, 1)$, alors $h_f(x_0) = F_f(x_0)$.
- Si $F_f(x_0) = 1$, alors $h_f(x_0) \geq 1$.

Théorème d'encadrement

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $x = [\mathbf{a}] \in I$ et $y \in I_n(x) \setminus I_{n+1}(x)$, alors on a

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\lceil n/2 \rceil} \log(a_{2j-1})}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+3} \log(a_j + 1) + \frac{C_1(n)}{n}} \leq \frac{\log |C_1(x) - C_1(y)|}{\log |x - y|} \leq \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\lceil n/2 \rceil + 3} \log(a_{2j-1} + 1) + \frac{C_2(n)}{n}}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log(a_j)}$$

avec

$$C_1(n) = \frac{\log(2)}{2} + \log \left(\max \left\{ \frac{a_{n+2} + 2}{a_{n+2} + 1}, \frac{a_{n+3} + 2}{a_{n+3} + 1} \right\} \right)$$

et

$$C_2(n) = \frac{\log(2)}{2} + \log \left(\max \left\{ \frac{a_{2\lceil n/2 \rceil + 3} + 2}{a_{2\lceil n/2 \rceil + 3} + 1}, \frac{a_{2\lceil n/2 \rceil + 5} + 2}{a_{2\lceil n/2 \rceil + 5} + 1} \right\} \right).$$



S. Nicolay, L. Simons. *About the Multifractal Nature of Cantor's Bijection*, Submitted.

Il y a un résultat similaire pour C_2 .

Bijection de Cantor

Théorème d'encadrement

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $x = [\mathbf{a}] \in I$ et $y \in I_n(x) \setminus I_{n+1}(x)$, alors on a

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\lceil n/2 \rceil} \log(a_{2j-1})}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+3} \log(a_j + 1) + \frac{C_1(n)}{n}} \leq \frac{\log |\mathcal{C}_1(x) - \mathcal{C}_1(y)|}{\log |x - y|} \leq \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\lceil n/2 \rceil + 3} \log(a_{2j-1} + 1) + \frac{C_2(n)}{n}}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log(a_j)}$$

avec

$$C_1(n) = \frac{\log(2)}{2} + \log \left(\max \left\{ \frac{a_{n+2} + 2}{a_{n+2} + 1}, \frac{a_{n+3} + 2}{a_{n+3} + 1} \right\} \right)$$

et

$$C_2(n) = \frac{\log(2)}{2} + \log \left(\max \left\{ \frac{a_{2\lceil n/2 \rceil + 3} + 2}{a_{2\lceil n/2 \rceil + 3} + 1}, \frac{a_{2\lceil n/2 \rceil + 5} + 2}{a_{2\lceil n/2 \rceil + 5} + 1} \right\} \right).$$



S. Nicolay, L. Simons. *About the Multifractal Nature of Cantor's Bijection*, Submitted.

Il y a un résultat similaire pour \mathcal{C}_2 .

Bijection de Cantor

Remarque

Soient les suites $\mathbf{a}^{(1)}, \mathbf{a}^{(2)}, \mathbf{a}^{(3)} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ définies par

$$a_j^{(1)} := \begin{cases} r^j & \text{si } j \text{ est pair} \\ 1 & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases}, \quad a_j^{(2)} := r^j \quad \text{and} \quad a_j^{(3)} := \begin{cases} 1 & \text{si } j \text{ est pair} \\ r^j & \text{si } j \text{ est impair} \end{cases}$$

pour $j \in \mathbb{N}$, où $r > 1$. Par le théorème d'encadrement, on a

$$h_{\mathcal{C}_1}([\mathbf{a}^{(1)}]) = 0, \quad h_{\mathcal{C}_1}([\mathbf{a}^{(2)}]) = \frac{1}{2} \quad \text{and} \quad h_{\mathcal{C}_1}([\mathbf{a}^{(3)}]) \geq 1.$$

Corollaire

La fonction \mathcal{C}_1 est multifractale.

Il y a un résultat similaire pour \mathcal{C}_2 .

Bijection de Cantor

Théorème d'encadrement

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $x = [\mathbf{a}] \in I$ et $y \in I_n(x) \setminus I_{n+1}(x)$, alors on a

$$\frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \log(a_{2j-1})}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{n+3} \log(a_j + 1) + \frac{C_1(n)}{n}} \leq \frac{\log |f_1(x) - f_1(y)|}{\log |x - y|} \leq \frac{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor + 3} \log(a_{2j-1} + 1) + \frac{C_2(n)}{n}}{\frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log(a_j)}$$

avec

$$C_1(n) = \frac{\log(2)}{2} + \log \left(\max \left\{ \frac{a_{n+2} + 2}{a_{n+2} + 1}, \frac{a_{n+3} + 2}{a_{n+3} + 1} \right\} \right)$$

et

$$C_2(n) = \frac{\log(2)}{2} + \log \left(\max \left\{ \frac{a_{2\lfloor n/2 \rfloor + 3} + 2}{a_{2\lfloor n/2 \rfloor + 3} + 1}, \frac{a_{2\lfloor n/2 \rfloor + 5} + 2}{a_{2\lfloor n/2 \rfloor + 5} + 1} \right\} \right).$$

Bijection de Cantor

Théorème ergodique

Pour tout $k \in \mathbb{N} \cup \{0\}$, presque toute suite $\mathbf{a} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ satisfait

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log(a_j + k) &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log(a_{2j} + k) \\ &= \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \log(a_{2j-1} + k) = \log(\kappa_k), \end{aligned}$$

$$\text{où } \kappa_k := \prod_{j=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{j(j+2)} \right)^{\log(j+k)/\log(2)}.$$



C. Ryll-Nardzewski. *On the Ergodic Theorems (II): Ergodic Theory of Continued Fractions*. *Studia Mathematica*, 12:74-79, 1950.



R. Nair. *On the Metrical Theory of Continued Fractions*. In *Proceedings of the American Mathematical Society*, volume 120, 1994.

Exposant de Hölder de la bijection de Cantor

En combinant le théorème d'encadrement et le théorème ergodique, on obtient l'estimation suivante de l'exposant de Hölder des composantes de la bijection de Cantor.

Corollaire

Pour presque tout $x \in I$, on a

$$h_{\mathcal{C}_1}(x), h_{\mathcal{C}_2}(x) \in \left[\frac{\log(\kappa_0)}{2 \log(\kappa_1)}, \frac{\log(\kappa_1)}{2 \log(\kappa_0)} \right].$$

En particulier, l'exposant de Hölder de \mathcal{C}_1 et \mathcal{C}_2 est compris entre 0.35 et 0.72 presque partout.



S. Nicolay, L. Simons. *About the Multifractal Nature of Cantor's Bijection*, Submitted.

Exposant de Hölder de la bijection de Cantor

Théorème d'encadrement Bis

Soit $n \in \mathbb{N}$. Si $x = [\mathbf{a}] \in I$ et $y \in I_n(x) \setminus I_{n+1}(x)$, alors on a

$$\frac{2 \log(q_{\lceil n/2 \rceil}(\mathbf{a}'))}{\log(2) + 2 \log(q_{n+3}(\mathbf{c}))} \leq \frac{\log |\mathcal{C}_1(x) - \mathcal{C}_1(y)|}{\log |x - y|} \leq \frac{\log(2) + 2 \log(q_{\lceil n/2 \rceil + 3}(\mathbf{d}))}{2 \log(q_n(\mathbf{a}))}$$

avec $\mathbf{a}' := (a_{2j-1})_{j \in \mathbb{N}}$,

$$c_j := \begin{cases} a_j & \text{si } j \neq j_0 \\ a_j + 1 & \text{si } j = j_0 \end{cases} \quad \text{and} \quad d_j := \begin{cases} a_{2j-1} & \text{si } j \neq j'_0 \\ a_{2j-1} + 1 & \text{si } j = j'_0 \end{cases}$$

où j_0 est égal à $n + 2$ ou à $n + 3$ et j'_0 à $\lceil n/2 \rceil + 2$ ou à $\lceil n/2 \rceil + 3$ (suivant les positions de y et $\mathcal{C}_1(y)$ par rapport à celles de x et $\mathcal{C}_1(x)$).

Il y a un résultat similaire pour \mathcal{C}_2 .

Exposant de Hölder de la bijection de Cantor

Théorème de Lévy

Pour presque tout $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(q_n(\mathbf{b})) = \frac{\pi^2}{12 \log(2)}.$$



P. Lévy. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. In *Monographies des Probabilités*, volume I. Gauthier-Villars, 2d édition, 1954.

De plus, on a directement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+3} \log(q_{n+3}(\mathbf{c})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(q_n(\mathbf{a}))$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lceil n/2 \rceil + 3} \log(q_{\lceil n/2 \rceil + 3}(\mathbf{d})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \log(q_{\lceil n/2 \rceil}(\mathbf{a}'))$$

(si toutes ces limites existent).

Il ne reste plus qu'à montrer que ces quatre limites sont égales, ce qui n'est pas évident...

Exposant de Hölder de la bijection de Cantor

Théorème de Lévy

Pour presque tout $\mathbf{b} \in \mathbb{N}^{\mathbb{N}}$, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(q_n(\mathbf{b})) = \frac{\pi^2}{12 \log(2)}.$$



P. Lévy. *Théorie de l'addition des variables aléatoires*. In *Monographies des Probabilités*, volume I. Gauthier-Villars, 2d édition, 1954.

De plus, on a directement

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n+3} \log(q_{n+3}(\mathbf{c})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(q_n(\mathbf{a}))$$

et

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{\lceil n/2 \rceil + 3} \log(q_{\lceil n/2 \rceil + 3}(\mathbf{d})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{2}{n} \log(q_{\lceil n/2 \rceil}(\mathbf{a}'))$$

(si toutes ces limites existent).

Il ne reste plus qu'à montrer que ces quatre limites sont égales, ce qui n'est pas évident...

Exposant de Hölder de la bijection de Cantor

Proposition

Soit $x = [\mathbf{a}] \in I$ et soit $\mathbf{a}' := (a_{2j-1})_{j \in \mathbb{N}}$. Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(q_n(\mathbf{a})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(q_n(\mathbf{a}')) = \frac{\pi^2}{12 \log(2)},$$

alors on a

$$h_{\mathcal{C}_1}(x) = \frac{1}{2}.$$

Il y a un résultat similaire pour \mathcal{C}_2 .

Conjecture

Pour presque tout $x \in [0, 1]$, on a

$$h_{\mathcal{C}_1}(x) = h_{\mathcal{C}_2}(x) = \frac{1}{2}.$$

Exposant de Hölder de la bijection de Cantor

Proposition

Soit $x = [\mathbf{a}] \in I$ et soit $\mathbf{a}' := (a_{2j-1})_{j \in \mathbb{N}}$. Si

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(q_n(\mathbf{a})) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{1}{n} \log(q_n(\mathbf{a}')) = \frac{\pi^2}{12 \log(2)},$$

alors on a

$$h_{\mathcal{C}_1}(x) = \frac{1}{2}.$$

Il y a un résultat similaire pour \mathcal{C}_2 .

Conjecture

Pour presque tout $x \in [0, 1]$, on a

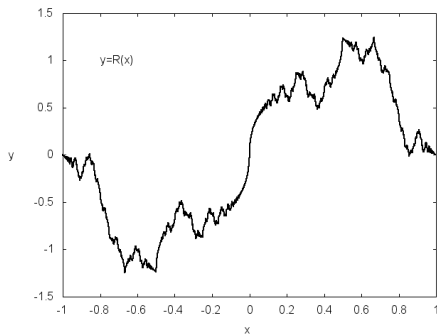
$$h_{\mathcal{C}_1}(x) = h_{\mathcal{C}_2}(x) = \frac{1}{2}.$$

3. Fonction de Riemann généralisée

À la fin du 19^e siècle, Riemann propose la fonction R définie par

$$R(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^2 x)}{n^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

comme fonction continue nulle part dérivable.



Théorème

La fonction R n'est seulement dérivable qu'en les nombres rationnels $\frac{2p+1}{2q+1}$ avec $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}_0$.



G. H. Hardy. *Weierstrass's Non-Differentiable Function*. Transactions of the American Mathematical Society, 17:301-325, 1916.



J. L. Gerver. *The Differentiability of the Riemann Function at Certain Rational Multiples of π* . American Journal of Mathematics, 92:33-55, 1970.

Fonction de Riemann généralisée

Théorème

On a $R \in \Lambda^{1/2}(\mathbb{R})$ et $h_R(\mathbb{R}) = 1/2$.



M. Holschneider, P. Tchamichian. *Pointwise Analysis of Riemann's "Nondifferentiable" Function*. *Inventiones Mathematicae*, 105:157-175, 1991.



S. Jaffard. *The Spectrum of Singularities of Riemann's Function*. *Revista Matemática Iberoamericana*, 12(2):441-460, 1996.



S. Jaffard, Y. Meyer. *Wavelet Methods for Pointwise Regularity and Local Oscillations of Functions*. In *Memoirs of the American Mathematical Society*, volume 587. American Mathematical Society, 1996.

Fonction de Riemann généralisée

Théorème

On a $R \in \Lambda^{1/2}(\mathbb{R})$ et $h_R(\mathbb{R}) = 1/2$.

Théorème

- Pour $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in \mathbb{N}_0$, on a

$$h_R \left(\frac{2p+1}{2q+1} \right) = \frac{3}{2}.$$



S. Jaffard. *The Spectrum of Singularities of Riemann's Function*. *Revista Matemática Iberoamericana*, 12(2):441-460, 1996.



S. Jaffard, Y. Meyer. *Wavelet Methods for Pointwise Regularity and Local Oscillations of Functions*. In *Memoirs of the American Mathematical Society*, volume 587. American Mathematical Society, 1996.

Fonction de Riemann généralisée

Théorème

On a $R \in \Lambda^{1/2}(\mathbb{R})$ et $h_R(\mathbb{R}) = 1/2$.

Théorème

- Si $x = [\mathbf{a}] \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, alors

$$h_R(x) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2\tau(x)}$$

avec $\tau(x) := \limsup_{n \rightarrow +\infty} \tau_n$, où $\tau_n \geq 2$ ($n \in \mathbb{N}$) est défini par

$$\left| x - \frac{p_n(\mathbf{a})}{q_n(\mathbf{a})} \right| \leq \frac{1}{q_n^{\tau_n}(\mathbf{a})}$$

et $(p_n(\mathbf{a})/q_n(\mathbf{a}))_{n \in \mathbb{N}}$ est la suite des convergents de \mathbf{a} telle que $p_n(\mathbf{a})$ et $q_n(\mathbf{a})$ ne sont pas simultanément impairs.



S. Jaffard. *The Spectrum of Singularities of Riemann's Function*. *Revista Matemática Iberoamericana*, 12(2):441-460, 1996.




S. Jaffard, Y. Meyer. *Wavelet Methods for Pointwise Regularity and Local Oscillations of Functions*. In *Memoirs of the American Mathematical Society*, volume 587. American Mathematical Society, 1996.

Fonction de Riemann généralisée

La **fonction de Riemann généralisée** est la fonction (continue et bornée) $R_{\alpha,\beta}$ ($\alpha > 1$ et $\beta > 0$) définie par

$$R_{\alpha,\beta}(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^\beta x)}{n^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

- Si $\beta \in (0, \alpha - 1)$, alors $R_{\alpha,\beta}$ est continûment dérivable sur \mathbb{R} .
- Si $\beta \geq \alpha + 1$, alors $R_{\alpha,\beta}$ est une fonction continue nulle part dérivable sur \mathbb{R} .
 [W. Luther. *The Differentiability of Fourier Gap Series and "Riemann's Example" of a Continuous, Nondifferentiable Function.* Journal Approximation Theory, 48:303-321, 1986.](#)
- Si $\beta \in [\alpha - 1, \alpha + 1)$, quelques résultats partiels concernant la dérivabilité sont connus.

Fonction de Riemann généralisée

La **fonction de Riemann généralisée** est la fonction (continue et bornée) $R_{\alpha,\beta}$ ($\alpha > 1$ et $\beta > 0$) définie par

$$R_{\alpha,\beta}(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^\beta x)}{n^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Théorème

Si $\beta > \alpha - 1$, alors $R_{\alpha,\beta} \in \Lambda^{\frac{\alpha-1}{\beta}}(\mathbb{R})$.



F. Chamizo, A. Ubis. *Some Fourier Series with Gaps*. Journal d'Analyse Mathématique, 101:179-197, 2007.



J. Johnsen. *Simple Proofs of Nowhere-Differentiability for Weierstrass's Function and Cases of Slow Growth*. Journal of Fourier Analysis and Applications, 16:17-33, 2010.

Dans certains cas particuliers, des résultats ponctuels sont également connus...

Fonction de Riemann généralisée

La **fonction de Riemann généralisée** est la fonction (continue et bornée) $R_{\alpha,\beta}$ ($\alpha > 1$ et $\beta > 0$) définie par

$$R_{\alpha,\beta}(x) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^\beta x)}{n^\alpha}, \quad x \in \mathbb{R}.$$

Théorème

- Si $\beta > \alpha - 1$, alors $R_{\alpha,\beta} \in \Lambda^{\frac{\alpha-1}{\beta}}(\mathbb{R})$.
- Si $\beta = \alpha - 1$, alors $R_{\alpha,\alpha-1} \in \Lambda^{1-\delta}(\mathbb{R})$ pour tout $\delta \in (0, 1)$.

De plus, pour $\beta \geq \alpha - 1$, on a

$$h_{R_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}) = \frac{\alpha - 1}{\beta}.$$



F. Bastin, S. Nicolay, L. Simons. *About the Uniform Hölder Continuity of Generalized Riemann Function*. *Mediterranean Journal of Mathematics*, published online:1-17, 2014.

Transformée en ondelette continue

Une fonction ψ est une **ondelette** si $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et si elle vérifie la condition d'admissibilité :

$$\xi \mapsto \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} \in L^1(\mathbb{R}).$$

La **transformée en ondelette continue** de la fonction bornée ou de carré intégrable f (par rapport à l'ondelette ψ) est la fonction $\mathcal{W}_\psi f$ définie par

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{a} \overline{\psi} \left(\frac{x - b}{a} \right) dx, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

Exemple

En prenant l'ondelette de Lusin ψ_L définie par

$$\psi_L(x) := \frac{1}{\pi(x+i)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

on a

$$\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha, \beta}(a, b) = ia\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\pi n^\beta(b+ia)}}{n^{\alpha-\beta}}, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

Transformée en ondelette continue

Une fonction ψ est une **ondelette** si $\psi \in L^1(\mathbb{R}) \cap L^2(\mathbb{R})$ et si elle vérifie la condition d'admissibilité :

$$\xi \mapsto \frac{|\hat{\psi}(\xi)|^2}{|\xi|} \in L^1(\mathbb{R}).$$

La **transformée en ondelette continue** de la fonction bornée ou de carré intégrable f (par rapport à l'ondelette ψ) est la fonction $\mathcal{W}_\psi f$ définie par

$$\mathcal{W}_\psi f(a, b) := \int_{\mathbb{R}} f(x) \frac{1}{a} \overline{\psi} \left(\frac{x-b}{a} \right) dx, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

Exemple

En prenant l'ondelette de Lusin ψ_L définie par

$$\psi_L(x) := \frac{1}{\pi(x+i)^2}, \quad x \in \mathbb{R},$$

on a

$$\mathcal{W}_{\psi_L} R_{\alpha, \beta}(a, b) = ia\pi \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{e^{i\pi n^\beta(b+ia)}}{n^{\alpha-\beta}}, \quad a > 0, b \in \mathbb{R}.$$

Transformée en ondelette continue

Théorème

Soient $\alpha \in (0, 1)$, ψ une ondelette telle que $x \mapsto x^\alpha \psi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ et f une fonction continue, bornée et à faible oscillation autour de 0.

- On a $f \in \Lambda^\alpha(\mathbb{R})$ si et seulement s'il existe $C > 0$ tel que

$$|\mathcal{W}_\psi f(a, b)| \leq C a^\alpha$$

pour tous $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$.



S. Jaffard. *The Spectrum of Singularities of Riemann's Function*. *Revista Matemática Iberoamericana*, 12(2):441-460, 1996.

Transformée en ondelette continue

Théorème

Soient $\alpha \in (0, 1)$, ψ une ondelette telle que $x \mapsto x^\alpha \psi(x) \in L^1(\mathbb{R})$ et f une fonction continue, bornée et à faible oscillation autour de 0.

- Soit $x_0 \in \mathbb{R}$. Si $f \in \Lambda^\alpha(x_0)$, alors il existe $C > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$|\mathcal{W}_\psi f(a, b)| \leq C a^\alpha \left(1 + \left(\frac{|b - x_0|}{a} \right)^\alpha \right)$$

pour tous $a \in (0, \eta)$ et $b \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$. Inversement, s'il existe $\alpha' \in (0, \alpha)$, $C > 0$ et $\eta > 0$ tels que

$$|\mathcal{W}_\psi f(a, b)| \leq C a^\alpha \left(1 + \left(\frac{|b - x_0|}{a} \right)^{\alpha'} \right)$$

pour tous $a \in (0, \eta)$ et $b \in (x_0 - \eta, x_0 + \eta)$, alors $f \in \Lambda^\alpha(x_0)$.

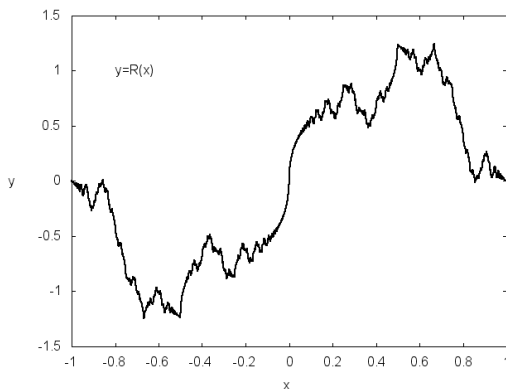


S. Jaffard. *The Spectrum of Singularities of Riemann's Function*. *Revista Matemática Iberoamericana*, 12(2):441-460, 1996.

Fonction de Riemann généralisée

Pour $\alpha > 1$ et $\beta \geq \alpha - 1$, on sait que

$$h_{R_{\alpha,\beta}}(\mathbb{R}) = \frac{\alpha - 1}{\beta}.$$



Fonction de Riemann généralisée

En fait, pour $x \in \mathbb{R}$, on a

$$R_{\alpha,\beta}(x) = \sin(\pi x) + \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{\sin(\pi n^\beta x)}{n^\alpha}.$$

Proposition

- Soit $\alpha > 1$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a

$$\lim_{\beta \rightarrow +\infty} \int_a^b R_{\alpha,\beta}(x) dx = \int_a^b \sin(\pi x) dx.$$

- Soient $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{N}$. La fonction $R_{\alpha,\beta}$ est périodique de période 2 et on a

$$\int_{-1}^1 (R_{\alpha,\beta}(x) - \sin(\pi x))^2 dx = \zeta(2\alpha) - 1.$$



F. Bastin, S. Nicolay, L. Simons. *About the Uniform Hölder Continuity of Generalized Riemann Function*. *Mediterranean Journal of Mathematics*, published online:1-17, 2014.

Fonction de Riemann généralisée

Remarque

- Soit $\beta > 0$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_a^b R_{\alpha, \beta}(x) dx = \int_a^b \sin(\pi x) dx.$$

- Soient $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{N}$. La fonction $R_{\alpha, \beta}$ est périodique de période 2 et on a

$$\int_{-1}^1 (R_{\alpha, \beta}(x) - \sin(\pi x))^2 dx = \zeta(2\alpha) - 1.$$

Pour tout $\beta > 0$, la fonction $R_{\alpha, \beta}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ lorsque α tend vers l'infini.

Fonction de Riemann généralisée

Remarque

- Soit $\beta > 0$. Pour tous $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $a < b$, on a

$$\lim_{\alpha \rightarrow +\infty} \int_a^b R_{\alpha, \beta}(x) dx = \int_a^b \sin(\pi x) dx.$$

- Soient $\alpha > 1$ et $\beta \in \mathbb{N}$. La fonction $R_{\alpha, \beta}$ est périodique de période 2 et on a

$$\int_{-1}^1 (R_{\alpha, \beta}(x) - \sin(\pi x))^2 dx = \zeta(2\alpha) - 1.$$

Pour tout $\beta > 0$, la fonction $R_{\alpha, \beta}$ converge uniformément sur \mathbb{R} vers la fonction $x \mapsto \sin(\pi x)$ lorsque α tend vers l'infini.


Ondelettes non-stationnaires

- Base orthonormée d'ondelettes non-stationnaire
- Transformée en ondelette continue non-stationnaire

Base orthonormée d'ondelettes non-stationnaire

Vers la non-stationnarité. . .

- Construction d'une base orthonormée d'ondelettes (non-stationnaire) composées d'exponentielles-polynômes en utilisant une analyse multirésolution (non-stationnaire) basée sur les exponentielles-splines

 C. Vonesch, T. Blu, M. Unser. *Generalized Daubechies Wavelet Families*. IEEE on Signal Processing, 55(9):4415-4429, 2007.

- Construction de bases orthonormées d'ondelettes régulières à support compact (non-stationnaires) dans les espaces de Sobolev

 F. Bastin, P. Laubin. *Regular Compactly Supported Wavelets in Sobolev Spaces*. Duke Mathematical Journal, 87(3):481-508, 1997.

 F. Bastin, P. Laubin. *Compactly Supported Wavelets in Sobolev Spaces of Integer Order*. Applied Computational Harmonic Analysis, 4(1):51-57, 1997.


- Construction d'une base orthonormée d'ondelettes infiniment dérivables et à support compact (non-stationnaire)

 N. Dyn, A. Ron. *Multiresolution Analysis by Infinitely Differentiable Compactly Supported Functions*, Applied Computational Harmonic Analysis, 2(1):15-20, 1995.


Base orthonormée d'ondelettes non-stationnaire


Vers la non-stationnarité. . .

- Construction d'une base orthonormée d'ondelettes (non-stationnaire) composées d'exponentielles-polynômes en utilisant une analyse multirésolution (non-stationnaire) basée sur les exponentielles-splines

 C. Vonesch, T. Blu, M. Unser. *Generalized Daubechies Wavelet Families*. IEEE on Signal Processing, 55(9):4415-4429, 2007.

- Construction de bases orthonormées d'ondelettes régulières à support compact (non-stationnaires) dans les espaces de Sobolev

 F. Bastin, P. Laubin. *Regular Compactly Supported Wavelets in Sobolev Spaces*. Duke Mathematical Journal, 87(3):481-508, 1997.

 F. Bastin, P. Laubin. *Compactly Supported Wavelets in Sobolev Spaces of Integer Order*. Applied Computational Harmonic Analysis, 4(1):51-57, 1997.


- Construction d'une base orthonormée d'ondelettes infiniment dérivables et à support compact (non-stationnaire)

 N. Dyn, A. Ron. *Multiresolution Analysis by Infinitely Differentiable Compactly Supported Functions*, Applied Computational Harmonic Analysis, 2(1):15-20, 1995.

Base orthonormée d'ondelettes non-stationnaire


Vers la non-stationnarité. . .

- Construction d'une base orthonormée d'ondelettes (non-stationnaire) composées d'exponentielles-polynômes en utilisant une analyse multirésolution (non-stationnaire) basée sur les exponentielles-splines


 C. Vonesch, T. Blu, M. Unser. *Generalized Daubechies Wavelet Families*. IEEE on Signal Processing, 55(9):4415-4429, 2007.

- Construction de bases orthonormées d'ondelettes régulières à support compact (non-stationnaires) dans les espaces de Sobolev

 F. Bastin, P. Laubin. *Regular Compactly Supported Wavelets in Sobolev Spaces*. Duke Mathematical Journal, 87(3):481-508, 1997.

 F. Bastin, P. Laubin. *Compactly Supported Wavelets in Sobolev Spaces of Integer Order*. Applied Computational Harmonic Analysis, 4(1):51-57, 1997.

- Construction d'une base orthonormée d'ondelettes infiniment dérivables et à support compact (non-stationnaire)

 N. Dyn, A. Ron. *Multiresolution Analysis by Infinitely Differentiable Compactly Supported Functions*, Applied Computational Harmonic Analysis, 2(1):15-20, 1995.

Base orthonormée d'ondelettes non-stationnaire

Cas stationnaire

Une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme

$$2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

où la fonction ψ est appelée ondelette mère.

Cas non-stationnaire

Une **base orthonormée d'ondelettes non-stationnaire** de $L^2(\mathbb{R})$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme

$$2^{j/2}\psi^{(j)}(2^j \cdot -k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

où les fonctions $\psi^{(j)}$ sont encore appelées **ondelettes mères**.



C. de Boor, R. A. DeVore, A. Ron. *On the Construction of Multivariate (Pre)Wavelets*, Constructive Approximation, 9:123-166, 1993.



F. Bastin, P. Laubin. *Regular Compactly Supported Wavelets in Sobolev Spaces*. Duke Mathematical Journal, 87(3):481-508, 1997.

Base orthonormée d'ondelettes non-stationnaire

Cas stationnaire

Une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme

$$2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k), \quad j, k \in \mathbb{Z}.$$

où la fonction ψ est appelée ondelette mère.

Cas non-stationnaire

Une **base orthonormée d'ondelettes non-stationnaire** de $L^2(\mathbb{R})$ est une base orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$ de la forme

$$2^{j/2}\psi^{(j)}(2^j \cdot -k), \quad j, k \in \mathbb{Z},$$

où les fonctions $\psi^{(j)}$ sont encore appelées **ondelettes mères**.



C. de Boor, R. A. DeVore, A. Ron. *On the Construction of Multivariate (Pre)Wavelets*, *Constructive Approximation*, 9:123-166, 1993.



F. Bastin, P. Laubin. *Regular Compactly Supported Wavelets in Sobolev Spaces*. *Duke Mathematical Journal*, 87(3):481-508, 1997.

Base orthonormée d'ondelettes non-stationnaire

Théorème (Cas stationnaire)

Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\|\psi\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$. Alors, $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^j \xi)|^2 = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \hat{\psi}(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}(2^j(\xi + 2q\pi))} = 0$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ et pour tout $q \in 2\mathbb{Z} + 1$.



G. Gripenberg. *A Necessary and Sufficient Condition for the Existence of a Father Wavelet*. *Studia Mathematica*, 114(3):207-226, 1995.



E. Hernández, G. Weiss. *A First Course on Wavelets*. In S. G. Krantz, editor, *Studies in Advanced Mathematics*. CRC Press, 1996.

Base orthonormée d'ondelettes non-stationnaire

Théorème (Cas non-stationnaire)

Pour $j \in \mathbb{Z}$, soit $\psi^{(j)} \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\|\psi^{(j)}\|_{L^2(\mathbb{R})} = 1$.

- Si on a

$$\sum_{j \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}^{(-j)}(2^j \xi)|^2 = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ et

$$\sum_{j=0}^{+\infty} \hat{\psi}^{(p-j)}(2^j \xi) \overline{\hat{\psi}^{(p-j)}(2^j(\xi + 2q\pi))} = 0$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ et pour tous $p \in \mathbb{Z}$ et $q \in 2\mathbb{Z} + 1$, alors $\{2^{j/2} \psi^{(j)}(2^j \cdot -k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée d'ondelettes non-stationnaire de $L^2(\mathbb{R})$.

- La réciproque est vraie s'il existe $\alpha, A > 0$ tels que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^\alpha |\hat{\psi}^{(-j)}(\xi)|^2 d\xi \leq A.$$



F. Bastin, L. Simons. *About Nonstationary Multiresolution Analysis and Wavelets*. Results in Mathematics, 63(1):485-500, 2013.

Analyse multirésolution non-stationnaire

Cas stationnaire

Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite croissante $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ tels que

- $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$,
- pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $f \in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot - k) \in V_0$,
- pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $j \in \mathbb{Z}$, on a $f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j+1}$,
- il existe $\varphi \in V_0$ tel que $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_0 .

La fonction φ est appelée fonction d'échelle.

Cas non-stationnaire

Une analyse multirésolution non-stationnaire de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite croissante $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ tels que

- $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$,
- pour $j \in \mathbb{Z}$, il existe $\varphi^{(j)} \in V_j$ tel que $\{2^{j/2} \varphi^{(j)}(2^j \cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_j .

Les fonctions $\varphi^{(j)}$, $j \in \mathbb{Z}$, sont appelées **fonctions d'échelle**.

Analyse multirésolution non-stationnaire

Cas stationnaire

Une analyse multirésolution de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite croissante $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ tels que

- $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$,
- pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $k \in \mathbb{Z}$, on a $f \in V_0 \Leftrightarrow f(\cdot - k) \in V_0$,
- pour $f \in L^2(\mathbb{R})$ et $j \in \mathbb{Z}$, on a $f \in V_j \Leftrightarrow f(2 \cdot) \in V_{j+1}$,
- il existe $\varphi \in V_0$ tel que $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_0 .

La fonction φ est appelée fonction d'échelle.

Cas non-stationnaire

Une **analyse multirésolution non-stationnaire** de $L^2(\mathbb{R})$ est une suite croissante $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ de sous-espaces vectoriels fermés de $L^2(\mathbb{R})$ tels que

- $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$ et $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$,
- pour $j \in \mathbb{Z}$, il existe $\varphi^{(j)} \in V_j$ tel que $\{2^{j/2} \varphi^{(j)}(2^j \cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée de V_j .

Les fonctions $\varphi^{(j)}$, $j \in \mathbb{Z}$, sont appelées **fonctions d'échelle**.

Analyse multirésolution non-stationnaire

Cas stationnaire

Soit $\varphi \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$.
Posons

$$V_0 := \overline{\text{span}\{\varphi(\cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}},$$
$$V_j := \{f \in L^2(\mathbb{R}) : f(2^{-j} \cdot) \in V_0\}, \quad j \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Cas non-stationnaire

Pour $j \in \mathbb{Z}$, soit $\varphi^{(j)} \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\{2^{j/2}\varphi^{(j)}(2^j \cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}$ est une famille orthonormée de $L^2(\mathbb{R})$. Posons

$$V_j := \overline{\text{span}\{2^{j/2}\varphi^{(j)}(2^j \cdot - k) : k \in \mathbb{Z}\}}, \quad j \in \mathbb{Z}.$$

Quelles conditions doivent satisfaire les fonctions d'échelle pour que la suite $(V_j)_{j \in \mathbb{Z}}$ ainsi définie forme une analyse multirésolution (non-stationnaire) ?

Analyse multirésolution non-stationnaire

- On a $V_j \subseteq V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, si et seulement si

Cas stationnaire

$\exists m_0 \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 2π -périodique (appelé filtre) tel que

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

- On a $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si

Cas stationnaire

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

- On a $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

Cas stationnaire

Cas non-stationnaire

$\forall j \in \mathbb{Z}$, $\exists m_0^{(j+1)} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

2π -périodique (appelé **filtre**) tel que

$$\hat{\varphi}^{(j)}(2\xi) = m_0^{(j+1)}(\xi)\hat{\varphi}^{(j+1)}(\xi)$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Cas non-stationnaire

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\varphi}^{(j)}(2^{-j}\xi)| = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Cas non-stationnaire

si $\exists A, \alpha > 0$ tels que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^\alpha |\hat{\varphi}^{(-j)}(\xi)|^2 d\xi \leq A.$$

Analyse multirésolution non-stationnaire

- On a $V_j \subseteq V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, si et seulement si

Cas stationnaire

$\exists m_0 \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 2π -périodique (appelé filtre) tel que

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

- On a $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si

Cas stationnaire

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

- On a $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

Cas stationnaire

Cas non-stationnaire

$\forall j \in \mathbb{Z}$, $\exists m_0^{(j+1)} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

2π -périodique (appelé **filtre**) tel que

$$\hat{\varphi}^{(j)}(2\xi) = m_0^{(j+1)}(\xi)\hat{\varphi}^{(j+1)}(\xi)$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Cas non-stationnaire

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\varphi}^{(j)}(2^{-j}\xi)| = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Cas non-stationnaire

si $\exists A, \alpha > 0$ tels que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^\alpha |\hat{\varphi}^{(-j)}(\xi)|^2 d\xi \leq A.$$

Analyse multirésolution non-stationnaire

- On a $V_j \subseteq V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, si et seulement si

Cas stationnaire

$\exists m_0 \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 2π -périodique (appelé filtre) tel que

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

- On a $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si

Cas stationnaire

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

- On a $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

Cas stationnaire

Cas non-stationnaire

$\forall j \in \mathbb{Z}, \exists m_0^{(j+1)} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

2π -périodique (appelé **filtre**) tel que

$$\hat{\varphi}^{(j)}(2\xi) = m_0^{(j+1)}(\xi)\hat{\varphi}^{(j+1)}(\xi)$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Cas non-stationnaire

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\varphi}^{(j)}(2^{-j}\xi)| = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Cas non-stationnaire

si $\exists A, \alpha > 0$ tels que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^\alpha |\hat{\varphi}^{(-j)}(\xi)|^2 d\xi \leq A.$$

Analyse multirésolution non-stationnaire

- On a $V_j \subseteq V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, si et seulement si

Cas stationnaire

$\exists m_0 \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 2π -périodique (appelé filtre) tel que

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

- On a $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si

Cas stationnaire

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

- On a $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

Cas stationnaire

Cas non-stationnaire

$\forall j \in \mathbb{Z}$, $\exists m_0^{(j+1)} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

2π -périodique (appelé **filtre**) tel que

$$\hat{\varphi}^{(j)}(2\xi) = m_0^{(j+1)}(\xi)\hat{\varphi}^{(j+1)}(\xi)$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Cas non-stationnaire

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\varphi}^{(j)}(2^{-j}\xi)| = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Cas non-stationnaire

si $\exists A, \alpha > 0$ tels que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^\alpha |\hat{\varphi}^{(-j)}(\xi)|^2 d\xi \leq A.$$

Analyse multirésolution non-stationnaire

- On a $V_j \subseteq V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, si et seulement si

Cas stationnaire

$\exists m_0 \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 2π -périodique (appelé filtre) tel que

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

- On a $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si

Cas stationnaire

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

- On a $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

Cas stationnaire

Cas non-stationnaire

$\forall j \in \mathbb{Z}$, $\exists m_0^{(j+1)} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

2π -périodique (appelé **filtre**) tel que

$$\hat{\varphi}^{(j)}(2\xi) = m_0^{(j+1)}(\xi)\hat{\varphi}^{(j+1)}(\xi)$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Cas non-stationnaire

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\varphi}^{(j)}(2^{-j}\xi)| = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Cas non-stationnaire

si $\exists A, \alpha > 0$ tels que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^\alpha |\hat{\varphi}^{(-j)}(\xi)|^2 d\xi \leq A.$$

Analyse multirésolution non-stationnaire

- On a $V_j \subseteq V_{j+1}$, $j \in \mathbb{Z}$, si et seulement si

Cas stationnaire

$\exists m_0 \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$ 2π -périodique (appelé filtre) tel que

$$\hat{\varphi}(2\xi) = m_0(\xi)\hat{\varphi}(\xi)$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

- On a $\overline{\bigcup_{j \in \mathbb{Z}} V_j} = L^2(\mathbb{R})$ si et seulement si

Cas stationnaire

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\varphi}(2^{-j}\xi)| = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

- On a $\bigcap_{j \in \mathbb{Z}} V_j = \{0\}$

Cas stationnaire

Cas non-stationnaire

$\forall j \in \mathbb{Z}$, $\exists m_0^{(j+1)} \in L^2_{\text{loc}}(\mathbb{R})$

2π -périodique (appelé **filtre**) tel que

$$\hat{\varphi}^{(j)}(2\xi) = m_0^{(j+1)}(\xi)\hat{\varphi}^{(j+1)}(\xi)$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Cas non-stationnaire

$$\lim_{j \rightarrow +\infty} |\hat{\varphi}^{(j)}(2^{-j}\xi)| = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.

Cas non-stationnaire

si $\exists A, \alpha > 0$ tels que, pour tout $j \in \mathbb{N}$,

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^\alpha |\hat{\varphi}^{(-j)}(\xi)|^2 d\xi \leq A.$$

Analyse multirésolution non-stationnaire

Cas stationnaire

Dans ce cas, en définissant ψ par

$$\hat{\psi}(\xi) = e^{-i\xi/2} \overline{m_0(\xi/2 + \pi)} \hat{\phi}(\xi/2)$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$, $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$.

Cas non-stationnaire

Dans ce cas, en définissant $\psi^{(j)}$ par

$$\hat{\psi}^{(j)}(\xi) = e^{-i\xi/2} \overline{m_0^{(j+1)}(\xi/2 + \pi)} \hat{\phi}^{(j+1)}(\xi/2).$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\{2^{j/2}\psi^{(j)}(2^j \cdot -k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée d'ondelettes non-stationnaire de $L^2(\mathbb{R})$.



F. Bastin, P. Laubin. *Regular Compactly Supported Wavelets in Sobolev Spaces*. *Duke Mathematical Journal*, 87(3):481-508, 1997.

Analyse multirésolution non-stationnaire

Est-ce que chaque base orthonormée d'ondelettes (non-stationnaire) peut être construite à partir d'une analyse multirésolution (non-stationnaire) ?

Théorème (Cas stationnaire)

Soit $\psi \in L^2(\mathbb{R})$ tel que $\{2^{j/2}\psi(2^j \cdot -k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée d'ondelettes de $L^2(\mathbb{R})$. Alors, l'ondelette mère ψ provient d'une analyse multirésolution si et seulement si

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}(2^n(\xi + 2k\pi))|^2 = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$.



G. Gripenberg. *A Necessary and Sufficient Condition for the Existence of a Father Wavelet*. *Studia Mathematica*, 114(3):207-226, 1995.



E. Hernández, G. Weiss. *A First Course on Wavelets*. In S. G. Krantz, editor, *Studies in Advanced Mathematics*. CRC Press, 1996.

Théorème (Cas non-stationnaire)

Soient $\psi^{(j)} \in L^2(\mathbb{R})$, $j \in \mathbb{Z}$, tels que $\{2^{j/2}\psi^{(j)}(2^j \cdot -k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ est une base orthonormée d'ondelettes non-stationnaire de $L^2(\mathbb{R})$.

- Si les ondelettes mères $\psi^{(j)}$, $j \in \mathbb{Z}$, proviennent d'une analyse multirésolution non-stationnaire, alors

$$\sum_{n=1}^{+\infty} \sum_{k \in \mathbb{Z}} |\hat{\psi}^{(j-n)}(2^n(\xi + 2k\pi))|^2 = 1$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}$.

- La réciproque est vraie s'il existe $\alpha, A > 0$ tels que, pour tout $j \in \mathbb{N}$, on a

$$\int_{\mathbb{R}} (1 + |\xi|)^\alpha |\hat{\psi}^{(-j)}(\xi)|^2 d\xi \leq A.$$



F. Bastin, L. Simons. *About Nonstationary Multiresolution Analysis and Wavelets*. Results in Mathematics, 63(1):485-500, 2013.

L'exemple des exponentielles-splines

Exemple

Pour $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, posons

$$M_\mu(x) := e^{i\mu x} \chi_{[0,1]}(x), \quad x \in \mathbb{R}.$$

On peut montrer que

$$V_j := \overline{\text{span} \{2^{j/2} M_{2^{-j}\mu}(2^j \cdot -k) : k \in \mathbb{Z}\}}, \quad j \in \mathbb{Z}$$

forment une analyse multirésolution non-stationnaire de $L^2(\mathbb{R})$. Dès lors, en définissant la fonction $\psi^{(j)}$ par

$$\hat{\psi}^{(j)}(\xi) := i e^{-i\frac{\xi}{2}} \frac{\sin^2\left(\frac{2^{-j}\mu - \xi}{4}\right)}{\frac{2^{-j}\mu - \xi}{4}}$$

pour presque tout $\xi \in \mathbb{R}$ et pour tout $j \in \mathbb{Z}$, $\{2^{j/2} \psi^{(j)}(2^j \cdot -k) : j, k \in \mathbb{Z}\}$ forme une base orthonormée d'ondelettes non-stationnaire.

Plan

Partie I

Continuité höldérienne de fonctions particulières



S. Nicolay, L. Simons. *About the Multifractal Nature of Cantor's Bijection*, Submitted.



S. Nicolay, L. Simons. *Making an Old Idea of Cantor Work: Construction of a New Bijection between the Unit Segment and the Unit Square*. Submitted.



F. Bastin, S. Nicolay, L. Simons. *About the Uniform Hölder Continuity of Generalized Riemann Function*. *Mediterranean Journal of Mathematics*, published online:1-17, 2014.

Partie II

Ondelettes non-stationnaires



F. Bastin, L. Simons. *About Nonstationary Multiresolution Analysis and Wavelets*. *Results in Mathematics*, 63(1):485-500, 2013.

Partie III

Espaces \mathcal{S}' revus avec les coefficients d'ondelettes dominants



F. Bastin, C. Esser, L. Simons. *Topology on New Sequence Spaces Defined with Wavelet Leaders*. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 431(1):317-341, 2015.