Laboratoire d'Aéronautique
de l'Université de Liège
Rue du Val Benoit, 75
4000 Liège
Belgique

Rapport SF-62

"INTRODUCTION DU CALCUL DES VITESSES CRITIQUES DANS DYNAM"

J.F. DEBONGNIE
Ingénieur de Recherche

M. GERADIN
Chercheur Qualifié du F.N.R.S.

Septembre 1977

Introduction

Le calcul des vitesses critiques a été introduit dans le programme DYNAM. Dans la version actuelle, cette option nouvelle est disponible dans tous les éléments axisymétriques.

Le présent rapport décrit la formulation adoptée et présente un certain nombre d'exemples d'utilisation de cette nouvelle option.

1. Expression de l'énergie cinétique d'un corps déformable en rotation

Dans des axes liés au mouvement, la vitesse d'un point du corps s'écrit

$$v_i = \dot{x}_i + e_{ijk}\ \Omega_j\ x_k$$

où les x_k sont les coordonnées spatiales du point exprimées dans le système d'axes en rotation. Les Ω_i sont les composantes de vitesse de rotation exprimées dans le repère tournant, et e_{ijk} est le symbole de permutation. Elles diffèrent des coordonnées de référence a_i par les déplacements élastiques u_i

$$x_i = a_i + u_i$$

On peut écrire sous forme matricielle

$$v = \dot{x} + [\Omega]\ x \qquad \text{avec} \qquad x = a + u$$

avec la matrice antisymétrique des vitesses de rotation

$$|\Omega| = \begin{bmatrix} 0 & -\Omega_3 & \Omega_2 \\ \Omega_3 & 0 & -\Omega_1 \\ -\Omega_2 & \Omega_1 & 0 \end{bmatrix}$$

On a donc le développement de l'énergie cinétique

$$\int_V \rho \frac{v^T v}{2}\ dV = \frac{1}{2}\int_V \rho \left(\dot{x} + [\Omega]\ x\right)^T \left(\dot{x} + [\Omega]\ x\right)\ dV$$

avec l'énergie cinétique d'entraînement

$$T_o = \frac{1}{2}\int_V \rho\ x^T\ [\Omega]^T\ [\Omega]\ x\ dV$$

l'énergie cinétique relative

$$T_2 = \frac{1}{2}\int_V \rho\ \dot{x}^T\ \dot{x}\ dV$$

et l'énergie cinétique mutuelle , dont résultent les forces de Coriolis

$$T_1 = \int_V \rho \, \dot{x}^T [\Omega] \quad x \, d \, V$$

On convient ensuite de choisir comme coordonnées de référence du point matériel son vecteur position dans des axes liés à la structure lorsque celle-ci ne tourne pas. On peut donc décomposer le déplacement en un déplacement jusqu'à l'équilibre en rotation, u^o, et un déplacement $\hat{u}$ autour de cette position d'équilibre et variable dans le temps.

$$x = a + u^o + \hat{u}$$

Dans le cas d'une rotation uniforme, on a évidemment

$$\dot{u}^\circ = 0$$

d'où l'énergie cinétique se transforme en

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \, \dot{\hat{u}}^T \, \dot{\hat{u}} \, dV + \frac{1}{2} \int_V \rho \, (a + u^o + \hat{u})^T \, [\Omega]^T \, [\Omega] (a + u^\circ + \hat{u})^T \, dV$$

$$+ \int_V \rho \, \dot{\hat{u}}^T \, [\Omega] \, (a + u^\circ + \hat{u}) \, dV$$

2. Configuration d'équilibre dans le repère tournant

Si l'équilibre en rotation est réalisé, l'énergie cinétique du corps élastique se réduit au terme d'entraînement, indépendant du temps

$$T = \frac{1}{2} \int_V \rho \, (a + u^\circ)^T \, [\Omega]^T \, [\Omega] \quad (a + u^\circ) \, dV$$

et comporte :

- une partie constante,

$$T_{00} = \frac{1}{2} \int_V \rho \quad a^T \, [\Omega]^T \, [\Omega] \, a \quad dV$$

- une partie dépendant linéairement de la configuration déformée :

$$T_{01} = \int_V \rho \, u_o^T \, [\Omega]^T \, [\Omega] a \, dV$$

et dont résultent les forces centrifuges.

- un terme quadratique dans les déplacements

$$T_{02} = \int_V \rho \, u_o^T \, [\Omega]^T \, [\Omega] u_o \, dV$$

qui dans l'expression du principe de Hamilton, se soustrait à l'énergie de déformation. Il correspond au fait que la force centrifuge s'accroît avec la déformation.

3. Energie de déformation

Dans la configuration d'équilibre en rotation, l'énergie de déformation s'écrit

$$U = \int_V W(\varepsilon_{ij}) \, dV = \frac{1}{2} \int_V C_{ijk\ell} \, \varepsilon_{ij} \, \varepsilon_{k\ell} \, dV$$

avec, dans le cas linéaire, l'expression des déformations

$$\varepsilon_{ij} = \frac{1}{2} (D_i \, u_j + D_j \, u_i) \, .$$

4. Application du principe de Hamilton

Dans le cas général, le principe de Hamilton s'écrit

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U)\, dt = 0$$

Si on se limite au problème de la détermination de l'équilibre du corps en rotation uniforme, la dépendance par rapport au temps disparaît du problème et on peut écrire

$$\delta\ (T - U) = 0$$

soit, sous forme explicite, en notant que l'intégrale T_{00} est invariante

$$\delta\left[\int_V \rho\ u_0^T \left[\Omega\right]^T\left[\Omega\right]\ (a+u_o)\ dV \quad - \int_V W\ dV \right] = 0$$

La résolution de ce problème permet de déterminer les déplacements d'équilibre. On note que le terme d'énergie cinétique quadratique dans les déplacements, T_{02}, entraîne une modification apparente de la raideur , puisque l'énergie de déformation paraît modifiée sous la forme

$$U^* = \int_V \left[W - \rho\ \ u_o^T \left[\Omega\right]\ \left[\Omega\right]\ \ u_o\right]\ \ dV$$

5. Discrétisation

On fait au préalable l'hypothèse que la rotation se fait autour du seul axe Oz, auquel cas $\left[\Omega\right]$ est de la forme

$$\left[\Omega\right] = \begin{bmatrix} 0 & -\omega & 0 \\ \omega & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

et les formes discrétisées des termes T_{01} et T_{02} de l'énergie cinétique deviennent

$$T_{01} = \omega^2 \int_V \rho\ (a_1\ u_1 + a_2\ u_2)\ dV = \omega^2\ g^T\ q$$

où g est le vecteur des forces centrifuges pour une vitesse de rotation unitaire, et

$$T_{02} = \omega^2 \int_V \rho \; (u_1^2 + u_2^2) \; dV = \frac{1}{2} \omega^2 \; q^T \; M' \; q$$

où M' est la matrice d'inertie associée au mouvement perpendiculaire à l'axe de rotation.

La variation par rapport aux paramètres q de déplacement fournit l'équation d'équilibre dans le système tournant

$$(K - \omega^2 \; M') \; q = \omega^2 \; g \; .$$

Sa solution est unique pour autant que la vitesse de rotation ω soit telle que dtm $| K - \omega^2 \; M' \; | \neq 0$.

Les vitesses critiques de rotation du système correspondent aux solutions non-nulles du système

$$(K - \omega^2 \; M') \; q = 0$$

Elles sont obtenues en résolvant un problème aux valeurs propres analogue à celui des petites oscillations libres: la seule différence réside dans la structure de la matrice des inerties à prendre en compte.

6. Calcul des vitesses critiques de rotation dans SAMCEF

La possibilité de calculer des vitesses critiques de rotation a été introduite dans le module DYNAM (analyse modale) du programme SAMCEF pour tous les éléments de géométrie axisymétrique; soit :

type 8 :	coque isoparamétrique
type 9 :	volume torique pouvant être incompressible
type 11 :	coque tronc-conique
type 12 :	membrane tronc-conique
type 13 :	volume torique
type 14 :	raidisseur
type 15 :	volume isoparamétrique à section quadrangulaire
type 16 :	volume isoparamétrique, chargement asymétrique , développement en série de Fourier);
type 17 :	raidisseur à chargement asymétrique (série de Fourrier)
type 26 :	triangle isoparamétrique
type 27 :	triangle isoparamétrique incompressible
type 45 :	quadrilatère isoparamétrique incompressible

Les éléments à déformation axisymétrique permettent le calcul des vitesses critiques d'éclatement; ceux à déformation développée en série de Fourier permettent le calcul des vitesses critiques en flexion ($n=1$) et celles associées à une déformation de la section droite (mode en trèfle $n > 1$).

Le calcul des vitesses critiques est commandé dans le programme DYNAM par l'option ICRIT = 1 (voir tableau des données générales).

La seule particularité d'utilisation par rapport à un calcul de modes de vibration réside dans le fait que les déplacements selon Oz, du fait qu'ils ne contribuent pas aux forces centrifuges, doivent être condensés avant résolution du problème aux valeurs propres.

DETAIL DES DONNEES POUR LE PREPROCESSEUR

1) Carte contrôle générale

	ISTART	ISTOP	IGENER	IRUPT	ISUPER	IUNEU	IU18	IDENT	NOCH	INIT	IUSOUT	LL1	INF	LL2	IUSIN
colonnes	5	10	15	20	25	30	35	40	45	50	55	60	65	75	80

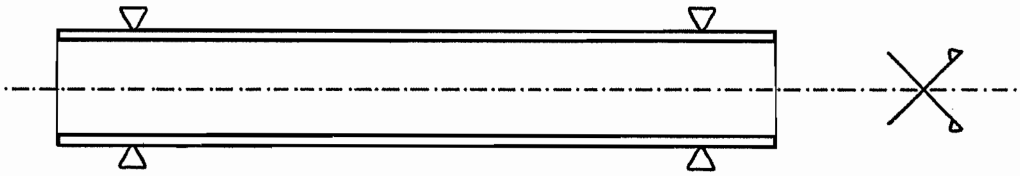
2) Groupe de 6 cartes de données générales

b		TITRE												
b		TITRE												
NOP(1)	NOP(2)	NOP(3)	NOP(4)	NOP(5)	NOP(6)	NVAL	NMAX	LPREC	NALG	NTRI	ICRIT			
ND	NTHETA	NPHASE	ISTRES	IFO	NCCOPT	IGRAD	NITER	NPREC		IUPRCO				
E			XNU			T			A			DMAS		
ALFA			PI			POIDS			OMEGA					

colonnes 15 30 45 60 75

Vitesses critiques de flexion d'arbres cylindriques

1) arbre cylindrique creux



longueur : 1m

épaisseur de paroi : 5.10^{-3} m

rayon : 5.10^{-2} m

$E = 2.1 \; 10^{11}$ N/m^2

$\ell = 2.7 \; 10^3$ kg/m^3

condition d'appui: simplement appuyé.

L'arbre a été modélisé à l'aide de 4 éléments de coque tronc-conique (type 18) à chargement asymétrique (n=1). La vitesse critique obtenue (2982 rad/sec) est légèrement supérieure à celle que l'on calcule par la théorie de Kirchhoff ($\omega = \pi^2 \sqrt{\frac{EF}{m\ell^4}} = 3081$ rad/sec) .
L'écart entre les deux solutions s'explique par le fait que la solution par éléments finis tient compte de la déformation à l'effort tranchant et de l'écrasement de la section droite.

2) arbre cylindrique plein

Le même problème a été traité pour l'arbre à section pleine et de mêmes dimensions extérieures. Il a cette fois été modélisé par 4 éléments de volume (type 16) à chargement asymétrique et de degré 3.
La fréquence calculée par éléments finis (2205 rad/sec) est cette fois légèrement supérieure à celle fournie par la théorie de Kirchhoff (2176 rad/sec). Le léger écart résulte du fait que l'élément utilisé étant de degré 1 selon le rayon, est légèrement trop raidi en flexion.

Vitesses critiques d'un anneau circulaire

On considère un anneau d'acier ayant un rayon moyen de 0,2 m, une section carrée de 4.10^{-4} m^2 et un moment d'inertie de $2,666667 \cdot 10^{-8}$ m^4. Les caractéristiques du matériau sont :

Module de YOUNG : $2,1 \cdot 10^{11}$ Pa

Coeff. de Poisson : 0,3

Densité : 0

On désire obtenir ses vitesses critiques d'éclatement (n=0) et d'écrasement (n=2) . Pour la première, on obtient aisément le résultat analytique suivant:

$$\omega_0^2 = \frac{E}{\rho R^2} \tag{a}$$

La détermination de la seconde est moins aisée. Tout d'abord, si l'on fait à la fois l'hypothèse de conservation de sections droites et celle d'inextensionnalité de la déformation, on obtient la formule

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 \, \varepsilon \, \frac{(n^2-1)^2}{1+\frac{1}{h^2}} \quad , \tag{b}$$

avec $\qquad \varepsilon = \frac{I}{\Omega R^2}$

En remplaçant les hypothèses ci-dessus par celle que le déplacement azimutal et la rotation tendent à minimiser l'énergie de déformation - ce qui revient à effectuer leur condensation statique au sens de GUYAN-IRONS - on peut obtenir une formule plus précise :

$$\omega_n^2 = \omega_0^2 \, \varepsilon \frac{(n^2-1)^2}{(1+\lambda^2)(1+\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\gamma}n^2)} \quad , \tag{c}$$

où

$$\gamma = \frac{5}{12(1+\nu)} \quad , \quad \varepsilon = \frac{I}{\Omega R^2}$$

$$\lambda = \frac{1}{n} \frac{1+\varepsilon n^2+\frac{\varepsilon}{\gamma}n^2}{1+\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\gamma}n^2}$$

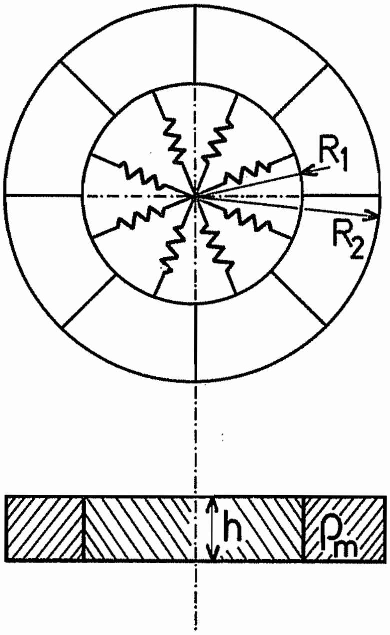
$$\mu = \frac{1}{n} \frac{n^2-1}{1+\varepsilon+\frac{\varepsilon}{\gamma}n^2} \quad .$$

Le premier problème a été étudié avec un élément de type 14, et le second, avec un élément de type 17. Les résultats obtenus sont les suivants:

	Analytique	El. finis
ω_o	$2{,}5943726.10^4$ (a)	$2{,}594373.10^4$
ω_n	$\left\{\begin{array}{l} 2{,}8419928.10^3 \text{ (b)} \\ 2{,}8078442.10^3 \text{ (c)} \end{array}\right\}$	$2{,}807015.10^3$

<u>Vitesses critiques d'un système de masselotes retenues par ressorts</u>

Le problème consiste à idéaliser un système composé de masselotes retenues par des ressorts, de manière à obtenir une raideur radiale donnée. Les masselotes sont idéalisées par une couronne sans raideur azimutale. Les données équivalentes sont

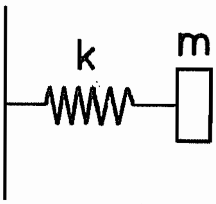


$R_1 = 5.10^{-2}$ m
$R_2 = 10^{-1}$ m
$h = 10^{-2}$ m
$\rho_m = 7800$ kg/m^3
$\nu_{ress} = 0$, $E_{ress} = 7500$ Pa,

et les masselotes sont représentées par le continu ayant pour matrice de HOOKE :

$$\begin{Bmatrix} \sigma_r \\ \sigma_z \\ \tau_{rz} \\ \sigma_\theta \end{Bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{E}{1-\nu^2} & \frac{\nu E}{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ \frac{\nu E}{1-\nu^2} & \frac{E}{1-\nu^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{E}{2(1+\nu)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{Bmatrix} \varepsilon_r \\ \varepsilon_z \\ \gamma_{rz} \\ \varepsilon_\theta \end{Bmatrix} \qquad \begin{matrix} E=2,1.10^{11}\text{Pa} \\ \nu=0,3 \end{matrix}$$

On démontre aisément que ce problème équivaut à celui du système masse-ressort tournant autour d'un axe, moyennant la correspondance suivante :



$$m = h \int_{R_1}^{R_2} \rho r \, dr = \pi \, (R_2^2 - R_1^2) \, h \rho$$

$$k = 2\pi h \, \frac{E}{1-\nu^2}$$

ce qui permet de calculer la vitesse critique par $\omega = \sqrt{k/m}$.
Cependant , ceci suppose que la raideur des masselotes soit bien plus grande que celle des ressorts.

Tous calculs faits, on obtient

$$\omega = 1{,}6012815.10^{1}$$

Ce problème a été idéalisé, d'une part à l'aide d'éléments de type 9, d'autre part, à l'aide d'éléments de type 13. On a obtenu :

Type 13 : $\omega = 1{,}601282.10^{1}$

Type 9 : $\omega = 1{,}601283.10^{1}$,

ce qui correspond au dernier chiffre près au résultat de calcul.

Vitesses critiques d'éclatement d'un cylindre creux

On considère les cylindres creux de 0,3 m de rayon, d'1 m de longueur, et de 10^{-2} m d'épaisseur. Les caractéristiques du matériau sont :

Module de Young : $E = 2{,}1.10^{11}$ Pa

Coefficient de Poisson : $\nu = 0$

Densité de masse : $\rho = 7800$ kg/m^3

Le cylindre est supposé libre à ses extrémités. On obtient, par le calcul, la vitesse critique suivante :

$$\omega = \sqrt{\frac{E}{\rho r^2}} = 1{,}7295817.10^4 \text{ rad/sec.}$$

Cette structure a été étudiée à l'aide d'éléments de types 8, 11 et 12. L'élément 12 donne autant de fois la même vitesse critique:

$$\omega = 1{,}729582.10^4 \text{ rad/sec}$$

qu'il y a de degrés de liberté radiaux. Ce phénomène est lié à l'absence de raideur en flexion. Au contraire, les éléments 8 et 11 conduisent à une suite croissante de vitesses critiques :

$$\begin{aligned} \omega_1 = \omega_2 &= 1{,}729582.10^4 \\ \omega_3 &= 1{,}729586.10^4 \\ \omega_4 &= 1{,}729607.10^4 \end{aligned}$$

On constate qu'elles sont cependant très rapprochées, ce qui est lié à la faible valeur relative de la raideur en flexion.