

Traitement numérique des images

M. Van Droogenbroeck

Septembre 2011

Détails pratiques

- **Examen**
 - écrit
 - à livre ouvert
 - questions des années précédentes disponibles à l'adresse <http://www.ulg.ac.be/telecom>
 - projet **obligatoire et dispensatoire** de l'examen : à réaliser et à présenter la dernière semaine de décembre
- **Notes de cours**
 - disponibles à l'AEES
 - version HTML en ligne à l'adresse <http://www.ulg.ac.be/telecom>
- **Transparents**
 - version PDF en ligne à l'adresse <http://orbi.ulg.ac.be>

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire et déconvolution
- Morphologie mathématique
- Filtrage non-linéaire
- Détection de traits caractéristiques et détection de contours
- Texture
- Rehaussement et restauration
- Étude de la forme
- Segmentation d'images
- Codage d'images
- Applications industrielles

Introduction

- Éléments de perception visuelle
 - Les couleurs : représentation, systèmes, luminance, ...
 - Effets visuels
 - Notion de transparence
- Structure d'échantillonnage et trame
- Vidéo
- Structures de données
- Résolution
- Applications industrielles
 - Segmentation
 - Reconnaissance de caractères

Le système visuel humain et la lumière

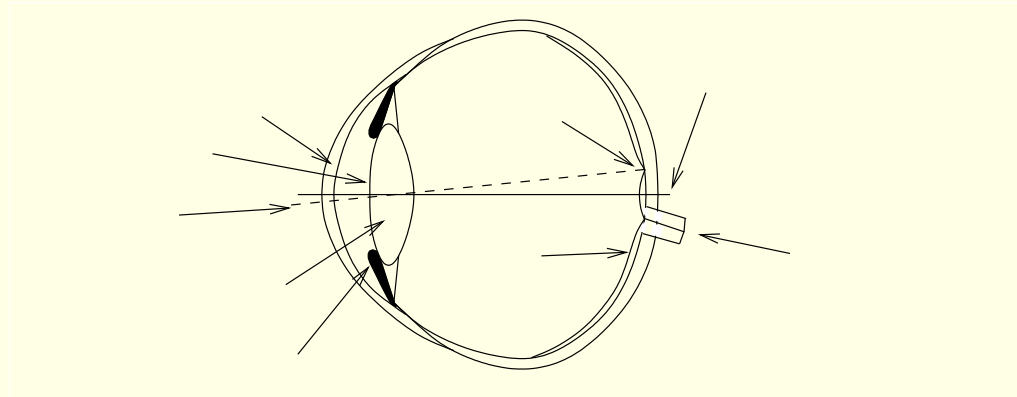


FIGURE 1: Coupe latérale simplifiée de l'œil.

Le système visuel humain et la lumière

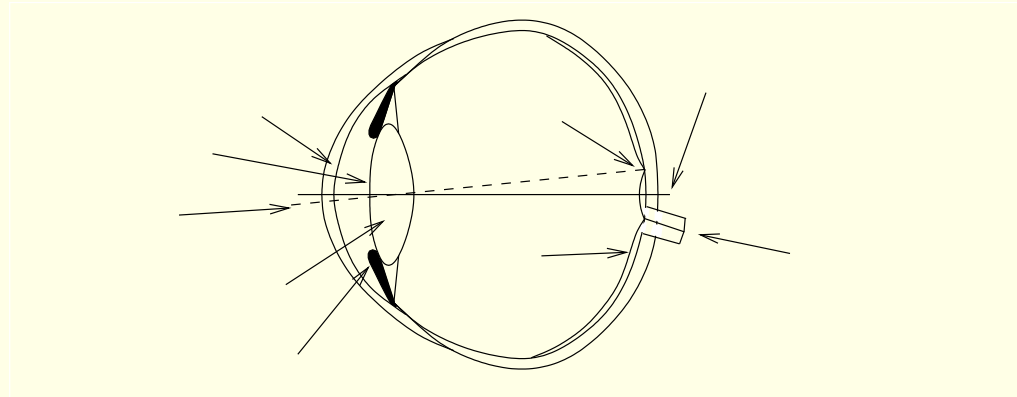


FIGURE 1: Coupe latérale simplifiée de l'œil.

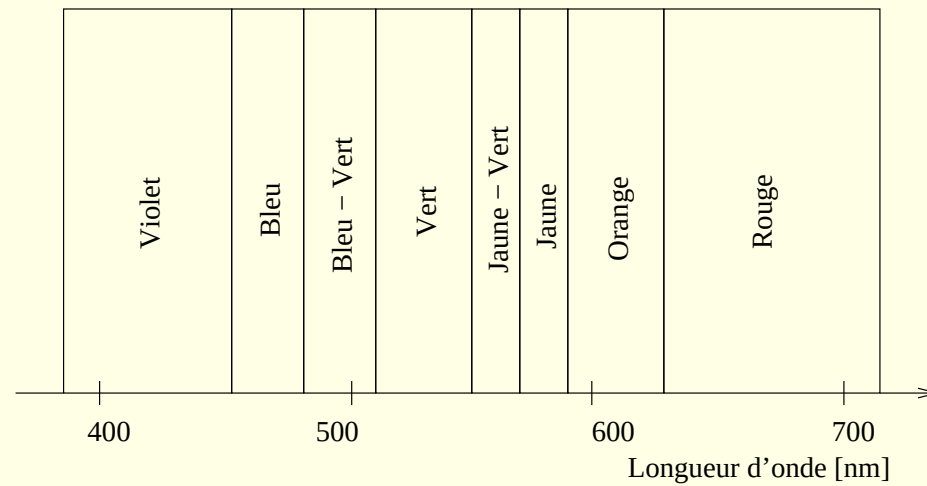


FIGURE 2: Les longueurs d'onde associées aux couleurs.

Représentation fréquentielle des couleurs

$$\int_{\lambda} L(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

Problème car trop grand nombre de capteurs nécessaires à la description de la couleur

Solution : utiliser les espaces de couleurs

Représentation fréquentielle des couleurs

$$\int_{\lambda} L(\lambda) d\lambda \quad (1)$$

Problème car trop grand nombre de capteurs nécessaires à la description de la couleur

Solution : utiliser les espaces de couleurs

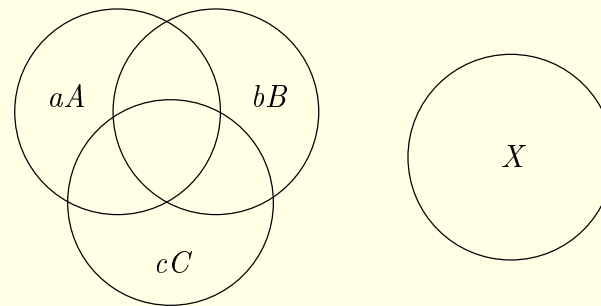


FIGURE 3: Expérience d'égalisation d'une couleur X au moyen de trois couleurs primaires A , B et C .

L'espace de couleurs additif RGB

Trois couleurs monochromatiques : rouge R (700 [nm]), vert V (546,1 [nm]) et bleu B (435,8 [nm]),

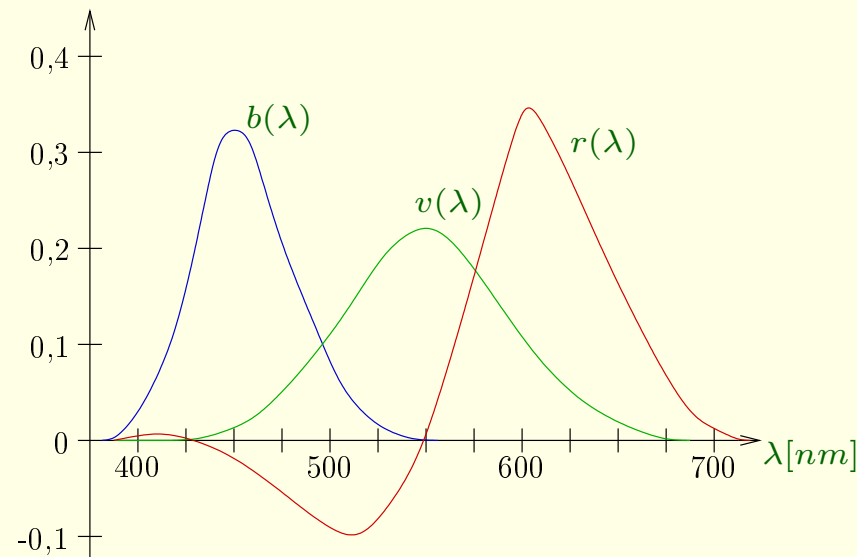
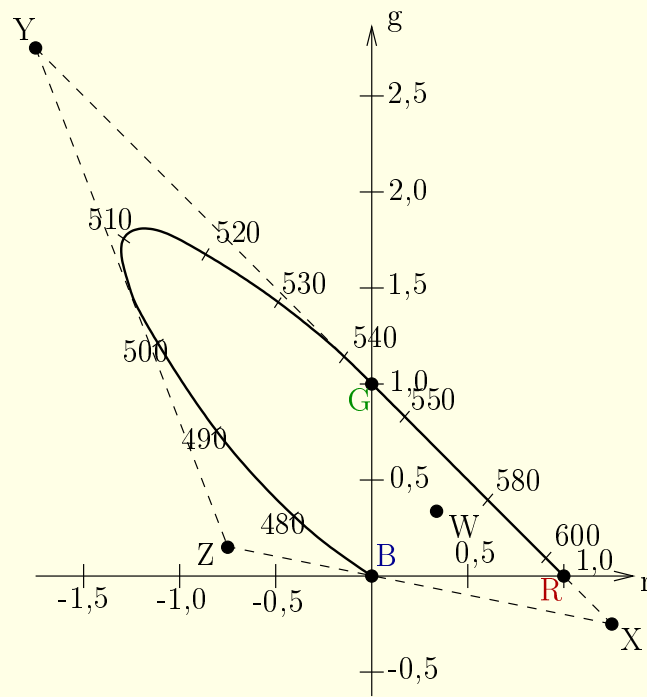


FIGURE 4: Courbes d'égalisation spectrale obtenues par égalisation des couleurs au moyen d'un mélange additif.

Diagramme chromatique RGB de la CIE



Notion d'intensité

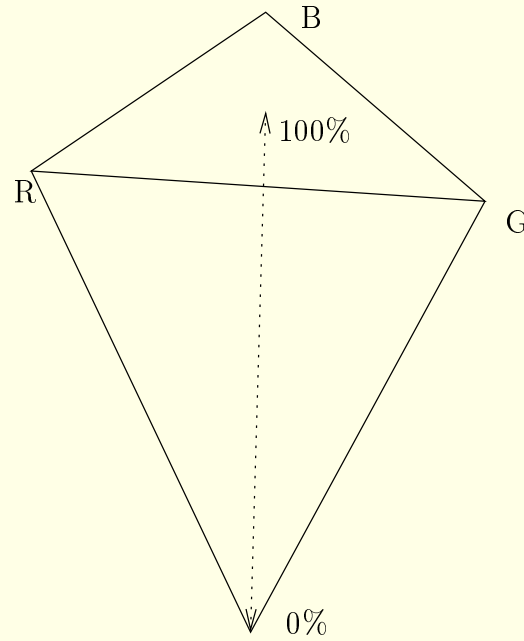


FIGURE 5: Pyramide des couleurs obtenues au moyen du tri-stimulus RGB.

Vers d'autres systèmes de couleurs : le système XYZ

$$\begin{pmatrix} X \\ Y \\ Z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2,769 & 1,7518 & 1,13 \\ 1 & 4,5907 & 0,0601 \\ 0 & 0,0565 & 5,5943 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} R \\ G \\ B \end{pmatrix} \quad (2)$$

$$x = \frac{X}{X + Y + Z} \quad (3)$$

$$y = \frac{Y}{X + Y + Z} \quad (4)$$

$$z = \frac{Z}{X + Y + Z} \quad (5)$$

$$x + y + z = 1 \quad (6)$$

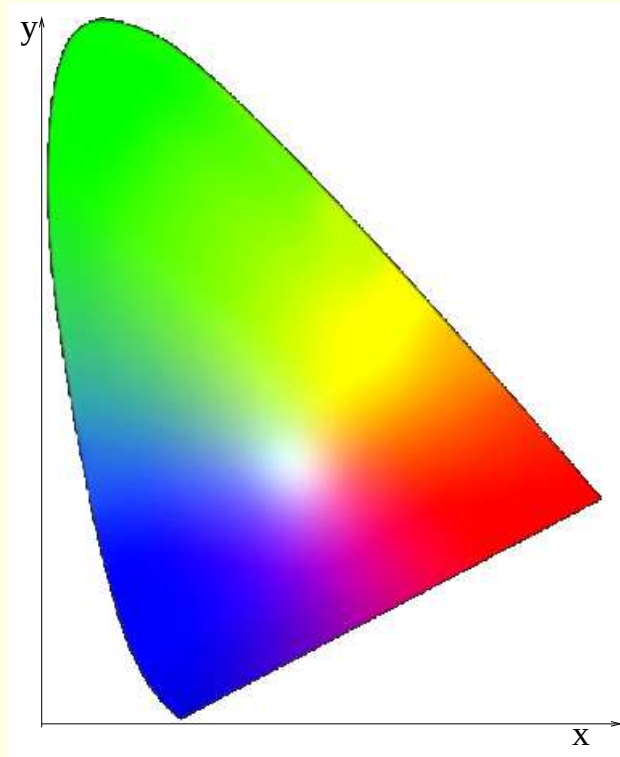


FIGURE 6: Diagramme chromatique (approché!) défini par les deux variables de chrominance x et y .

Représentation sous forme de cube

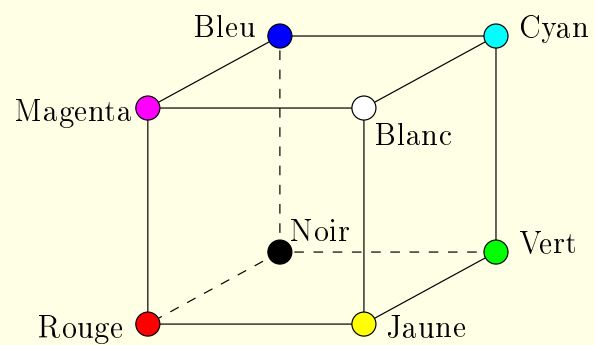


FIGURE 7: Espace tridimensionnel des stimuli produits par les composantes *RGB*.

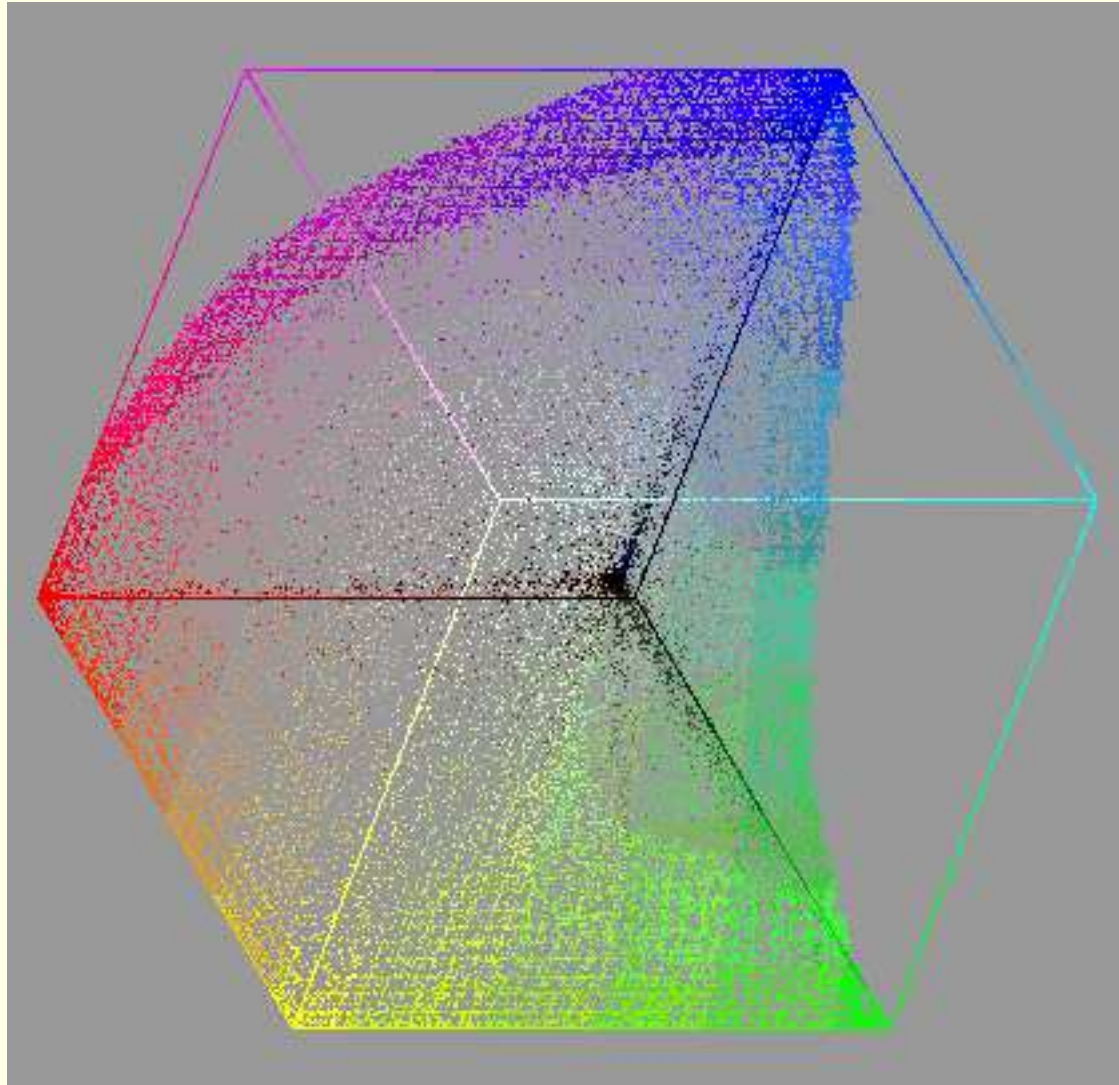


FIGURE 8: Espace tridimensionnel des couleurs du diagramme de chrominance approché.

Luminance

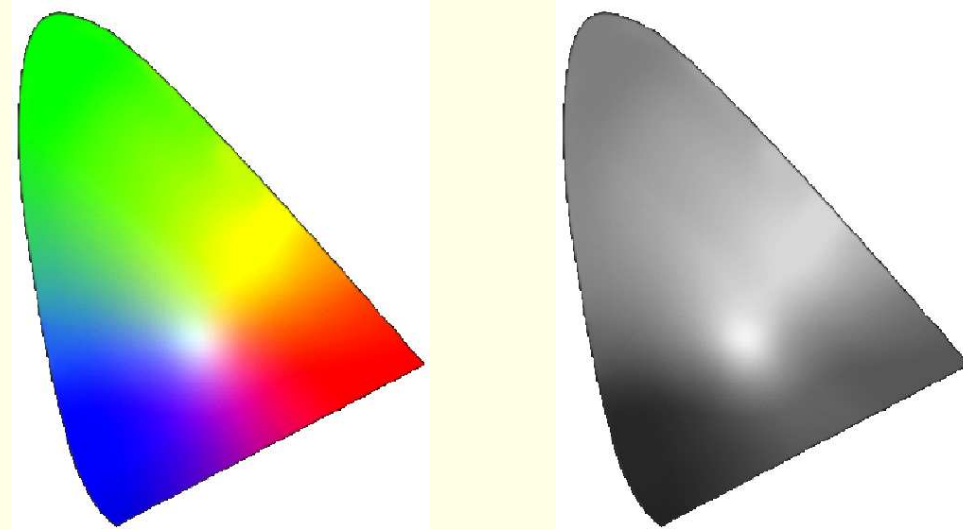


FIGURE 9: Diagramme chromatique xy et luminance maximale en chaque point.

Système de couleur HSI

Variables plus physiques :

- teinte (hue en anglais)
- saturation
- intensité

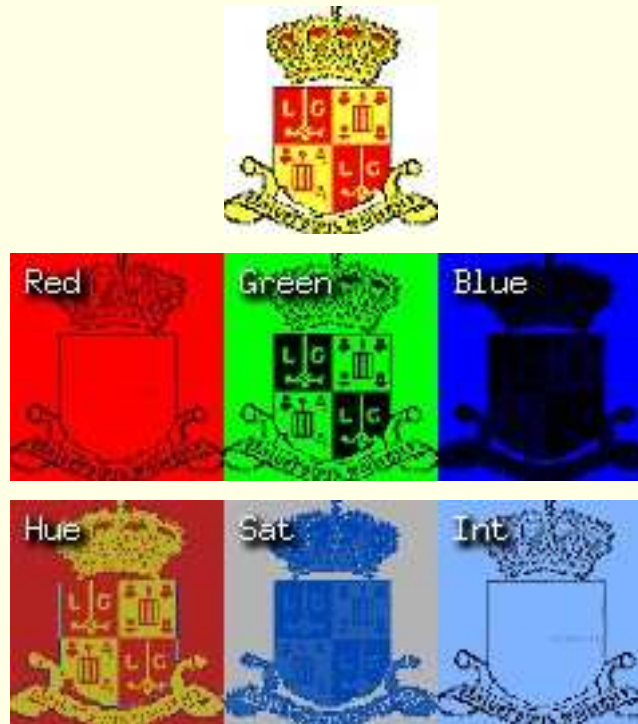


FIGURE 10: Décomposition d'une image en couleurs.

D'autres espaces de couleurs

- le système de couleurs soustractifs : Cyan, Magenta et Yellow (CMY)
- les systèmes YIQ , YUV ou YC_bC_r

En pratique

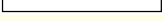
Hexadécimal				R G B		
00	00	00		0	0	0
00	00	FF		0	0	255
00	FF	00		0	255	0
00	FF	FF		0	255	255
FF	00	00		255	0	0
FF	00	FF		255	0	255
FF	FF	00		255	255	0
FF	FF	FF		255	255	255

TABLE 1: Table de correspondance de couleurs définies sur 8 bits.

Les fausses couleurs

Utilisation d'une palette de couleurs, appelée Color Look Up Table (CLUT ou LUT)

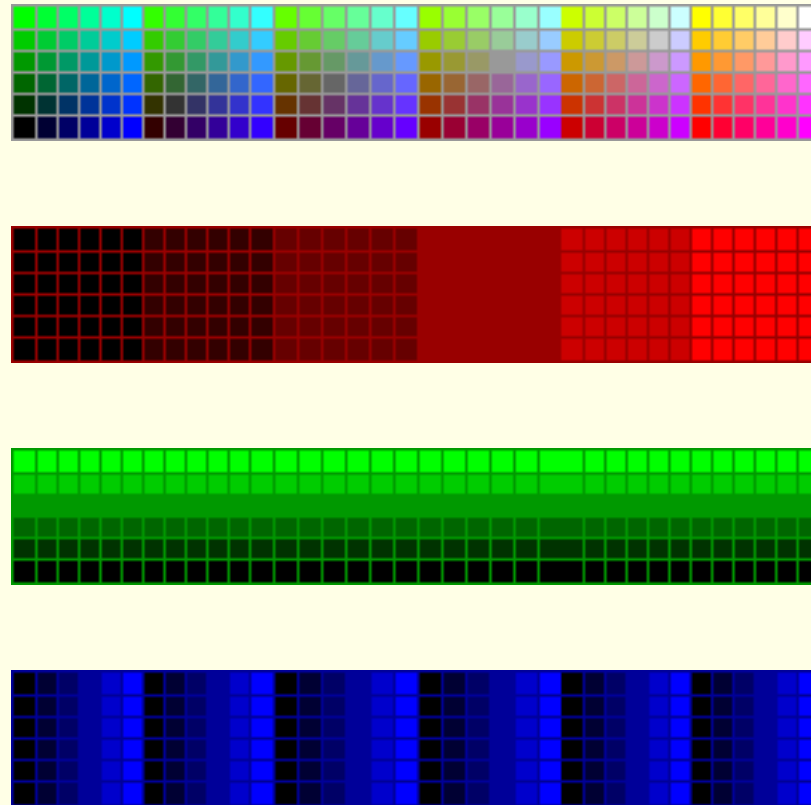


FIGURE 11: Palette de couleurs utilisée par les logiciels de navigation ainsi que la décomposition en R, G et B.

Exemple de représentation en fausses couleurs

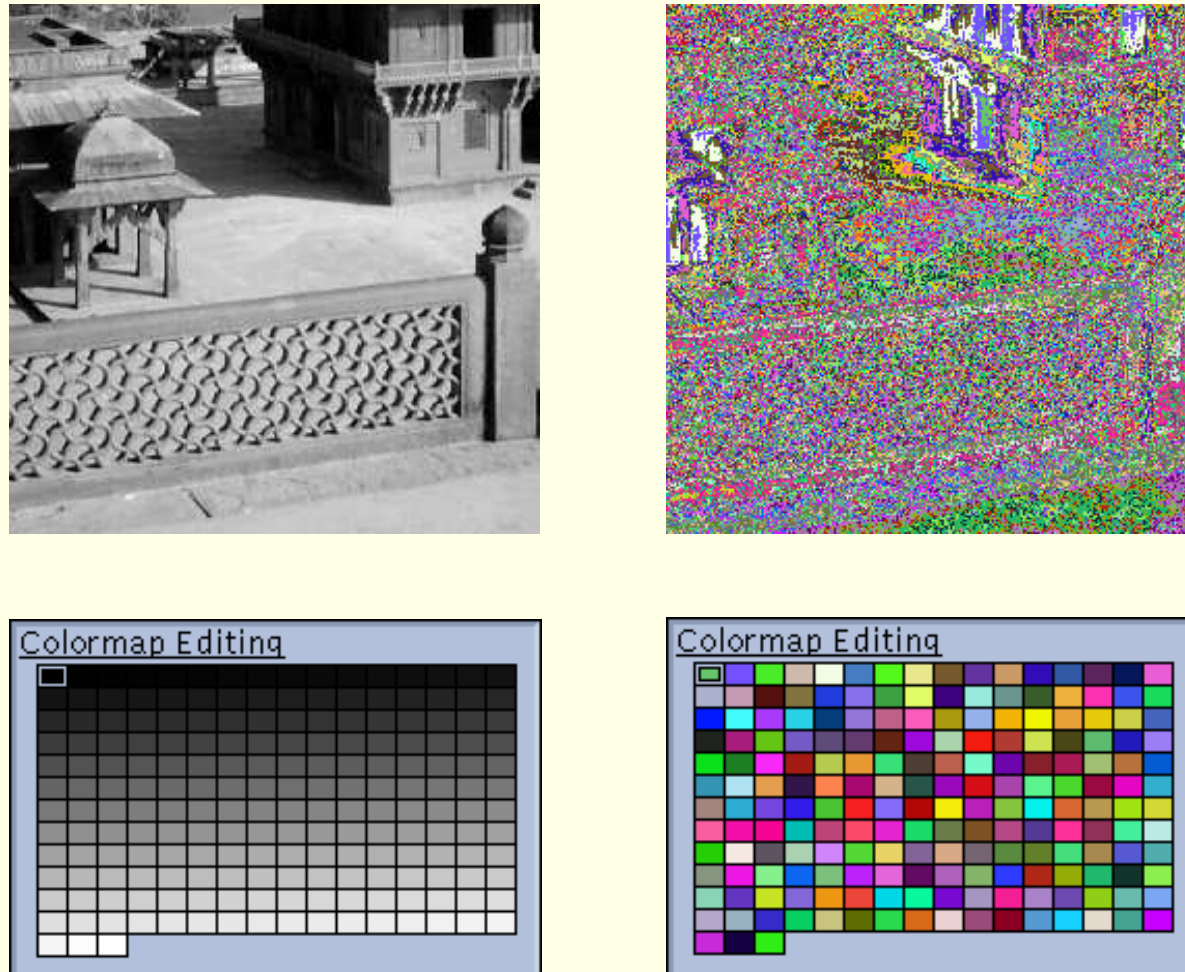


FIGURE 12: Une image en niveaux de gris, l'équivalent avec une palette de couleurs aléatoires et les palettes respectives.

La couleur des objets

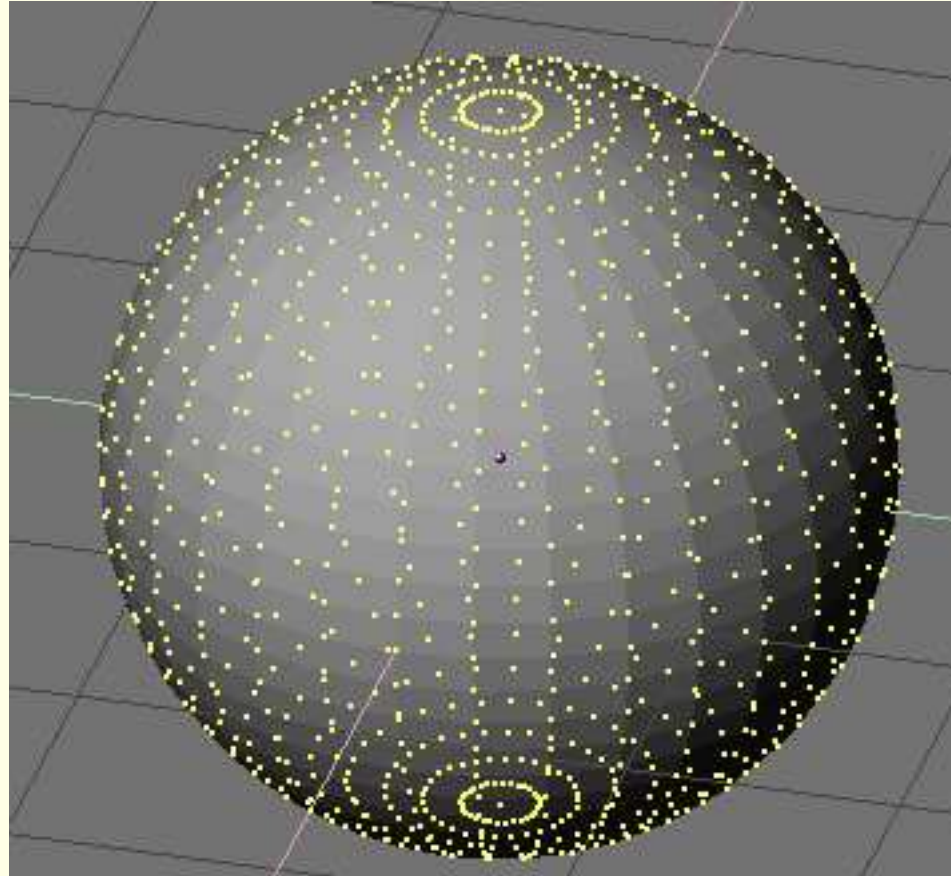


FIGURE 13: Une image de synthèse 3D.

Effets visuels

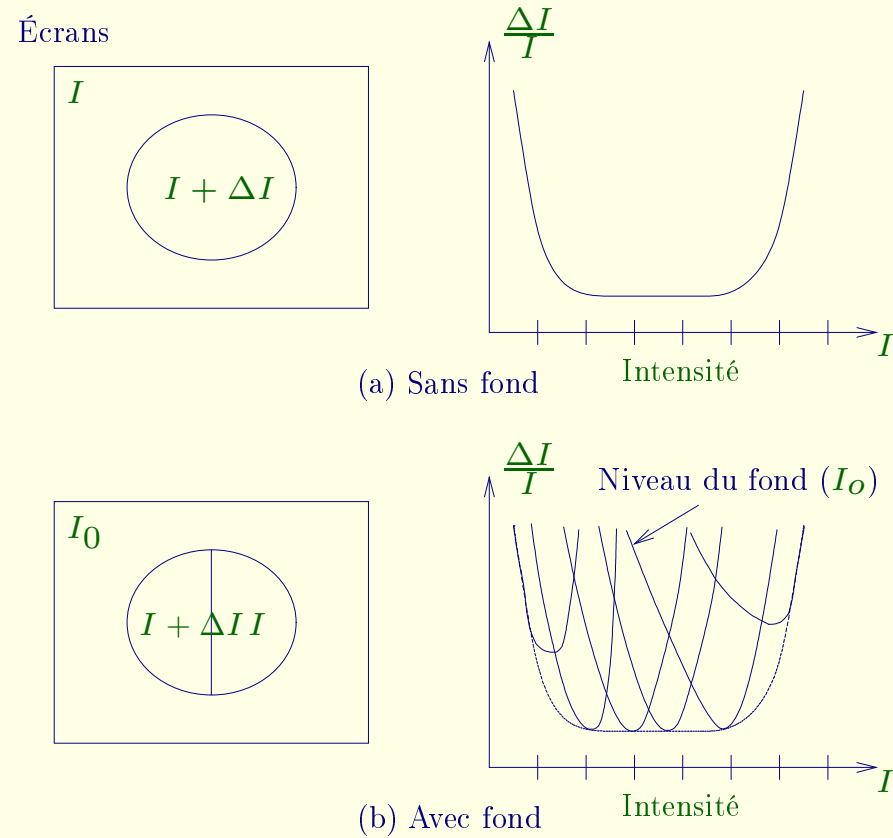


FIGURE 14: Différents arrangements expérimentaux permettant d'étudier les variations supraliminaires d'intensité, ΔI , à partir de l'intensité I .

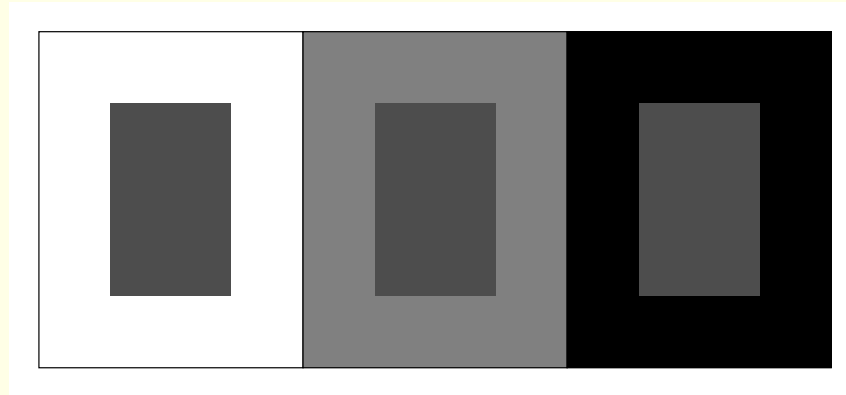


FIGURE 15: Illustration d'un effet perceptif.

Usage de bits de transparence

Soient

- $i(x, y)$ la valeur de l'image au point (x, y)
- $t(x, y)$ la valeur de transparence (typiquement 1 ou 8 bits)
- $o(x, y)$ la valeur de l'image finale

Le principe consiste à appliquer la formule suivante : $o(x, y) = \frac{t(x, y)}{255}i(x, y)$

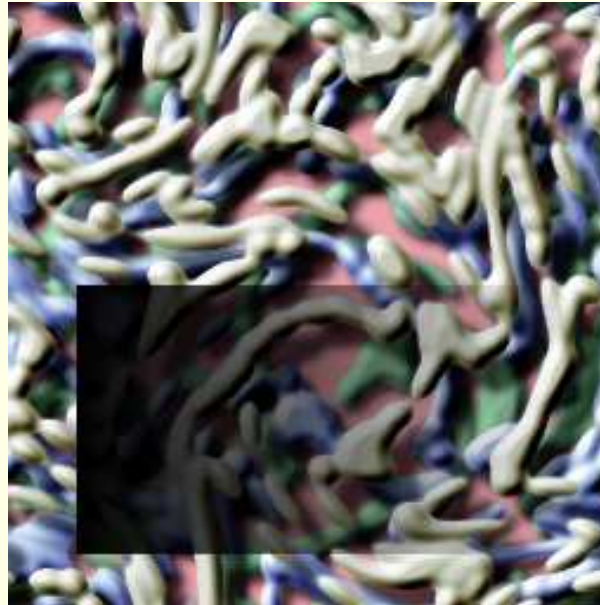


FIGURE 16: Utilisation de bits de transparence à l'intérieur du petit rectangle.

Structure d'échantillonnage et trame

- Chaque point est appelé pixel (pour picture element).
- Il existe deux sortes de trame suivant la grille d'échantillonnage adoptée.

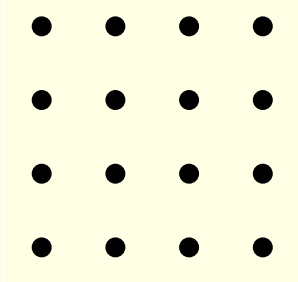
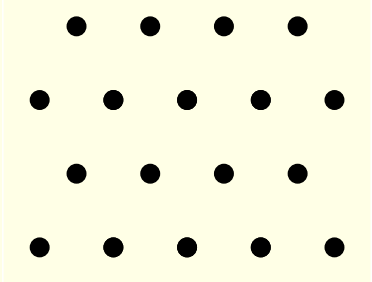
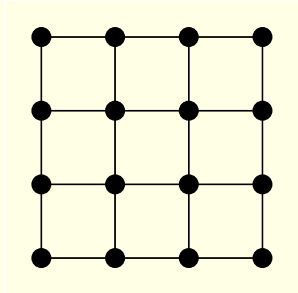
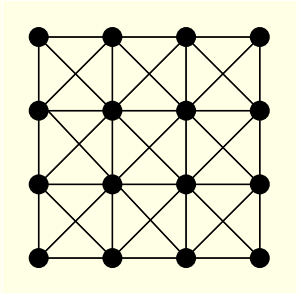
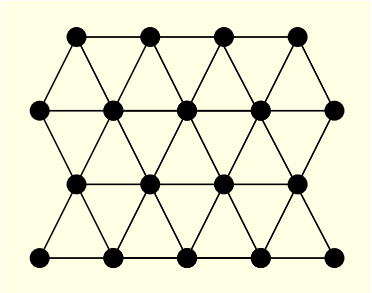
Trame carrée		Trame hexagonale
		
4-connexité	8-connexité	6-connexité
		

TABLE 2: Types de trames couramment utilisées et connexités associées.

Types d'images

2D. Il s'agit d'une matrice bidimensionnelle de valeurs. Ces valeurs (luminance, couleurs, ...) sont par exemple issues de l'échantillonnage d'une image fixe.

3D. Cette fois, le jeu de valeurs est défini sur base d'une grille d'échantillonnage tridimensionnelle. On obtient cette type d'images par scanner par exemple. La plupart des techniques de traitement d'image bidimensionnelles se généralisent sans peine à des images **3D**.

2D+t. Comme t représente le temps, les images **2D + t** désignent une animation, une séquence vidéo ou les images d'un film.

3D+t. Les images de type **3D + t** sont des images tridimensionnelles animées. Il s'agit par exemple d'images de synthèse **3D** animées.

Vidéo et entrelacement

On représente une image $2D + t$ comme une succession d'images numériques $2D$.

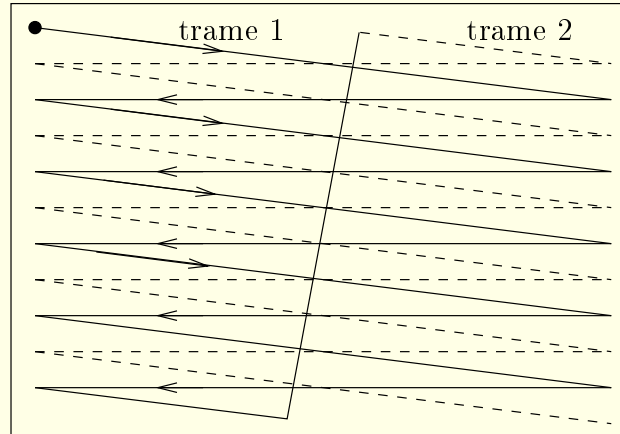


FIGURE 17: Description du format entrelacé.

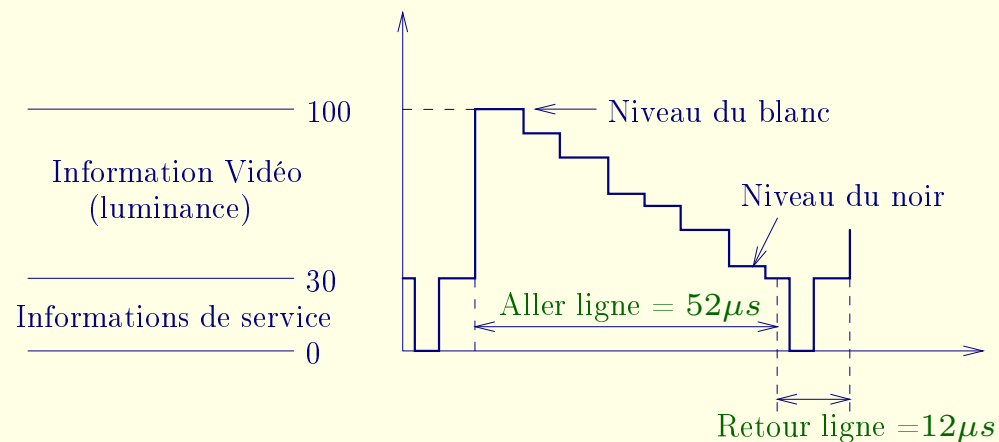


FIGURE 18: Une ligne du signal de luminance d'un téléviseur.

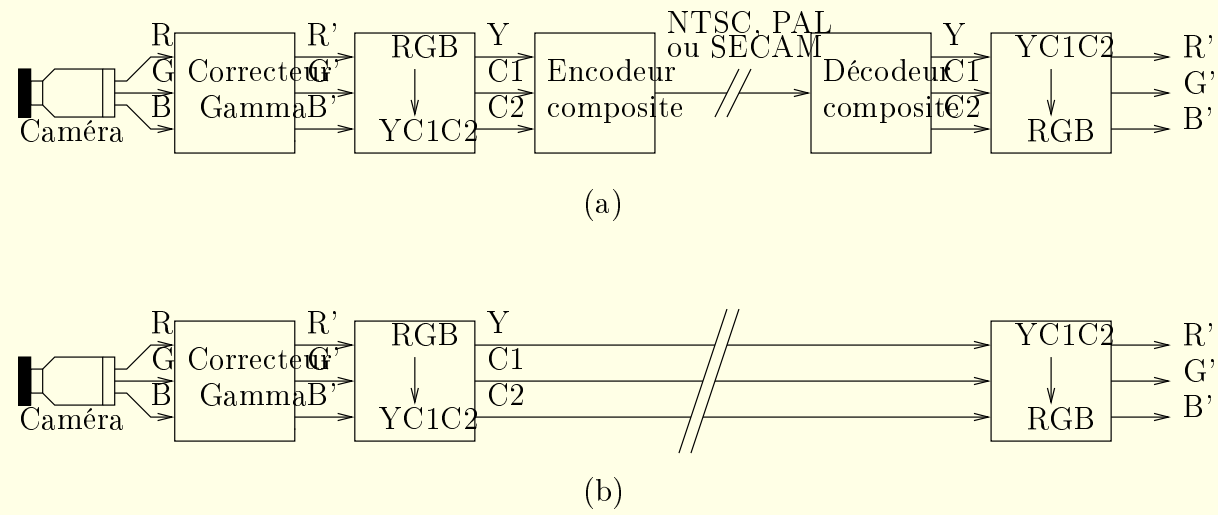
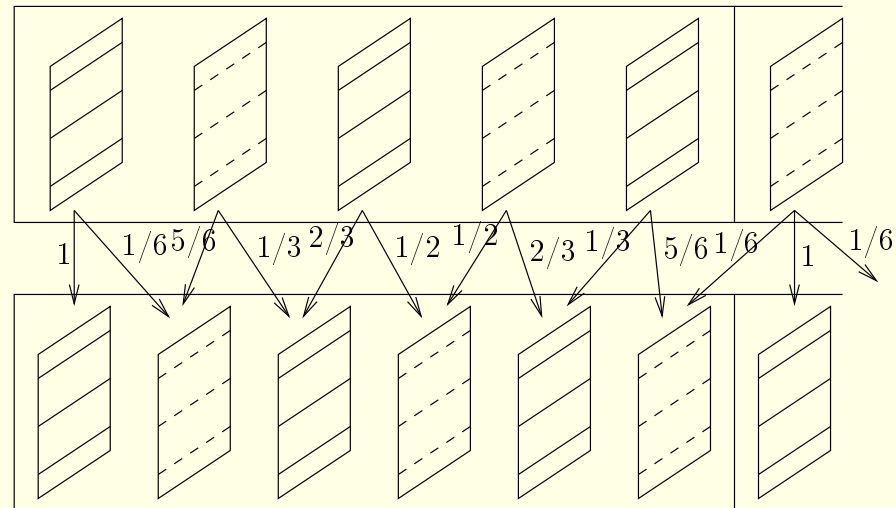


FIGURE 19: Chaîne de transmission des signaux de télévision composites.

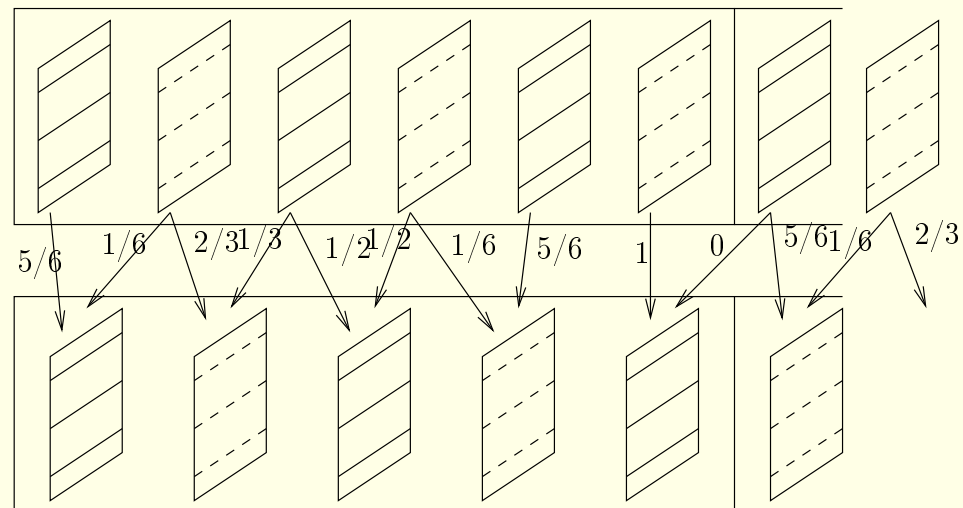
Standards de télévision analogiques

Paramètres	PAL	NTSC	SÉCAM
Fréquence de trame [Hz]	50	59,94	50
Nombre de lignes par trame	625	525	625
Facteur de correction gamma γ	2,8	2,2	2,8
Porteuse audio [MHz]	QAM	4,5	FM
Porteuse couleur [MHz]	4,43	3,57	4,25 (+ U) - 4,4 ($-V$)
Technique de modulation des signaux de couleur	QAM	QAM	FM
Largeur de bande de la luminance [MHz]	5,0 ou 5,5	4,2	6.0
Largeur de bande des chrominances [MHz]	1,3 (U et V)	1,3 (I) - 0,6 (Q)	$>1,0$ (U et V)

Changement de la fréquence image



(a) Conversion 50Hz vers 60Hz



(b) Conversion 60Hz vers 50Hz

Structures de données

- Structures de données informatiques classiques : matrices (ou tableaux), vecteurs, arbres, listes, piles, . . .
- Certaines structures de données ont été adaptées et enrichies pour le traitement d'images. Il s'agit par exemple de la structure en arbre quaternaire, appelé quadtree.

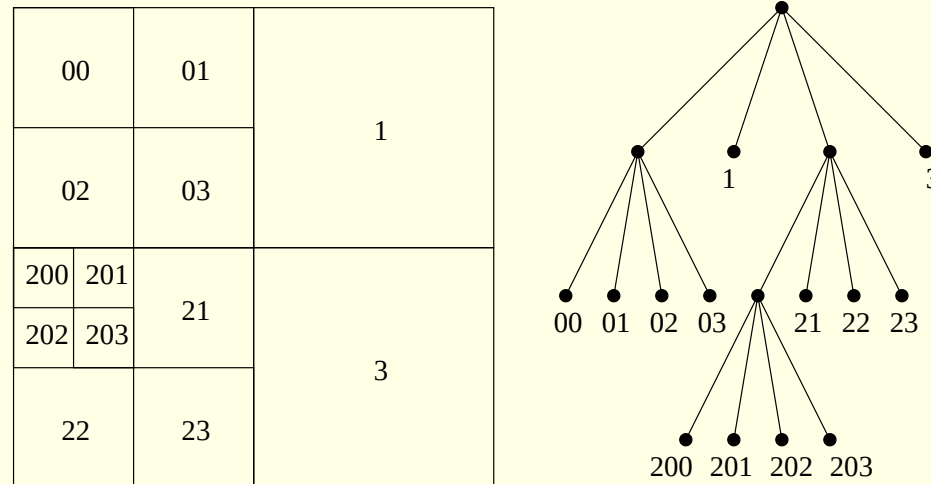
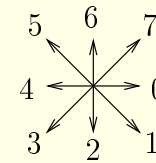
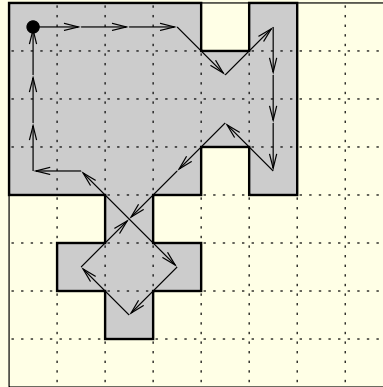


FIGURE 20: Découpage d'une image en arbre quaternaire.

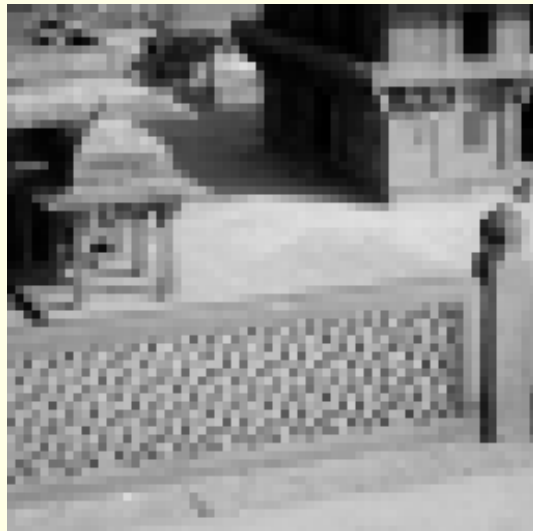
- Lacet ou chain code



Code : 00017222533135754666

FIGURE 21: Description d'une forme par suivi du contour.

Résolution



Décomposition d'une image en plans binaires

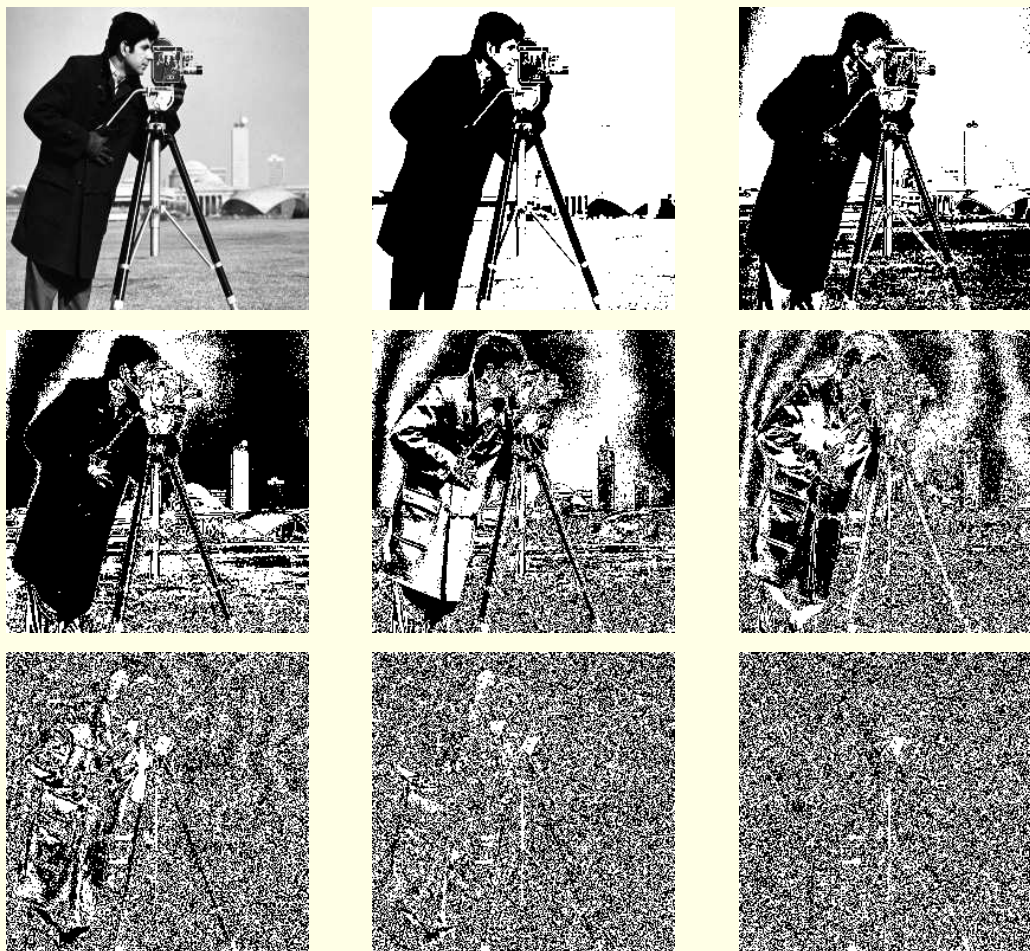


TABLE 3: Image originale et plans binaires en partant du MSB.

Critères de qualité et mesures de distorsion

Soient une image originale f de taille $N \times N$ et $\hat{f}$ l'image traitée.

Définition 1. [*Mean Square Error*]

$$MSE = \frac{1}{N^2} \sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left(f(j, k) - \hat{f}(j, k) \right)^2 \quad (7)$$

Définition 2. [*Signal to noise ratio*]

$$SNR = \frac{\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} (f(j, k))^2}{\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left(f(j, k) - \hat{f}(j, k) \right)^2} \quad (8)$$

Définition 3. [*Peak signal to noise ratio*]

$$PSNR = \frac{N^2 \times 255}{\sum_{j=0}^{N-1} \sum_{k=0}^{N-1} \left(f(j, k) - \hat{f}(j, k) \right)^2} \quad (9)$$

Visualisation 3D d'une image 2D

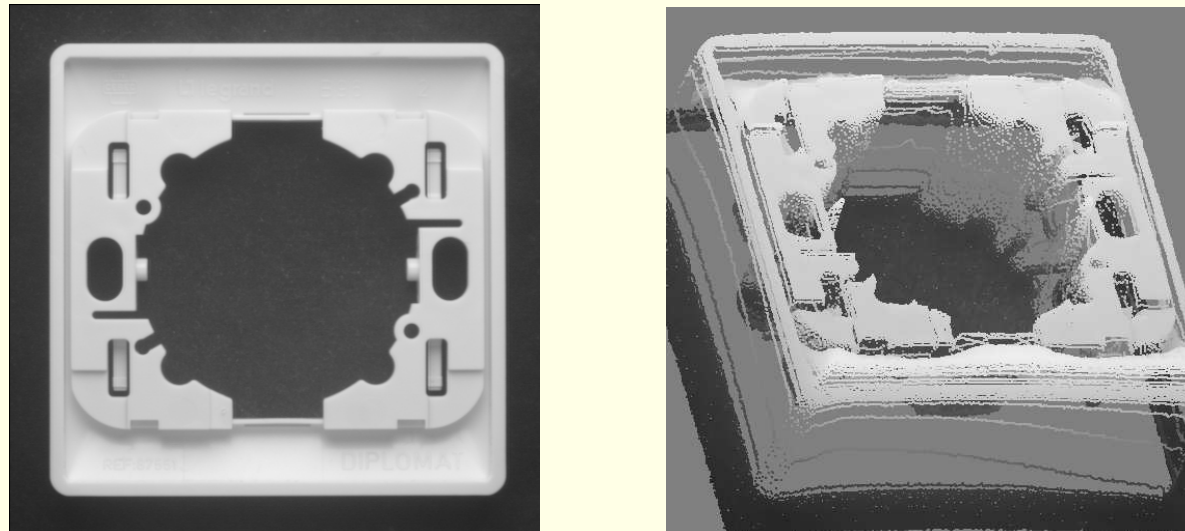
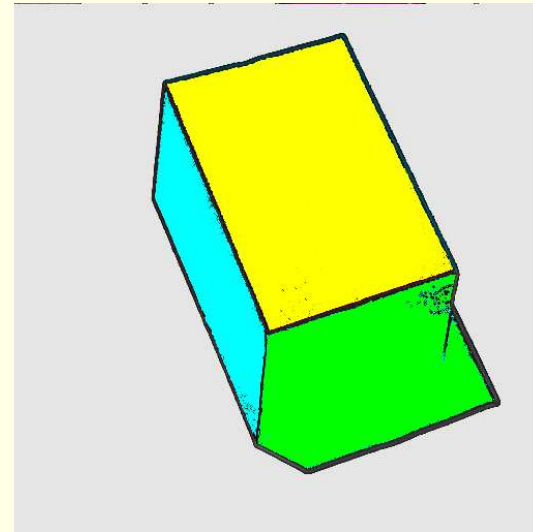
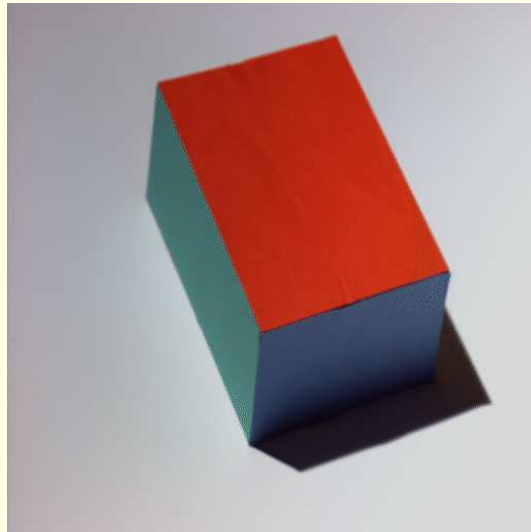
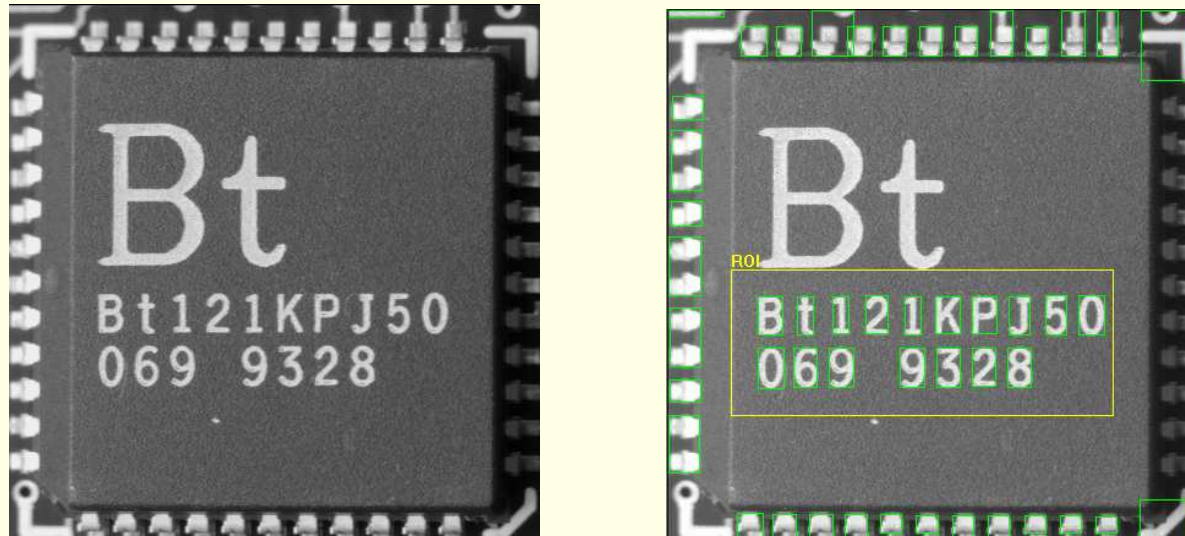


FIGURE 22: Une image et visualisation de la profondeur sous la forme d'une image 3D.

Segmentation d'images



Reconnaissance de caractères



Plusieurs étapes :

- Détection d'une région d'intérêt (Region Of Interest (ROI))
- Détection des contours
- Identification et classement des caractères

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire et déconvolution
- Morphologie mathématique
- Filtrage non-linéaire
- Détection de traits caractéristiques et détection de contours
- Texture
- Rehaussement et restauration
- Étude de la forme
- Segmentation d'images
- Codage d'images
- Applications industrielles

Transformations unitaires

- Bases théoriques du calcul matriciel
- Les transformées :
 - La transformée de FOURIER discrète
 - La transformée de HADAMARD
 - La transformée en cosinus discrète
 - La transformée de FOURIER
- Échantillonnage
- Reconstruction

Bases théoriques du calcul matriciel

Considérons l'image échantillonnée f , représentée par une matrice de $M \times N$ points ou pixels

$$\underline{f} = \begin{bmatrix} f(0,0) & \cdots & f(0,N-1) \\ \vdots & & \vdots \\ f(M-1,0) & \cdots & f(M-1,N-1) \end{bmatrix} \quad (10)$$

Soient $\underline{P}$ et $\underline{Q}$ deux matrices de transformation de dimensions respectives $M \times M$ et $N \times N$:

$$\underline{F} = \underline{P}\underline{f}\underline{Q} \quad (11)$$

ce qui peut également s'écrire

$$\underline{F}(u,v) = \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \underline{P}(u,m) \underline{f}(m,n) \underline{Q}(n,v) \quad (12)$$

$$\underline{f} = \underline{P}^{-1}\underline{F}\underline{Q}^{-1} \quad (13)$$

La transformée de Fourier discrète

Un vecteur à N composantes est calculé comme une combinaison linéaire de N vecteurs de base. Les éléments de ces vecteurs de base sont tous des puissances de l'exponentielle imaginaire

$$W = e^{2\pi j/N} \quad (14)$$

ces vecteurs (lignes) valent

$$\left(1, \overrightarrow{W}^k, \overrightarrow{W}^{2k}, \dots, \overrightarrow{W}^{(N-1)k}\right), \quad k = 0, 1, \dots, N-1 \quad (15)$$

On peut définir la matrice de transformation $\underline{\Phi}_{JJ}$ de dimension $J \times J$:

$$\underline{\Phi}_{JJ}(k, l) = \frac{1}{J} \exp\left(-j \frac{2\pi}{J} kl\right) \quad k, l = 0, 1, \dots, J-1 \quad (16)$$

Définition 4. La transformée de FOURIER discrète est définie, étant données les deux matrices de transformation $\underline{P} = \underline{\Phi}_{MM}$ et $\underline{Q} = \underline{\Phi}_{NN}$, par

$$\underline{F} = \underline{\Phi}_{MM} \underline{f} \underline{\Phi}_{NN}$$

Autre forme :

$$\underline{F}(u, v) = \frac{1}{MN} \sum_{m=0}^{M-1} \sum_{n=0}^{N-1} \underline{f}(m, n) \exp \left[-2\pi j \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right) \right]$$

avec

$$u = 0, 1, \dots, M-1 \quad v = 0, 1, \dots, N-1 \quad (17)$$

Matrice de transformation inverse $\underline{\Phi}_{JJ}^{-1}$

$$\underline{\Phi}_{JJ}^{-1}(k, l) = \exp \left(j \frac{2\pi}{J} kl \right) \quad (18)$$

La transformée de FOURIER discrète inverse vaut

$$\underline{f}(m, n) = \sum_{u=0}^{M-1} \sum_{v=0}^{N-1} \underline{F}(u, v) \exp \left[2\pi j \left(\frac{mu}{M} + \frac{nv}{N} \right) \right] \quad (19)$$

Visualisation



FIGURE 23: L'image Lena et le module de sa transformée de FOURIER discrète.

Propriétés

Périodicité

$$\underline{F}(u, -v) = \underline{F}(u, N - v) \quad \underline{F}(-u, v) = \underline{F}(M - u, v) \quad (20)$$

$$\underline{f}(-m, n) = \underline{f}(M - m, n) \quad \underline{f}(m, -n) = \underline{f}(m, N - n) \quad (21)$$

Plus généralement,

$$\underline{F}(aM + u, bN + v) = \underline{F}(u, v) \quad \underline{f}(aM + m, bN + n) = \underline{f}(m, n) \quad (22)$$

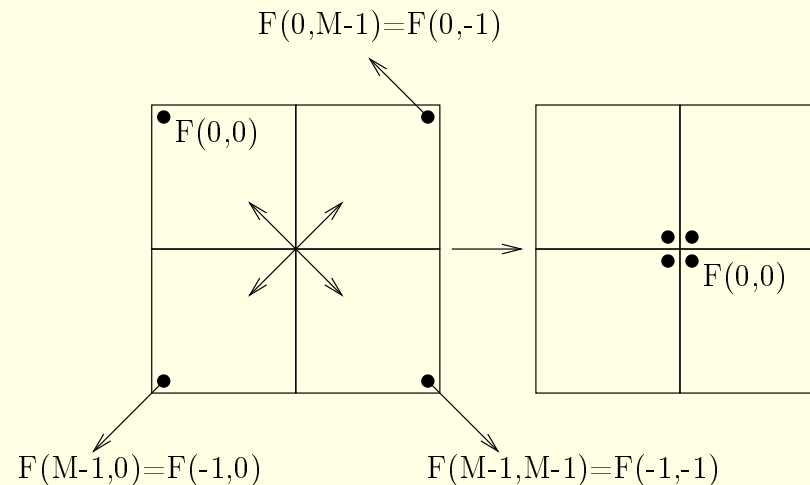


FIGURE 24: Décalage du spectre pour arriver à centrer l'origine.

Centrage du spectre

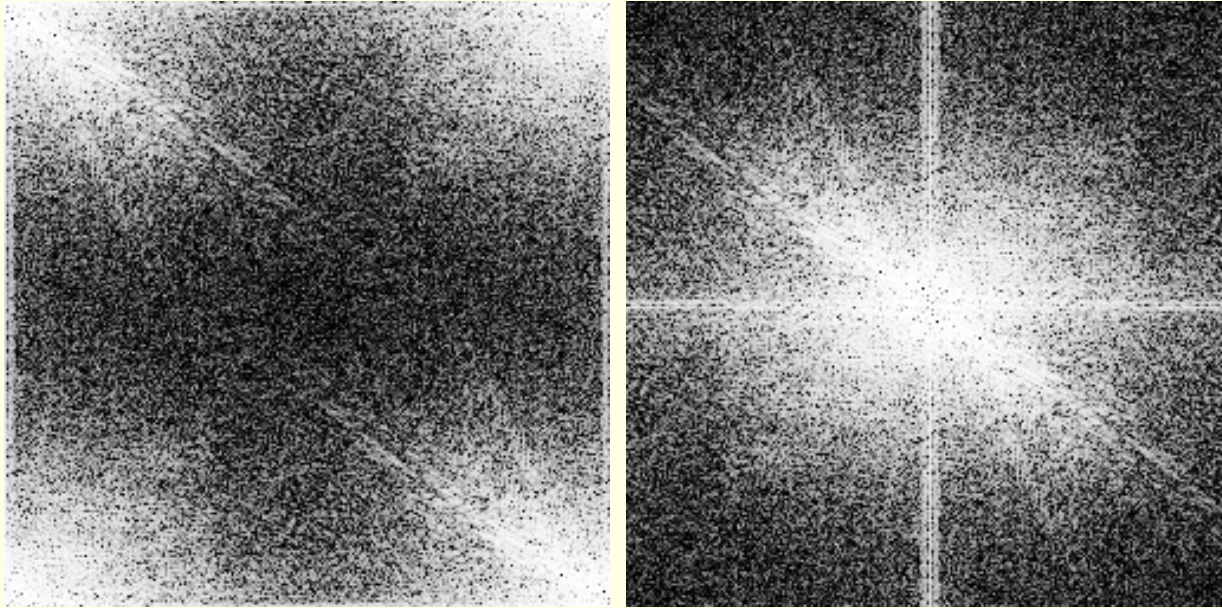


FIGURE 25: Visualisation du module du spectre de l'image Lena avant et après centrage de l'origine.

Transformée de Hadamard

La matrice d'HADAMARD du second ordre est

$$\underline{H}_{22} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (23)$$

La matrice de HADAMARD d'ordre 2^k peut être écrite sous la forme

$$\underline{H}_{2^J 2^J} = \begin{bmatrix} \underline{H}_{JJ} & \underline{H}_{JJ} \\ \underline{H}_{JJ} & -\underline{H}_{JJ} \end{bmatrix} \quad (24)$$

L'inverse d'une matrice de Hadamard est donnée par

$$\underline{H}_{JJ}^{-1} = \frac{1}{J} \underline{H}_{JJ} \quad (25)$$

Définition 5. *La transformée de HADAMARD et son inverse sont alors définies par*

$$\underline{F} = \underline{H}_{MM} \underline{f} \underline{H}_{NN} \quad \underline{f} = \frac{1}{MN} \underline{H}_{MM} \underline{F} \underline{H}_{NN} \quad (26)$$

La transformée en cosinus discrète

Soit la matrice de transformation $\underline{C}_{NN}(k, l)$ définie par

$$\underline{C}_{NN}(k, l) = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{N}} & l = 0 \\ \sqrt{\frac{2}{N}} \cos \left[\frac{(2k+1)l\pi}{2N} \right] & \text{sinon} \end{cases} \quad (27)$$

Définition 6. *La transformée en cosinus discrète (DCT) et son inverse sont données par*

$$\underline{F} = \underline{C}_{NN} \underline{f} \underline{C}_{NN}^T \quad \underline{f} = \underline{C}_{NN}^T \underline{F} \underline{C}_{NN} \quad (28)$$

Autre forme pour la transformée en cosinus discrète

$$\underline{F}(u, v) = \frac{2c(u)c(v)}{N} \sum_{m=0}^{N-1} \sum_{n=0}^{N-1} \underline{f}(m, n) \cos \left(\frac{2m+1}{2N} u \pi \right) \cos \left(\frac{2n+1}{2N} v \pi \right) \quad (29)$$

Transformée de Fourier

Définition 7. La transformée de FOURIER d'une image $f(x, y)$ est définie par

$$\mathcal{F}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2\pi j(xu + yv)} dx dy$$

Transformée inverse

$$f(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}(u, v) e^{2\pi j(ux + vy)} du dv \quad (30)$$

Interprétation : décomposition de l'image en composantes fréquentielles définie sur $[-\infty, +\infty] \times [-\infty, +\infty]$. $f(x, y)$ et $\mathcal{F}(u, v)$ forment une paire de transformée de FOURIER représentée par

$$f(x, y) \rightleftharpoons \mathcal{F}(u, v)$$

En général, $\mathcal{F}(u, v)$ est une fonction de u et de v à valeurs complexes. Nous pouvons donc l'exprimer sous la forme

$$\mathcal{F}(u, v) = \|\mathcal{F}(u, v)\| e^{j\theta(u, v)}$$

Cas particulier : $f(x, y)$ est une fonction à valeurs réelles

$$\mathcal{F}(-u, -v) = \mathcal{F}^*(u, v) \quad (31)$$

Dès lors,

$$\|\mathcal{F}(-u, -v)\| = \|\mathcal{F}(u, v)\| \quad (32)$$

$$\theta(-u, -v) = -\theta(u, v) \quad (33)$$

On peut en déduire deux propriétés importantes d'une image à valeurs réelles :

1. le spectre fréquentiel de l'image est symétrique par rapport à l'origine du système d'axes $u - v$. C'est-à-dire que la connaissance d'un demi-plan suffit.
2. le spectre de phase de l'image est anti-symétrique par rapport à l'origine du système d'axes $u - v$.

Propriétés

1. Séparabilité

En permutant l'ordre d'intégration

$$\mathcal{F}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \left[\int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2\pi j x u} dx \right] e^{-2\pi j y v} dy \quad (34)$$

2. Linéarité

Soient $f_1(x, y) \Rightarrow \mathcal{F}_1(u, v)$ et $f_2(x, y) \Rightarrow \mathcal{F}_2(u, v)$. Alors, pour toutes constantes c_1 et c_2 ,

$$c_1 f_1(x, y) + c_2 f_2(x, y) \Rightarrow c_1 \mathcal{F}_1(u, v) + c_2 \mathcal{F}_2(u, v) \quad (35)$$

3. Homothétie

Si $f(x, y) \Rightarrow \mathcal{F}(u, v)$, alors

$$f(ax, by) \Rightarrow \frac{1}{|ab|} \mathcal{F}\left(\frac{u}{a}, \frac{v}{b}\right) \quad (36)$$

1. Translation spatiale

Si $f(x, y) \rightleftharpoons \mathcal{F}(u, v)$, alors

$$f(x - x_0, y - y_0) \rightleftharpoons \mathcal{F}(u, v) e^{-2\pi j(x_0 u + y_0 v)}$$

2. Translation fréquentielle

Si $f(x, y) \rightleftharpoons \mathcal{F}(u, v)$, alors

$$f(x, y) e^{j2\pi(u_0 x + v_0 y)} \rightleftharpoons \mathcal{F}(u - u_0, v - v_0) \quad (37)$$

3. Aires

Si $f(x, y) \rightleftharpoons \mathcal{F}(u, v)$, alors

$$\mathcal{F}(0, 0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx dy \quad (38)$$

Le coefficient $\mathcal{F}(0, 0)$, appelé parfois composante DC.

1. Convolution

Le produit de convolution de deux fonctions $f(x, y)$ et $g(x, y)$ est défini par

$$(f \otimes g)(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) g(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (39)$$

Si $f(x, y) \rightleftharpoons \mathcal{F}(u, v)$ et $g(x, y) \rightleftharpoons \mathcal{G}(u, v)$, alors

$$(f \otimes g)(x, y) \rightleftharpoons \mathcal{F}(u, v) \mathcal{G}(u, v) \quad (40)$$

La convolution de deux images dans le domaine spatial est transformée dans le domaine fréquentiel en la multiplication de leur transformée de FOURIER respective.

2. Multiplication

Si $f(x, y) \rightleftharpoons \mathcal{F}(u, v)$ et $g(x, y) \rightleftharpoons \mathcal{G}(u, v)$, alors

$$f(x, y) g(x, y) \rightleftharpoons (\mathcal{F} \otimes \mathcal{G})(u, v) \quad (41)$$

La fonction Rectangle

Considérons l'image $f(x, y)$ définie par

$$f(x, y) = A \text{Rect}_{a,b}(x, y) \quad (42)$$

où

$$\text{Rect}_{a,b}(x, y) = \begin{cases} 1 & |x| < \frac{a}{2}, |y| < \frac{b}{2} \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (43)$$

$$\mathcal{F}(u, v) = \int_{-a/2}^{+a/2} dx \int_{-b/2}^{+b/2} dy A e^{-2\pi j(xu+yv)} \quad (44)$$

$$= Aab \left(\frac{\sin(\pi au)}{\pi au} \right) \left(\frac{\sin(\pi bv)}{\pi bv} \right) \quad (45)$$

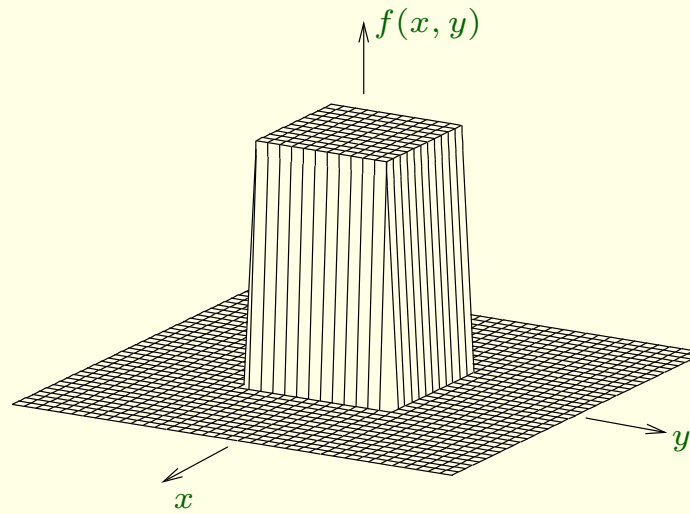


FIGURE 26: Illustration de la fonction Rectangle.

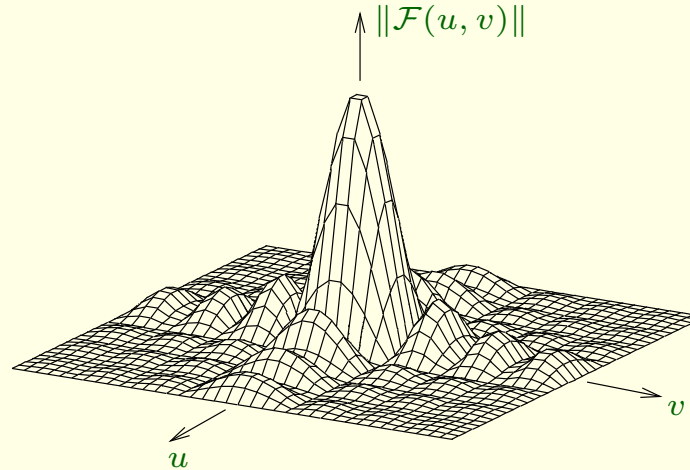


FIGURE 27: Module de la transformée de FOURIER de la fonction Rectangle.

La fonction Disque

Considérons l'image $f(x, y)$ définie par

$$f(x, y) = A \text{Disque}_R(x, y) \quad (46)$$

où

$$\text{Disque}_R(x, y) = \begin{cases} 1 & \sqrt{x^2 + y^2} < R \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (47)$$

$$\mathcal{F}(u, v) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) e^{-2\pi j(xu + yv)} dx dy \quad (48)$$

$$= \int_0^R r dr \int_0^{2\pi} A e^{-2\pi j r (u \cos \theta + v \sin \theta)} d\theta \quad (49)$$

$$\mathcal{F}(u, v) = AR \frac{J_1(2\pi R \sqrt{u^2 + v^2})}{\sqrt{u^2 + v^2}} \quad (50)$$

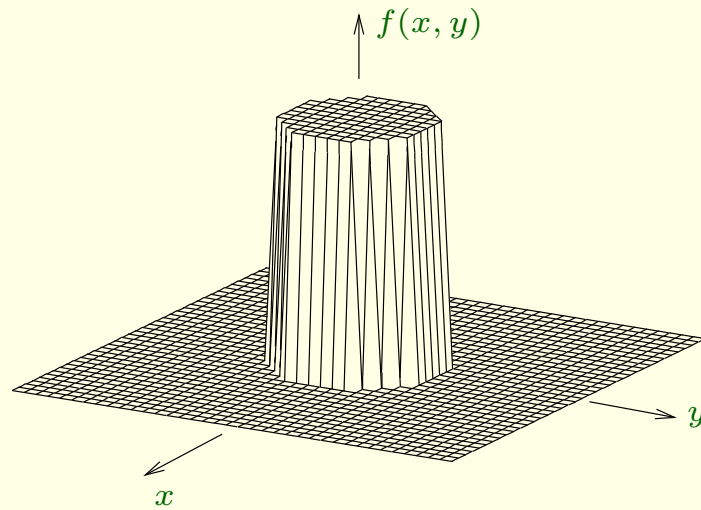


FIGURE 28: Illustration de la fonction Disque.

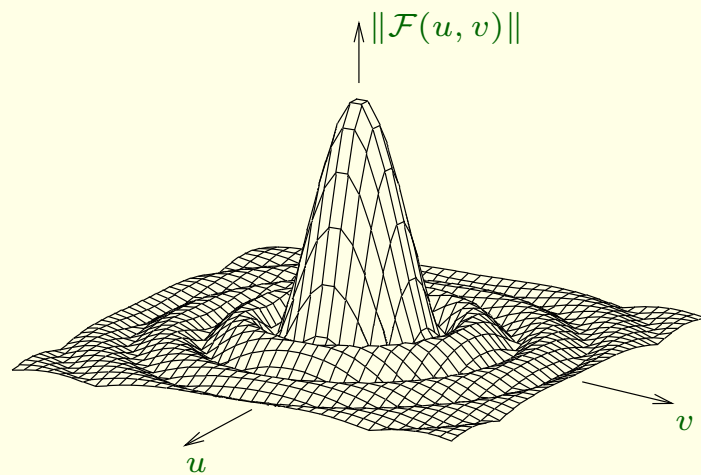


FIGURE 29: Module de la transformée de FOURIER de la fonction Disque.

Échantillonnage

Définition 8. *La fonction delta ou impulsion de DIRAC bidimensionnelle, notée $\delta(x, y)$, est définie par*

$$\delta(x, y) = 0 \quad \forall (x, y) \neq (0, 0) \quad (51)$$

et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x, y) dx dy = 1 \quad (52)$$

Propriétés

$$f(x, y) \otimes \delta(x, y) = f(x, y) \quad (53)$$

$$\delta(x, y) \rightleftharpoons 1 \quad (54)$$

Le processus d'échantillonnage

La fonction d'échantillonnage idéale est définie par

$$s(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - i\Delta x, y - j\Delta y) \quad (55)$$

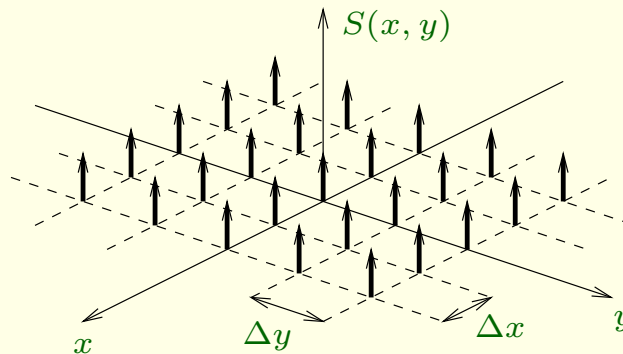


FIGURE 30: Représentation de la fonction $s(x, y)$.

Définition 9. Nous définissons ainsi la fonction échantillonnée idéale

$$f_s(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(i\Delta x, j\Delta y) \delta(x - i\Delta x, y - j\Delta y) \quad (56)$$

Lien entre les transformées de Fourier de $f_s(x, y)$ et $f(x, y)$

$$f_s(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(x, y) \delta(x - i\Delta x, y - j\Delta y) \quad (57)$$

$$= f(x, y) \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \delta(x - i\Delta x, y - j\Delta y) \quad (58)$$

$$= f(x, y) s(x, y) \quad (59)$$

$$f_s(x, y) \rightleftharpoons \mathcal{F}(u, v) \otimes \mathcal{S}(u, v) \quad (60)$$

où $\mathcal{S}(u, v)$ est la transformée de FOURIER de la fonction d'échantillonnage idéale.

$$f_s(x, y) \rightleftharpoons \frac{1}{\Delta x \Delta y} \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} \mathcal{F}\left(u - \frac{i}{\Delta x}, v - \frac{j}{\Delta y}\right) \quad (61)$$

Repli de spectre (aliasing) : théorème de Shannon

$$g(x, y) = \frac{J_1 \left(2\pi W \sqrt{x^2 + y^2} \right)}{\sqrt{x^2 + y^2}} \quad (62)$$

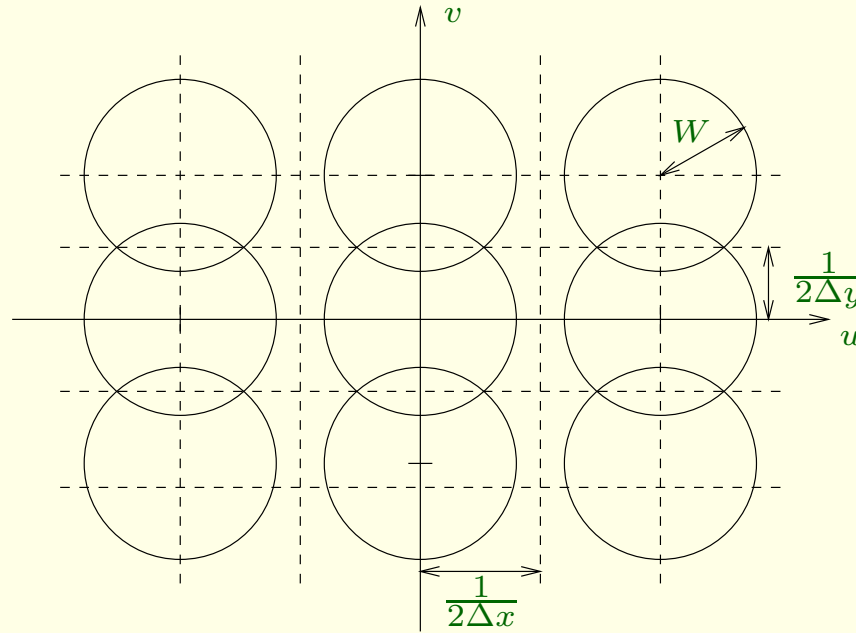


FIGURE 31: Transformée de FOURIER de $g(x, y)$ ($1/\Delta x = 2,5W$ et $1/\Delta y = 1,5W$).

Théorème 1. *[Théorème de Shannon]. Pour éviter tout repli de spectre, il faut*

$$\frac{1}{\Delta x} > 2u_{max} \quad \frac{1}{\Delta y} > 2v_{max} \quad (63)$$

Reconstruction

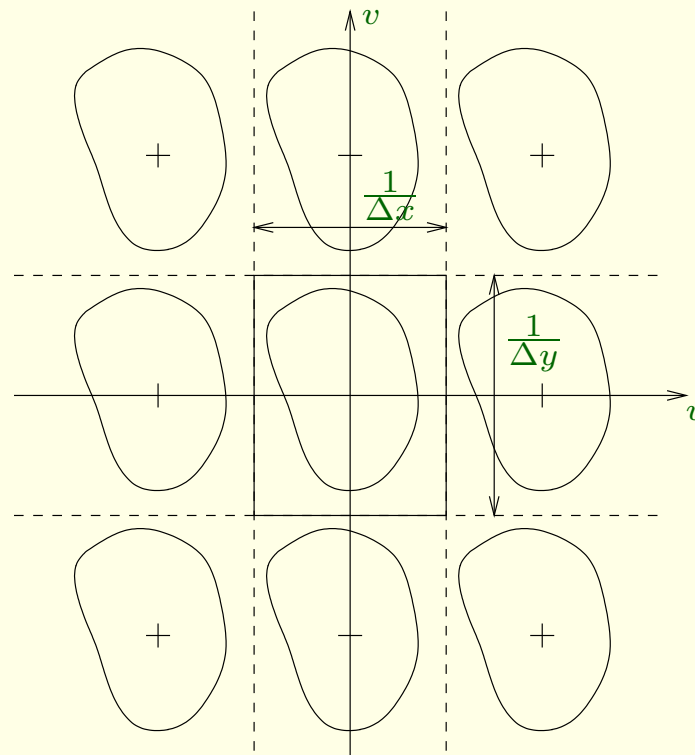
Le but est de reconstruire, à partir de la fonction échantillonnée $f_s(x, y)$, une fonction $f_r(x, y)$ qui se rapproche le plus possible de $f(x, y)$. Idéalement, on devrait avoir $f_r(x, y) = f(x, y)$.

En toute généralité, la réponse impulsionnelle du filtre de reconstruction, également appelé fonction d'interpolation, sera noté $r(x, y)$. La fonction reconstruite est alors obtenue par

$$f_r(x, y) = f_s(x, y) \otimes r(x, y) \quad (64)$$

$$= \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(i\Delta x, j\Delta y) r(x - i\Delta x, y - j\Delta y) \quad (65)$$

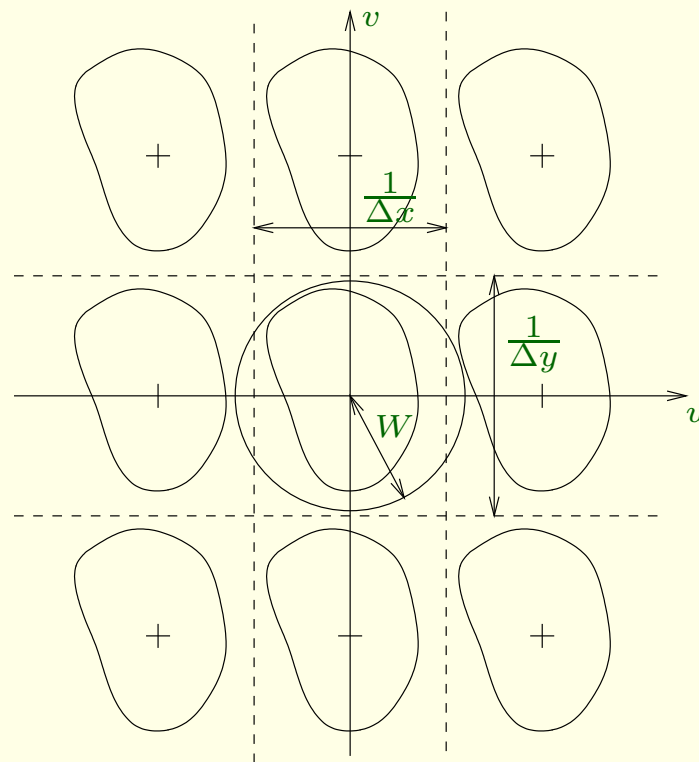
Filtrage passe-bas à fenêtre rectangulaire



$$\mathcal{R}(u, v) = \Delta x \Delta y \text{Rect}_{\frac{1}{\Delta x}, \frac{1}{\Delta y}}(u, v) \quad (66)$$

$$f_r(x, y) = f(x, y) = \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(i\Delta x, j\Delta y) \text{sinc}\left(\frac{x - i\Delta x}{\Delta x}\right) \text{sinc}\left(\frac{y - j\Delta y}{\Delta y}\right)$$

Filtrage passe-bas à fenêtre circulaire



$$\mathcal{R}(u, v) = \Delta x \Delta y \text{Disque}_W(u, v) \quad (67)$$

$$f_r(x, y) = W \Delta x \Delta y \sum_{i=-\infty}^{+\infty} \sum_{j=-\infty}^{+\infty} f(i \Delta x, j \Delta y) \frac{J_1 \left(2\pi W \sqrt{(x - i \Delta x)^2 + (y - j \Delta y)^2} \right)}{\sqrt{(x - i \Delta x)^2 + (y - j \Delta y)^2}}$$

Conditions de reconstruction

Pour obtenir une reconstruction exacte de $f(x, y)$, la fenêtre fréquentielle de filtrage doit vérifier les conditions suivantes :

1. elle doit être symétrique par rapport à l'origine afin d'assurer que l'image reconstruite soit réelle,
2. elle doit contenir entièrement la réplique du spectre de $f(x, y)$ située à l'origine et
3. elle ne peut intersecter les autres répliques du spectre de $f(x, y)$.

Autres interpolateurs

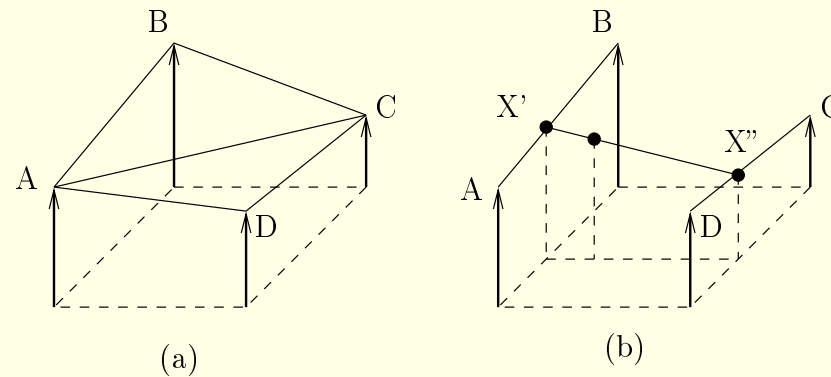


FIGURE 32: Interpolateurs : (a) interpolation linéaire par morceaux, (b) interpolation bilinéaire.

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire et déconvolution
- Morphologie mathématique
- Filtrage non-linéaire
- Détection de traits caractéristiques et détection de contours
- Texture
- Rehaussement et restauration
- Étude de la forme
- Segmentation d'images
- Codage d'images
- Applications industrielles

Filtrage linéaire et déconvolution

- Notion de filtre idéal
- Catégories de filtres idéaux
- Passage d'une image dans un système linéaire
 - Filtres passe-bas
 - Filtres passe-haut
 - Filtres de GABOR
- Déconvolution

Notion de filtre idéal

On dira d'un filtre qu'il est idéal s'il multiplie tous les coefficients transformés par 0 ou par 1.

Définition 10. *[Filtre idéal] Un filtre est idéal si sa transmittance est telle que*

$$\forall(u, v), \mathcal{H}(u, v) = 0 \text{ ou } 1 \quad (68)$$

La notion de filtre idéal est intimement liée à celle d'idempotence. L'idempotence doit être comprise ici telle que, pour toute image $f(x, y)$,

$$\mathcal{F}(u, v)\mathcal{H}(u, v) = \mathcal{F}(u, v)\mathcal{H}(u, v)\mathcal{H}(u, v) \quad (69)$$

Catégories de filtres idéaux

Dans le cas d'un signal unidimensionnel



FIGURE 33: Filtres idéaux unidimensionnels.

Trois types de filtres idéaux à symétrie circulaire

- les filtres passe-bas

$$\mathcal{H}(u, v) = \begin{cases} 1 & \sqrt{u^2 + v^2} \leq R_0 \\ 0 & \sqrt{u^2 + v^2} > R_0 \end{cases} \quad (70)$$



(a) Image originale



(b) Image filtrée

FIGURE 34: Filtrage passe-bas d'une image.

- les filtres passe-haut

$$\mathcal{H}(u, v) = \begin{cases} 1 & \sqrt{u^2 + v^2} \geq R_0 \\ 0 & \sqrt{u^2 + v^2} < R_0 \end{cases} \quad (71)$$

- les filtres passe-bande. Ils sont équivalents au complémentaire d'un filtre passe-bas et d'un filtre passe-haut.

$$\mathcal{H}(u, v) = \begin{cases} 1 & R_0 \leq \sqrt{u^2 + v^2} \leq R_1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (72)$$

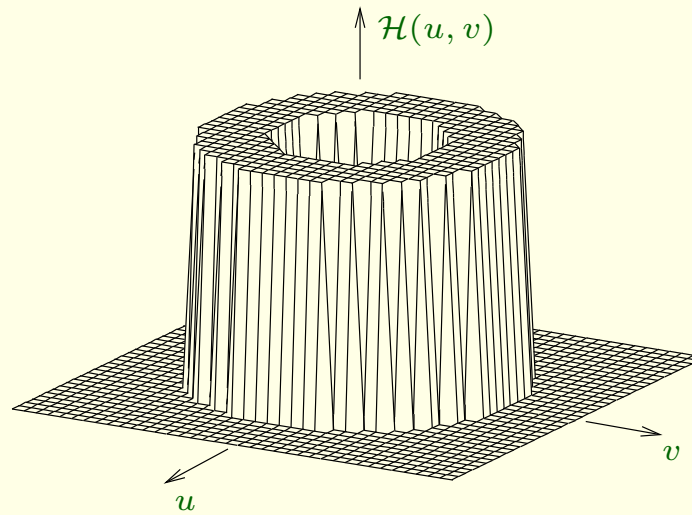
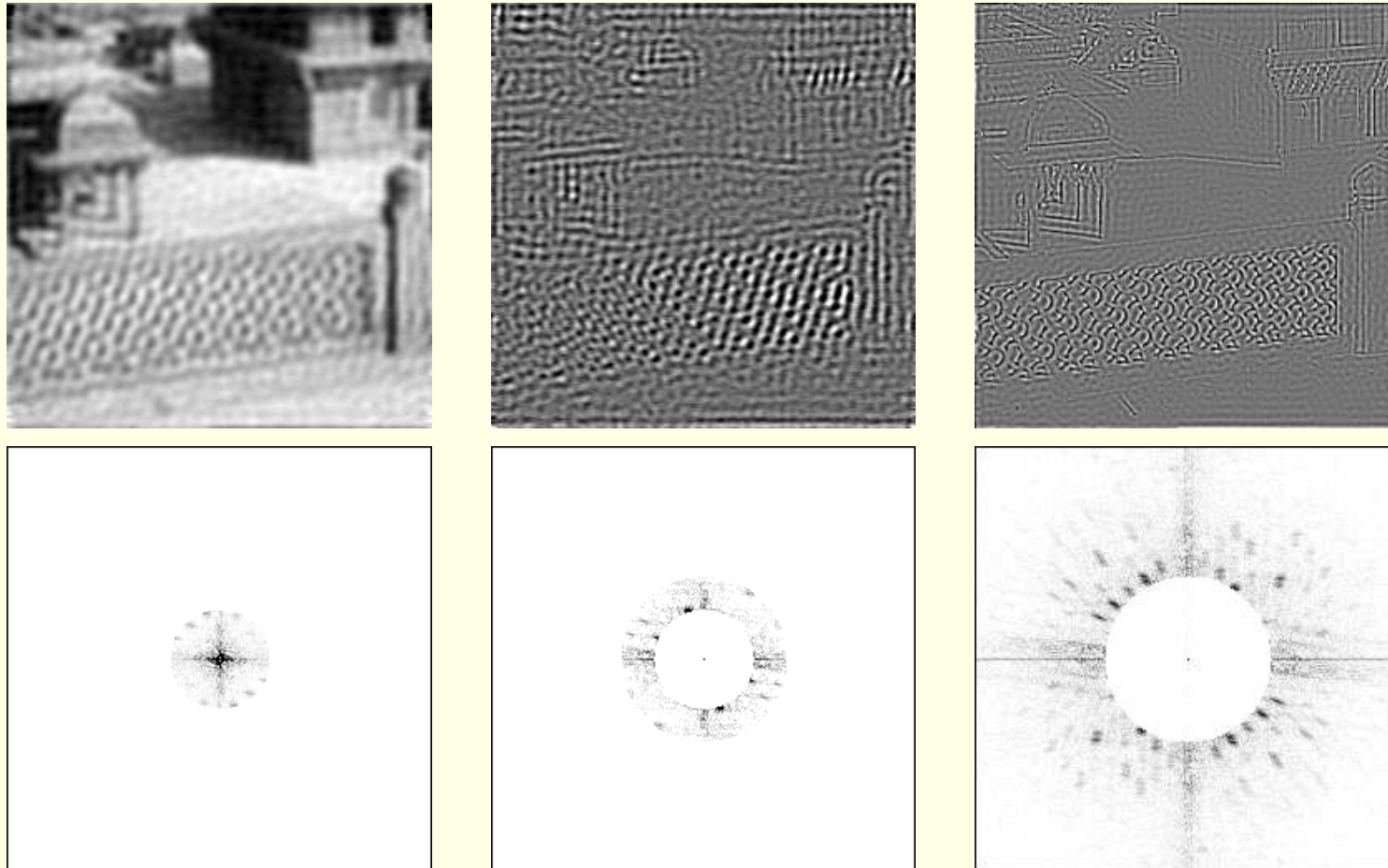


FIGURE 35: Fonction de transfert du filtre passe-bande idéal.

Illustration des effets du filtrage



Images filtrées au moyen de filtres idéaux circulaires et spectres correspondants.

Passage d'une image dans un système linéaire

Un filtre linéaire bidimensionnel est caractérisé par sa réponse impulsionnelle $h(x, y)$. L'image de sortie $g(x, y)$ résulte du produit de convolution de la réponse impulsionnelle du filtre par l'image d'entrée $f(x, y)$

$$g(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} f(\alpha, \beta) h(x - \alpha, y - \beta) d\alpha d\beta \quad (73)$$

qui est encore noté

$$g(x, y) = (f \otimes h)(x, y) \quad (74)$$

Par la propriété de convolution de la transformée de FOURIER, nous pouvons encore écrire

$$\mathcal{G}(u, v) = \mathcal{H}(u, v) \mathcal{F}(u, v)$$

Filtres passe-bas

Un exemple commun de filtre passe-bas est le filtre passe-bas de BUTTERWORTH d'ordre n défini par la fonction de transfert suivante

$$\mathcal{H}(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{\sqrt{u^2 + v^2}}{R_0} \right)^{2n}} \quad (75)$$

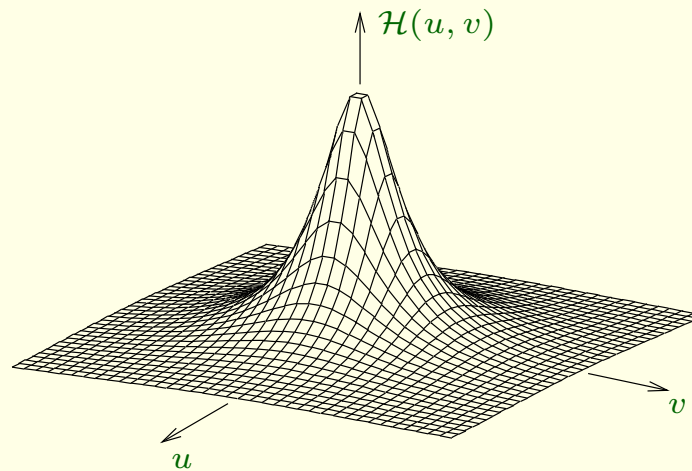
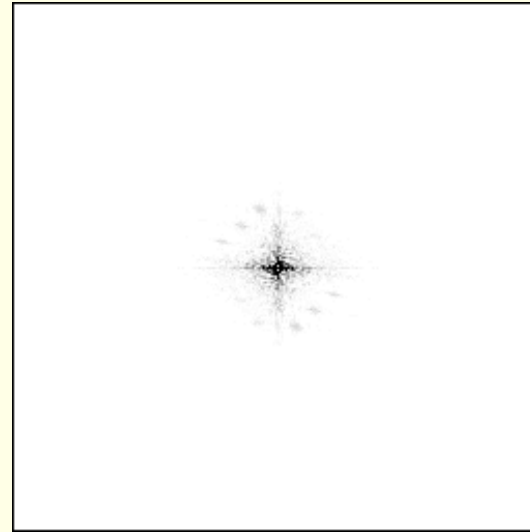


FIGURE 37: Transmittance du filtre passe-bas de BUTTERWORTH pour $n = 1$.



(a) Image filtrée



(b) Spectre de l'image filtrée

Image filtrée par un filtre passe-bas de BUTTERWORTH d'ordre 1 ($f_c = 30$).

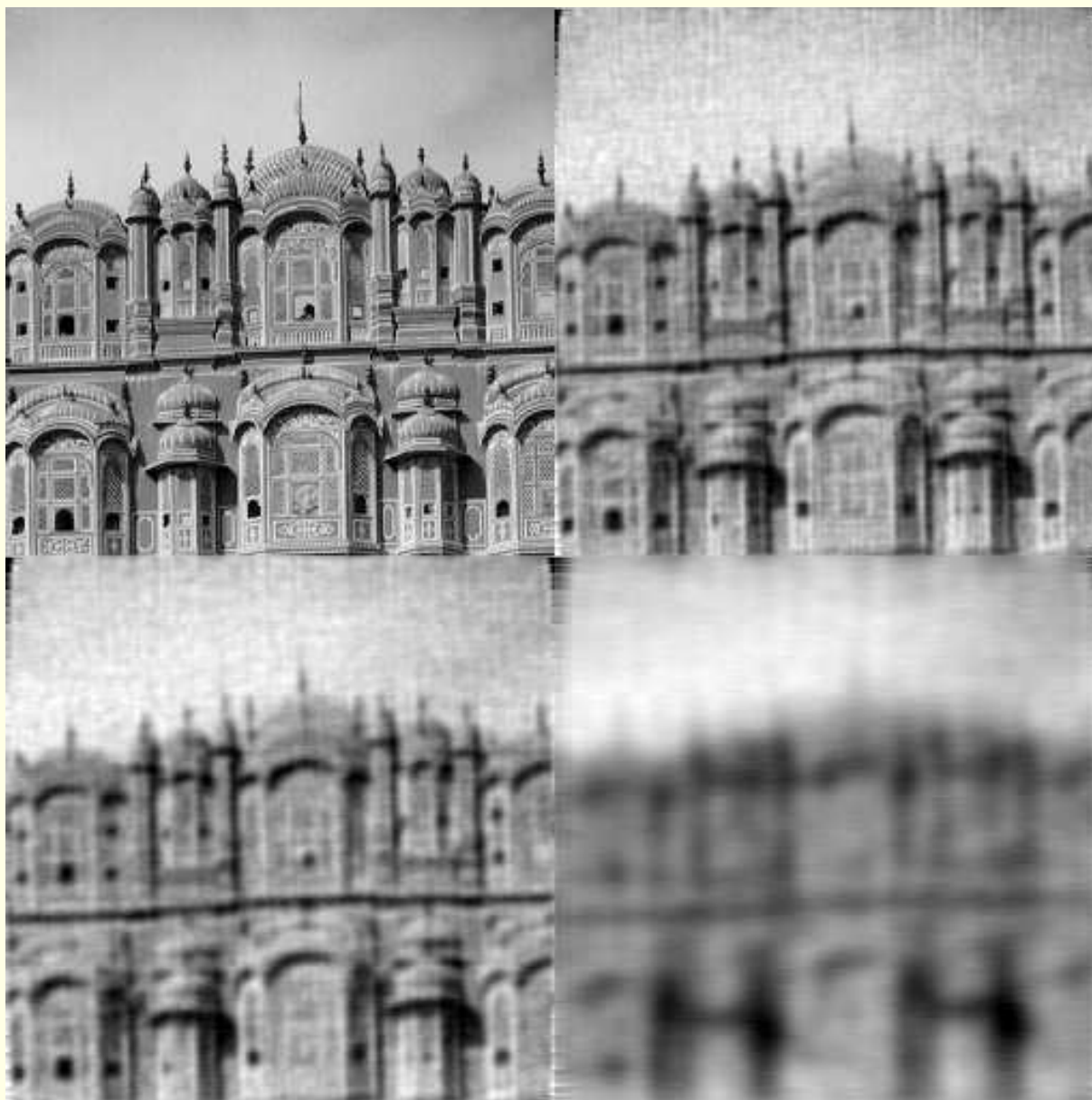
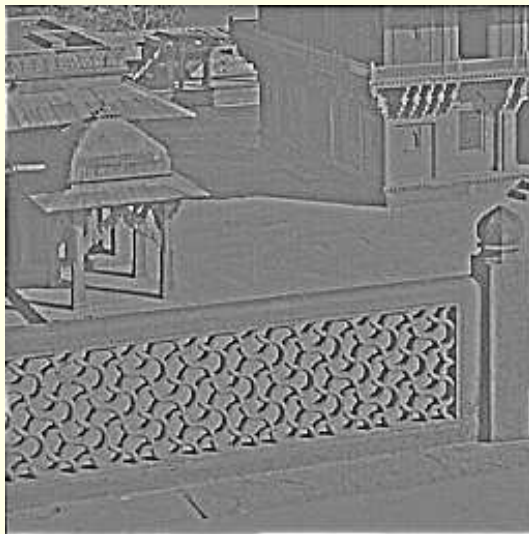


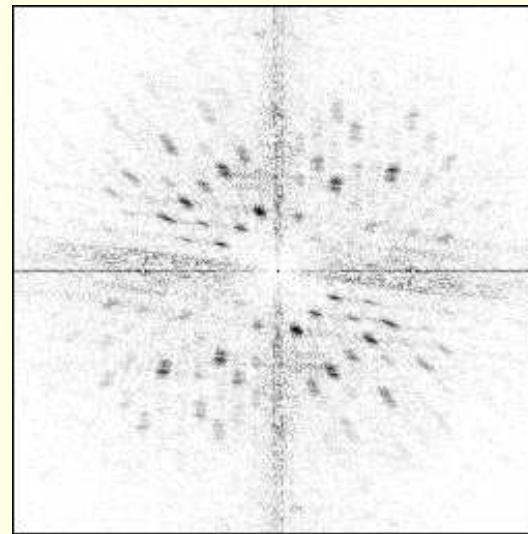
FIGURE 39: Effet d'un filtrage passe-bas sur une image.

Filtres passe-haut

$$\mathcal{H}(u, v) = \frac{1}{1 + \left(\frac{R_0}{\sqrt{u^2 + v^2}} \right)^{2n}} \quad (76)$$



(a) Image filtrée



(b) Spectre de l'image filtrée

Image filtrée par un filtre passe-haut de BUTTERWORTH d'ordre 1 ($f_c = 50$).

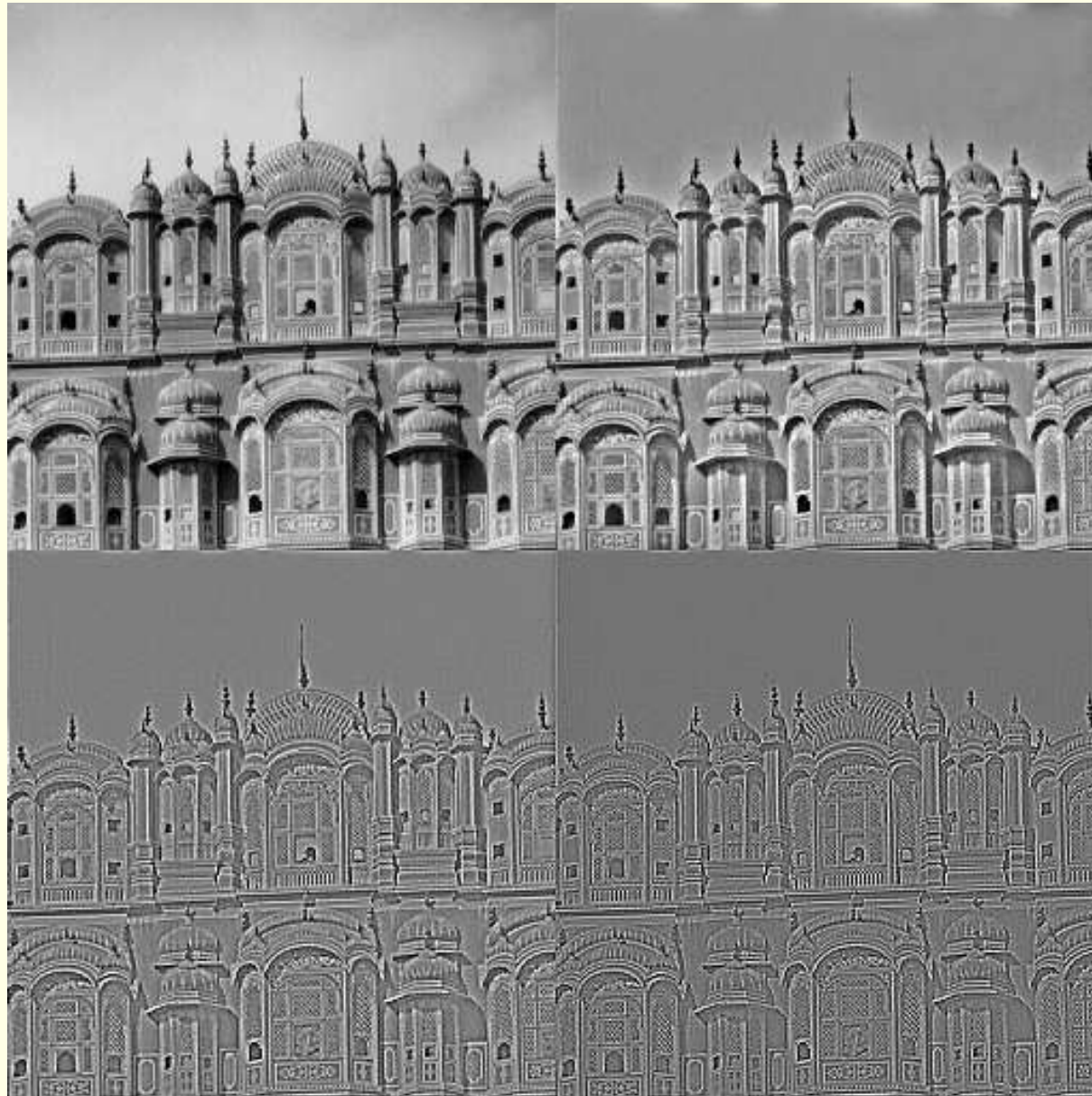


FIGURE 41: Effet d'un filtrage passe-haut sur une image.

Filtres de Gabor

Définition

Les filtres de GABOR ou filtres gaussiens constituent une classe particulière des filtres linéaires ; ce sont des filtres orientés. Ces filtres ont une réponse impulsionnelle de la forme :

$$h(x, y) = g(x', y')e^{2\pi j(Ux+Vy)} \quad (77)$$

- $(x', y') = (x \cos \phi + y \sin \phi - x \sin \phi + y \cos \phi)$, c'est-à-dire les coordonnées (x, y) tournées d'un angle ϕ , et
- $g(x', y') = \frac{1}{2\pi\sigma^2}e^{-(x'/\lambda)^2+y'^2)/2\sigma^2}$.

La transformée de FOURIER correspondante est :

$$\mathcal{H}(u, v) = e^{-2\pi^2\sigma^2[(u'-U')^2\lambda^2+(v'-V')^2]} \quad (78)$$

- $(u', v') = (u \cos \phi + v \sin \phi - u \sin \phi + v \cos \phi)$, et
- (U', V') est obtenu par rotation du point (U, V) par le même angle ϕ .

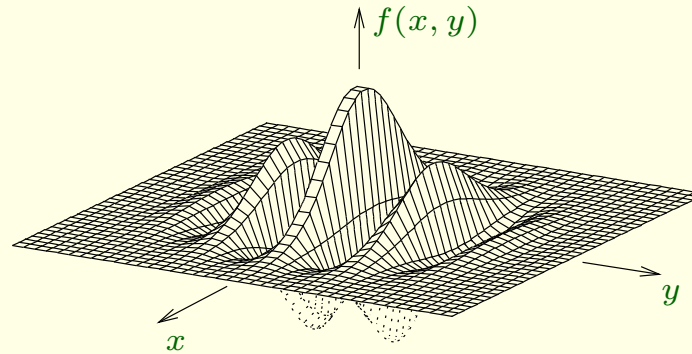


FIGURE 42: Représentation de la partie réelle d'un membre de la famille des fonctions de GABOR ($a = b$, $x_0 = y_0 = 0$, $u_0 = 0$, $v_0 = 2$).

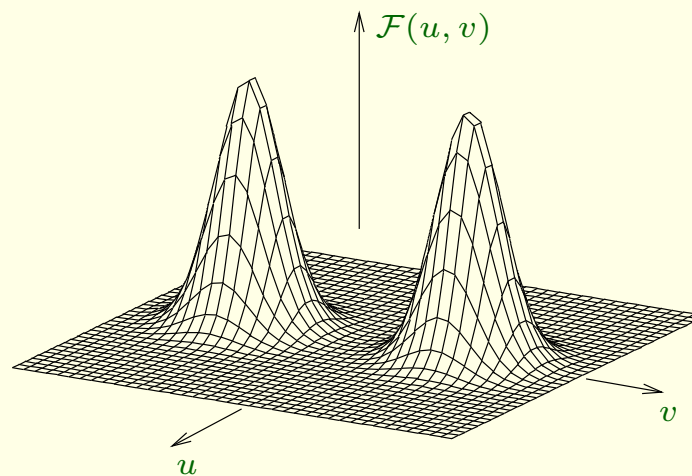


FIGURE 43: Module de la transformée de FOURIER de la fonction de GABOR.

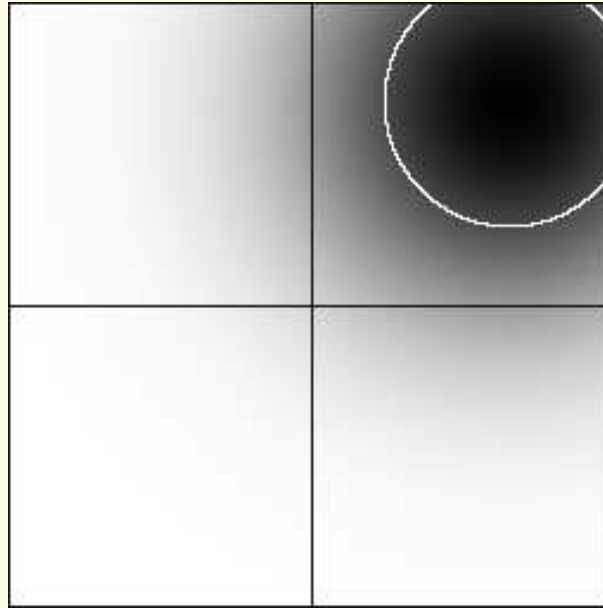


FIGURE 44: Trace d'un filtre de GABOR dans le plan spectral. Le cercle blanc représente la bande passante à $3 [dB]$.

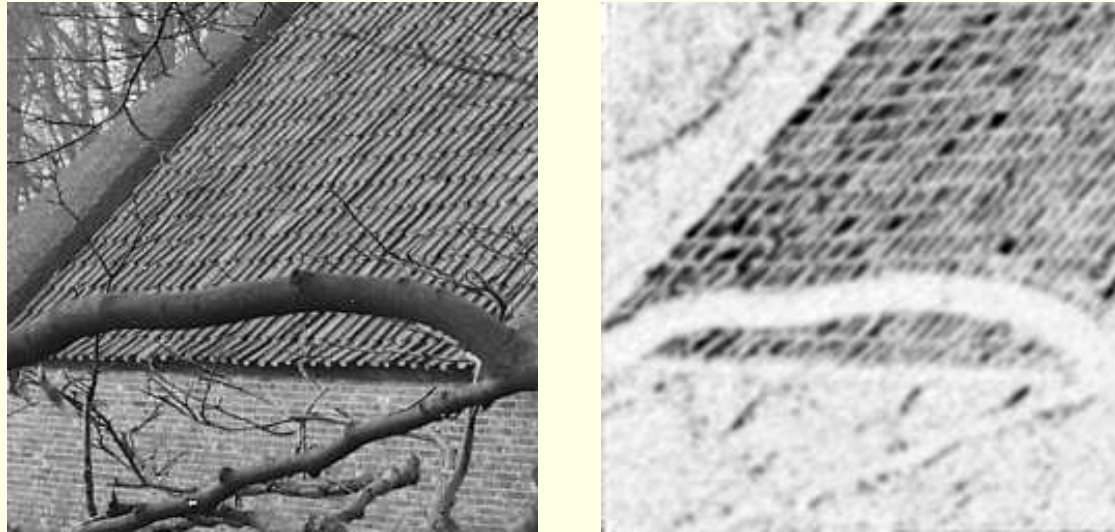


FIGURE 45: Une image originale et l'image filtré avec un filtre orienté à 135° .

Implémentation

Il y principalement 4 moyens d'implémenter un filtre gaussien :

1. Convolution avec un nombre restreint du noyau gaussien. Il est d'usage de choisir $N_0 = 3\sigma$ ou 5σ

$$g_{1D}[n] = \begin{cases} \frac{1}{\sqrt{2\sigma}} e^{-(n^2/2\sigma^2)} & |n| \leq N_0 \\ 0 & |n| > N_0 \end{cases} \quad (79)$$

2. Convolution itérative avec un noyau uniforme

$$g_{1D}[n] \simeq u[n] \otimes u[n] \otimes u[n] \quad (80)$$

avec

$$u[n] = \begin{cases} \frac{1}{(2N_0+1)} & |n| \leq N_0 \\ 0 & |n| > N_0 \end{cases} \quad (81)$$

C'est une application de la loi des grands nombres connues en statistique.

3. Multiplication dans le domaine fréquentiel.
4. Implémentation d'un filtre récursif.

Introduction à la déconvolution

Modèle

Soit $y(n)$, le signal observé. $y(n)$ s'obtient par 'fenêtrage' ou 'apodisation' de la fonction $f(n)$ à extrapoler :

$$y(n) = w(n)f(n) \quad n = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (82)$$

avec

$$w(n) = \begin{cases} 1 & \text{pour } n \in D_w \\ 0 & \text{si } n \notin D_w \end{cases} \quad (83)$$

Le problème d'extrapolation se ramène à la convolution de la transformée de $f(n)$ par celle de $w(n)$

$$\mathcal{Y}(k) = \mathcal{W}(k) \otimes \mathcal{F}(k) \quad k = 0, 1, \dots, N - 1 \quad (84)$$

Effet de fenêtrage et l'extrapolation

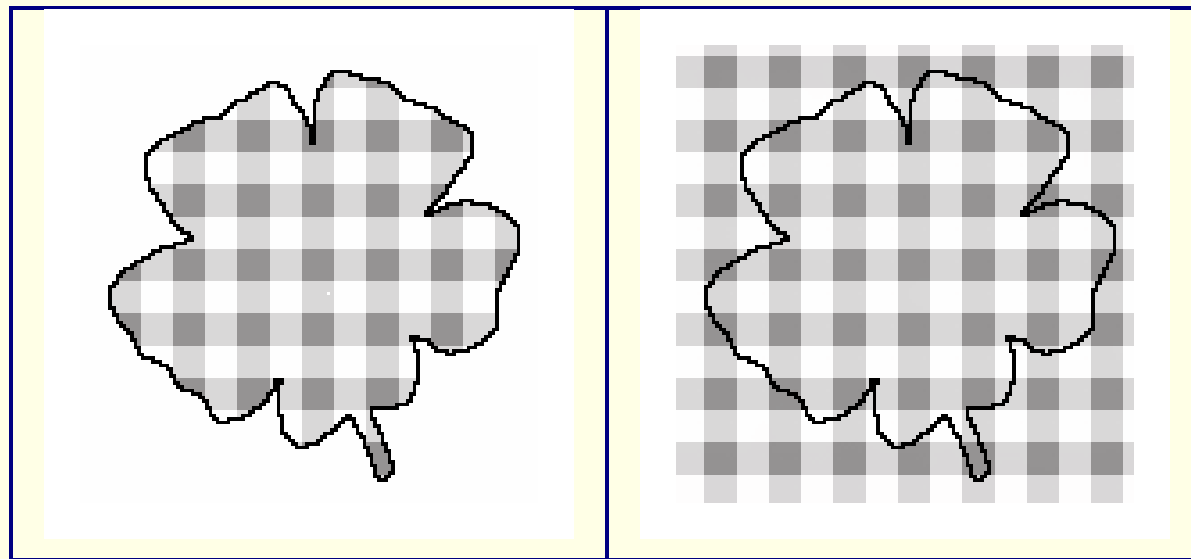
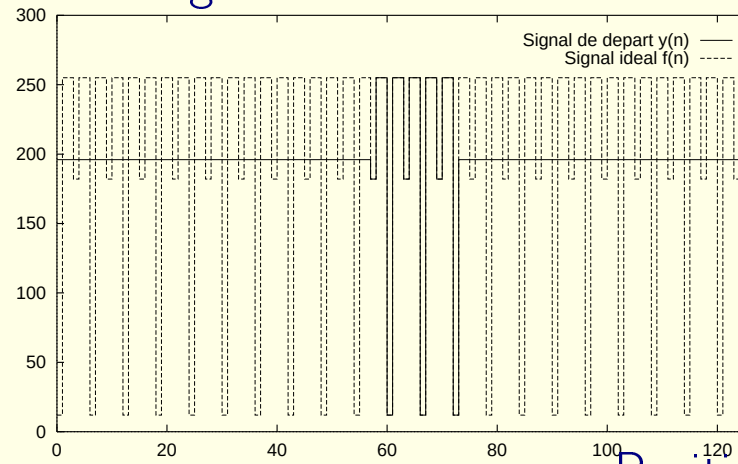


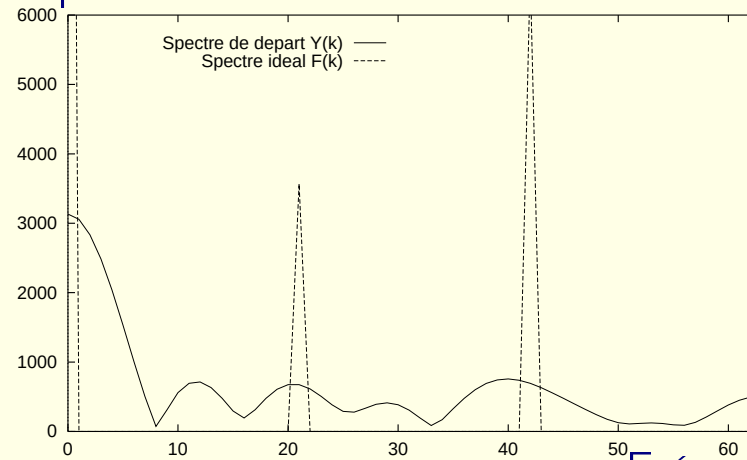
FIGURE 46: Exemple d'extrapolation d'un signal. L'image de droite est l'image extrapolée avec quelques 3% des coefficients spectraux seulement.

Valeur de gris



Position

Amplitude de la transformée de FOURIER



Fréquence

FIGURE 47: Un signal unidimensionnel dans le domaine spatial et dans le domaine spectral.

Forme itérative des opérateurs de déconvolution

Le principe est simple : par le choix d'un opérateur O , on construit une suite de valeurs $\dots, f_i(n), f_{i+1}(n), \dots$ obtenues par

$$f_{i+1}(n) = O[f_i(n)] \quad (85)$$

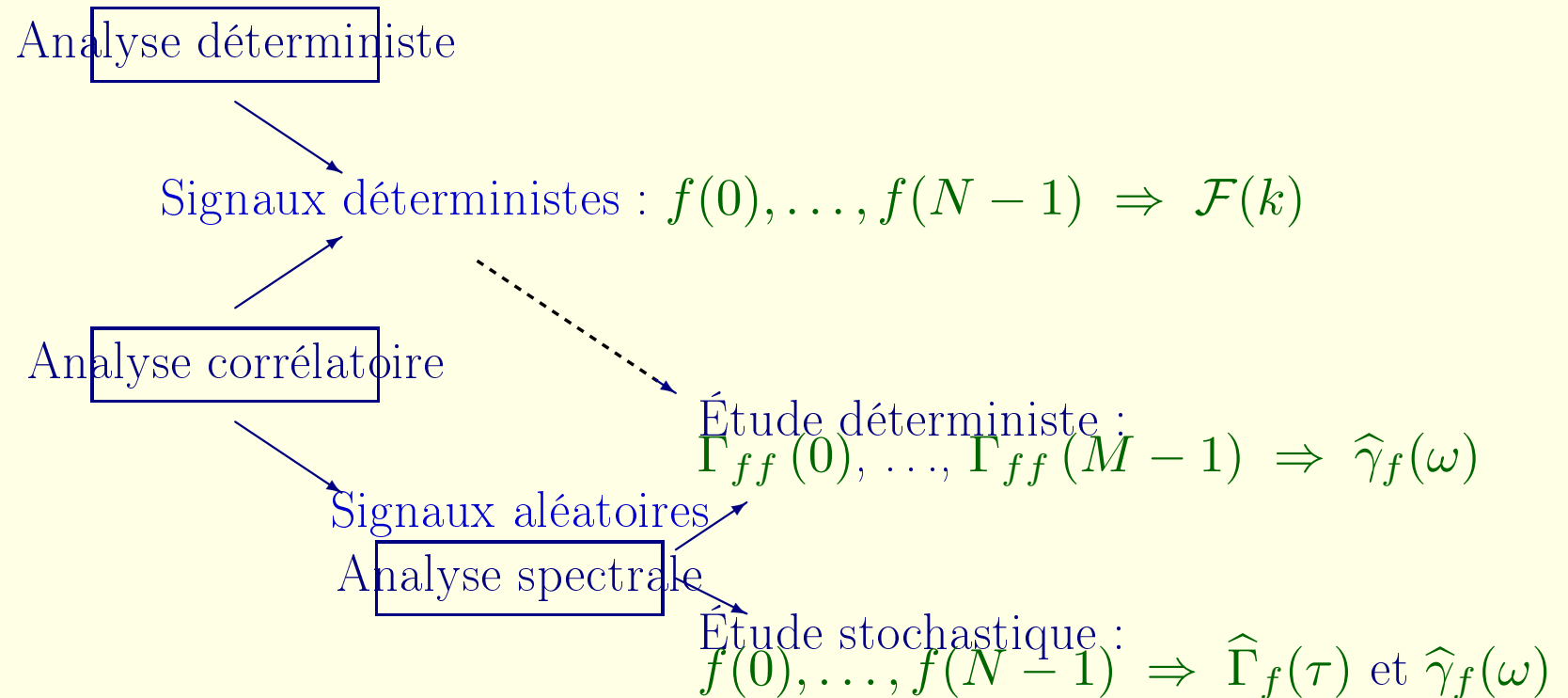


FIGURE 48: Récapitulatif des techniques de caractérisation des signaux.

Déconvolution sélective

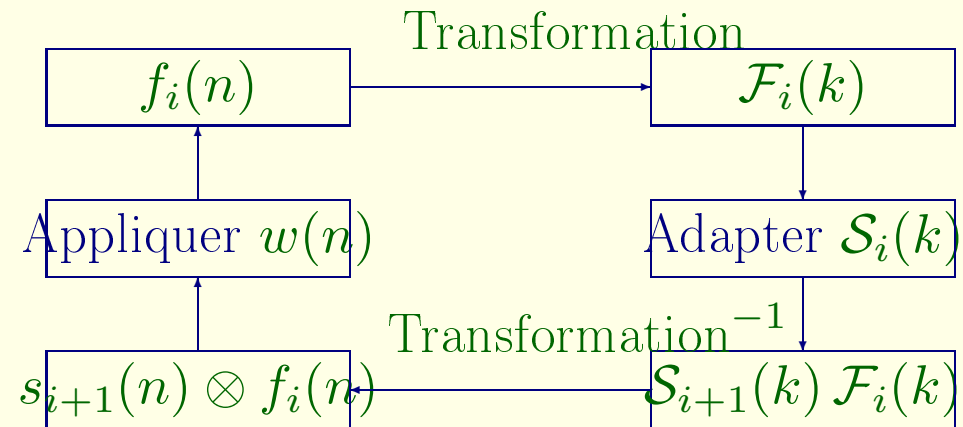


FIGURE 49: Bloc-diagramme de l'algorithme d'extrapolation par déconvolution sélective.

Amplitude de la transformée de FOURIER

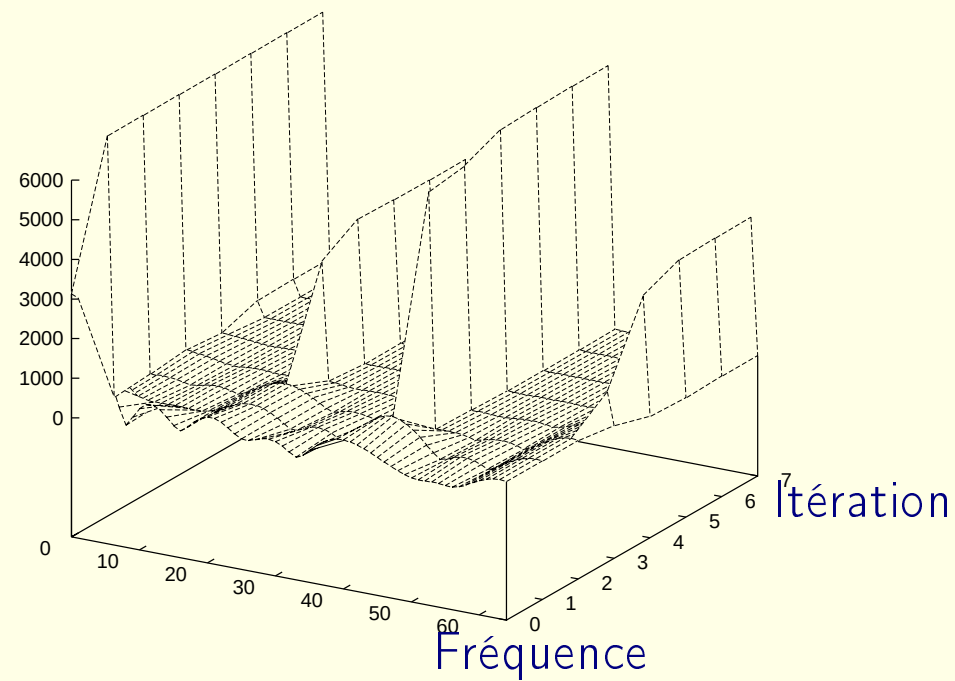
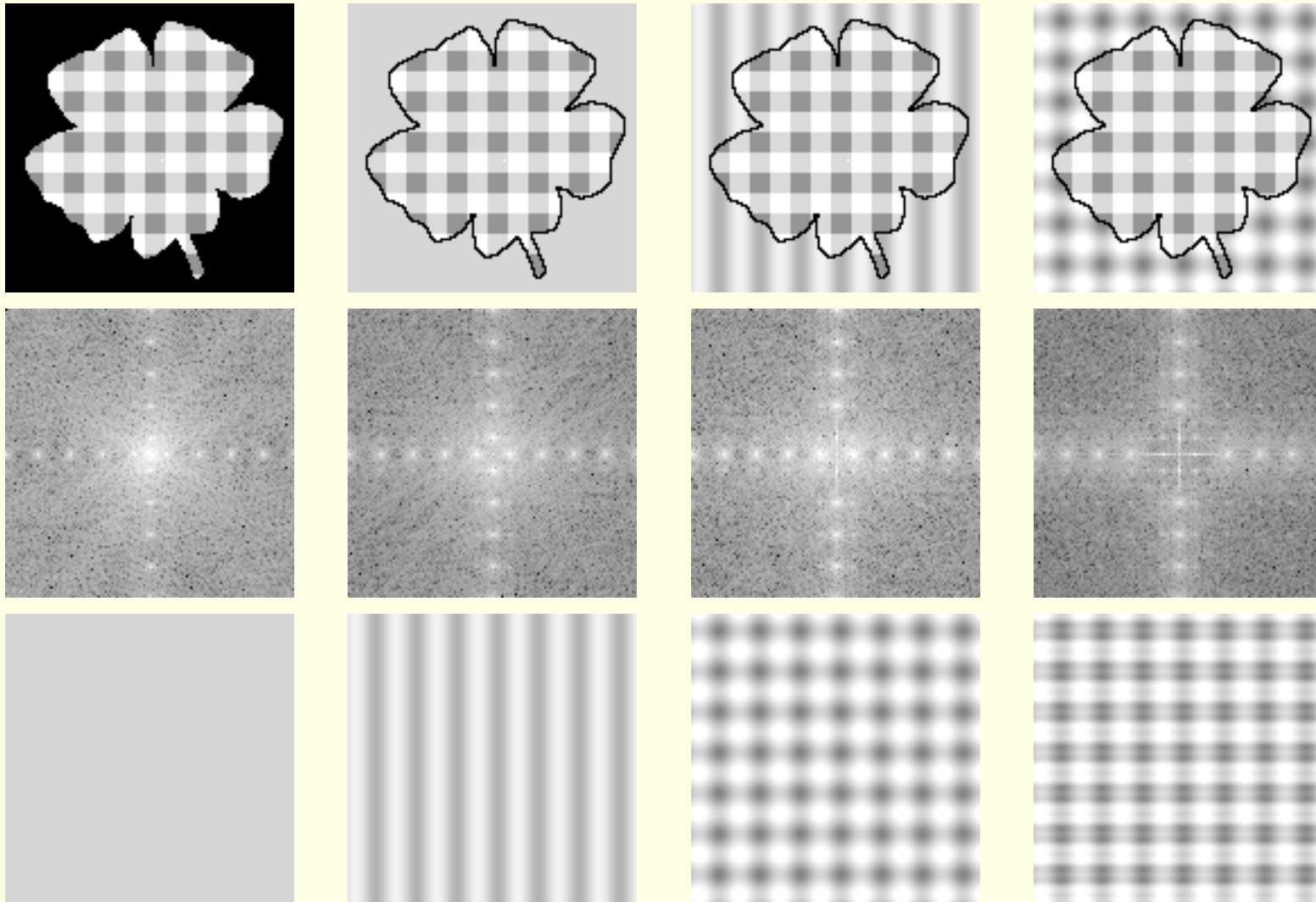


FIGURE 50: Évolution du spectre d'un signal unidimensionnel durant le processus de déconvolution sélective.



Premières étapes de l'algorithme de déconvolution sélective.

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire et déconvolution
- Morphologie mathématique
- Filtrage non-linéaire
- Détection de traits caractéristiques et détection de contours
- Texture
- Rehaussement et restauration
- Étude de la forme
- Segmentation d'images
- Codage d'images
- Applications industrielles

Morphologie mathématique

- Rappels sur les notions d'ensembles
- Transformations morphologiques élémentaires
- Transformations de voisinage
- Géodésie et reconstruction
- Opérations morphologiques sur des images en niveaux de gris

Rappels sur les notions d'ensembles

Les ensembles seront notés par des majuscules $A, B, \dots$ et les éléments qu'ils comprennent par des minuscules $a, b, \dots$.

- **Égalité d'ensembles**

Deux ensembles sont *égaux* s'ils sont formés des mêmes éléments : $X = Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y \text{ et } x \in Y \Rightarrow x \in X)$. L'ensemble vide sera noté $\emptyset$.

Rappels sur les notions d'ensembles

Les ensembles seront notés par des majuscules $A, B, \dots$ et les éléments qu'ils comprennent par des minuscules $a, b, \dots$.

- **Égalité d'ensembles**

Deux ensembles sont *égaux* s'ils sont formés des mêmes éléments : $X = Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y \text{ et } x \in Y \Rightarrow x \in X)$. L'ensemble vide sera noté $\emptyset$.

- **Inclusion**

X est un sous-ensemble de Y (X *inclus* dans Y) si tous les éléments de X appartiennent à Y : $X \subseteq Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y)$.

Rappels sur les notions d'ensembles

Les ensembles seront notés par des majuscules $A, B, \dots$ et les éléments qu'ils comprennent par des minuscules $a, b, \dots$.

- **Égalité d'ensembles**

Deux ensembles sont *égaux* s'ils sont formés des mêmes éléments : $X = Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y \text{ et } x \in Y \Rightarrow x \in X)$. L'ensemble vide sera noté $\emptyset$.

- **Inclusion**

X est un sous-ensemble de Y (X *inclus* dans Y) si tous les éléments de X appartiennent à Y : $X \subseteq Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y)$.

- **Intersection**

L'*intersection* de deux ensembles X et Y est l'ensemble des éléments qui appartiennent aux deux : $X \cap Y = \{x \text{ tel que } x \in X \text{ et } x \in Y\}$.

Rappels sur les notions d'ensembles

Les ensembles seront notés par des majuscules $A, B, \dots$ et les éléments qu'ils comprennent par des minuscules $a, b, \dots$.

- **Égalité d'ensembles**

Deux ensembles sont *égaux* s'ils sont formés des mêmes éléments : $X = Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y \text{ et } x \in Y \Rightarrow x \in X)$. L'ensemble vide sera noté $\emptyset$.

- **Inclusion**

X est un sous-ensemble de Y (X *inclus* dans Y) si tous les éléments de X appartiennent à Y : $X \subseteq Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y)$.

- **Intersection**

L'*intersection* de deux ensembles X et Y est l'ensemble des éléments qui appartiennent aux deux : $X \cap Y = \{x \text{ tel que } x \in X \text{ et } x \in Y\}$.

- **Union**

La *réunion* de deux ensembles est constituée des éléments appartenant à l'un ou à l'autre, c'est-à-dire $X \cup Y = \{x \text{ tel que } x \in X \text{ ou } x \in Y\}$.

Rappels sur les notions d'ensembles

Les ensembles seront notés par des majuscules $A, B, \dots$ et les éléments qu'ils comprennent par des minuscules $a, b, \dots$.

- **Égalité d'ensembles**

Deux ensembles sont *égaux* s'ils sont formés des mêmes éléments : $X = Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y \text{ et } x \in Y \Rightarrow x \in X)$. L'ensemble vide sera noté $\emptyset$.

- **Inclusion**

X est un sous-ensemble de Y (X *inclus* dans Y) si tous les éléments de X appartiennent à Y : $X \subseteq Y \Leftrightarrow (x \in X \Rightarrow x \in Y)$.

- **Intersection**

L'*intersection* de deux ensembles X et Y est l'ensemble des éléments qui appartiennent aux deux : $X \cap Y = \{x \text{ tel que } x \in X \text{ et } x \in Y\}$.

- **Union**

La *réunion* de deux ensembles est constituée des éléments appartenant à l'un ou à l'autre, c'est-à-dire $X \cup Y = \{x \text{ tel que } x \in X \text{ ou } x \in Y\}$.

- **Différence**

Étant donnés X et Y , la *différence* de X par Y , notée $X - Y$ ou $X \setminus Y$ est l'ensemble des éléments de X qui n'appartiennent pas à Y : $X - Y = \{x | x \in X \text{ et } x \notin Y\}$.

– **Complémentaire**

Soit un sous-ensemble X d'un ensemble $\mathcal{E}$ servant de référentiel, le *complémentaire* de X dans $\mathcal{E}$ est le sous-ensemble noté X^c , fourni par $X^c = \{x \text{ tel que } x \in \mathcal{E} \text{ et } x \notin X\}$.

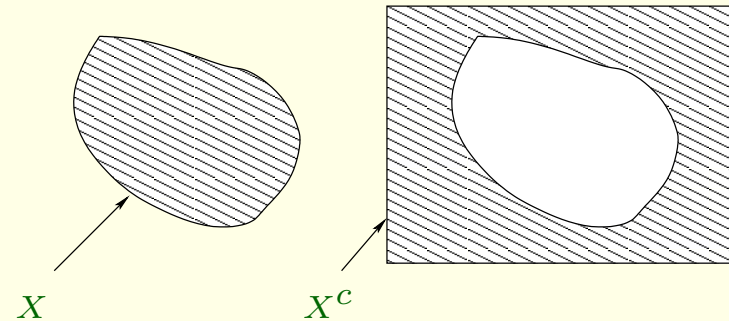


FIGURE 51: Complémentaire d'un ensemble.

- **Complémentaire**

Soit un sous-ensemble X d'un ensemble $\mathcal{E}$ servant de référentiel, le *complémentaire* de X dans $\mathcal{E}$ est le sous-ensemble noté X^c , fourni par $X^c = \{x \text{ tel que } x \in \mathcal{E} \text{ et } x \notin X\}$.

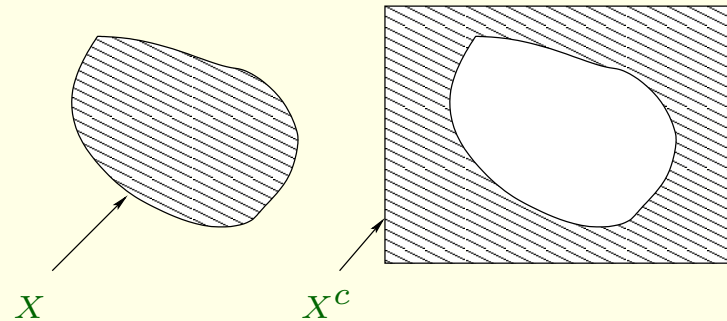


FIGURE 51: Complémentaire d'un ensemble.

- **Symétrique**

Le symétrique $\check{X}$ de l'ensemble X est défini par $\check{X} = \{-x | x \in X\}$.

- **Complémentaire**

Soit un sous-ensemble X d'un ensemble $\mathcal{E}$ servant de référentiel, le *complémentaire* de X dans $\mathcal{E}$ est le sous-ensemble noté X^c , fourni par $X^c = \{x \text{ tel que } x \in \mathcal{E} \text{ et } x \notin X\}$.

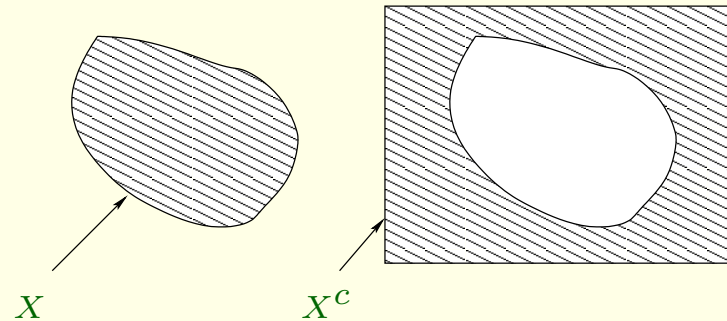


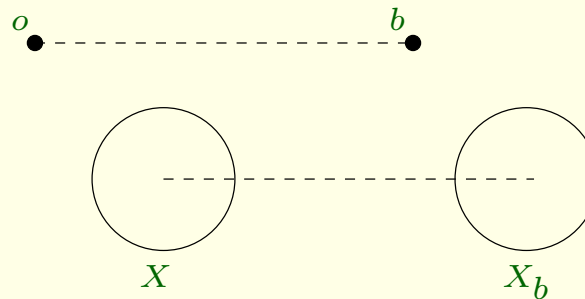
FIGURE 51: Complémentaire d'un ensemble.

- **Symétrique**

Le symétrique $\check{X}$ de l'ensemble X est défini par $\check{X} = \{-x | x \in X\}$.

- **Translaté**

Le translaté de X par b vaut $\{z \in \mathcal{E} | z = x + b, x \in X\}$.



Transformations morphologiques élémentaires

Érosion

Définition 11. *Érosion morphologique*

$$X \ominus B = \{z \in \mathcal{E} \mid B_z \subseteq X\} \quad (86)$$

On montre que la définition suivante, de forme plus algébrique, fournit le même résultat

Définition 12.

$$X \ominus B = \bigcap_{b \in B} X_{-b} \quad (87)$$

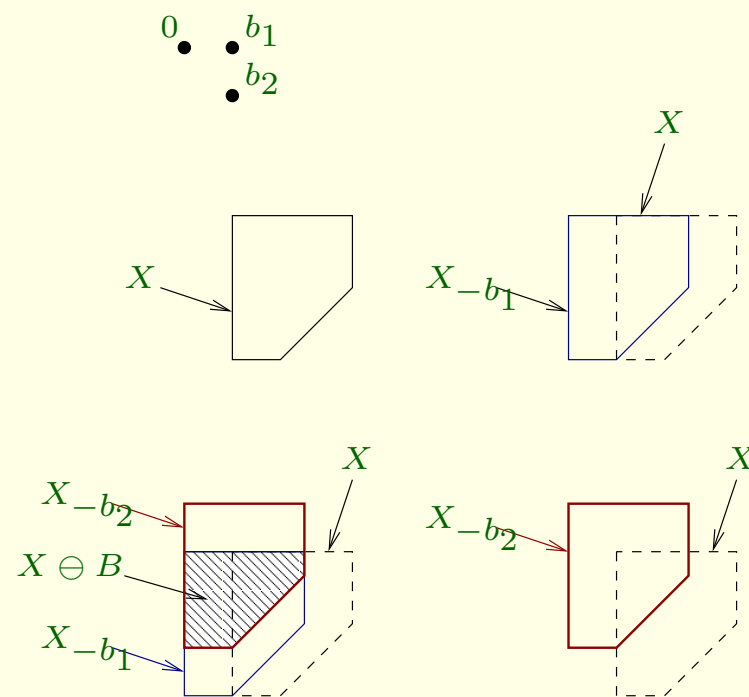


FIGURE 52: Interprétation algébrique de l'érosion.

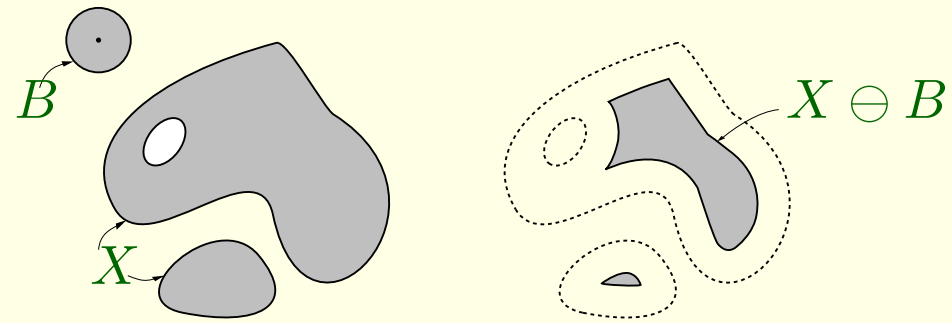


FIGURE 53: Érosion de X par un disque B . L'origine de l'élément structurant est représentée par un point noir.

Dilatation

Définition 13. *En termes ensemblistes, la dilatation est l'union d'ensembles translatés :*

$$X \oplus B = \bigcup_{b \in B} X_b = \bigcup_{x \in X} B_x = \{x + b | x \in X, b \in B\} \quad (88)$$

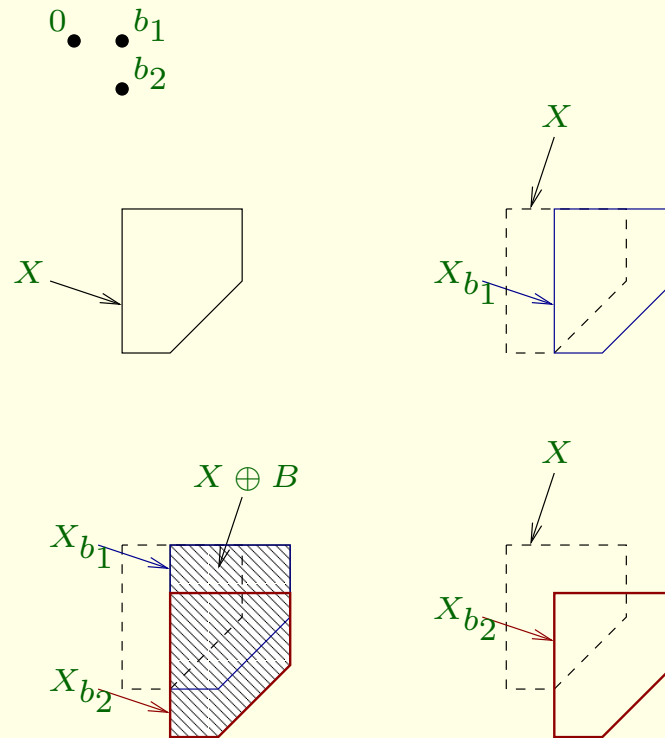


FIGURE 54: Illustration de la définition algébrique de la dilatation.

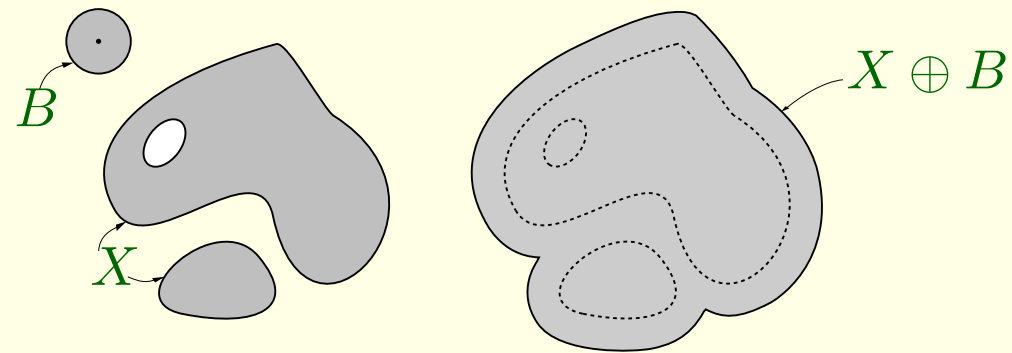


FIGURE 55: Dilatation de X par un disque B .

Propriétés de l'érosion et de la dilatation

Dualité

Les opérations de dilatation et d'érosion sont deux opérations duales par rapport à la complémentation :

$$X \ominus \check{B} = (X^c \oplus B)^c \quad (89)$$

$$X \ominus B = (X^c \oplus \check{B})^c \quad (90)$$

Les opérations d'érosion et de dilatation vérifient les principes des transformations morphologiques idéales :

1. l'érosion et la dilatation sont invariantes en translation : $X_z \ominus B = (X \ominus B)_z$. De même, $X_z \oplus B = (X \oplus B)_z$;
2. l'érosion et la dilatation sont compatibles avec les homothéties : $\lambda X \ominus \lambda B = \lambda(X \ominus B)$ et $\lambda X \oplus \lambda B = \lambda(X \oplus B)$;
3. l'érosion et la dilatation vérifient la condition de connaissance locale pour B borné ;
4. nous admettrons sans démonstration que l'érosion et la dilatation sont des transformations continues.

Propriétés algébriques

Les deux opérations morphologiques jouissent aussi de propriétés algébriques :

- l'érosion et la dilatation sont des opérations croissantes : si $X \subseteq Y$, alors $(X \ominus B) \subseteq (Y \ominus B)$ et $(X \oplus B) \subseteq (Y \oplus B)$;
- si l'élément structurant contient l'origine, l'érosion est une opération anti-extensive alors que la dilatation est extensive, c'-à-d. $X \ominus B \subseteq X$ et $X \subseteq X \oplus B$.

Ouverture morphologique

Définition 14. *L'opération obtenue par la succession d'une érosion et d'une dilatation est l'ouverture morphologique. Elle se note*

$$X \circ B = (X \ominus B) \oplus B \quad (91)$$

En général, l'ensemble traité diffère de l'ensemble de départ : l'ensemble ouvert est plus régulier et moins riche en détails que l'ensemble initial. La transformation par ouverture adoucit donc les contours. L'ouverture joue le rôle d'un filtrage que nous retrouverons d'une façon formelle plus loin.

Fermeture morphologique

Définition 15. *En inversant l'ordre des opérations utilisées pour définir l'ouverture, nous obtenons une nouvelle opération appelée fermeture ; c'est la transformation*

$$X \bullet B = (X \oplus B) \ominus B \quad (92)$$

Il s'agit bien de l'opération duale de l'ouverture pour la complémentation, car $(X \circ B)^c = X^c \bullet \check{B}$ et $(X \bullet B)^c = X^c \circ \check{B}$.

Illustration

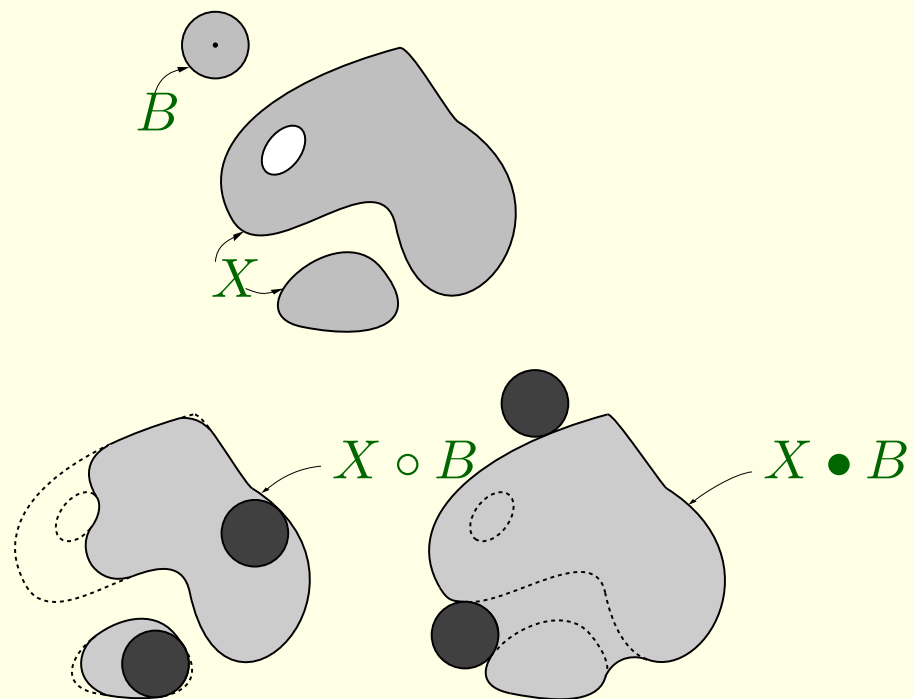


FIGURE 56: Ouverture et fermeture de X par un disque B .

Propriétés de l'ouverture et de la fermeture

Par construction, l'ouverture et la fermeture respectent les quatre principes de toute transformation morphologique. Concernant les propriétés algébriques, citons les propriétés suivantes, qui sont toutes duales pour $X \circ B$ et $X \bullet B$:

- l'ouverture et la fermeture sont des transformations croissantes. Si $X \subseteq Y$, alors

$$(X \circ B) \subseteq (Y \circ B) \text{ et } (X \bullet B) \subseteq (Y \bullet B) \quad (93)$$

- l'ouverture est anti-extensive alors que la fermeture est extensive

$$X \circ B \subseteq X, \quad X \subseteq X \bullet B \quad (94)$$

- l'ouverture et la fermeture sont des opérateurs idempotents (ou opérateurs de projection), ce qui revient à dire que

$$(A \circ B) \circ B = A \circ B \text{ et } (A \bullet B) \bullet B = A \bullet B \quad (95)$$

Interprétation de l'ouverture et de la fermeture

L'interprétation la plus commode de l'opération d'ouverture est illustrée par la propriété que voici :

$$X \circ B = \bigcup \{B_z | z \in \mathcal{E} \text{ et } B_z \subseteq X\} \quad (96)$$

Ainsi, l'ouverture d'une figure par un élément structurant B est l'ensemble des points recouverts lors du déplacement de B à l'intérieur de la figure.

Propriétés générales

- La dilatation est commutative et associative

$$X \oplus B = B \oplus X \quad (97)$$

$$(X \oplus Y) \oplus C = X \oplus (Y \oplus C) \quad (98)$$

- La dilatation distribue l'union

$$\left(\bigcup_j X_j\right) \oplus B = \bigcup_j (X_j \oplus B) \quad (99)$$

- L'érosion est distributive par rapport à l'intersection

$$\left(\bigcap_j X_j\right) \ominus B = \bigcap_j (X_j \ominus B) \quad (100)$$

- La relation de chaîne, appelée chain rule.

$$X \ominus (B \oplus C) = (X \ominus B) \ominus C \quad (101)$$

- L'ouverture et la fermeture ne dépendent pas de l'origine de l'élément structurant. Soit $z \in \mathcal{E}$

$$X \circ B_z = X \circ B \quad (102)$$

$$X \bullet B_z = X \bullet B \quad (103)$$

Un problème pratique : la gestion du bord dans les réalisations

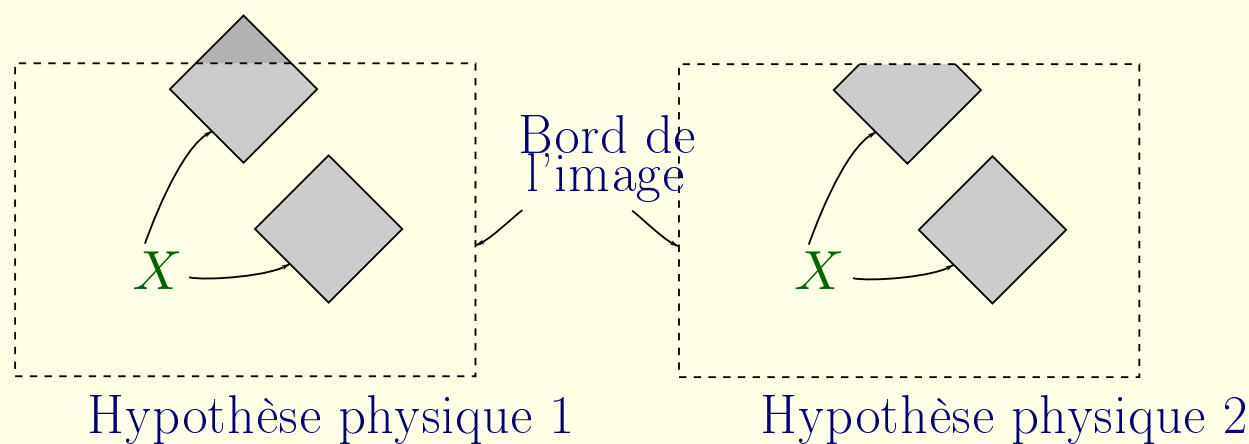


FIGURE 57: Deux hypothèses physiques pour traiter les objets qui touchent le bord de l'image.

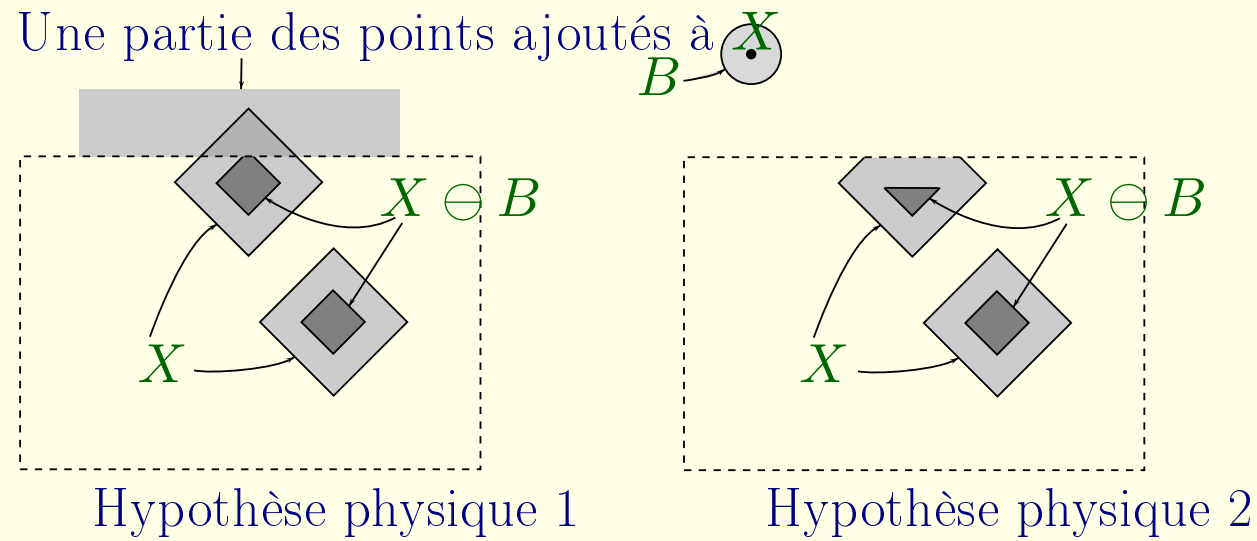


FIGURE 58: Comparaison de l'érosion de X , composé de deux losanges, pour les deux hypothèses physiques.

Les transformations de voisinage

Appelant ν_x la configuration de voisinage centrée en x , on définit une *transformation de voisinage* par la transformation qui attribue la valeur **1** (c'est la construction de la fonction indicatrice) à chaque point ayant une configuration semblable à un élément de la famille de configurations ν :

$$X \nabla \nu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists \nu^i \in \nu \text{ tel que } \nu_x = \nu^i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (104)$$

Les transformations de voisinage

Appelant ν_x la configuration de voisinage centrée en x , on définit une *transformation de voisinage* par la transformation qui attribue la valeur 1 (c'est la construction de la fonction indicatrice) à chaque point ayant une configuration semblable à un élément de la famille de configurations ν :

$$X \nabla \nu(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } \exists \nu^i \in \nu \text{ tel que } \nu_x = \nu^i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \quad (104)$$

Il existe aussi une transformation de voisinage appelée *transformée par tout ou rien* (*Hit or Miss transform en anglais*) telle que

$$X \uparrow (B, C) = \{x | B_x \subseteq X, C_x \subseteq X^c\} \quad (105)$$

Si $C = \emptyset$ la transformation dégénère en une opération d'érosion de X par B .

Amincissement et épaissement

L'*amincissement* d'un ensemble X consiste à lui enlever des points qui correspondent à une configuration donnée.

Par dualité, l'*épaississement* d'un ensemble revient à lui ajouter des points correspondant à une configuration donnée. Si l'on note par $\bigcirc$ l'amincissement et par $\odot$ l'épaississement, on aura :

$$X \bigcirc \nu = X - (X \nabla \nu) \quad (106)$$

$$X \odot \nu = X \cup (X \nabla \nu) \quad (107)$$

Propriétés :

Comme l'érosion et la dilatation, l'amincissement et l'épaississement sont deux transformations duales vis-à-vis de la complémentation

$$(X \bigcirc \nu)^c = X^c \odot \nu^c \quad (108)$$

Double inclusion

$$X \bigcirc \nu \subseteq X \subseteq X \odot \nu \quad (109)$$

Géodésie et reconstruction

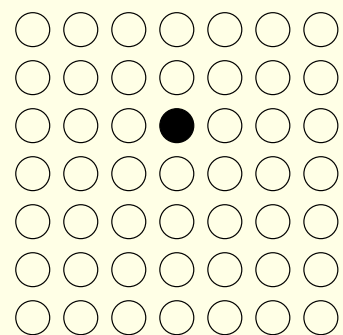
Dilatation géodésique

Une dilatation géodésique fait toujours intervenir deux images.

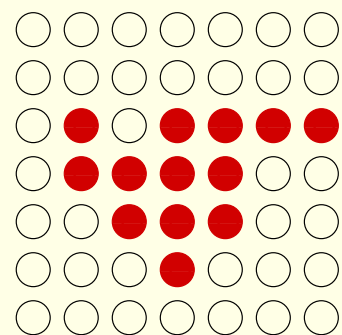
Définition 16. *La dilatation géodésique de taille 1 de l'ensemble X conditionnellement à Y , notée $D_Y^{(1)}(X)$, est définie comme l'intersection du dilaté de taille 1 et de Y :*

$$\forall X \subseteq Y, \quad D_Y^{(1)}(X) = (X \oplus B) \cap Y \quad (110)$$

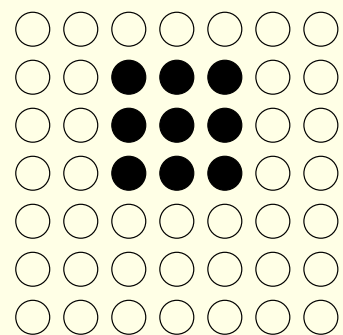
où B est l'élément le plus simple adapté à la trame.



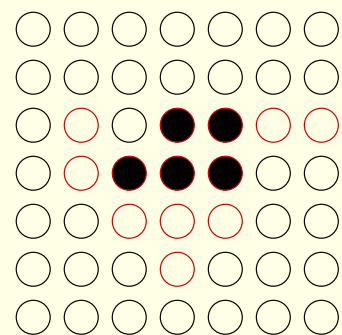
(a) Ensemble à dilater



(b) Masque géodésique



(c) Dilatation élémentaire



(d) Dilatation géodésique

FIGURE 59: Dilatation géodésique de taille 1 d'un ensemble.

Définition 17. La dilatation géodésique de taille n de l'ensemble X conditionnellement à Y , notée $D_Y^{(n)}(X)$, est définie comme une succession du dilaté géodésique de taille 1

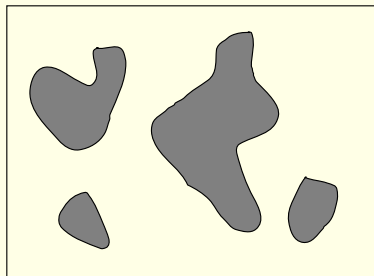
$$\forall X \subseteq Y, \quad D_Y^{(n)}(X) = \underbrace{D_Y^{(1)}(D_Y^{(1)}(\dots D_Y^{(1)}(X)))}_{n \text{ fois}} \quad (111)$$

où B est l'élément le plus simple adapté à la trame.

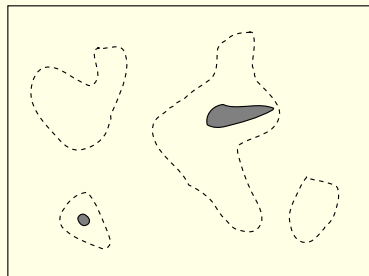
Reconstruction morphologique

Définition 18. La reconstruction de X conditionnellement à Y est la dilatation géodésique de X jusqu'à idempotence. Soit i , la valeur à partir de laquelle l'idempotence est acquise, la reconstruction de X est définie par

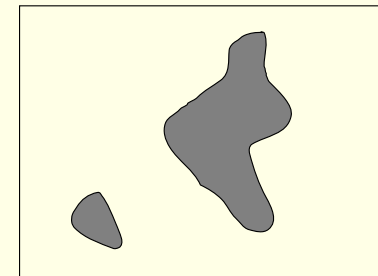
$$R_Y(X) = D_Y^{(i)}(X) \text{ avec } D_Y^{(i+1)}(X) = D_Y^{(i)}(X) \quad (112)$$



(a) Particules



(b) Marquage de particules



(c) Particules reconstruites

FIGURE 60: Extraction de particules pré-sélectionnées dans une image.

Opérations morphologiques sur des images en niveaux de gris

Notion de fonction

Soit $\mathcal{G}$ un ensemble de valeurs de niveaux de gris. Dans ce qui suit, nous supposons que $\mathcal{G}$ est un espace complété ($\mathcal{G} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$ ou $\mathcal{G} = \mathbb{Z} \cup \{-\infty, +\infty\}$). Une image est représentée par une fonction $f : \mathcal{E} \rightarrow \mathcal{G}$, qui à tout point du plan fait correspondre une valeur. En pratique, l'image n'est pas définie sur la totalité du référentiel $\mathcal{E}$ mais sur un support compact D .

Définition 19. *[Ordre partiel entre fonctions] Soient deux fonctions f et g . La fonction f est inférieure à g ,*

$$f \leq g \text{ si } f(x) \leq g(x), \forall x \in \mathcal{E} \quad (113)$$

Définition 20. *[Infimum et supremum] Soit une famille de fonctions $f_i, i \in I$. L'infimum (respectivement le supremum) de cette famille, noté $\bigwedge_{i \in I} f_i$ (resp. $\bigvee_{i \in I} f_i$) est la grande borne inférieure (resp. petite borne supérieure).*

Dans le cas d'une famille I finie, le supremum et l'infimum se ramènent au maximum et au minimum respectivement. Dans ce cas,

$$\forall x \in \mathcal{E}, \quad \begin{cases} (f \vee g)(x) = \max(f(x), g(x)) \\ (f \wedge g)(x) = \min(f(x), g(x)) \end{cases} \quad (114)$$

Définition 21. *La translation de la fonction f par b est la fonction f_b définie par*

$$\forall x \in \mathcal{E}, \quad f_b(x) = f(x - b) \quad (115)$$

Définition de propriétés des opérateurs de fonctions

Définition 22. *[Idempotence] Une transformation ψ est idempotente si, quelle que soit la fonction traitée, une nouvelle application de l'opérateur n'apporte aucun changement, c'est-à-dire si*

$$\forall f, \psi(\psi(f)) = \psi(f) \quad (116)$$

Définition 23. *[Extensivité] Un opérateur est extensif si la fonction transformée est plus grande que la fonction de départ*

$$\forall f, f \leq \psi(f) \quad (117)$$

Définition 24. *[Anti-extensivité] Une transformation de fonctions est anti-extensive si la fonction transformée est plus petite que la fonction de départ*

$$\forall f, f \geq \psi(f) \quad (118)$$

Définition 25. *[Croissance] Une transformation de fonctions est croissante si elle conserve l'ordre établi entre fonctions*

$$\forall f, g, \quad f \leq g \Rightarrow \psi(f) \leq \psi(g) \quad (119)$$

Par extension aussi, une transformation ψ_1 est inférieure à un transformation ψ_2 si, pour toute fonction f , $\psi_1(f)$ est inférieur à $\psi_2(f)$:

$$\psi_1 \leq \psi_2 \Leftrightarrow \forall f, \quad \psi_1(f) \leq \psi_2(f) \quad (120)$$

Érosion, dilatation et combinaisons

Définition 26. Si f et g sont deux fonctions, on peut définir l'addition (ou dilatation) $f \oplus g$ et la soustraction (ou érosion) $f \ominus g$ de la manière suivante : pour tout couple $(x, g(x))$, on prend pour $f \oplus g$ l'enveloppe supérieure des translatés du graphe de f par les $(x, g(x))$ et pour $f \ominus g$, l'enveloppe inférieure des translatés de f par les $(-x, -g(x))$. Algébriquement,

$$f \oplus g = \bigvee_{h \in \mathcal{E}} (f(x - h) + g(h)) \quad (121)$$

$$f \ominus g = \bigwedge_{h \in \mathcal{E}} (f(x + h) - g(h)) \quad (122)$$

En pratique. Soit B , le domaine de définition de g ,

Définition 27.

$$f \oplus B = \bigvee_{b \in B} f_b(x) \quad (123)$$

$$f \ominus B = \bigwedge_{b \in B} f_{-b}(x) \quad (124)$$

Illustration

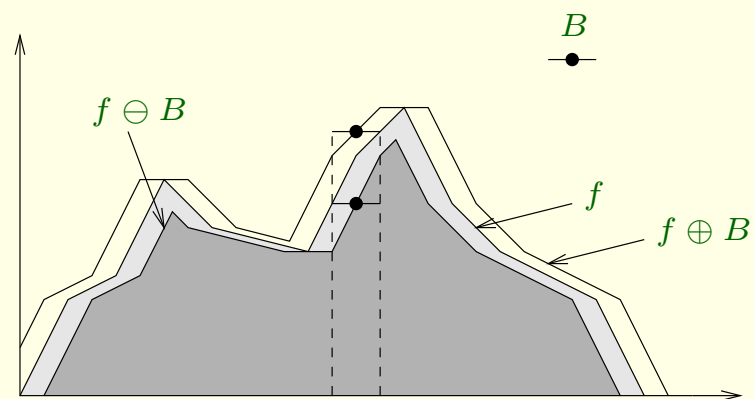


FIGURE 61: Érosion d'une fonction.

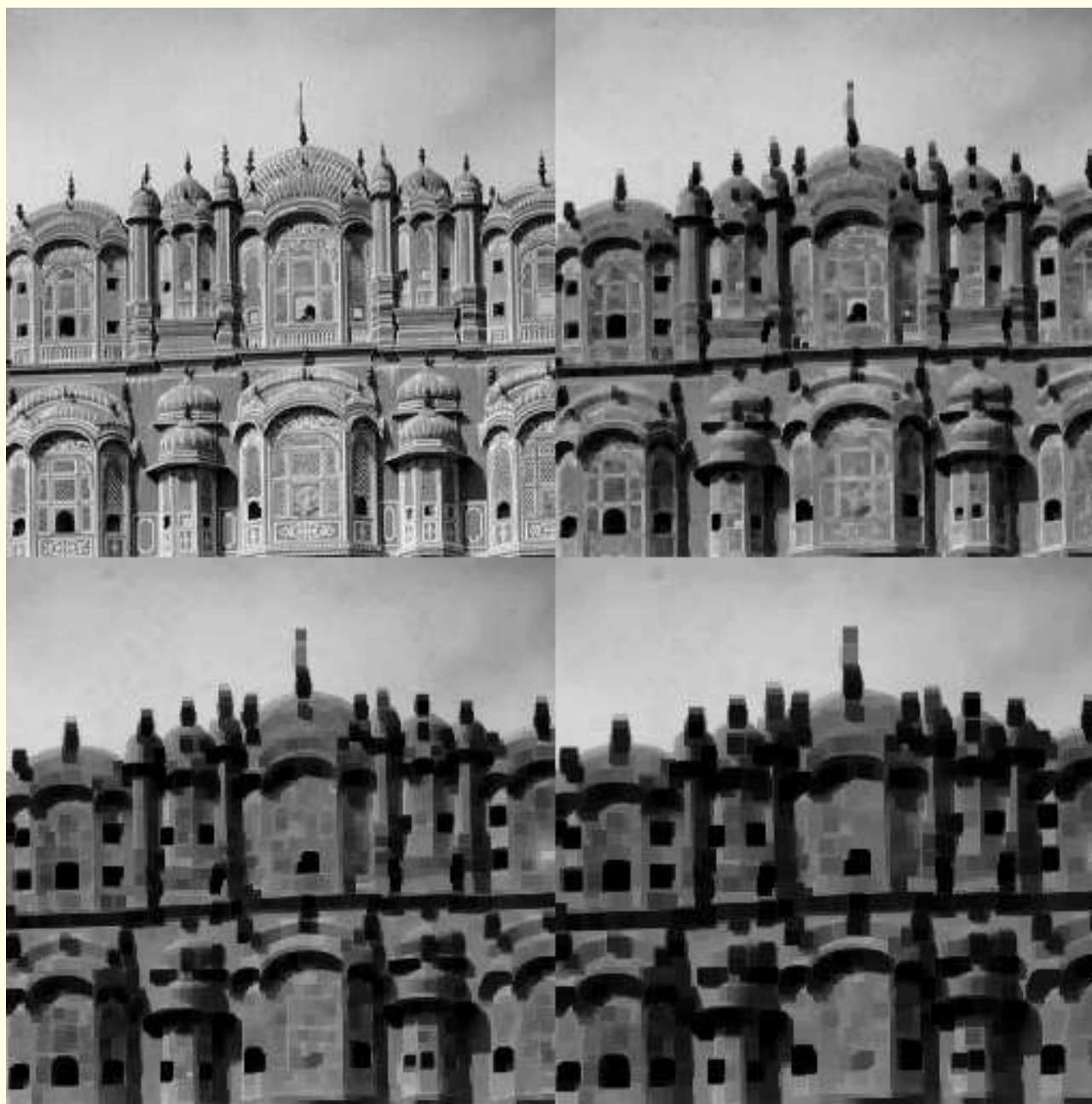


FIGURE 62: Érosions successives par des carrés de taille croissante.
Traitement numérique des images (version 4.56) M. Van Droogenbroeck 122

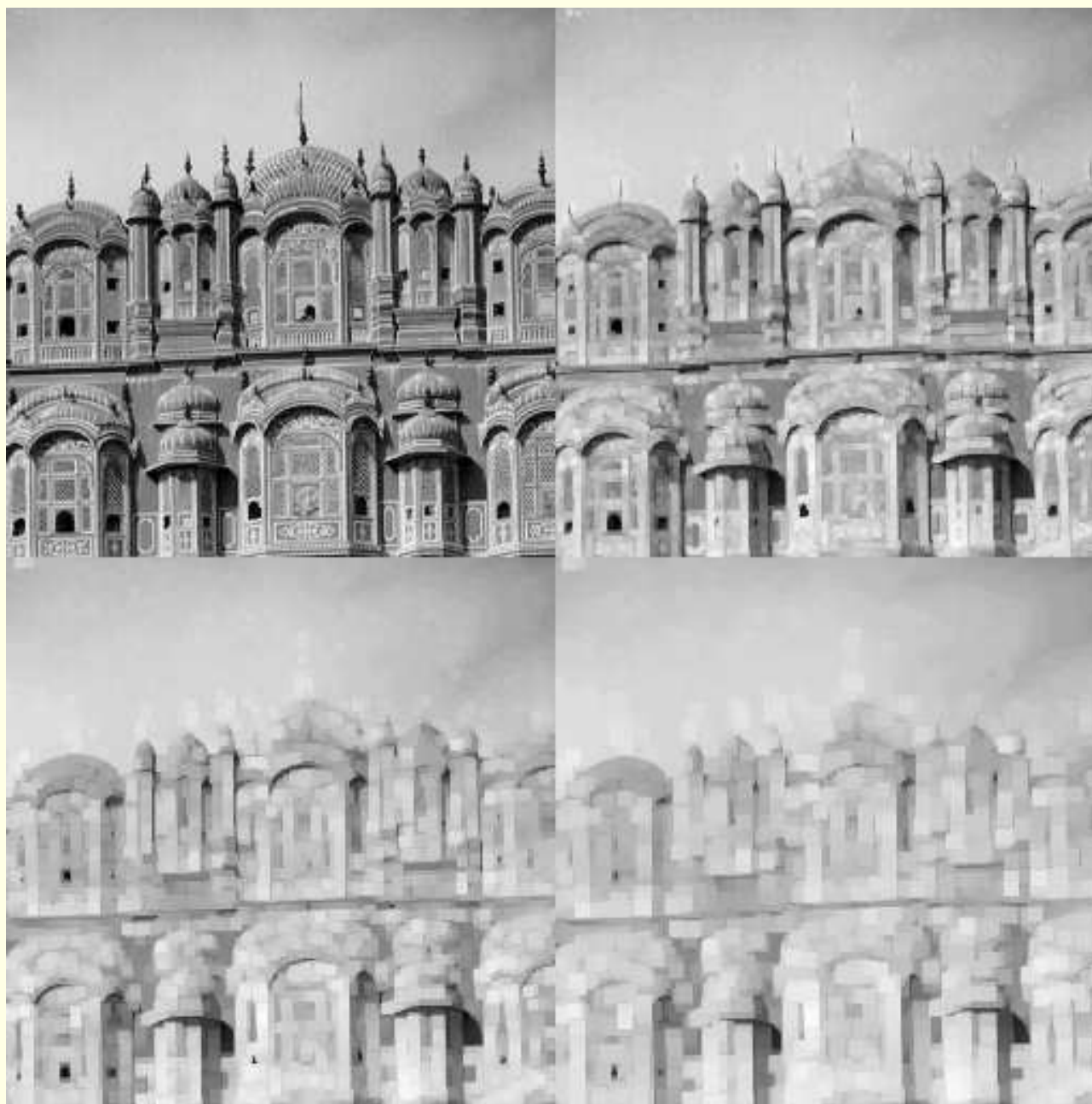


FIGURE 63: Dilatations successives par des carrés de taille croissante.

Ouverture et fermeture morphologiques

L'ouverture morphologique $f \circ B$ et la fermeture morphologique $f \bullet B$ résultent de la mise en cascade de l'érosion et de la dilatation .

Définition 28. *[Ouverture et fermeture morphologiques]*

$$f \circ B = (f \ominus B) \oplus B \quad (125)$$

$$f \bullet B = (f \oplus B) \ominus B \quad (126)$$

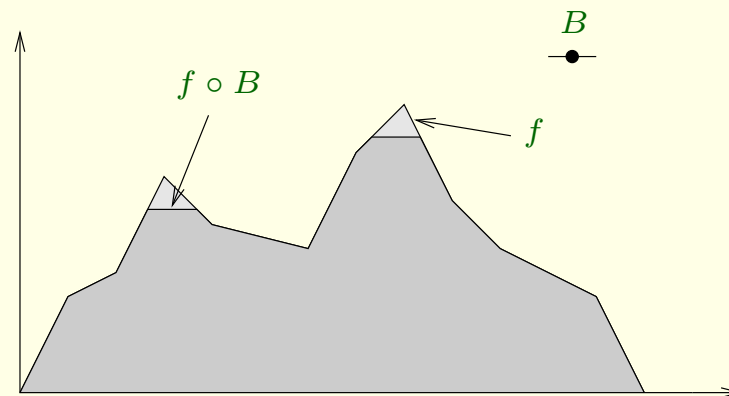


FIGURE 64: Ouverture d'une fonction.

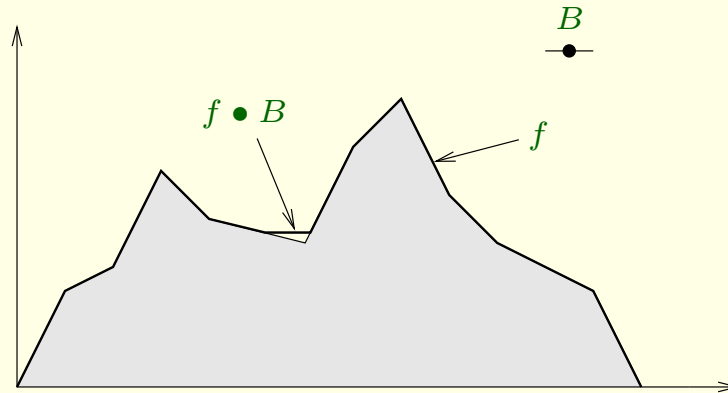


FIGURE 65: Fermeture d'une fonction.



FIGURE 66: Ouvertures successives par des carrés de taille croissante.

Traitement numérique des images (version 4.56)

M. Van Droogenbroeck 126

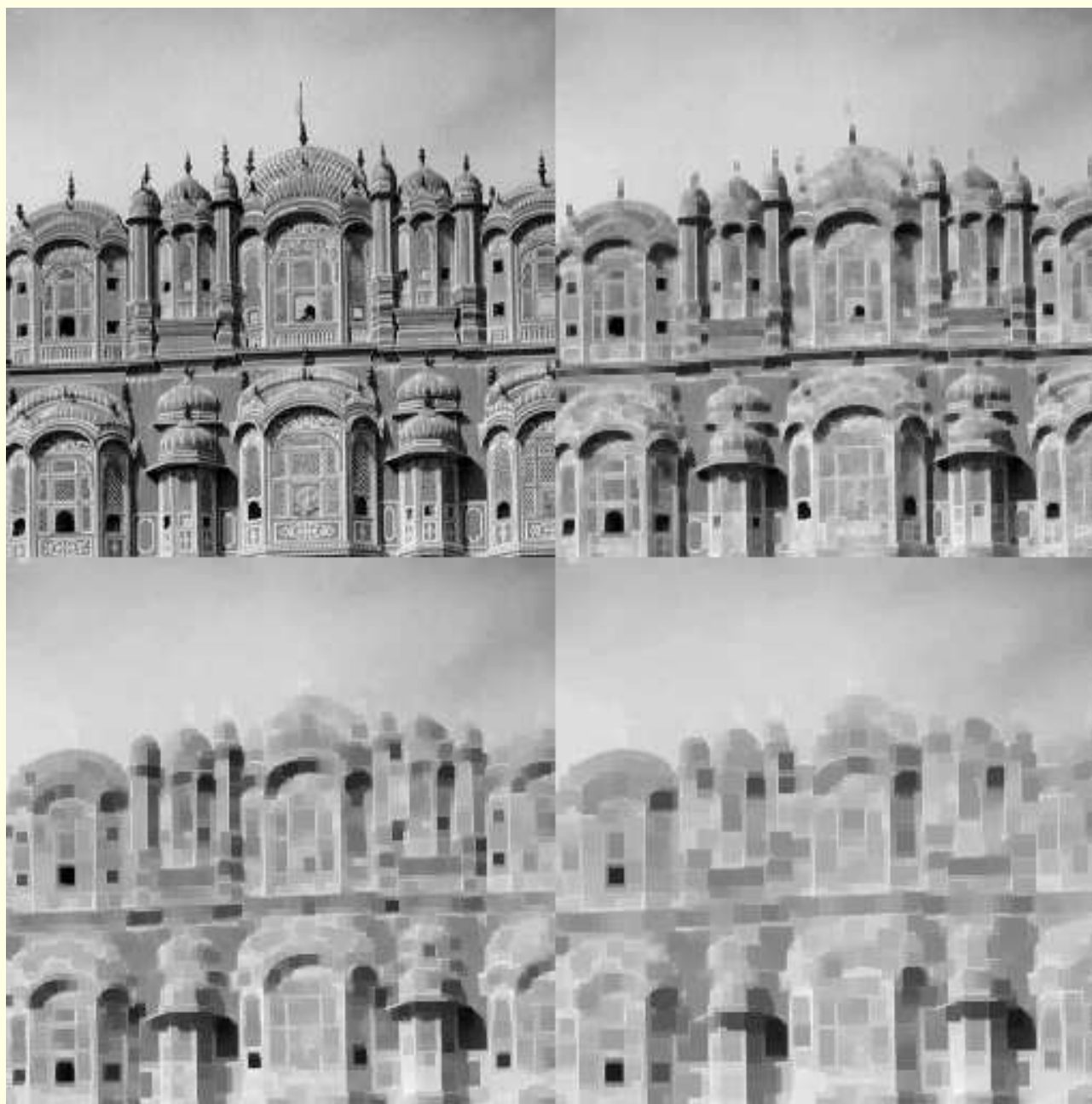


FIGURE 67: Fermetures successives par des carrés de taille croissante.



(a) Image originale f



(b) Érosion par un carré



(c) Dilatation par un carré



(d) Ouverture par un carré

FIGURE 68: Illustration des opérations élémentaires sur une image en niveaux de gris.

Propriétés des opérateurs morphologiques de fonctions

L'érosion et la dilatation sont des opérations croissantes

$$f \leq g \Rightarrow \begin{cases} f \ominus B \leq g \ominus B \\ f \oplus B \leq g \oplus B \end{cases} \quad (127)$$

L'érosion distribue l'infimum et la dilatation distribue le supremum

$$(f \wedge g) \ominus B = (f \ominus B) \wedge (g \ominus B) \quad (128)$$

$$(f \vee g) \oplus B = (f \oplus B) \vee (g \oplus B) \quad (129)$$

L'ouverture et la fermeture sont deux opérations idempotentes

$$(f \circ B) \circ B = f \circ B \quad (130)$$

$$(f \bullet B) \bullet B = f \bullet B \quad (131)$$

L'ouverture et la fermeture sont deux transformations respectivement anti-extensive et extensive

$$f \circ B \leq f \quad (132)$$

$$f \leq f \bullet B \quad (133)$$

Reconstruction des images à niveaux de gris

Définition 29. *La reconstruction de la fonction f conditionnellement à la fonction g est la dilatation géodésique de f jusqu'à idempotence. Soit i , la valeur à partir de laquelle l'idempotence est acquise, la reconstruction de f est définie par*

$$R_g(f) = D_g^{(i)}(f) \text{ avec } D_g^{(i+1)}(f) = D_g^{(i)}(f) \quad (134)$$

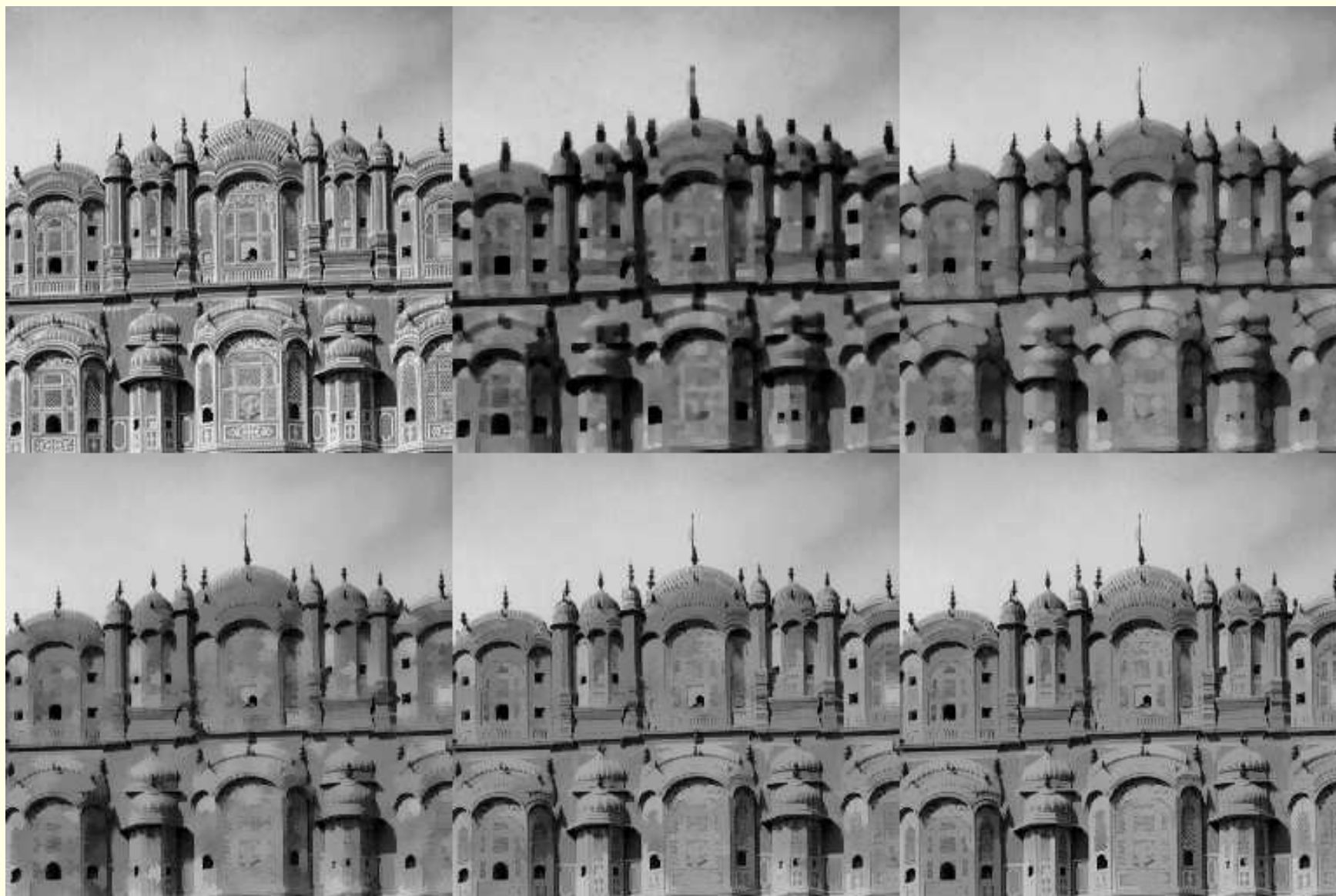


FIGURE 69: Image originale, image érodée et dilatations géodésiques successives.

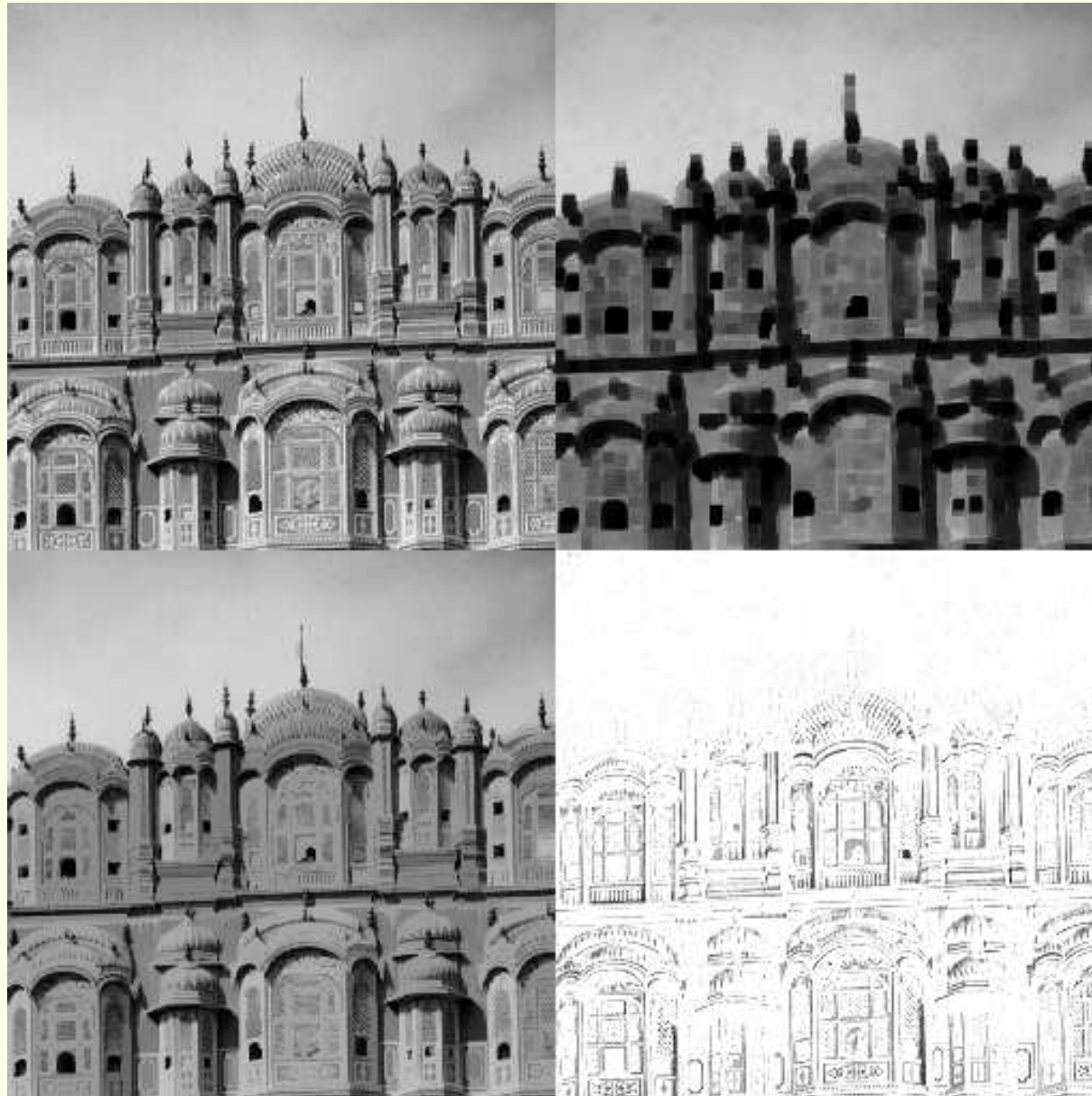


FIGURE 70: Image originale, image érodée, image reconstruite à partir de l'érodé et image différence (en vidéo inverse).

Traitement numérique des images (version 4.56)

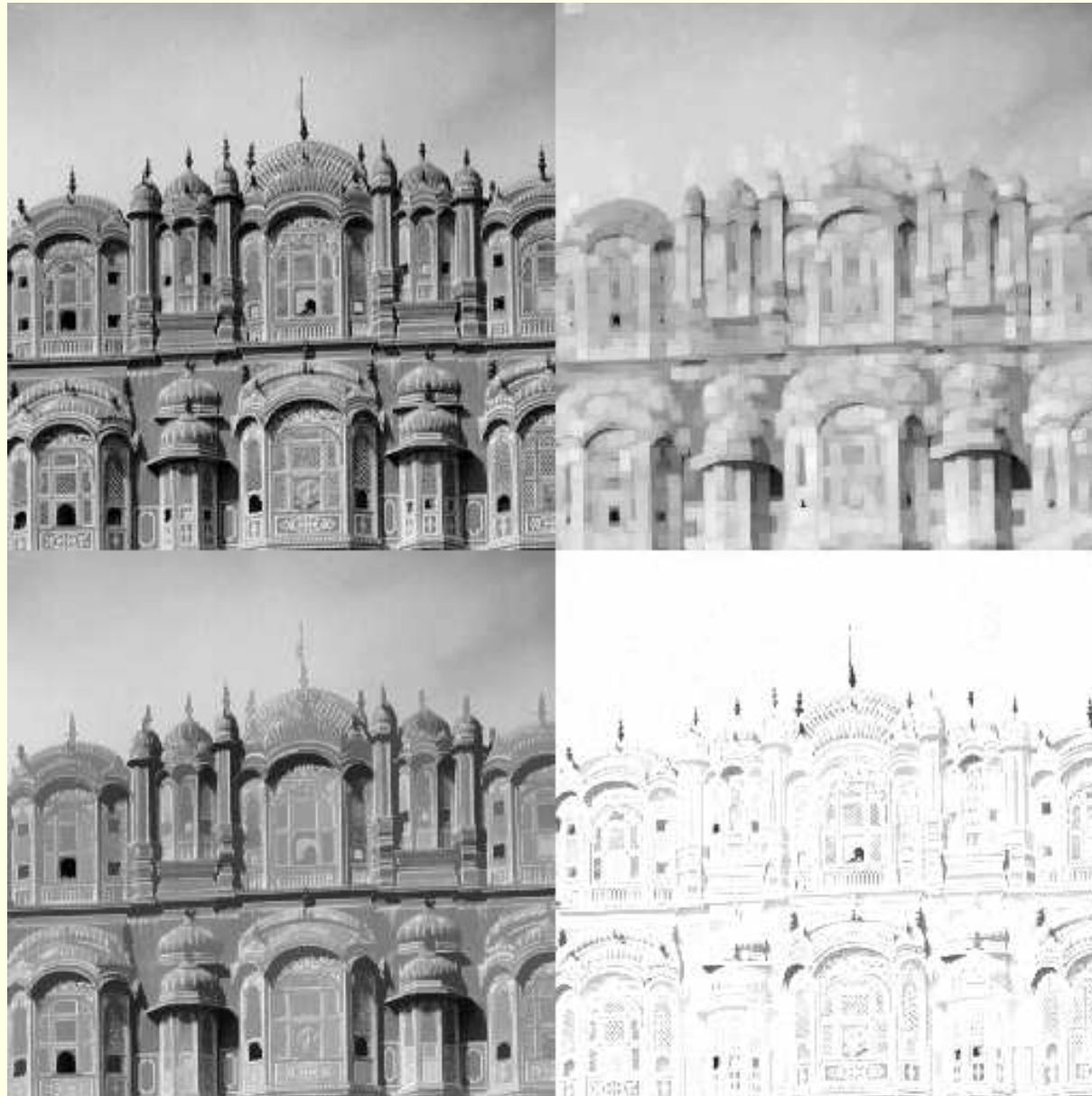


FIGURE 71: Image originale, image dilatée, image reconstruite à partir du dilaté (par reconstruction duale) et image différence (en vidéo inverse).

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire et déconvolution
- Morphologie mathématique
- Filtrage non-linéaire
- Détection de traits caractéristiques et détection de contours
- Texture
- Rehaussement et restauration
- Étude de la forme
- Segmentation d'images
- Codage d'images
- Applications industrielles

Filtrage non-linéaire

- Filtres de rang
 - Filtre médian
- Filtres morphologiques
 - Définition algébrique
 - Comment construire un filtre ?
 - Exemples de filtres
 - Filtres alternés séquentiels
 - Centre morphologique

Filtres de rang

Soit $k \in \mathbb{N}$ la valeur d'un seuil.

Définition 30. *[Filtre de rang] L'opérateur ou filtre de rang k , noté $\rho_{B,k}(f)(x)$, défini sur l'élément structurant B , est l'opérateur*

$$\rho_{B,k}(f)(x) = \bigvee \{t \in \mathcal{G} \mid \sum_{b \in B} [f(x+b) \geq t] \geq k\} \quad (135)$$

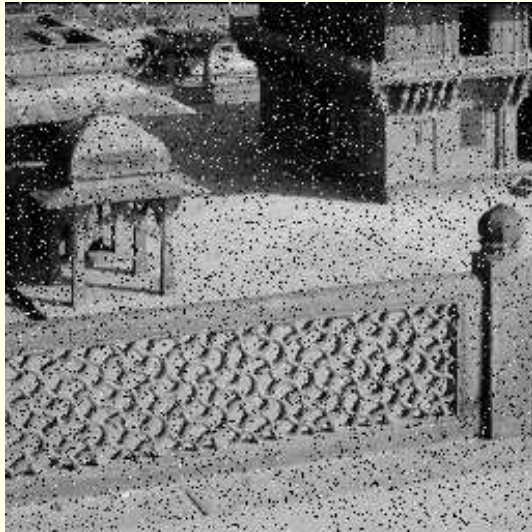
L'interprétation la plus simple consiste à dire que $\rho_{B,k}(f)(x)$ est la k -ième valeur de la série obtenue en ordonnant toutes les valeurs $f(x+b)$ par ordre décroissant.

Les opérateurs de rang sont ordonnés entre eux. Soit $\#(B)$, le cardinal de l'élément structurant B ,

$$\rho_{B,\#(B)}(f)(x) \leq \rho_{B,\#(B)-1}(f)(x) \leq \dots \leq \rho_{B,1}(f)(x) \quad (136)$$

Filtre médian

Si n est impair, le choix $k = \frac{1}{2}(\#(B) + 1)$ conduit à la définition d'un opérateur auto-dual, c'est-à-dire que l'opérateur appliqué à une image fournit le même résultat que l'opérateur appliqué à l'image complémentaire. Cet opérateur, noté med_B , est appelé filtre médian.



(a) Image originale bruitée f



(b) Ouverture par un carré 5×5

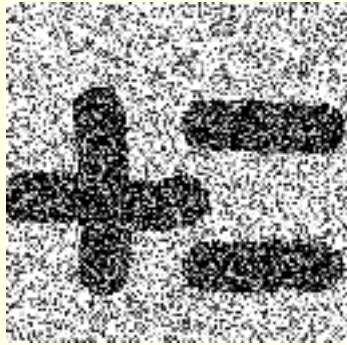


(c) Passe-bas BUTTERWORTH ($f_c = 50$)

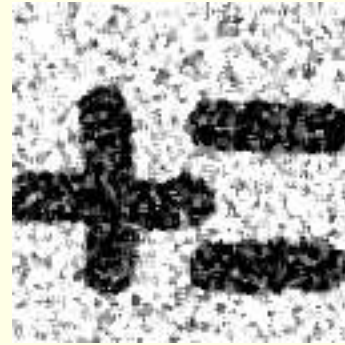


(d) Médian sur une fenêtre 5×5

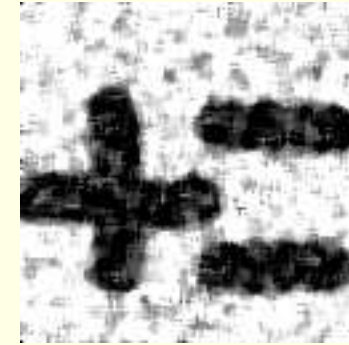
Comparaison de différentes techniques de filtrage sur une image bruitée.



(a) Image originale f



(b) Médian 3×3



(c) Médian 5×5

Effet de la taille de la fenêtre rectangulaire sur le filtrage.

Implémentation

Le filtre médian n'est pas idempotent et sa répétition peut entraîner des phénomènes d'oscillation (théoriquement sur une image de support infini).

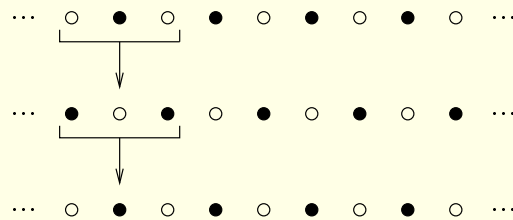


FIGURE 74: Applications répétées du filtre médian.

Filtres morphologiques

Définition 31. *Par définition, un filtre algébrique est une opération croissante et idempotente :*

$$\psi \text{ est un filtre algébrique} \Leftrightarrow \forall f, g \begin{cases} f \leq g \Rightarrow \psi(f) \leq \psi(g) \\ \psi(\psi(f)) = \psi(f) \end{cases} \quad (137)$$

Définition 32. *Une ouverture algébrique est un opérateur qui possède les propriétés de croissance, d'idempotence et d'anti-extensivité. Formellement,*

$$\forall f, g, f \leq g \Rightarrow \psi(f) \leq \psi(g) \quad (138)$$

$$\forall f, \psi(\psi(f)) = \psi(f) \quad (139)$$

$$\forall f, \psi(f) \leq f \quad (140)$$

La fermeture algébrique se définit en remplaçant la propriété d'anti-extensivité par celle d'extensivité.

Comment construire un filtre ?

Comment construire un filtre ?

En combinant les filtres déjà connus !

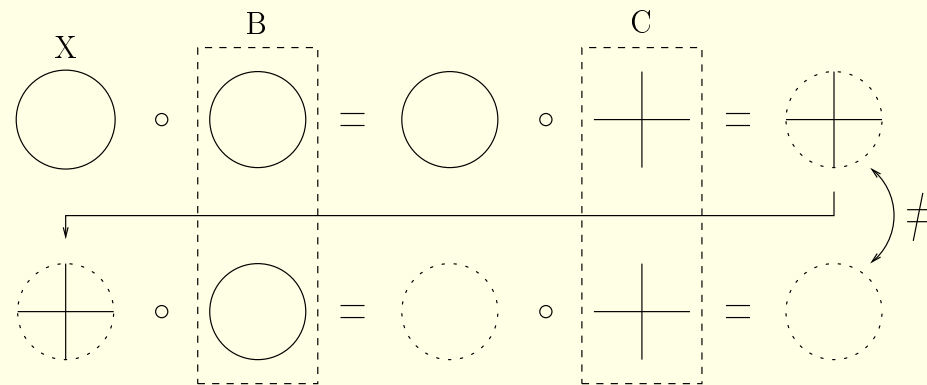


FIGURE 75: La composition de deux ouvertures n'est pas forcément une ouverture.

De nouveaux filtres peuvent être obtenus à partir des ouvertures, notées α_i et des fermetures, notées ϕ_i , par les deux règles simples que voici :

1. le supremum d'ouvertures est une ouverture : $(\bigvee_i \alpha_i)$ est une ouverture ;
2. l'infimum de deux fermetures est une fermeture : $(\bigwedge_i \phi_i)$ est une fermeture.

Règles de composition : théorème structurel

Soient ψ_1 et ψ_2 deux filtres tels que $\psi_1 \geq I \geq \psi_2$ (par exemple, ψ_1 est une fermeture et ψ_2 une ouverture).

Théorème 2. *[Théorème structurel] Soient ψ_1 et ψ_2 deux filtres tels que $\psi_1 \geq I \geq \psi_2$*

$$\psi_1 \geq \psi_1\psi_2\psi_1 \geq (\psi_2\psi_1 \vee \psi_1\psi_2) \geq (\psi_2\psi_1 \wedge \psi_1\psi_2) \geq \psi_2\psi_1\psi_2 \geq \psi_2 \quad (141)$$

$$\psi_1\psi_2, \psi_2\psi_1, \psi_1\psi_2\psi_1, \psi_2\psi_1\psi_2 \text{ sont des filtres} \quad (142)$$

Remarquons qu'il n'y a pas de relation d'ordre entre $\psi_1\psi_2$ et $\psi_2\psi_1$.

Exemples de filtres

Filtres alternés séquentiels

Soient γ_i (ϕ_i) une ouverture (une fermeture) de taille i et I l'opérateur identité (i.e. $I(f) = f$). L'ordre entre ces opérations est le suivant :

$$\forall i, j \in \mathbb{N}, \quad i \leq j, \quad \gamma_j \leq \gamma_i \leq I \leq \phi_i \leq \phi_j, \quad (143)$$

On définit ensuite les opérateurs suivants pour toute valeur de i :

$$m_i = \gamma_i \phi_i, \quad r_i = \phi_i \gamma_i \phi_i,$$

$$n_i = \phi_i \gamma_i, \quad s_i = \gamma_i \phi_i \gamma_i.$$

Définition 33. *[Filtres alternés séquentiels] Pour tout $i \in \mathbb{N}$, les opérateurs suivants sont des filtres alternés séquentiels d'ordre i*

$$M_i = m_i m_{i-1} \dots m_2 m_1 \quad R_i = r_i r_{i-1} \dots r_2 r_1 \quad (144)$$

$$N_i = n_i n_{i-1} \dots n_2 n_1 \quad S_i = s_i s_{i-1} \dots s_2 s_1 \quad (145)$$

Proposition 1. *[Loi d'absorption]*

$$i \leq j \Rightarrow M_j M_i = M_j \text{ mais } M_i M_j \leq M_j \quad (146)$$



(a) Image originale f



(b) $M_1(f)$



(c) $M_2(f)$



(d) $M_3(f)$



(e) Médian 5×5



(f) $N_1(f)$



(g) $N_2(f)$



(h) $N_3(f)$

Utilisation de filtres alternés séquentiels pour supprimer le bruit.

Toggle mappings

Le centre morphologique est un exemple typique de toggle mapping.

Définition 34. [Centre morphologique] Soit ψ_i une famille d'opérateurs. Le centre morphologique β de la fonction f pour la famille ψ_i est défini en chaque x du domaine de définition de f de la manière suivante

$$\beta(f)(x) = (f(x) \vee (\bigwedge_i \psi_i(x))) \wedge (\bigvee_i \psi_i(x)) \quad (147)$$

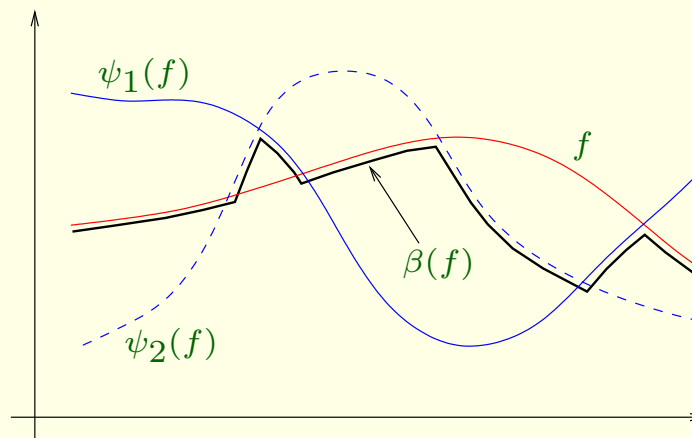


FIGURE 77: Centre morphologique d'un signal unidimensionnel.

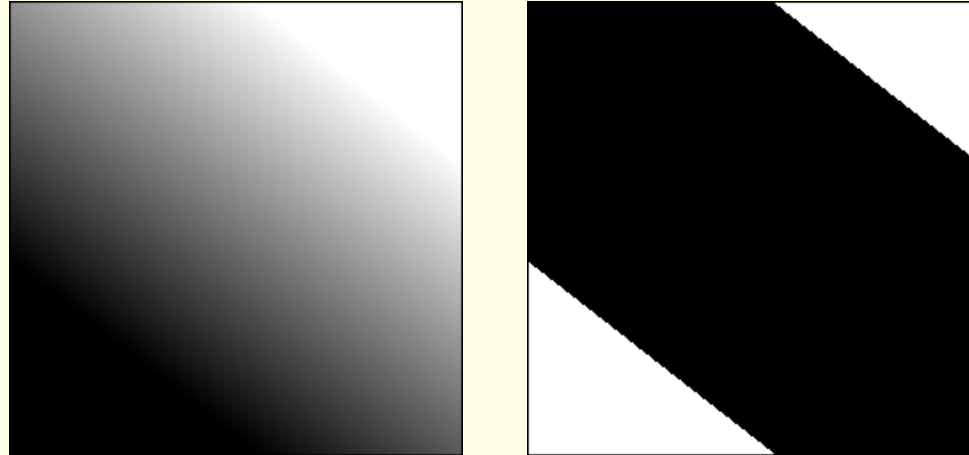
Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire et déconvolution
- Morphologie mathématique
- Filtrage non-linéaire
- Détection de traits caractéristiques et détection de contours
- Texture
- Rehaussement et restauration
- Étude de la forme
- Segmentation d'images
- Codage d'images
- Applications industrielles

Extraction de traits caractéristiques et détection de contours

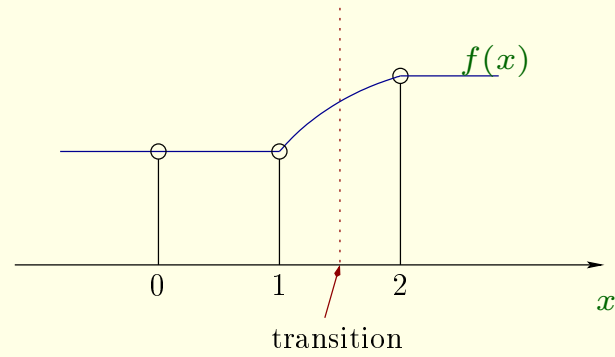
- Opérateurs linéaires
 - Opérateurs de dérivée première
 - Opérateur de dérivée seconde
 - Échantillonnage de la dérivée
 - Calcul de l'erreur
 - Synthèse d'opérateurs avec erreur préfixée
 - Expressions pratiques d'opérateurs de gradient et masques de convolution
- Opérateurs non-linéaires
 - Gradients morphologiques

Définition d'un contour ?



Une image en dégradé et ses contours (en noir).

Position d'un point de contour ?



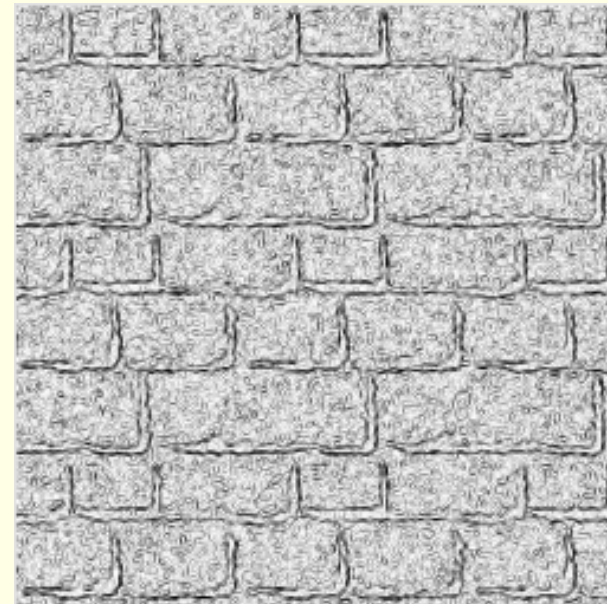
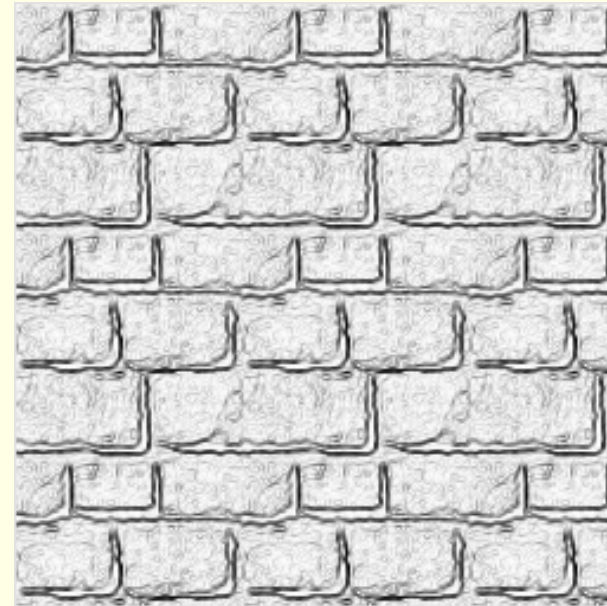
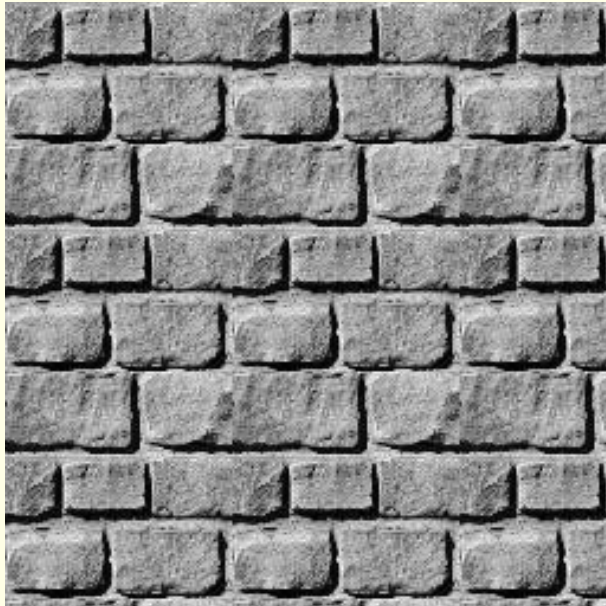
Problème de la position d'un point de contour.

Opérateurs linéaires

Pour les opérateurs de dérivées, on a un double problème :

1. approximer au mieux la dérivée
2. éviter une amplification excessive du bruit

Ce dilemme est insoluble !



Images (à gauche) et gradients respectifs (à droite).

Opérateur de dérivée première

Considérons la dérivée partielle de la fonction $f(x, y)$ par rapport à x . La transformée de FOURIER de cet opérateur vaut

$$\frac{\partial f}{\partial x}(x, y) \Rightarrow 2\pi j u \mathcal{F}(u, v) \quad (148)$$

Dérivée par rapport à x équivaut à multiplier la transformée de FOURIER de $f(x, y)$ par la fonction de transfert $\mathcal{H}_x(u, v) = 2\pi j u$, c'est-à-dire filtrer $f(x, y)$ avec

$$h_x(x, y) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (2\pi j u) e^{2\pi j(xu+yv)} du dv \quad (149)$$

En adoptant une notation vectorielle de la dérivée, on définit le gradient ∇f de l'image f par

$$\nabla f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{e}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{e}_y = (h_x \otimes f) \vec{e}_x + (h_y \otimes f) \vec{e}_y \quad (150)$$

Définition 35. *[Amplitude du gradient]*

$$|\nabla f| = \sqrt{(h_x \otimes f)^2 + (h_y \otimes f)^2} \quad (151)$$

On approxime parfois l'amplitude du gradient par l'expression

$$|\nabla f| \simeq |h_x \otimes f| + |h_y \otimes f| \quad (152)$$

avec une erreur maximale de 41% !

Définition 36. *[Direction du gradient]*

$$\varphi_{\nabla f} = \tan^{-1} \left(\frac{h_y \otimes f}{h_x \otimes f} \right) \quad (153)$$

Opérateur de dérivée seconde

Définition 37. *[Laplacien]*

$$\nabla^2 f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = (h_{xx} \otimes f) + (h_{yy} \otimes f) \quad (154)$$

On peut aisément tirer l'équivalence suivante dans le domaine de FOURIER

$$\nabla^2 f \rightleftharpoons -4\pi^2(u^2 + v^2)\mathcal{F}(u, v) \quad (155)$$

On remarque un effet accentuateur des hautes fréquences.

Échantillonnage de la dérivée et calcul de l'erreur résultante

Afin de déterminer des expressions pratiques pour le calcul des opérateurs dérivés, nous adoptons la démarche suivante :

- synthèse d'approximations avec calcul de l'erreur induite,
- étude du comportement fréquentiel des approximations, et
- discussions de quelques formules pratiques fournies sous la forme de masques de convolution à étendue finie

Approximations (centrées) ?

Une approximation de sa dérivée première est donnée par

$$f'_a(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (156)$$

où h est le pas d'échantillonnage et l'indice a rappelle qu'il s'agit d'une approximation. Cette approximation correspond à l'utilisation du masque de convolution centré suivant

$$\frac{1}{2h} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (157)$$

Pour la dérivée seconde, nous avons l'approximation suivante

$$f''_a(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (158)$$

Pour la dérivée seconde, nous avons l'approximation suivante

$$f''_a(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (158)$$

Calcul de l'erreur. Nous utilisons les développements de TAYLOR suivant

$$f(x+h) = f(x) + h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \dots + \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \dots \quad (159)$$

$$f(x-h) = f(x) - h f'(x) + \frac{h^2}{2} f''(x) + \dots + (-1)^n \frac{h^n}{n!} f^{(n)}(x) + \dots \quad (160)$$

Dérivé première. Par soustraction membre à membre de ces deux égalités, nous obtenons

$$f(x+h) - f(x-h) = 2h f'(x) + \frac{2}{3!} h^3 f^{(3)}(x) + \dots = 2h f'(x) + O(h^3) \quad (161)$$

Après réarrangement,

$$f'(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} + O(h^2) \quad (162)$$

Dérivée seconde. Similairement au cas de la dérivée première, par addition des deux égalités 159 et 160,

$$f(x+h) + f(x-h) = 2f(x) + h^2 f''(x) + \frac{2}{4!} h^4 f^{(4)}(x) + \dots \quad (163)$$

D'où

$$f''(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} + O(h^2) \quad (164)$$

L'approximation $f''_a(x)$ est donc également d'ordre 2.

Synthèse d'opérateurs dérivés avec erreur préfixée. Approximation d'ordre $O(h^4)$ suivante

$$f'_a(x) = \frac{-f(x+2h) + 8f(x+h) - 8f(x-h) + f(x-2h)}{12h} \quad (165)$$

Comportement fréquentiel des opérateurs échantillonnés

Considérons une fonction continue $f(x)$ à une dimension et l'approximation de l'opérateur de dérivée première suivante

$$f'_a(x) = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \quad (166)$$

Sa transformée de FOURIER vaut

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \Rightarrow \frac{e^{2\pi juh} - e^{-2\pi juh}}{2h} \mathcal{F}(u) \quad (167)$$

ce qui peut encore s'écrire sous la forme

$$\frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h} \Rightarrow (2\pi ju) \frac{\sin(2\pi hu)}{2\pi hu} \mathcal{F}(u) \quad (168)$$

Le facteur $(2\pi ju)$ correspond à l'opérateur idéal (ou continu) de la dérivée première.

Pour l'opérateur approximant la dérivée seconde suivant

$$f''_a(x) = \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \quad (169)$$

La transformée de FOURIER est donnée par

$$\frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2} \Rightarrow (-4\pi^2 u^2) \left(\frac{\sin(\pi h u)}{(\pi h u)} \right)^2 \mathcal{F}(u) \quad (170)$$

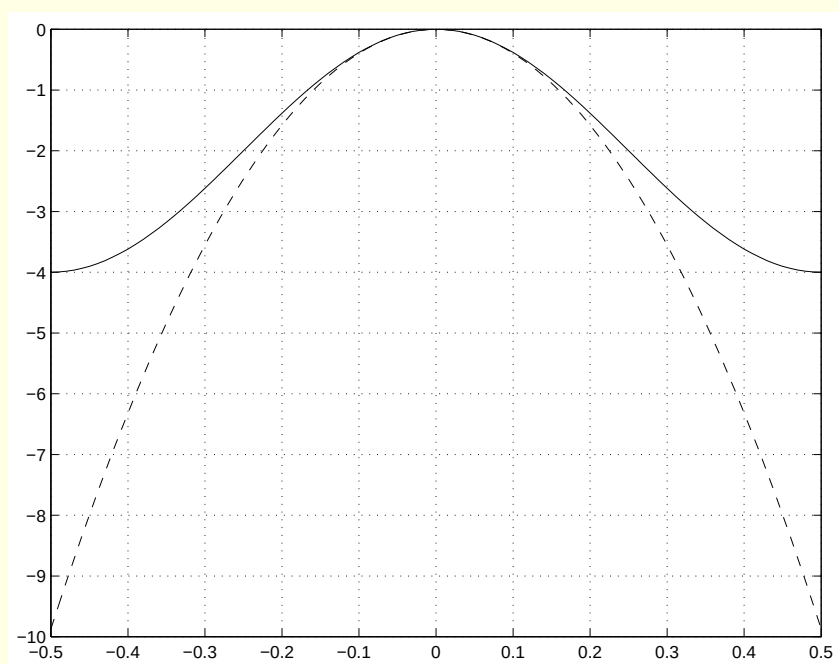
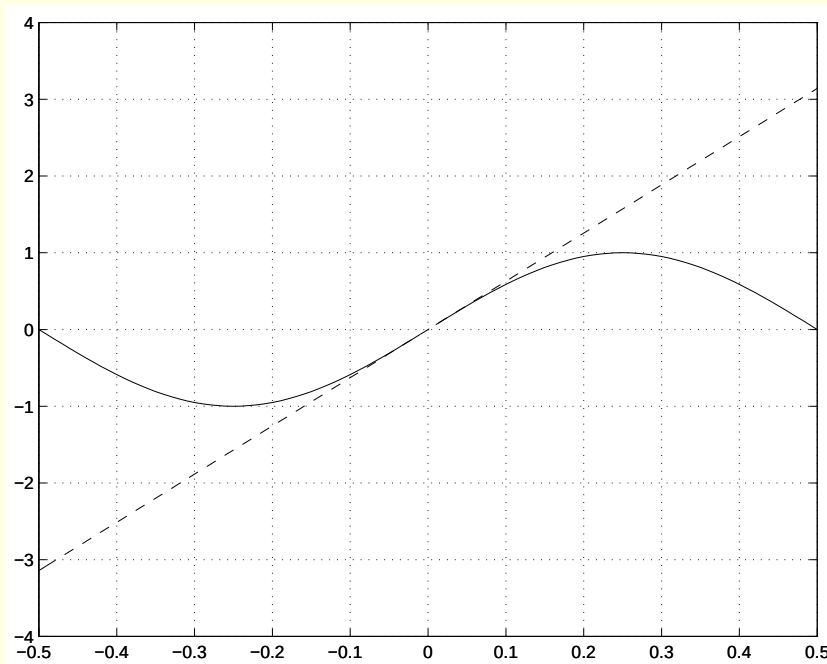


FIGURE 81: Comportement fréquentiel des approximations ($h = 1$). À gauche, la dérivée première et à droite, la dérivée seconde.

Expressions pratiques d'opérateurs de gradient et masques de convolution

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 \end{bmatrix} \quad (171)$$

ce qui correspond en fait à l'approximation non-centrée suivante

$$\frac{f(x+h, y) - f(x, y)}{h} \quad (172)$$

Ce masque présente un inconvénient majeur : le résultat est décalé d'un demi pixel par rapport aux points utilisés pour le calcul. On lui préfère généralement le masque étendu suivant

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (173)$$

Dans la direction y ,

$$\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \quad (174)$$

Dans la foulée, on peut imaginer l'utilisation du masque suivant

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \quad (175)$$

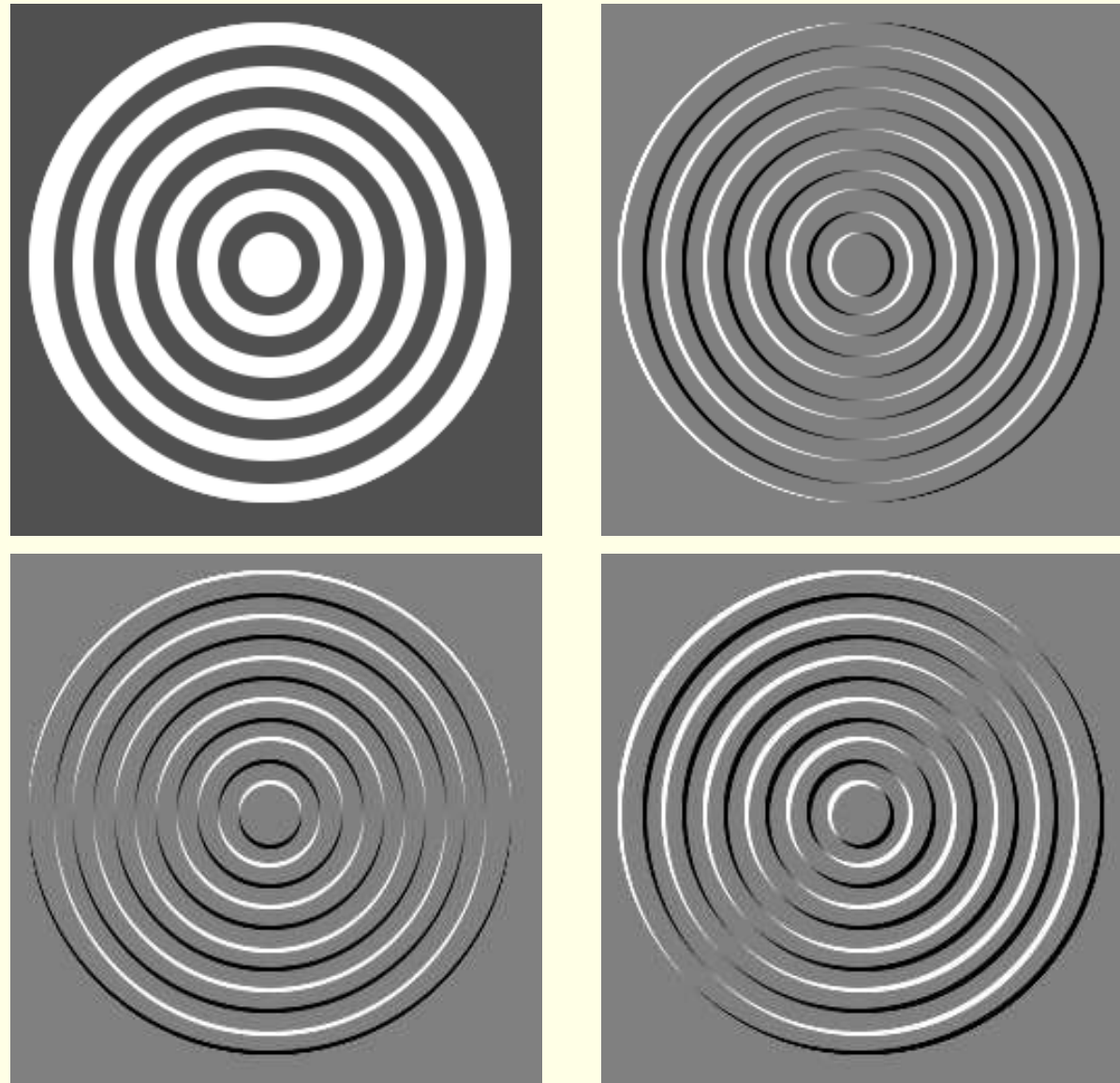


FIGURE 82: (a) image originale, (b) application d'un masque horizontal, (c) application d'un masque vertical et (d) application d'un masque à 135^0 .

Problème pratiques

L'utilisation des masques de convolution pose quelques problèmes pratiques :

- **Effets de bord.** Solutions :
 - (i) placement d'une valeur hors image par défaut ;
 - (ii) miroirisation, qui consiste à miroiriser les valeurs de l'intérieur vers l'extérieur de l'image,
 - (iii) périodisation de l'image –on retrouve alors les pixels de la gauche contre les pixels du bord droit,
 - (iv) recopiage des valeurs du bord de l'image.
- **Modifications de la dynamique de valeurs.**
- **Facteurs de normalisation.**

Filtres gradient de Prewitt

$$[h_x] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (176)$$

$$[h_y] = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{3} \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad (177)$$

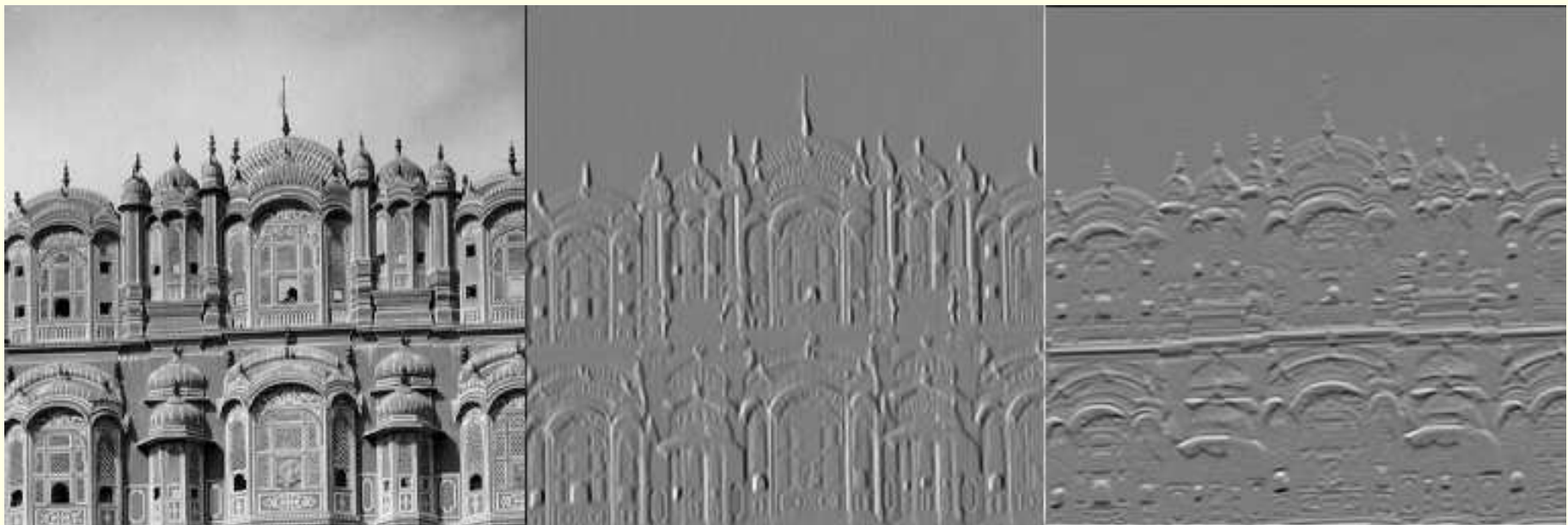


Image originale, images traitées respectivement par le filtre horizontal et le filtre vertical de PREWITT.

Filtres gradient de Sobel

$$[h_x] = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix} = \frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \end{bmatrix} \quad (178)$$



Une image originale et les images traitées par application d'un masque de SOBEL (respectivement horizontal et vertical).

Formes de base pour la dérivée seconde

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -8 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

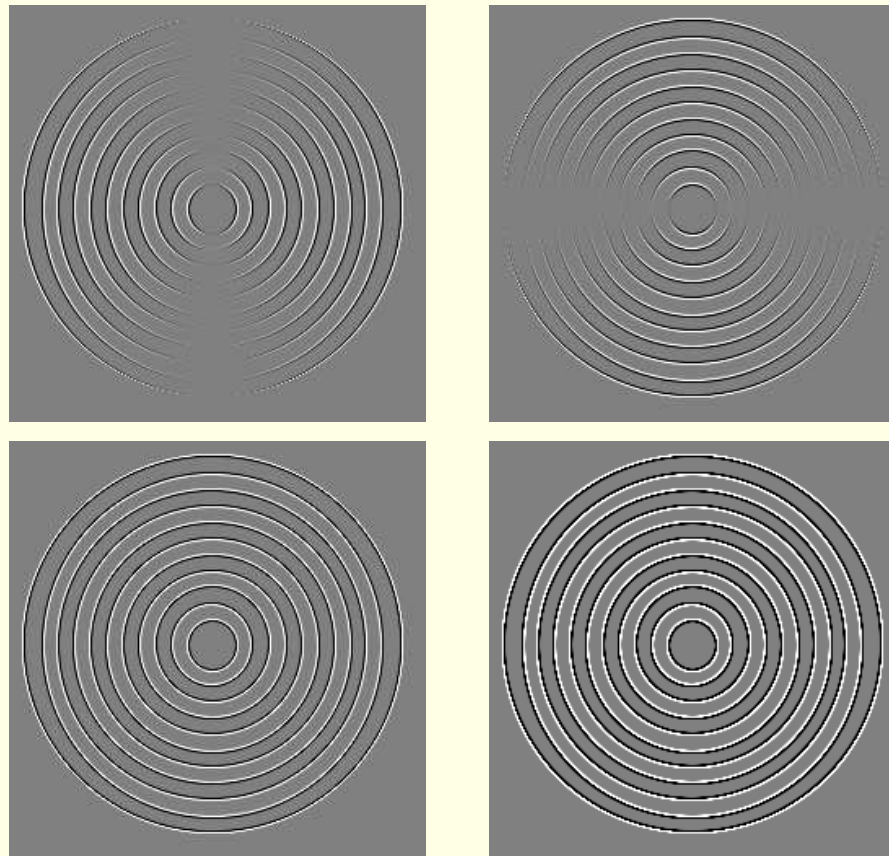


FIGURE 85: Illustrations de l'application de masques de dérivée seconde.

Opérateurs non-linéaires

Gradients morphologiques

- L'opérateur gradient d'érosion

$$GE(f) = f - (f \ominus B) \quad (179)$$

- Le *gradient de dilatation*

$$GD(f) = (f \oplus B) - f \quad (180)$$

- le gradient morphologique de BEUCHER : $GE(f) + GD(f)$.
- le chapeau haut-de-forme (top-hat en anglais) : $f - f \circ B$;
- les opérateurs de détection de contours marqués : $\min(GE(f), GD(f)), \max(GE(f), GD(f))$
- le laplacien non-linéaire : $GD(f) - GE(f)$.



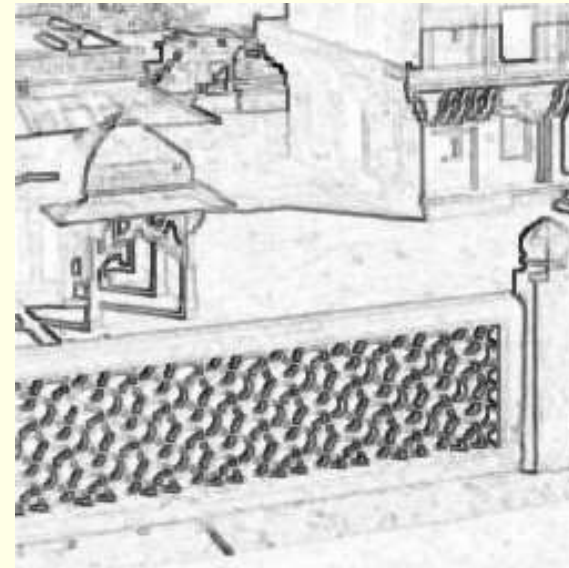
(a) Image originale f



(b) $f \oplus B$

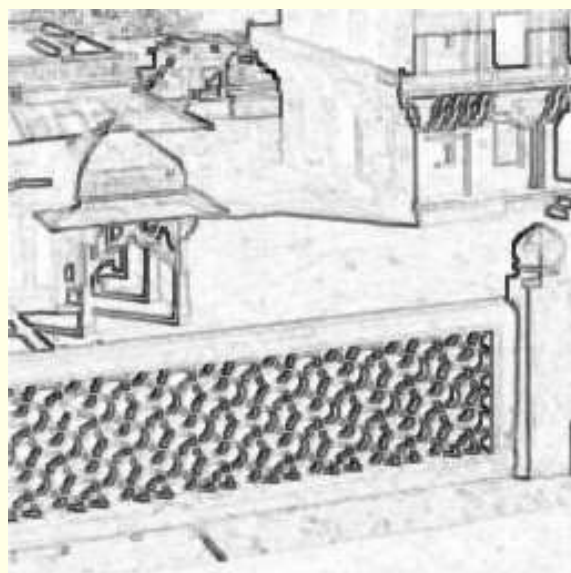


(c) $f \ominus B$

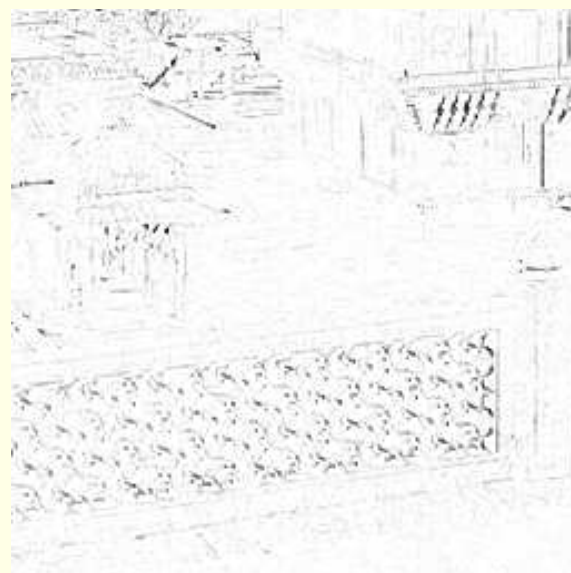


(d) $(f \oplus B) - (f \ominus B)$ (vidéo inverse)

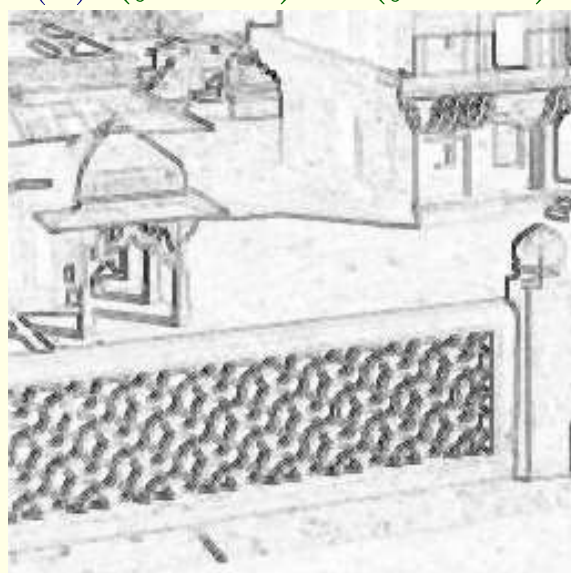
FIGURE 86: Gradient de BEUCHER.



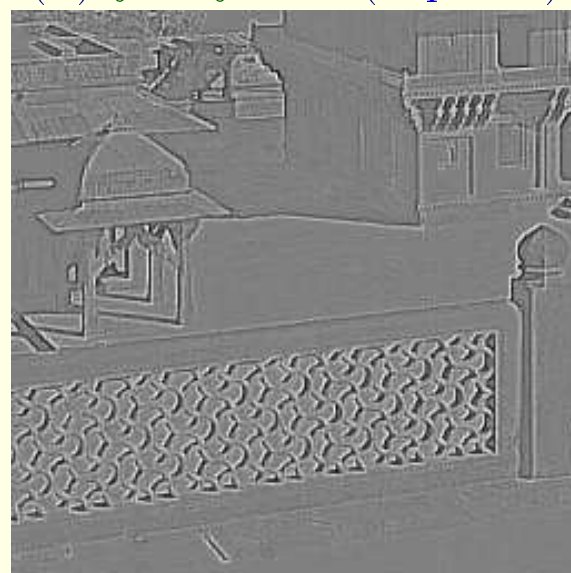
(a) $(f \oplus B) - (f \ominus B)$



(b) $f - f \circ B$ (top-hat)



(c) $\max(GE(f), GD(f))$



(d) $GD(f) - GE(f)$

FIGURE 87: Différents détecteurs de contours non-linéaires (vidéo inverse).

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire et déconvolution
- Morphologie mathématique
- Filtrage non-linéaire
- Détection de traits caractéristiques et détection de contours
- Texture
- Rehaussement et restauration
- Étude de la forme
- Segmentation d'images
- Codage d'images
- Applications industrielles

Texture

- Définition ?
- Caractérisation statistique des textures
 - Moyenne locale
 - Écart-type local
 - Histogramme local
 - Matrice de co-occurrence des niveaux de gris
- Caractérisation géométrique des textures
 - Approche fréquentielle
 - Texture et énergie

Enjeux ?

Les principales questions relatives aux textures sont

- l'analyse des textures, c'est-à-dire la caractérisation des textures par l'introduction de différents paramètres appelés descripteurs de texture.
- la reconnaissance de textures, c'est-à-dire la possibilité de mettre en évidence différentes textures.
- la segmentation d'images.

Définition

Définition 38. *Une texture est un signal qui peut être étendu naturellement au-delà de son domaine de définition.*

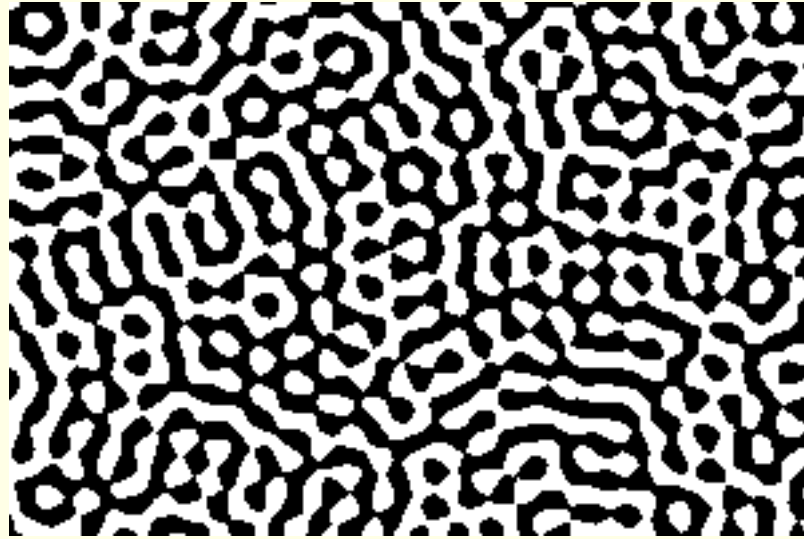
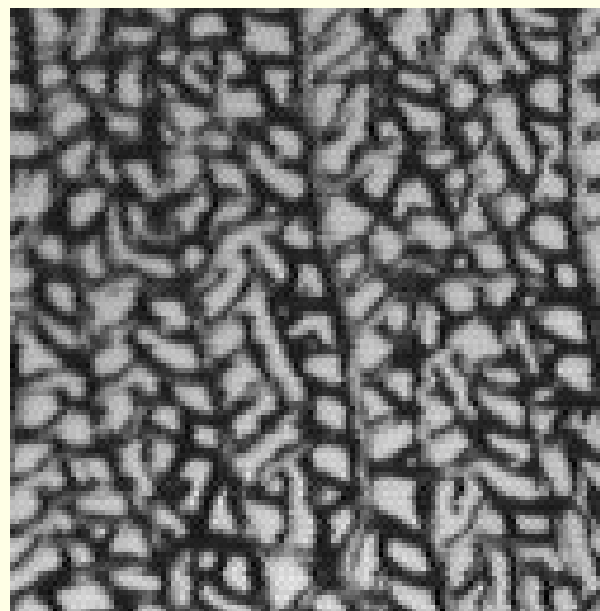
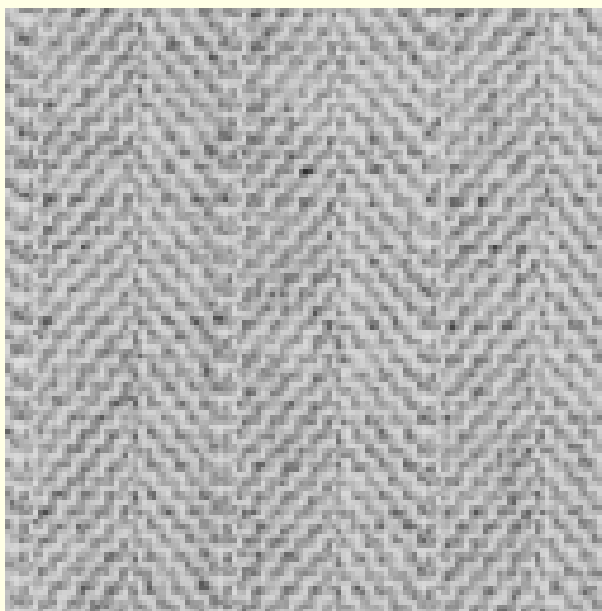
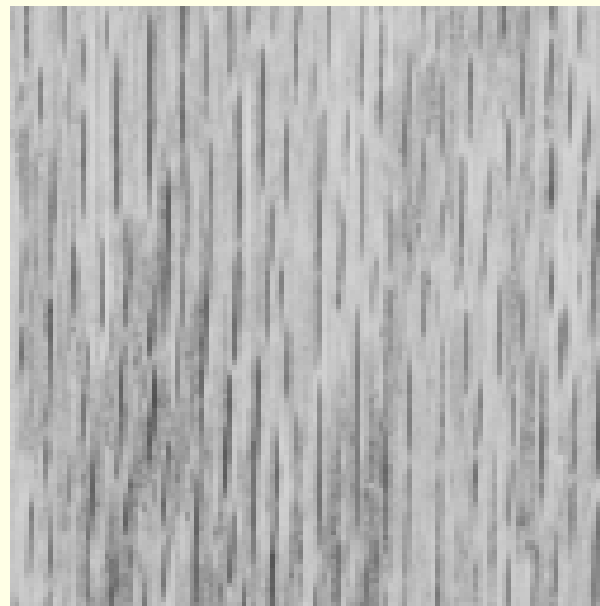
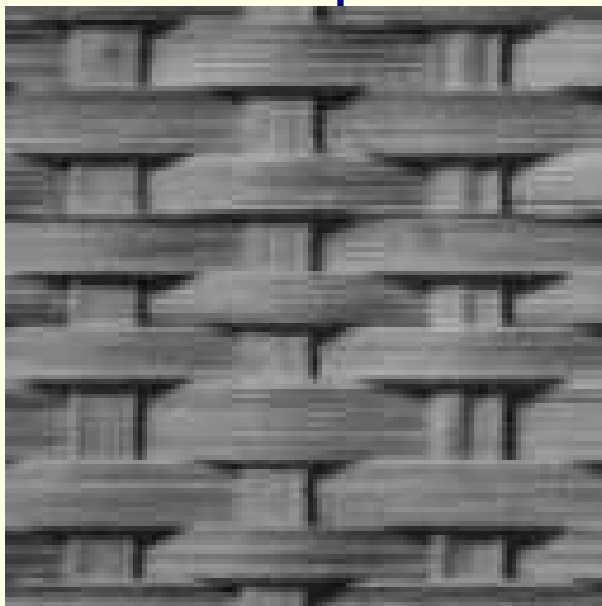


FIGURE 88: *Un exemple de texture (d'après LANTUÉJOUL).*

Exemples de textures naturelles



Analyse simple d'une image en niveaux de gris

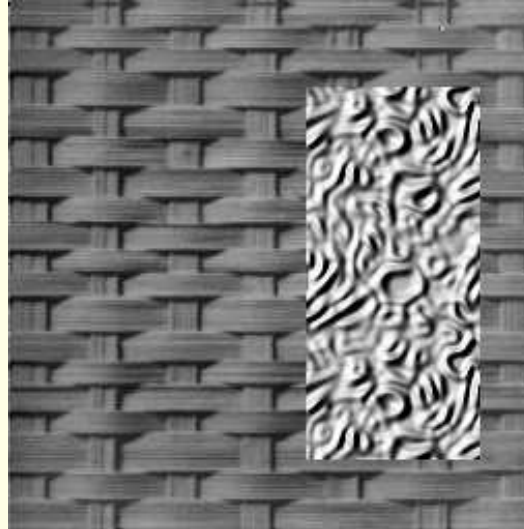


FIGURE 89: Exemple d'image comportant deux textures.

Caractérisation statistique des textures

Descripteurs simples :

- moyenne
- variance

Caractérisation statistique des textures

Descripteurs simples :

- moyenne
- variance

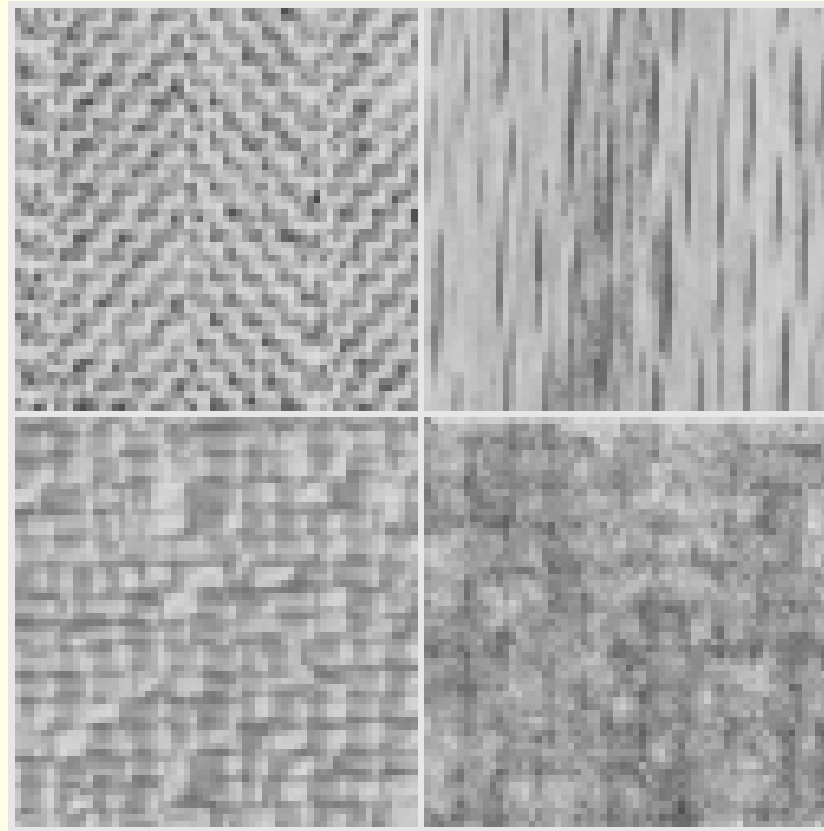


FIGURE 90: Textures ayant même moyenne et même variance.

Statistiques définies à l'intérieur d'une fenêtre

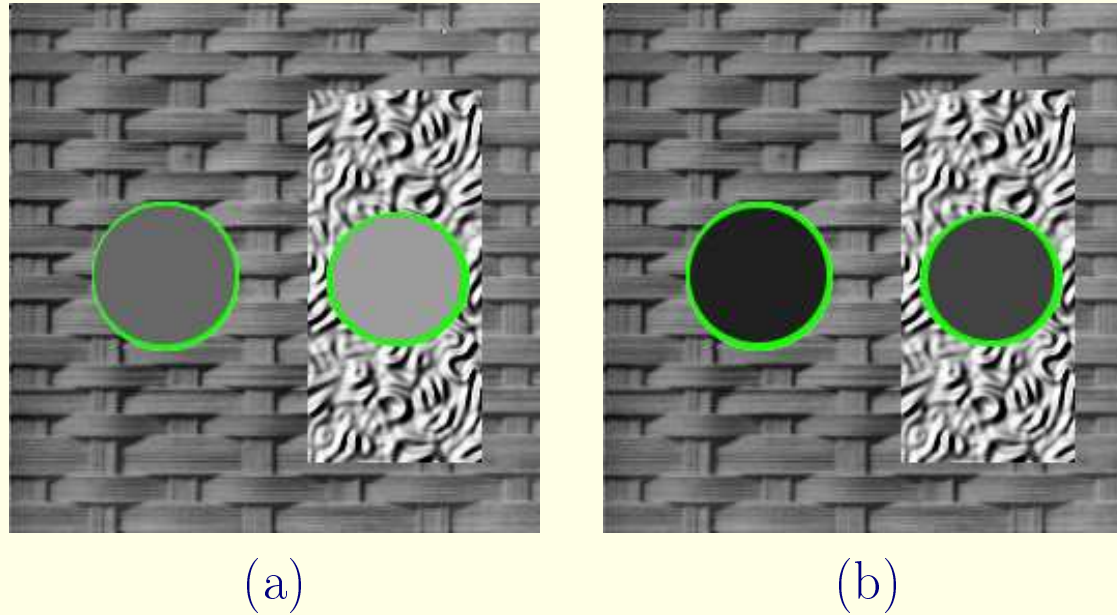


FIGURE 91: Illustration de fenêtrage. (a) calcul de la moyenne des niveaux de gris (103 et 156 respectivement) (b) calcul de l'écart-type (32 et 66 respectivement).

Statistiques locales

Définition 39. *La moyenne locale sur la fenêtre B est définie par*

$$\mu_f = \frac{1}{\#(B)} \sum_{(x,y) \in B} f(x,y) \quad (181)$$

Définition 40. *L'écart-type local sur la fenêtre B est défini par*

$$\sigma_f = \sqrt{\frac{\sum_{(x,y) \in B} [f(x,y) - \mu_f]^2}{\#(B)}} \quad (182)$$

Histogramme et histogramme local

Définition 41. *L'histogramme d'une image est la courbe représentant la fréquence des occurrences des niveaux de gris présents dans l'image.*

Considérons l'image suivante :

0	0	0	0	0	0
0	2	1	2	2	2
2	1	1	1	2	2
2	1	1	1	2	2
3	2	1	0	0	0
3	3	3	3	2	0

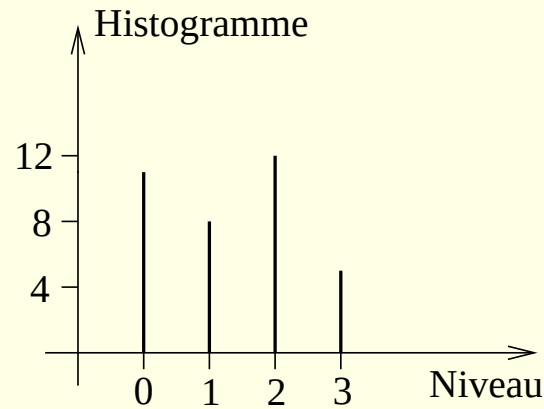


FIGURE 92: Histogramme (non normalisé) d'une image.

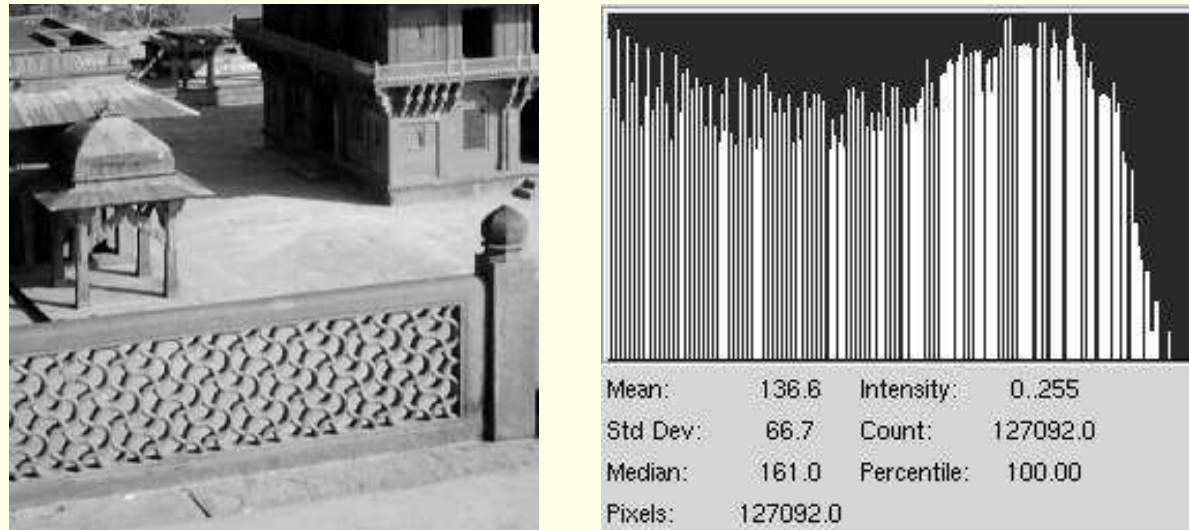


FIGURE 93: Une image et son histogramme (global car ici B correspond à l'image entière)

Définition 42. À partir d'une fenêtre B dans l'image, il est possible de définir un histogramme

local (normalisé) $p(l)$ comme suit

$$p(l) = \frac{\# \{ (x, y) \in B \mid f(x, y) = l \}}{\#(B)} \quad (183)$$

Statistiques d'histogramme

- Moyenne

$$\mu_L = \sum_{l=0}^{L-1} l p(l) \quad (184)$$

où L est le nombre de niveaux de gris présent dans la fenêtre B .

- Écart-type

$$\sigma_L = \sqrt{\sum_{l=0}^{L-1} (l - \mu_L)^2 p(l)} \quad (185)$$

- Obliquité

$$S_s = \frac{1}{\sigma_L^3} \sum_{l=0}^{L-1} (l - \mu_L)^3 p(l) \quad (186)$$

- “Kurtosis”

$$S_k = \frac{1}{\sigma^4} \sum_{l=0}^{L-1} (l - \mu_L)^4 p(l) - 3 \quad (187)$$

Matrice de co-occurrence des niveaux de gris

Définition. Une matrice de co-occurrence est définie au moyen d'une relation géométrique R entre deux pixels (x_1, y_1) et (x_2, y_2) . Un exemple de relation géométrique simple est

$$x_2 = x_1 + 1 \quad (188)$$

$$y_2 = y_1 \quad (189)$$

pour lequel le pixel (x_2, y_2) est le pixel voisin de droite de (x_1, y_1) .

La matrice de co-occurrence $C_R(i, j)$ est carrée et de dimension $L \times L$, où L est le nombre de niveaux de gris présents dans B . Les indices de la matrice de co-occurrence sont donc les niveaux de gris de la texture étudiée.

Matrice de co-occurrence des niveaux de gris

Définition. Une matrice de co-occurrence est définie au moyen d'une relation géométrique R entre deux pixels (x_1, y_1) et (x_2, y_2) . Un exemple de relation géométrique simple est

$$x_2 = x_1 + 1 \quad (188)$$

$$y_2 = y_1 \quad (189)$$

pour lequel le pixel (x_2, y_2) est le pixel voisin de droite de (x_1, y_1) .

La matrice de co-occurrence $C_R(i, j)$ est carrée et de dimension $L \times L$, où L est le nombre de niveaux de gris présents dans B . Les indices de la matrice de co-occurrence sont donc les niveaux de gris de la texture étudiée.

Construction de la matrice $C_R(i, j)$:

1. Initialisation de la matrice : $\forall i, j \in [0, L[: C_R(i, j) = 0$.
2. Remplissage de la matrice. Si la relation R entre deux pixels (x_1, y_1) et (x_2, y_2) est respectée :

$$C_R(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)) = C_R(f(x_1, y_1), f(x_2, y_2)) + 1$$

Exemple

Soit l'image suivante comportant $L = 4$ niveaux de gris ($l = 0, 1, 2, 3$) :

$$f(x, y) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 2 & 3 \\ 2 & 2 & 3 & 3 \end{bmatrix} \quad (190)$$

$$P_{0^\circ, d}(i, j) = \# \{ (x_1, y_1), (x_2, y_2) \in B \mid y_1 = y_2, |x_2 - x_1| = d, \\ f(x_1, y_1) = i \text{ et } f(x_2, y_2) = j \} \quad (191)$$

Les matrices $P_{0^\circ, 1}$ et $P_{90^\circ, 1}$ sont donc de dimension 4 et valent

$$P_{0^\circ, 1} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & 2 & 2 \end{bmatrix} \quad P_{90^\circ, 1} = \begin{bmatrix} 6 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \end{bmatrix} \quad (192)$$

Caractérisation géométrique des textures

Utilisation de la transformée de FOURIER

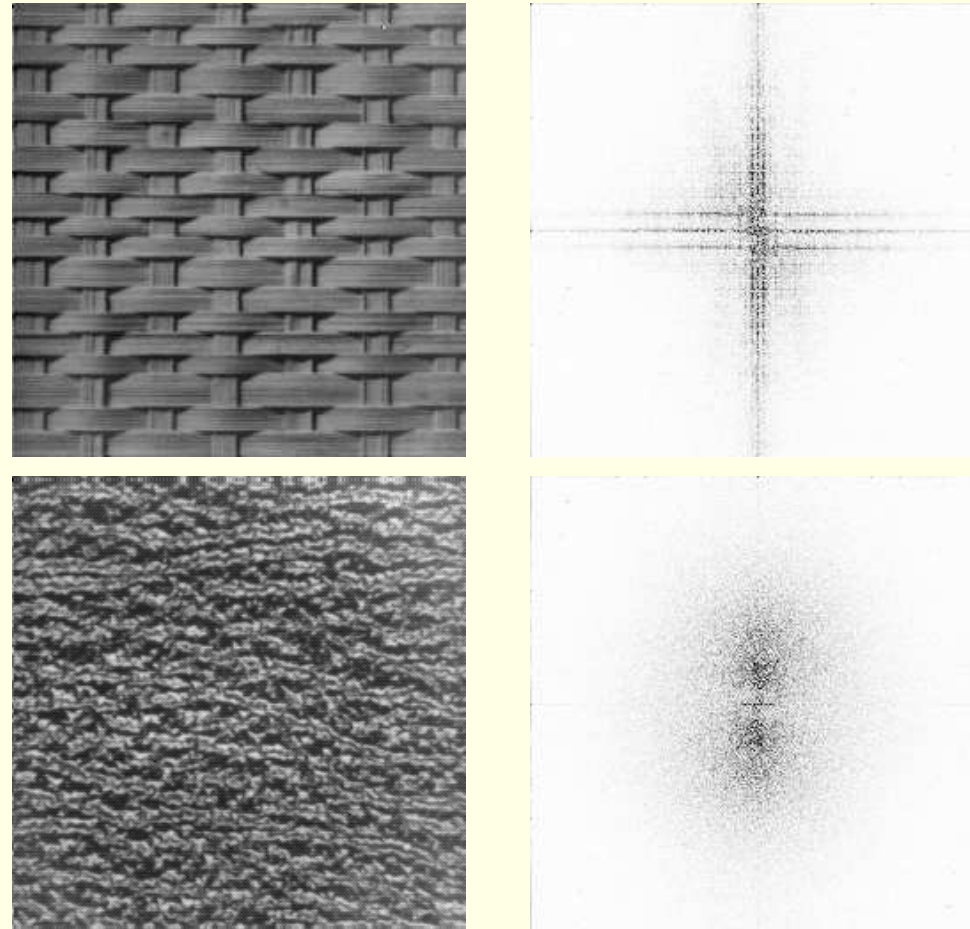


FIGURE 94: Caractéristiques fréquentielles d'une texture. Sur la gauche, les images texturées et sur la droite, le module de leur transformée de FOURIER respective.

Textures et énergie

Des mesures sont dérivées de trois vecteurs simples : $L_3 = (1, 2, 1)$ qui effectue la moyenne, $E_3 = (-1, 0, 1)$ qui détecte les contours et $S_3 = (-1, 2, -1)$ qui correspond à la dérivée seconde. Par convolution de ces vecteurs (symétriques) par eux-mêmes et entre eux, LAWS a introduit 9 masques de convolution :

$$\frac{1}{36} \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Laws 1

$$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

Laws 2

$$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & -2 \\ -1 & 2 & -1 \end{bmatrix}$$

Laws 3

$$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$$

Laws 4

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Laws 5

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Laws 6

$$\frac{1}{12} \begin{bmatrix} -1 & -2 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \\ -1 & -2 & -1 \end{bmatrix}$$

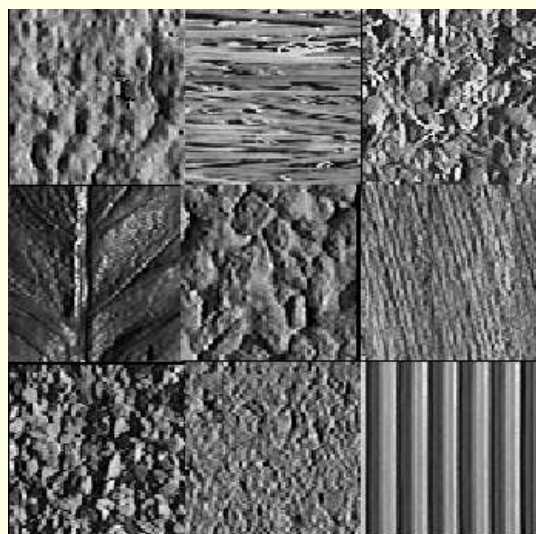
Laws 7

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ -1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Laws 8

$$\frac{1}{4} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$

Laws 9



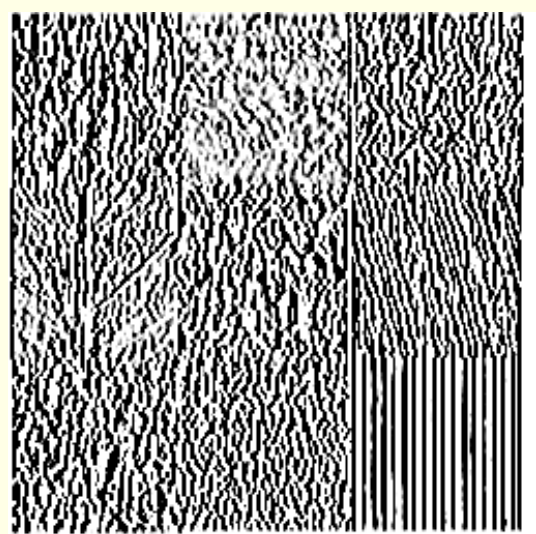
Textures



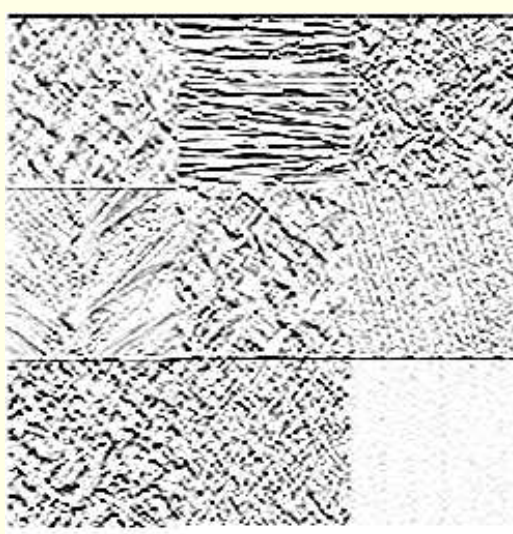
Laws 3



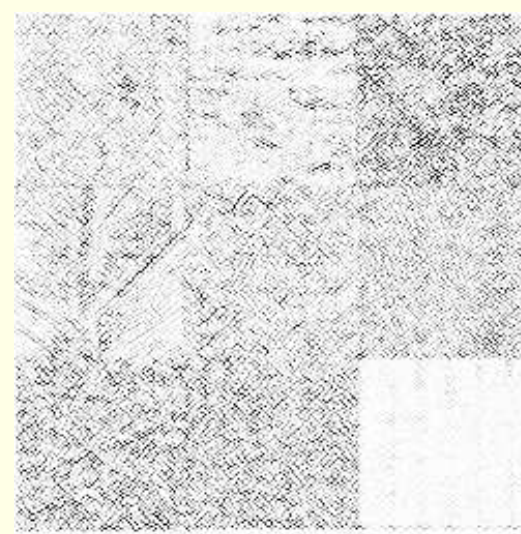
Laws 5



matrice 5×5 donnée en exemple



Laws 4



Laws 9

FIGURE 95: Illustration des mesures de LAWS (vidéo inverse)

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire et déconvolution
- Morphologie mathématique
- Filtrage non-linéaire
- Détection de traits caractéristiques et détection de contours
- Texture
- Rehaussement et restauration
- Étude de la forme
- Segmentation d'images
- Codage d'images
- Applications industrielles

Rehaussement et restauration

- Généralités
- Rehaussement
 - Définition
 - Rehaussement par accentuation des contours
 - Manipulation de l'histogramme
 - Filtrage homomorphique
- Restauration
 - Filtrage de WIENER
 - Déconvolution de WIENER

Généralités

On distingue deux grandes familles de procédés de correction des défauts :

- le rehaussement, qui consiste à donner à l'image un aspect visuellement correct, et
- la restauration, qui cherche à rétablir la valeur exacte des pixels.

Généralités

On distingue deux grandes familles de procédés de correction des défauts :

- le rehaussement, qui consiste à donner à l'image un aspect visuellement correct, et
- la restauration, qui cherche à rétablir la valeur exacte des pixels.

Démarche de la restauration : recherche d'une estimation $\hat{f}(x, y)$ de l'image $f(x, y)$ qui minimise une fonction d'erreur $e(x, y) = e(\hat{f}, f)$. Par exemple,

$$e(\hat{f}, f) = \frac{1}{MN} \sum_x \sum_y (\hat{f}(x, y) - f(x, y))^2 \quad (193)$$

Marge de manœuvre ?



(a) Image originale f



(b) Arrondi à 5



(c) Arrondi à 10



(d) Arrondi à 20

FIGURE 96: Seuil de visibilité pour une opération d'arrondi.

Définition du rehaussement

Soit L la valeur maximale de l'image $f(x, y)$. Considérons une image à valeurs positives, c'-à-d. que $\forall x, y, f(x, y) \geq 0$. En définitive, $f(x, y) \in [0, L[$.

Définition 43. *Le rehaussement consiste à appliquer une fonction croissante $g()$ à toutes les valeurs l de l'image telle que $g(0) = 0$ et $g(L) = L$.*

Rehaussement par fonction croissante

On peut utiliser une fonction parabolique de la forme suivante

$$g(l) = l + \alpha l(L - l) \quad (194)$$

Un autre type de courbes consiste à appliquer une forme de S dans la partie centrale

$$g(l) = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{\sin \left[\alpha \pi \left(\frac{l}{L} - \frac{1}{2} \right) \right]}{\sin \left[\alpha \frac{\pi}{2} \right]} \right), \quad \alpha \in]0, 1[\quad (195)$$

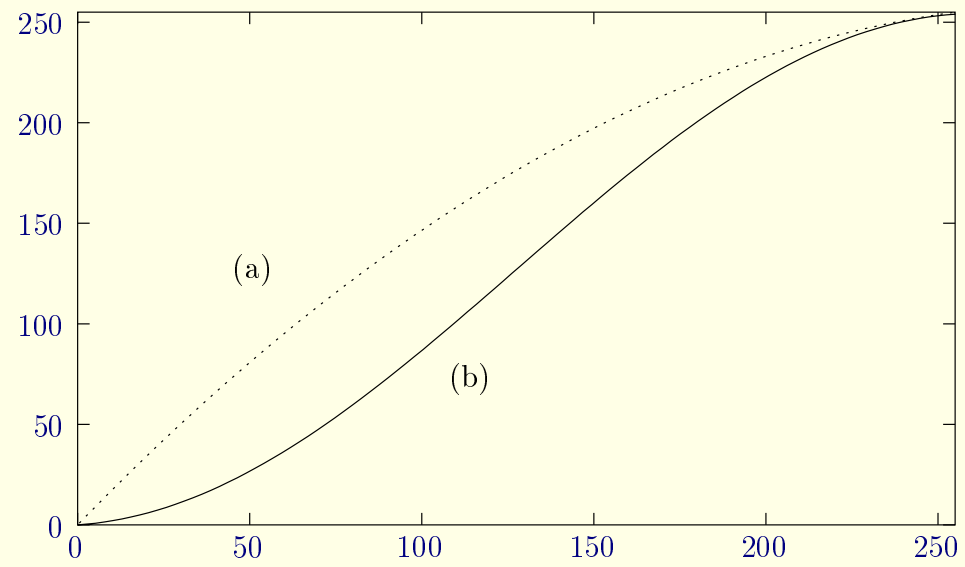
Rehaussement par fonction croissante

On peut utiliser une fonction parabolique de la forme suivante

$$g(l) = l + \alpha l(L - l) \quad (194)$$

Un autre type de courbes consiste à appliquer une forme de S dans la partie centrale

$$g(l) = \frac{L}{2} \left(1 + \frac{\sin \left[\alpha \pi \left(\frac{l}{L} - \frac{1}{2} \right) \right]}{\sin \left[\alpha \frac{\pi}{2} \right]} \right), \quad \alpha \in]0, 1[\quad (195)$$

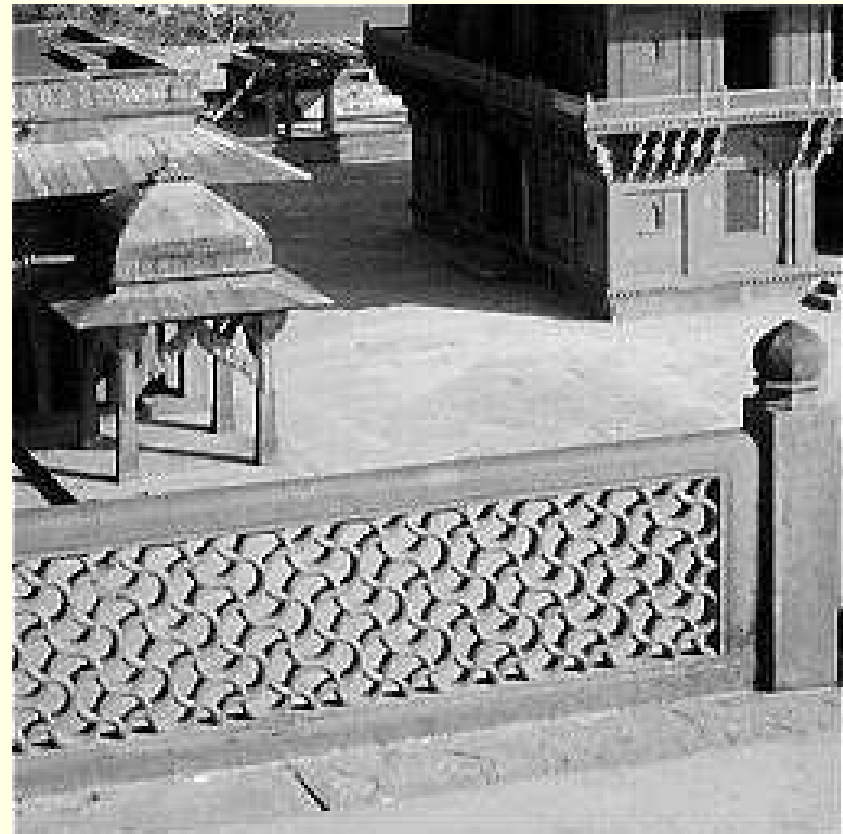


Rehaussement par accentuation des contours

$$\hat{f}(x, y) = f(x, y) - \alpha \nabla^2 f(x, y) \quad (196)$$



(a) Image originale f



(b) $f - \alpha \nabla^2 f$

FIGURE 97: Rehaussement des contours ($\alpha = \frac{1}{3}$).

Manipulation de l'histogramme

Objectif : déterminer la relation entre une image d'entrée et une traitée par modification de son histogramme.

Soit $o(x, y)$ l'image de sortie. Pour une valeur l_o de l'image de sortie, il existe une fonction ϕ telle que

$$l_o = \phi(l_f) \quad (197)$$

Si cette fonction admet un inverse,

$$l_f = \phi^{-1}(l_o) \quad (198)$$

Si l'on interprète l'histogramme comme une densité de probabilité, on a

$$hist_o(l_o)dl_o = hist_f(l_f)dl_f \quad (199)$$

Dès lors,

$$hist_o(l_o) = \frac{hist_f(l_f)}{dl_o/dl_f} = \frac{hist_f(l_f)}{d\phi(l_f)/dl_f} \Big|_{l_f=\phi^{-1}(l_o)} \quad (200)$$

$$hist_o(l) = \frac{hist_f(\phi^{-1}(l))}{\frac{d\phi}{dl}(\phi^{-1}(l))} \quad (201)$$

Égalisation de l'histogramme

L'égalisation de l'histogramme d'une image est une méthode qui vise à assurer une distribution homogène des valeurs dans la totalité de la plage dynamique des valeurs possibles.

Idéalement, le nombre de pixels devrait valoir $\frac{A(D_f)}{L}$, où $A(D_f)$ représente l'aire du support de définition de la fonction f .

Égalisation de l'histogramme

L'égalisation de l'histogramme d'une image est une méthode qui vise à assurer une distribution homogène des valeurs dans la totalité de la plage dynamique des valeurs possibles.

Idéalement, le nombre de pixels devrait valoir $\frac{A(D_f)}{L}$, où $A(D_f)$ représente l'aire du support de définition de la fonction f .

$$\frac{d\phi}{dl}(l) = \frac{L}{A(D_f)} hist_f(l) \quad (202)$$

Par intégration des membres de cette dernière relation,

$$\phi(l) = \frac{L}{A(D_f)} \int_0^l hist_f(k) dk \quad (203)$$

Comme on peut estimer la probabilité d'un niveau par le rapport de la fréquence à l'aire du domaine de définition de la fonction

$$p(l) = \frac{hist_f(l)}{A(D_f)} \quad (204)$$

De plus, la fonction de répartition F est l'intégrale cumulée des probabilités

$$F(l) = \int_0^l p(k)dk = \frac{1}{A(D_f)} \int_0^l hist_f(k)dk \quad (205)$$

Dès lors,

$$\phi(l) = LF(l) \quad (206)$$

Autrement dit, l'image $o(x, y)$ traitée par la fonction qui effectue une égalisation de l'histogramme vaut

$$o(x, y) = LF(f(x, y)) \quad (207)$$

Illustration



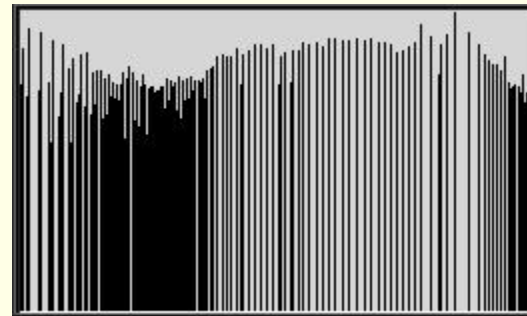
(a) Image originale f



(b) Après égalisation de l'histogramme



(c) Histogramme original



(d) Histogramme après égalisation

FIGURE 98: Égalisation d'histogramme.

Filtrage homomorphique

La nature de $f(x, y)$ peut donc être caractérisée par deux composantes :

1. l'illumination $i(x, y)$
2. la réflectance $r(x, y)$

L'illumination et la réflectance permettent de modéliser l'image $f(x, y)$ par le produit suivant :

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y) \quad (208)$$

$$0 < i(x, y) < +\infty$$

$$0 < r(x, y) < 1$$

Filtrage homomorphique

La nature de $f(x, y)$ peut donc être caractérisée par deux composantes :

1. l'illumination $i(x, y)$
2. la réflectance $r(x, y)$

L'illumination et la réflectance permettent de modéliser l'image $f(x, y)$ par le produit suivant :

$$f(x, y) = i(x, y)r(x, y) \quad (208)$$

$$0 < i(x, y) < +\infty$$

$$0 < r(x, y) < 1$$

Modèle

- Illumination : fonction qui présente de faibles variations $\Rightarrow$ basses fréquences
- Réflectance : fonction qui varie de manière abrupte, particulièrement à la jonction d'objets $\Rightarrow$ hautes fréquences

Considérons la fonction

$$z(x, y) = \ln(f(x, y)) = \ln(i(x, y)) + \ln(r(x, y)) \quad (209)$$

Il est possible de filtrer la fonction $\mathcal{Z}(u, v)$ en la multipliant par $\mathcal{H}(u, v)$, ce qui donne

$$\mathcal{S}(u, v) = \mathcal{H}(u, v)\mathcal{Z}(u, v) \quad (210)$$

$$= \mathcal{H}(u, v)\mathcal{I}(u, v) + \mathcal{H}(u, v)\mathcal{R}(u, v) \quad (211)$$

Si nous introduisons les deux fonctions

$$i'(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{H}(u, v)\mathcal{I}(u, v)\} \quad (212)$$

$$r'(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{H}(u, v)\mathcal{R}(u, v)\} \quad (213)$$

le résultat du filtrage de $z(x, y)$ sera noté $s(x, y)$; il vaut

$$s(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{S}(u, v)\} \quad (214)$$

$$= i'(x, y) + r'(x, y) \quad (215)$$

L'image rehaussée $g(x, y)$ devient :

$$g(x, y) = e^{s(x, y)} \quad (216)$$

$$= e^{i'(x, y)} e^{r'(x, y)} \quad (217)$$

$$= i''(x, y) r''(x, y) \quad (218)$$

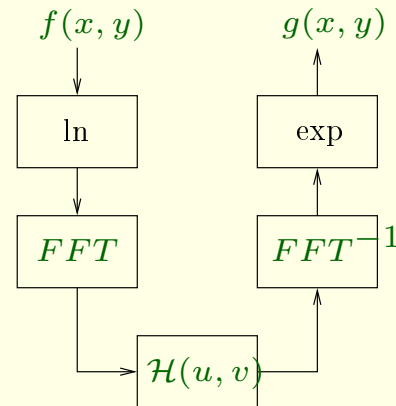


FIGURE 99: Schéma du filtrage homomorphique.

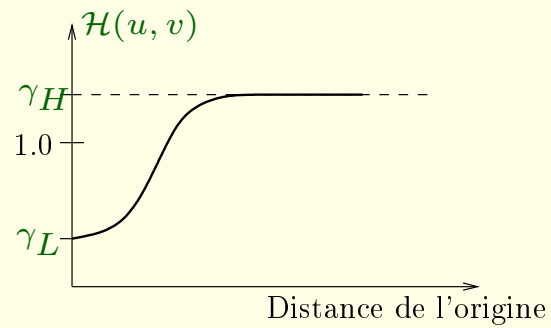


FIGURE 100: Coupe radiale d'un filtre homomorphique.



FIGURE 101: (a) Image à rehausser (b) Image rehaussée par un filtre homomorphique.

Restoration

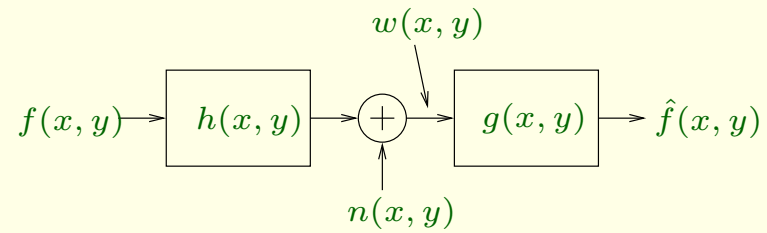


FIGURE 102: Modèle pour la restauration d'une image continue.

Restauration

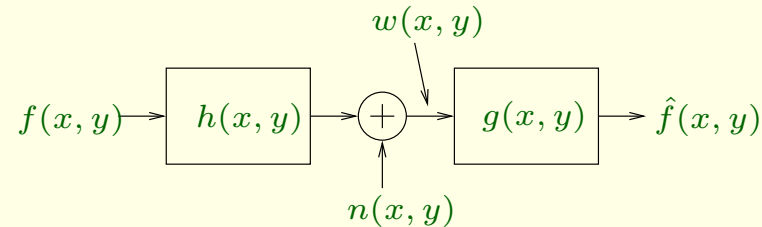


FIGURE 102: Modèle pour la restauration d'une image continue.

Filtrage de Wiener

$\hat{f}(t)$ (appelée estimation de $f(t)$) représente la fonction restaurée au départ de $w(t)$ par une convolution avec le filtre de réponse impulsionnelle $h(t)$.

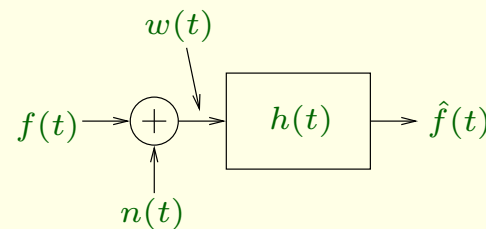


FIGURE 103: Modèle utilisé pour le filtre de WIENER.

Définition d'un critère

Avant de déterminer le filtre optimal, que l'on notera $h_o(t)$, il est nécessaire de définir un critère d'optimalité.

$$e(t) = f(t) - \hat{f}(t) \quad (219)$$

Comme mesure de l'erreur moyenne, nous utiliserons l'erreur quadratique moyenne

$$E \{e^2(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} e^2(t) dt \quad (220)$$

Démarche. Pour déterminer $h(t)$, nous suivons la démarche suivante :

1. exprimer l'erreur quadratique moyenne en terme de la fonction $h(t)$,
2. déterminer l'expression optimale $h_o(t)$ en terme des densités spectrales de puissance connues, et finalement
3. calculer la valeur de l'erreur quadratique moyenne lorsque le filtre optimal $h_o(t)$ est utilisé.

$$E \{e^2(t)\} = E \{f^2(t) - 2f(t)\hat{f}(t) + \hat{f}^2(t)\} \quad (221)$$

$$= E \{ f^2(t) \} - 2E \{ f(t) \hat{f}(t) \} + E \{ \hat{f}^2(t) \} \quad (222)$$

$$= T_1 + T_2 + T_3 \quad (223)$$

où T_1 , T_2 et T_3 sont trois termes que l'on va traiter séparément.

Considérons le filtre optimal $h_o(t)$. Tout autre filtre peut s'écrire comme

$$h(t) = h_o(t) + g(t) \quad (224)$$

Dès lors,

$$E \{ e^2(t) \} = \Gamma_{ff}(0) - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} (h_o(\tau) + g(\tau)) \Gamma_{fw}(\tau) d\tau \quad (225)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (h_o(\tau) + g(\tau))(h_o(u) + g(u)) \Gamma_{ww}(u - \tau) d\tau du \quad (226)$$

ce qui peut s'écrire sous la forme de sept termes :

$$E \{ e^2(t) \} = \Gamma_{ff}(0) - 2 \int_{-\infty}^{+\infty} h_o(\tau) \Gamma_{fw}(\tau) d\tau \quad (227)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_o(\tau) h_o(u) \Gamma_{ww}(u - \tau) d\tau du \quad (228)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_o(\tau) g(u) \Gamma_{ww}(u - \tau) d\tau du \quad (229)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h_o(u) g(\tau) \Gamma_{ww}(u - \tau) d\tau du \quad (230)$$

$$- 2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) \Gamma_{fw}(\tau) d\tau + \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) g(u) \Gamma_{ww}(u - \tau) d\tau du \quad (231)$$

$$E \{e^2(t)\} = E_o + 2 \int_{-\infty}^{+\infty} g(u) \left[\int_{-\infty}^{+\infty} h_o(\tau) \Gamma_{ww}(u - \tau) d\tau - \Gamma_{fw}(u) \right] du \quad (232)$$

$$+ \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(\tau) g(u) \Gamma_{ww}(u - \tau) d\tau du \quad (233)$$

$$= E_o + T_4 + T_5 \quad (234)$$

Le terme T_5 est toujours positif.

Condition nécessaire et suffisante pour que le filtre $h_o(t)$ soit optimal :

$$\Gamma_{fw}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} h_o(\tau) \Gamma_{ww}(u - \tau) d\tau \quad (235)$$

L'expression fréquentielle du filtre optimal

$$\mathcal{H}_o(f) = \frac{\gamma_{fw}(f)}{\gamma_{ww}(f)} \quad (236)$$

Si les signaux $f(t)$ et $n(t)$ sont indépendants :

$$E \{f(t) n(t)\} = E \{f(t)\} E \{n(t)\} \quad (237)$$

$$\Gamma_{fw}(\tau) = \Gamma_{ff}(\tau) + E \{n(t)\} E \{f(t + \tau)\} = \Gamma_{ff}(\tau) + \int_{-\infty}^{+\infty} n(t) dt \int_{-\infty}^{+\infty} f(t + \tau) dt \quad (238)$$

et finalement

$$\mathcal{H}_o(f) = \frac{\gamma_f(f)}{\gamma_f(f) + \gamma_n(f)} \quad f \neq 0 \quad (239)$$

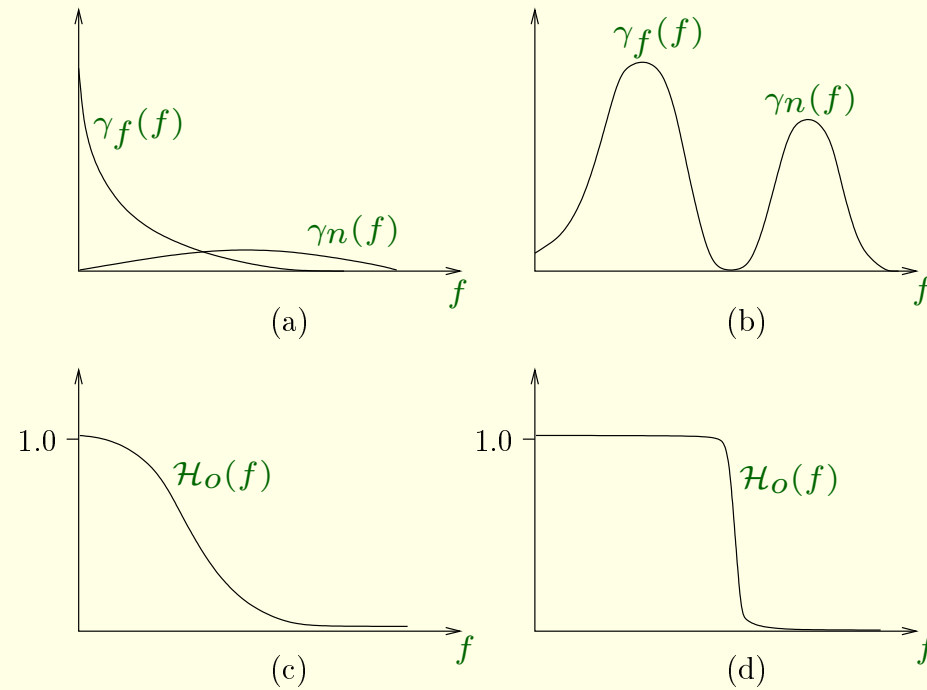


FIGURE 104: Illustration du filtre de WIENER. (a) et (c) : signal utile passe-bas et bruit s'étalant sur toute la gamme de fréquences. (b) et (d) : signal utile et bruit du type passe-bande.

Déconvolution de Wiener

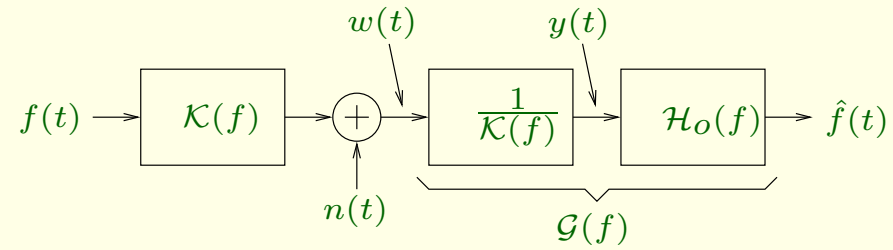


FIGURE 105: Schéma de déconvolution de WIENER.

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire et déconvolution
- Morphologie mathématique
- Filtrage non-linéaire
- Détection de traits caractéristiques et détection de contours
- Texture
- Rehaussement et restauration
- Étude de la forme
- Segmentation d'images
- Codage d'images
- Applications industrielles

Étude de la forme

- Description de la forme
 - Description linéique de la forme
 - L'arbre
 - Squelette morphologique
 - Autres descripteurs par éléments de surface
- Mesures
 - Mesures géométriques de base
 - Indices de forme
 - Moments
 - Mesures morphologiques

Description de la forme

Il existe fondamentalement deux catégories de description de la forme :

- les descripteurs linéiques. Ils décrivent la forme pas à pas en suivant son contour.
- les descripteurs surfaciques.

Le codage en chaîne

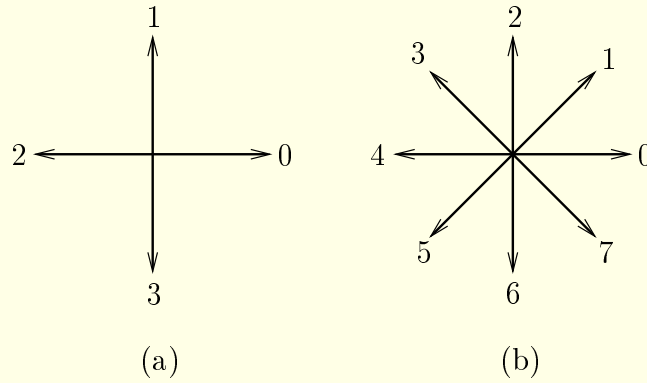


FIGURE 106: Directions en 4-connexité (a) et en 8-connexité (b).

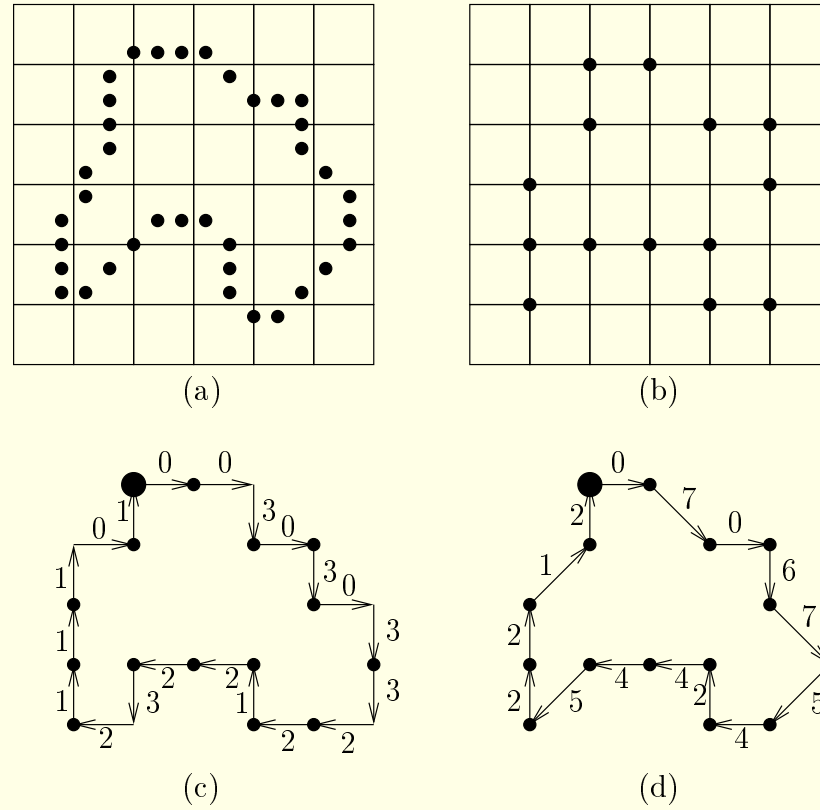


FIGURE 107: (a) Un contour, (b) contour après échantillonnage sur une grille, (c) codage en chaîne en 4-connexité et (d) codage en chaîne en 8-connexité.

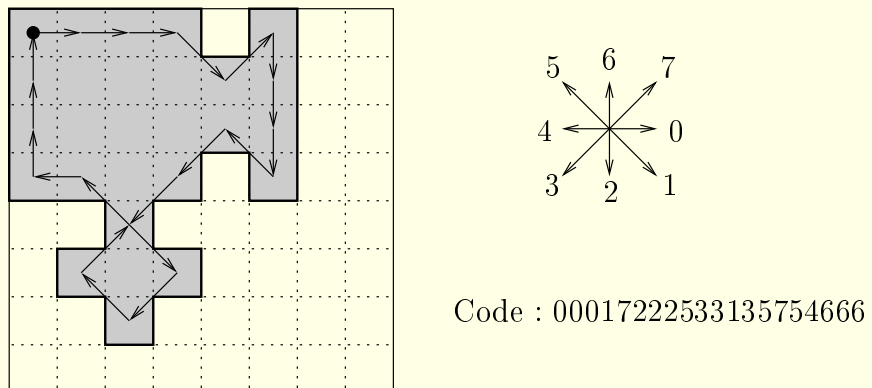


FIGURE 108: Contour avec des points de rebroussement.

Approximation polygonale

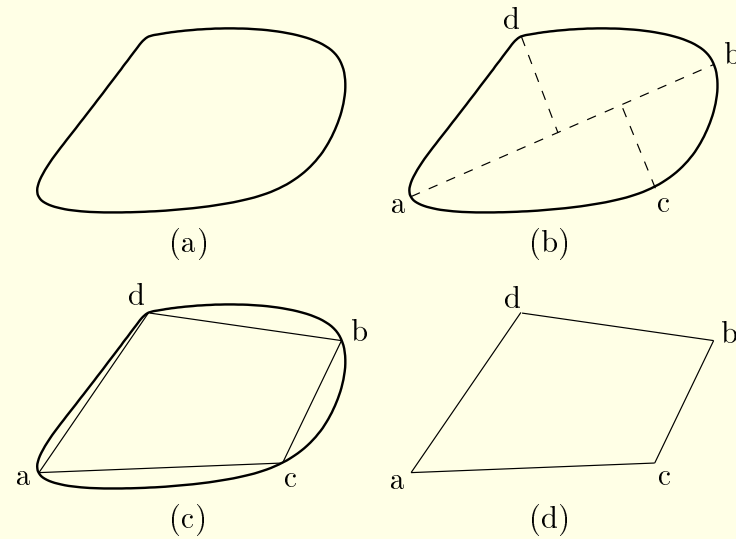


FIGURE 109: Approximation polygonale d'un contour.

Descripteur de Fourier

$$s[n] = x[n] + jy[n] \quad (240)$$

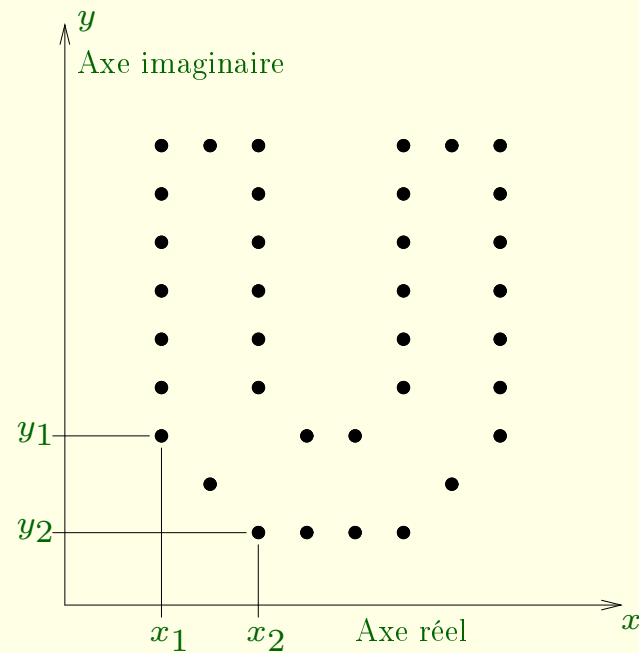


FIGURE 110: Représentation d'un contour comme une séquence de points complexes.

Définition.

La transformée de FOURIER discrète de ce signal est

$$\mathcal{S}[u] = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} s[n] e^{-2\pi j u n / N} \quad (241)$$

Les coefficients $\mathcal{S}[u]$ sont appelés descripteurs de FOURIER du contour.

Approximations.

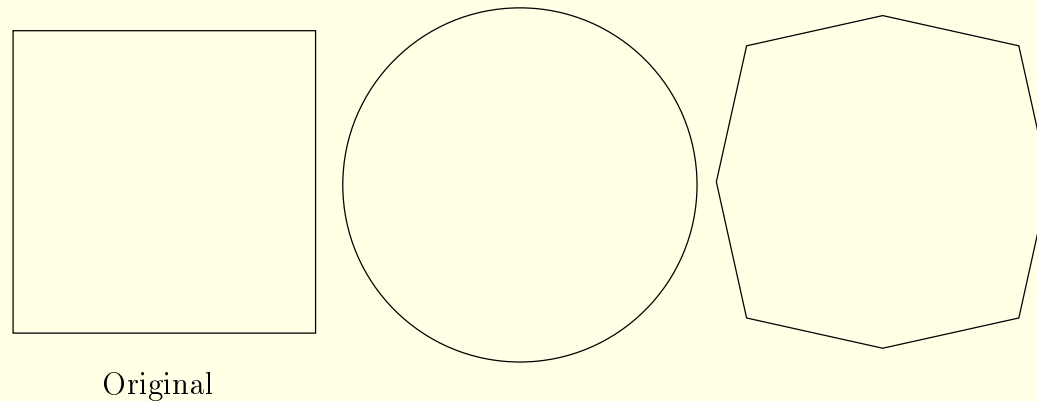


FIGURE 111: Forme originale et approximations du contour au moyen d'un nombre restreint de descripteurs de FOURIER.

Approximation d'une silhouette humaine



FIGURE 112: Forme originale et approximations du contour au moyen d'un nombre restreint de descripteurs de FOURIER.

L'arbre comme descripteur par éléments de surface

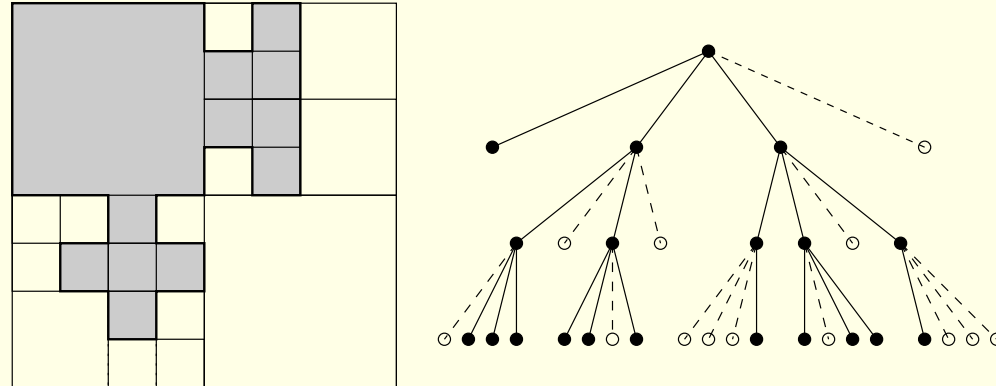


FIGURE 113: Descripteur de forme par arbre quaternaire.

Le squelette morphologique comme descripteur par éléments de surface

Définition intuitive du squelette

Considérons un ensemble continu X et sa frontière ∂X ; un point x de X appartiendra au *squelette* de X , noté $S(X)$, s'il existe un disque centré en x inclus dans X et touchant ∂X en deux points au moins.

Plus intuitivement le squelette peut être défini comme le lieu des centres des boules maximales B contenues dans X .

Ces deux définitions ne sont pas tout à fait équivalentes mais elles ont la même fermeture topologique dans $\mathbb{R}^2$.

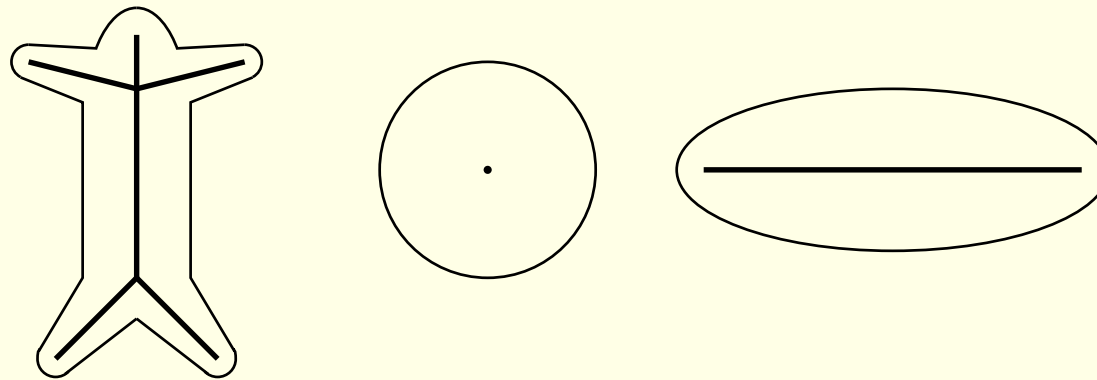


FIGURE 114: Exemple de squelettes de plusieurs ensembles.

Difficulté

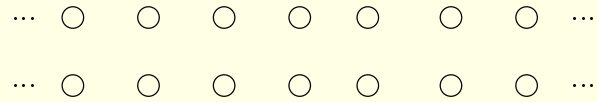


FIGURE 115: Que vaut le squelette de X ? Idéalement, il se situe au milieu. En pratique, en haut ou en bas.

Difficulté

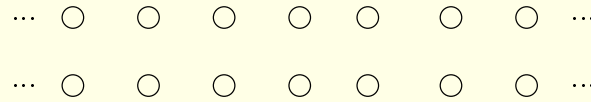


FIGURE 115: Que vaut le squelette de X ? Idéalement, il se situe au milieu. En pratique, en haut ou en bas.

Propriétés d'une transformée par squelette

- La squelettisation est une opération ni croissante ni décroissante. En effet, $X \subseteq Y$ n'entraîne généralement pas que $S(X) \subseteq S(Y)$ ou $S(Y) \subseteq S(X)$.
- La squelettisation est une opération anti-extensive : $S(X) \subseteq X$.
- La squelettisation est une transformation idempotente : $S(S(X)) = S(X)$.

Taille morphologique

Définition 44. Soit B un élément structurant dont la taille est fixée à 1 arbitrairement. On définit un espace continu d'ensembles par

$$rB = \{rb | b \in B\} \quad r \geq 0 \quad (242)$$

où r est un paramètre continu.

Taille morphologique

Définition 44. Soit B un élément structurant dont la taille est fixée à 1 arbitrairement. On définit un espace continu d'ensembles par

$$rB = \{rb | b \in B\} \quad r \geq 0 \quad (242)$$

où r est un paramètre continu.

Homothétie d'un ensemble discret.

Définition 45. Soit B , un ensemble discret, fini de $\mathbb{Z}^2$ et de taille unitaire. On crée une famille d'objets binaires générée par B et caractérisée par le paramètre $n = 0, 1, \dots$ par

$$nB = \underbrace{B \oplus \dots \oplus B}_{n-1 \text{ dilatations}} \quad (243)$$

Dans cette expression, nB est obtenu par $(n - 1)$ dilatations successives. Si $n = 0$, $0B = \{(0, 0)\}$ par convention. Notons au passage que $nB \oplus mB = (n + m) \oplus B$ pour tout n, m .

Théorème 3. Soit $\partial(B)$ la frontière du fermé B de $\mathbb{R}^2$. Alors

$$\partial(B) \oplus B = B \oplus B \quad (244)$$

Dès lors,

$$nB = \underbrace{B \oplus \dots \oplus B}_{n-1 \text{ dilatations}} = B \oplus \underbrace{\partial(B) \oplus \dots \oplus \partial(B)}_{n-2 \text{ dilatations}} \quad (245)$$

Filtres multirésolution

Définition 46. *On définit l'ouverture et la fermeture à multirésolution par*

$$X \circ nB = (X \ominus nB) \oplus nB \quad (246)$$

$$X \bullet nB = (X \oplus nB) \ominus nB \quad (247)$$

Comme $(X \ominus B) \ominus C = X \ominus (B \oplus C)$ et $(X \oplus B) \oplus C = X \oplus (B \oplus C)$,

$$X \circ nB = \underbrace{[(X \ominus B) \ominus B \dots \ominus B]}_{n \text{ érosions}} \underbrace{\oplus B \oplus B \dots \oplus B}_{n \text{ dilatations}} \quad (248)$$

Par définition,

$$X \circ nB = \bigcup_{(nB)_z \subseteq X} (nB)_z \quad (249)$$

Définition formelle du squelette

Définition 47. *Le squelette d'un ensemble X s'obtient par l'union de sous-ensembles S_n , chacun de ces sous-ensembles étant l'ensemble des points de référence de copies de nB incluses dans X mais non incluses dans une copie de $(n + 1)B$ contenue dans X*

$$S_n(X) = (X \ominus nB) \setminus ([X \ominus nB] \circ B), \quad n = 0, 1, \dots, N \quad (250)$$

$$S(X) = \bigcup_{n=0}^N S_n(X) \quad (251)$$

où B est un carré de 2×2 pixels en trame carrée et un hexagone en trame hexagonale.

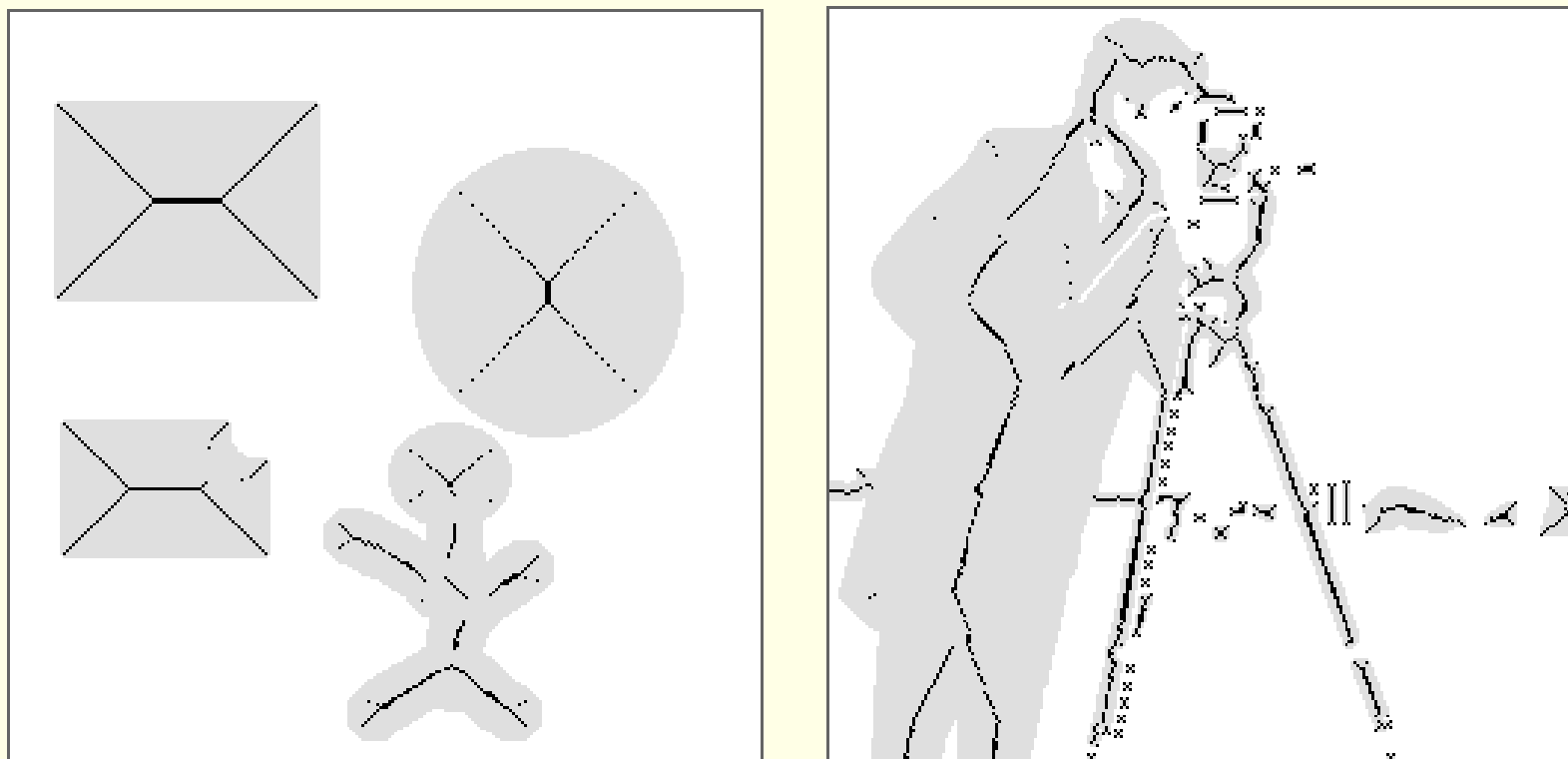


FIGURE 116: Exemples de squelette tel que calculé par la formule de LANTUÉJOUL.

Inverse

$$\pi(X) = X = \bigcup_{n=0}^N [S_n(X) \oplus nB] \quad (252)$$

$$\pi(X) = [[[S_N(X) \oplus B] \cup S_{N-1}(X)] \oplus B \cup S_{N-2}(X) \dots] \oplus B \cup S_0(X) \quad (253)$$

Autres formules

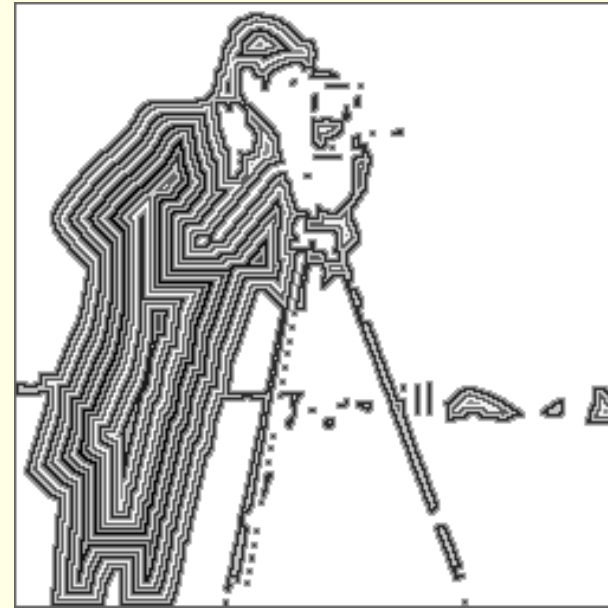
Définition 48. *L'opérateur de fonction distance $\phi(X)$ d'un ensemble $X \subseteq \mathcal{E}$ est la fonction définie par*

$$[\phi(X)](h) = d(X^c, h) \quad (254)$$

avec la convention que $d(\emptyset, h) = +\infty$ pour $h \in \mathcal{E}$.



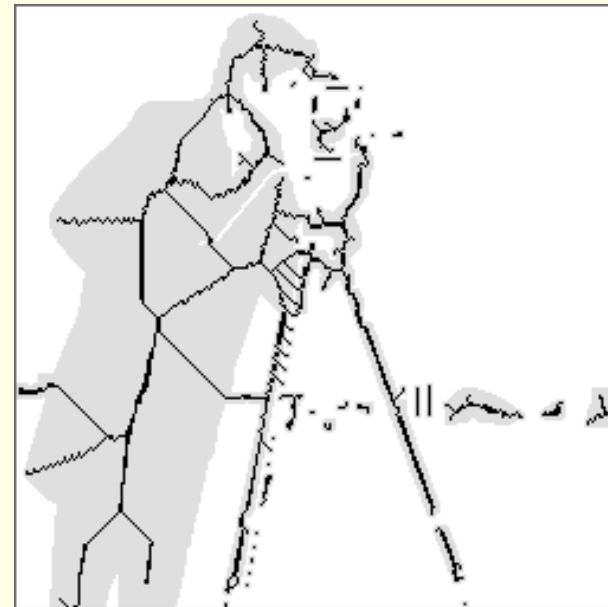
(a) Image binaire originale



(b) Courbes de niveau de la fonction distance



(c) Position des maxima locaux de (b)



(d) Squelette par boules maximales

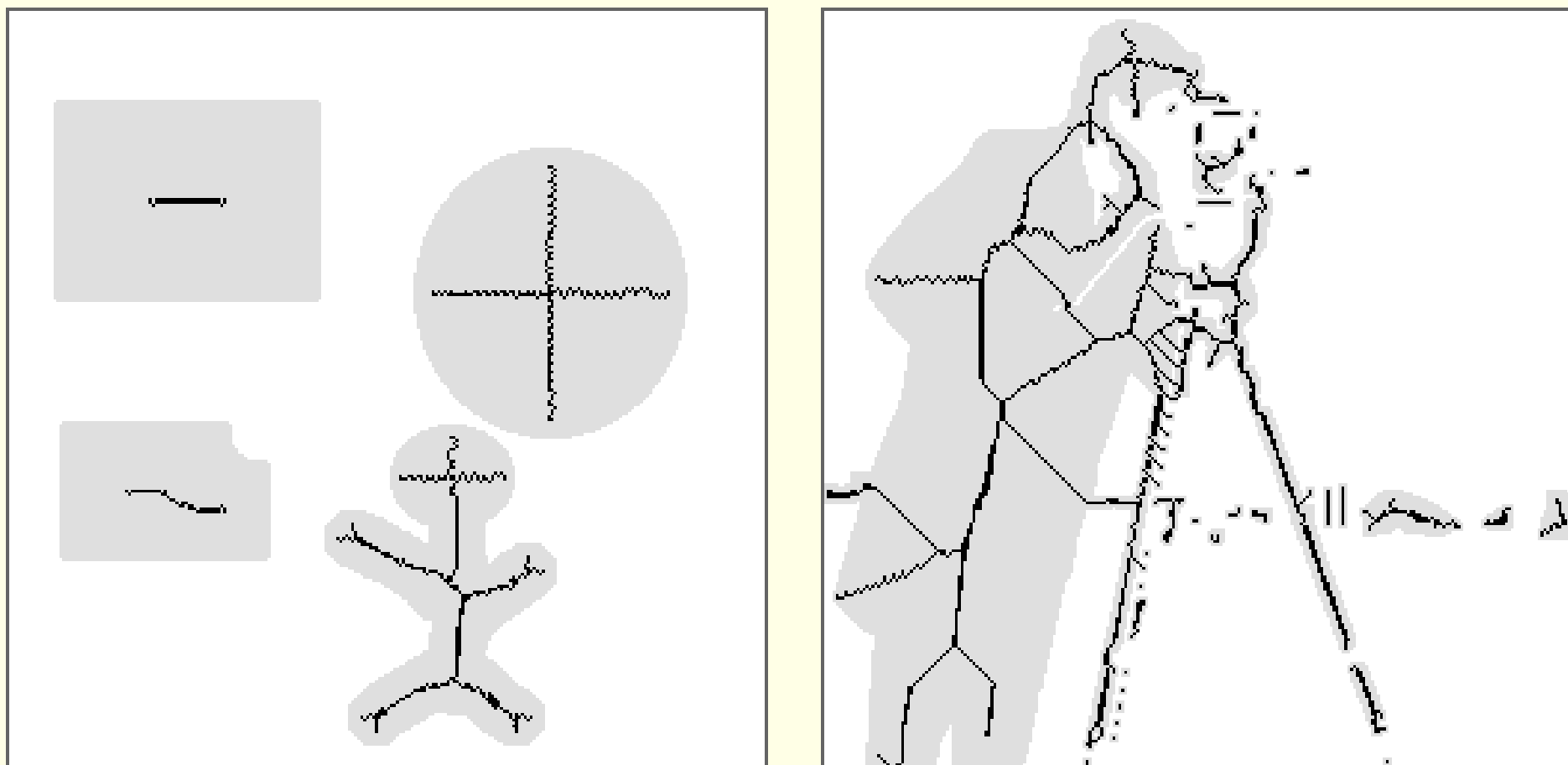


FIGURE 118: Exemples de squelettes tels que calculés par l'algorithme de VINCENT.

Autres descripteurs par éléments de surface

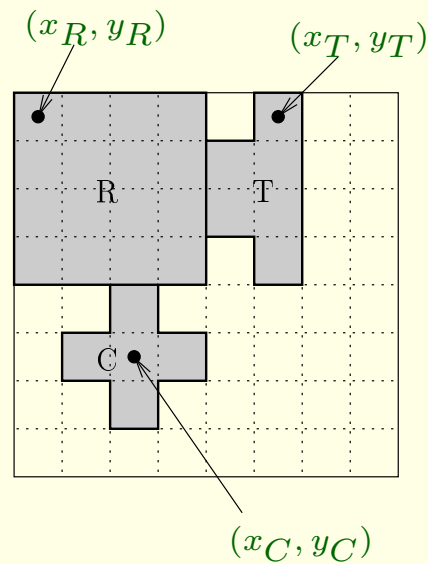


FIGURE 119: Description d'une forme comme l'union d'un rectangle, d'un triangle et d'un losange.

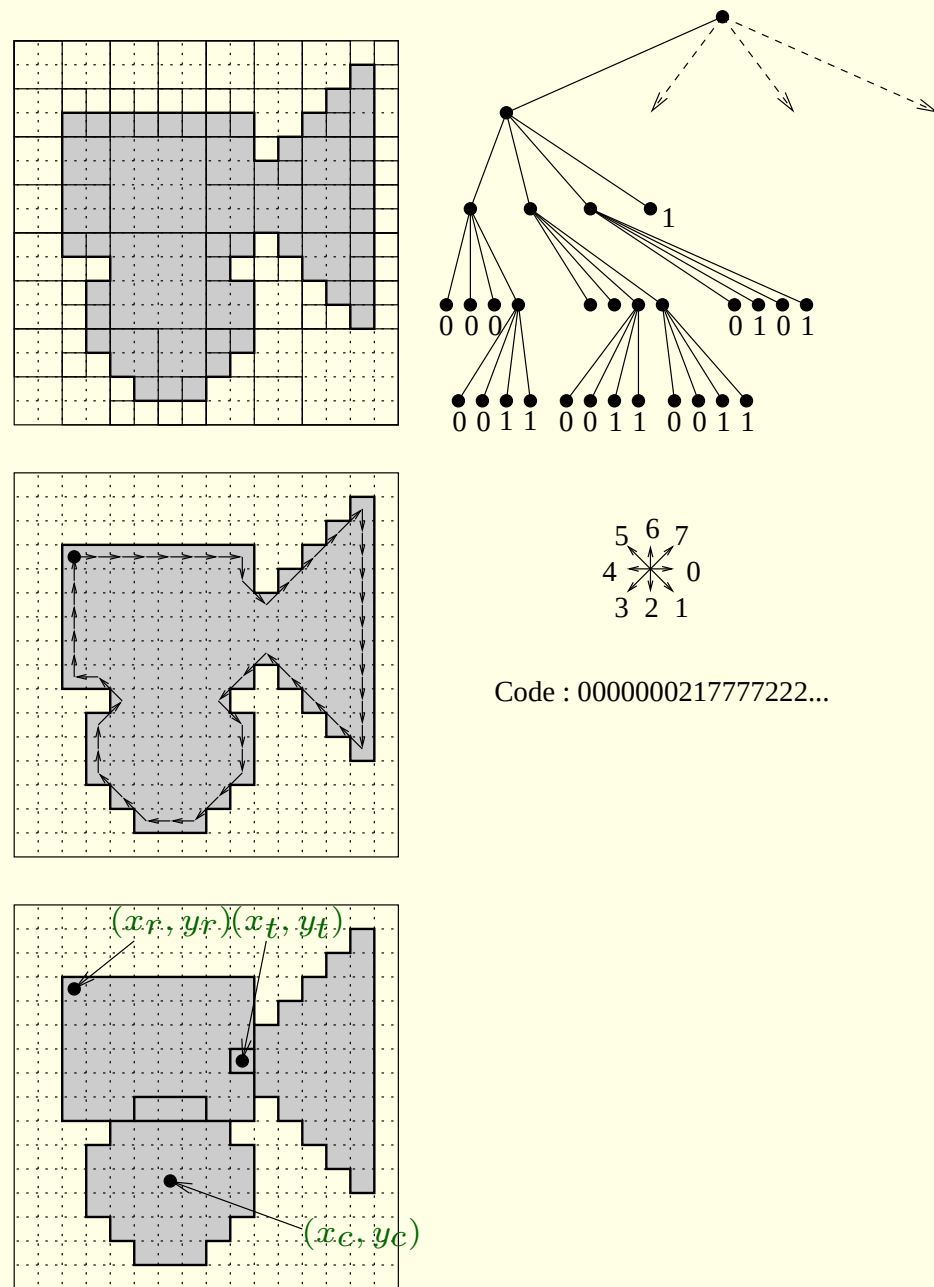


FIGURE 120: Comparaison de plusieurs descripteurs de formes.

Mesures

Mesures géométriques de base

- Périmètre
- Aire
- Caractéristique d'Euler-Poincaré

Il existe une relation fondamentale entre le nombre de composantes connexes C et le nombre de trous T . On définit le nombre d'EULER E par

$$E = C - T \quad (255)$$

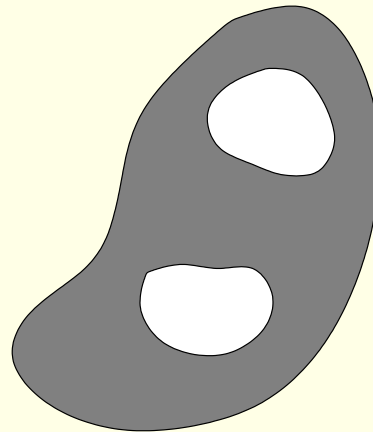


FIGURE 121: Nombre d'EULER : $E = 1 - 2 = -1$.

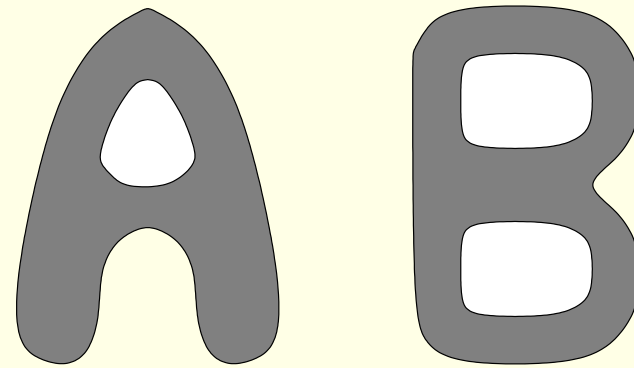


FIGURE 122: Deux lettres de nombre d'EULER différent.

Indices de forme

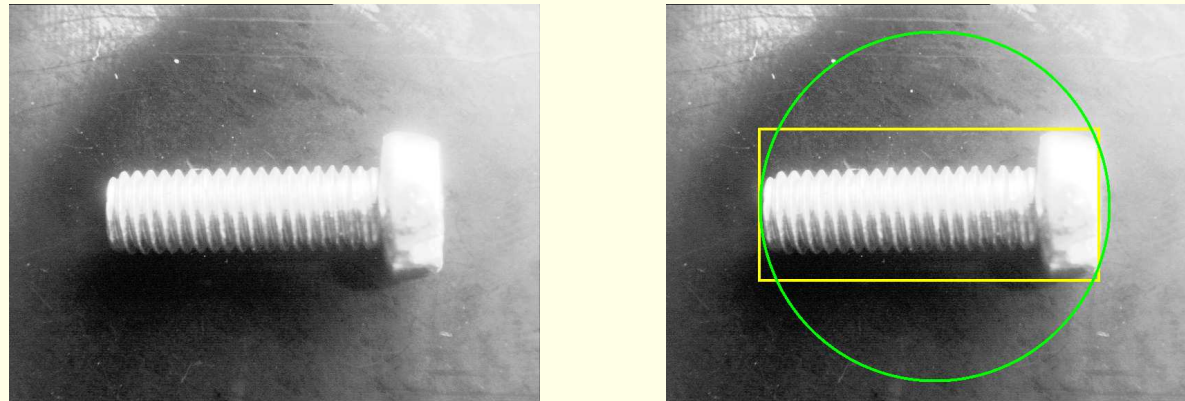


FIGURE 123: Un objet et différentes figures de référence exinscrites.

Nom	Expression
Facteur de forme	$\frac{4\pi A(X)}{P(X)^2}$
Circularité	$\frac{4A(X)}{\pi D_{max}^2}$
Rapport d'aspect	$\frac{D_{max}}{D_{min}}$

TABLE 5: Quelques indices de forme.

Déficit : l'indice d'écart au cercle inscrit (de rayon R)

$$IR(X) = 1 - \frac{\pi R^2}{A(X)} \quad (256)$$

Moments

Les moments d'une image sont des descripteurs courants en reconnaissance de caractères.

Définition 49. *Le moment d'ordre $p + q$ de la fonction $f(x, y)$ est*

$$m_{pq} = \sum_x \sum_y x^p y^q f(x, y) \quad (257)$$

On peut centrer ces moments en déduisant la moyenne, ce qui fournit les moments centrés

$$\mu_{pq} = \sum_x \sum_y (x - m_{10})^p (y - m_{01})^q f(x, y) \quad (258)$$

ou encore normaliser leur valeurs

$$\eta_{pq} = \frac{\mu_{pq}}{\mu_{00}^{\frac{p+q}{2}}} \quad (259)$$

Mesures morphologiques et granulométries

Proposition 2. *Si B_i , $i > 0$, est une collection d'éléments structurants tels que B_i est égal à son ouvert au moyen de tout élément B_j si $i \geq j$, alors les ouvertures $\alpha_i = \alpha_{B_i}$ satisfont la propriété de semi-groupe*

$$\alpha_i \alpha_j = \alpha_j \alpha_i = \alpha_i, \quad i \geq j \quad (260)$$

Une collection de telles ouvertures α_i , $i > 0$ est appelée granulométrie. La mesure de LE-BESGUE des ensembles ouverts –l'aire en pratique– $\alpha_i(X)$ définit une fonction décroissante de $i > 0$, appelée courbe granulométrique.

Convexité

Définition 50. *[Convexité] Un ensemble $X \subseteq \mathcal{E}$ est convexe si $rx + (1 - r)y \in X$ pour tout $x, y \in X$ avec $r \in [0, 1]$.*

Autrement dit, toute droite reliant deux points quelconques de X doit être entièrement contenue dans X .

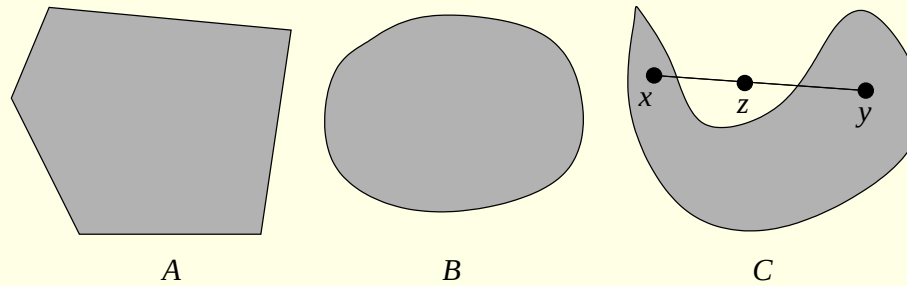


FIGURE 124: A , B sont convexes; C ne l'est pas.

Enveloppe convexe

La notion de convexité permet de définir celle d'enveloppe convexe.

Définition 51. *L'enveloppe convexe d'un ensemble $X \subseteq \mathcal{E}$, notée $co(X)$, est l'intersection de tous les ensembles convexes contenant X .*

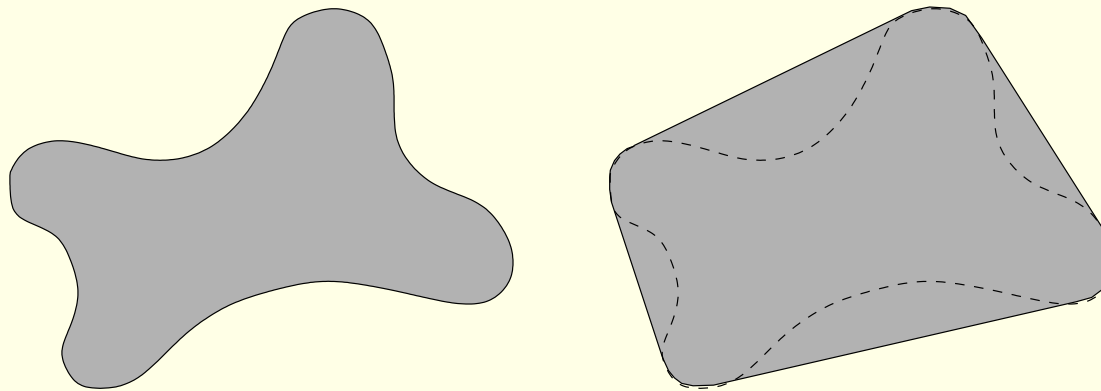


FIGURE 125: Un ensemble X et son enveloppe convexe.

Proposition 3. *Soient $X, Y \subseteq \mathcal{E}$*

$$co(X \oplus Y) = co(X) \oplus co(Y) \quad (261)$$

Table des matières

- Introduction et généralités
- Transformations unitaires
- Filtrage linéaire et déconvolution
- Morphologie mathématique
- Filtrage non-linéaire
- Détection de traits caractéristiques et détection de contours
- Texture
- Rehaussement et restauration
- Étude de la forme
- Segmentation d'images
- Codage d'images
- Applications industrielles

Segmentation d'images

- Présentation du problème
- Segmentation par seuillage
- Segmentation par détection de régions
 - Ligne de partage des eaux

Présentation du problème

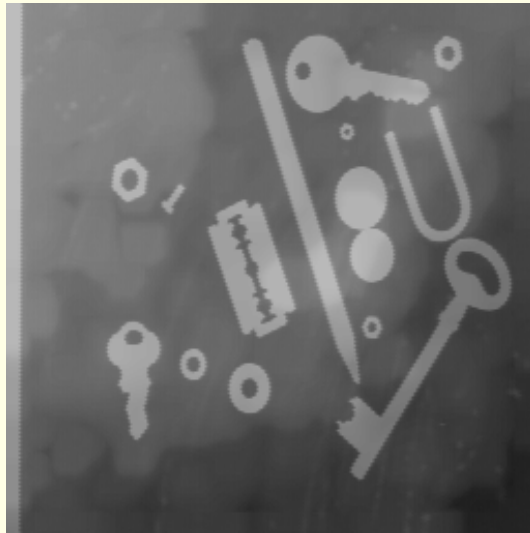
Définition 52. *En général, on considère que l'objectif de la segmentation revient à construire une série de régions $R_1, \dots, R_n$ telles*

$$\mathcal{E} = \bigcup_{i=1}^n R_i \quad \text{et} \quad \forall i \neq j, R_i \cap R_j = \emptyset \quad (262)$$

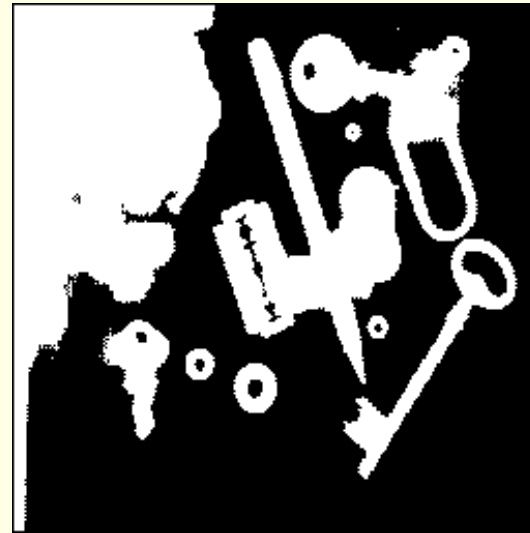
Définition 53. *Formellement, la segmentation s'apparente à un opérateur ϕ agissant sur l'image I et fournissant, par exemple, une image binaire $\phi(I)$ qui différencie les points des contours des objets.*

La segmentation, comme la plupart des techniques de traitement d'images, peut être abordée sous l'angle local ou global.

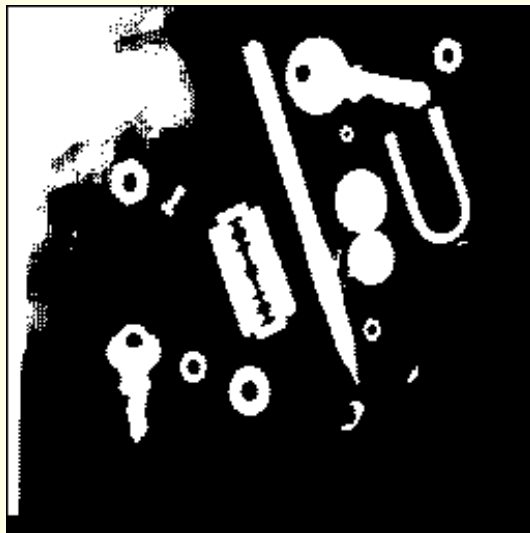
Segmentation par seuillage



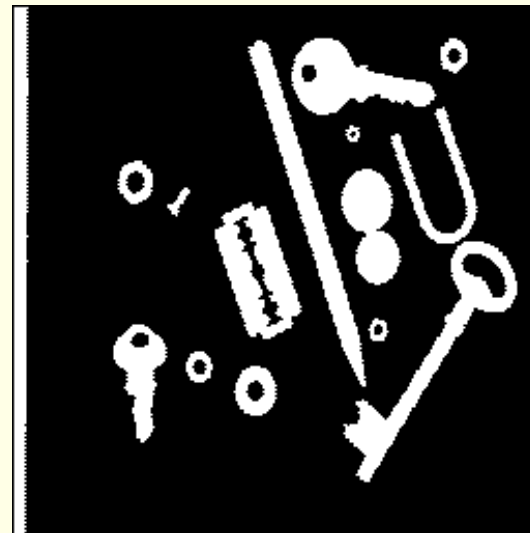
(a) Image originale



(b) Seuillage à 110



(c) Seuillage à 128



(d) Seuillage après égalisation

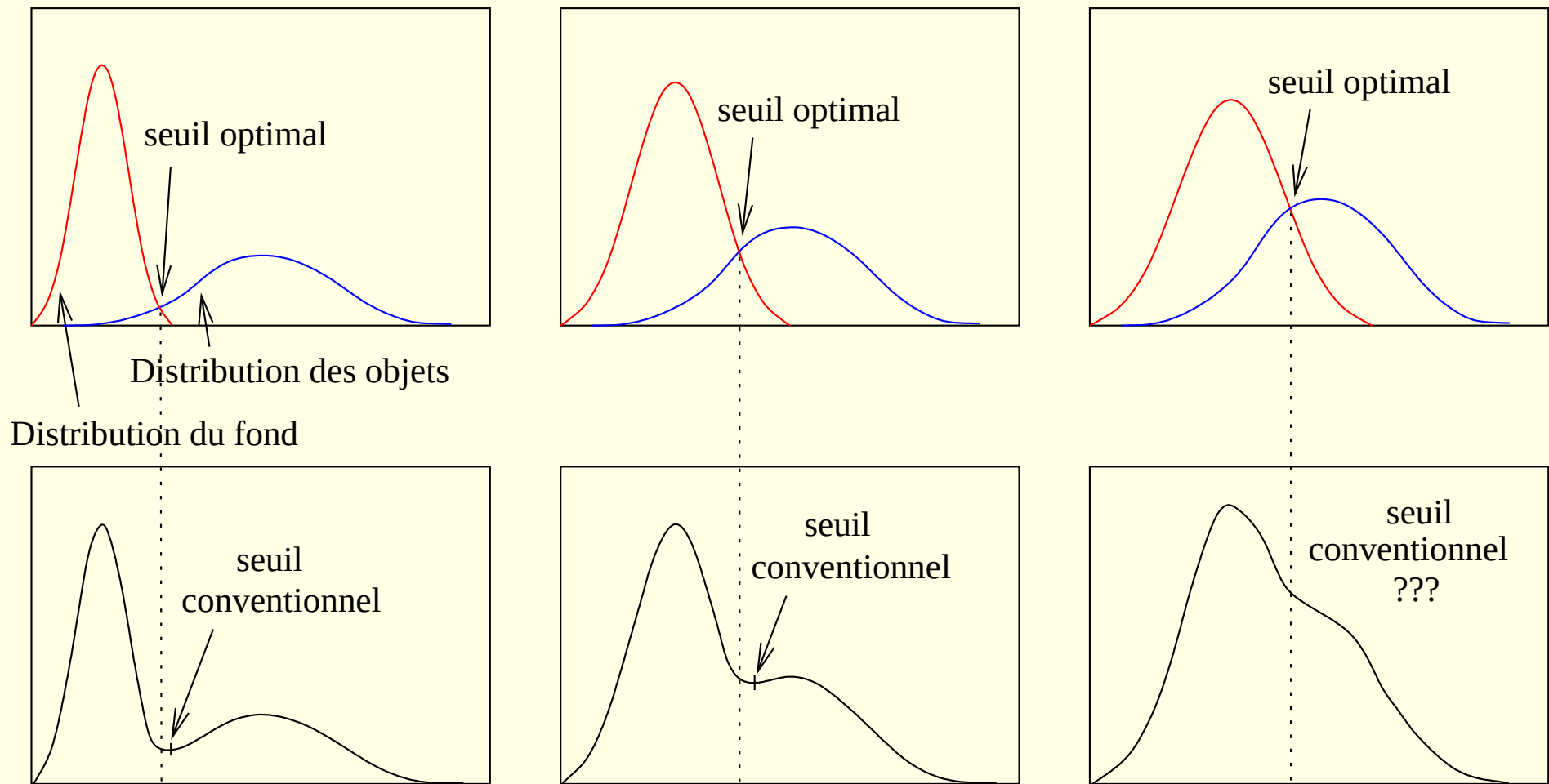


FIGURE 126: Seuillage optimal.

Segmentation par détection de régions : ligne de partage des eaux (LPE)

En termes imagés, on associe un bassin $\mathcal{C}(M)$ à chaque minimum M .

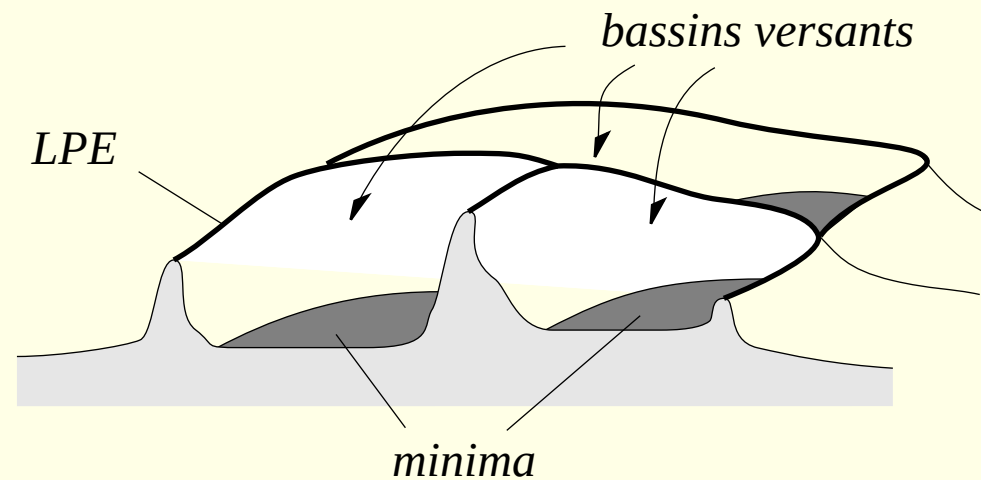


FIGURE 127: Minima, bassins versants et ligne de partage des eaux.

Expression formelle d'un algorithme de segmentation par ligne de partage des eaux

Démarche :

- le cas des images binaires est introduit en premier lieu.
- définition de chemin et distance géodésiques
- description d'un algorithme par empilement d'images seuillées

Chemin et distance géodésiques

Soit X une image binaire.

Définition 54. *[Chemin géodésique] Un chemin géodésique de longueur l entre deux points s et t est une famille de $l + 1$ pixels $x_0 = s, x_1, \dots, x_l = t$ telle que*

$$\forall i \in [0, l], x_i \in X \quad \text{et} \quad \forall i \in [0, l], x_{i-1}, x_i \text{ sont voisins} \quad (263)$$

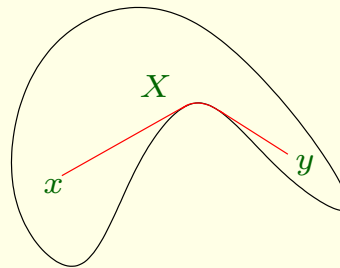


FIGURE 128: Le plus court chemin géodésique entre x et y .

Chemin et distance géodésiques

Soit X une image binaire.

Définition 54. [*Chemin géodésique*] Un chemin géodésique de longueur l entre deux points s et t est une famille de $l + 1$ pixels $x_0 = s, x_1, \dots, x_l = t$ telle que

$$\forall i \in [0, l], x_i \in X \quad \text{et} \quad \forall i \in [0, l], x_{i-1}, x_i \text{ sont voisins} \quad (263)$$

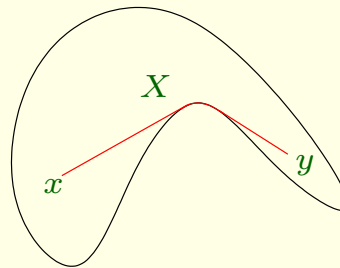


FIGURE 128: Le plus court chemin géodésique entre x et y .

Définition 55. [*Distance géodésique*] La distance géodésique entre les points s et t est la longueur du plus court chemin géodésique reliant s à t ; elle est infinie si un tel chemin n'existe pas.

Algorithme de construction du squelette par zone d'influence

Notations

La zone d'influence de l'ensemble Z_i est notée $ZI(\textit{domaine} = X, \textit{centre} = Z_i)$ et sa frontière $FR(\textit{domaine} = X, \textit{centre} = Z_i)$.

Le squelette par zone d'influence (SZI) s'obtient aisément par l'algorithme suivant :

- dans un premier temps, on délimite les zones Z_i des régions de base ;
- pour les autres pixels, il suffit d'itérer la démarche suivante jusqu'à stabilisation du processus : si un pixel a un voisin indicé i , alors ce pixel prend le même indice ; les points qui n'ont pas de voisin ou ceux qui en ont deux sont laissés inchangés ;
- au terme de ce processus, les pixels sont attribués à l'une ou l'autre zone de départ Z_i .

Exemple

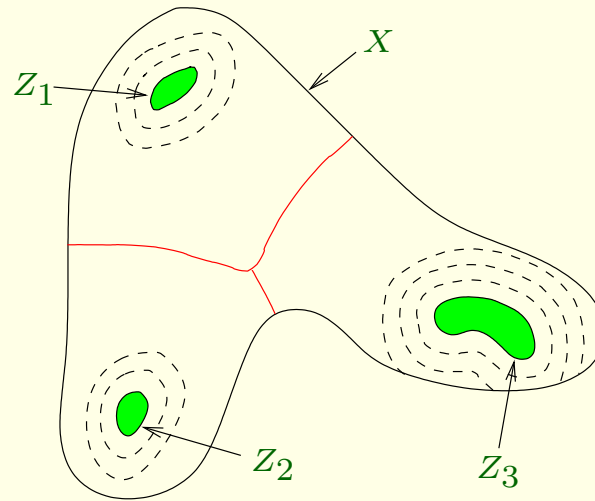


FIGURE 129: Squelette géodésique.

Images en niveaux de gris

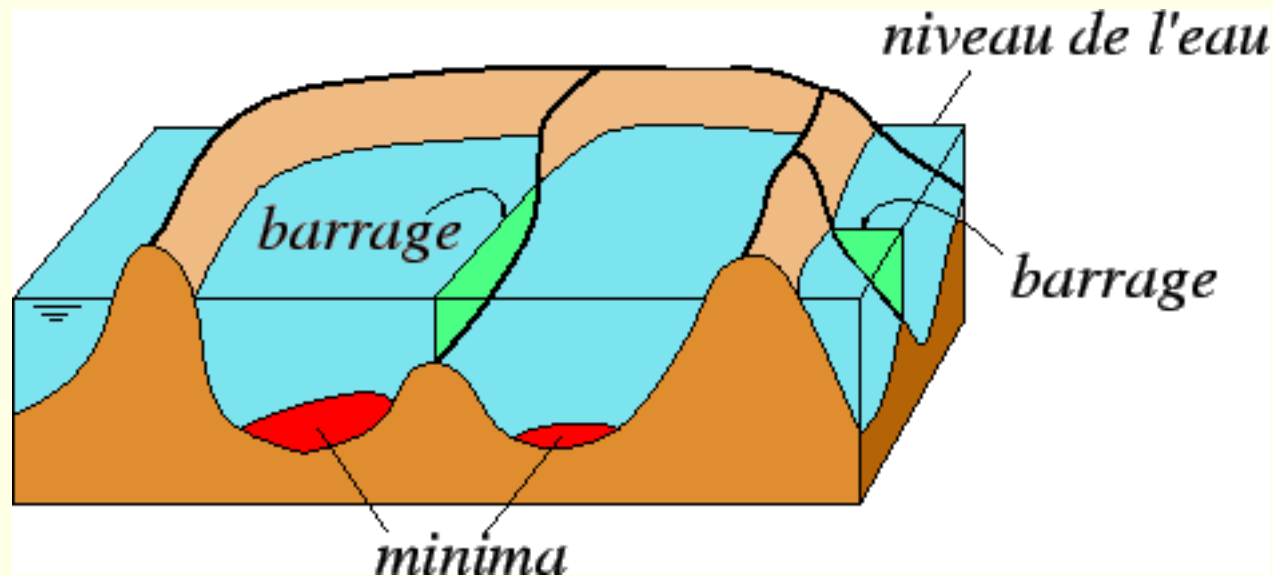


FIGURE 130: Construction d'un barrage au raccord de deux bassins versants.

Notations :

- f est la fonction étudiée.
- h_{min} et h_{max} sont les valeurs extrêmes de f sur son domaine de définition.
- $T_h(f) = \{x \in \text{dom } f : f(x) \leq h\}$ est l'ensemble constitué par un seuil h .
- M_i sont les minima et $\mathcal{C}(M_i)$ les bassins correspondants.

Construction par étape

Soit $\mathcal{C}_h(M_i)$ la partie du bassin M_i rempli au temps algorithmique h . Alors

$$\mathcal{C}_h(M_i) = \mathcal{C}(M_i) \cap T_h(f) \quad (264)$$

Dans cette expression, $\mathcal{C}(M_i)$ est l'inconnue.

Initialisation :

- $\mathcal{C}_{h_{min}}(M) = T_{h_{min}}(f)$; l'initialisation considère que tous les points minima sont des réservoirs potentiels.

Construction

$$\forall h \in [h_{min} + 1, h_{max}] : \mathcal{C}_h(M) = ZI_h \cup Min_h \quad (265)$$

avec

- ZI_h = zone d'influence (de domaine $T_h(f)$) composée des centres contenus dans $\mathcal{C}_{h-1}(M)$ – c'est durant cette étape que seront déterminés les barrages traduits en contours ;
- Min_h est l'ensemble des points de $T_h(f)$ qui, après le processus de recherche de zones d'influence n'ont toujours pas de voisin. Il s'agit de nouveaux minima, centres de nouvelles zones d'influence.

Marquage

Le marquage consiste à sélectionner certains minima seulement.

Les avantages de la ligne de partage des eaux par rapport à d'autres techniques de segmentation se résument en définitive à

- la possibilité de travailler sur base d'une image de gradient quelconque,
- la possibilité d'effectuer une pré-sélection par un marquage adéquat.