

# Analyse et conception des systèmes de télécommunications

M. VAN DROOGENBROECK

Septembre 2012 (version 5.182)

# Détails pratiques

- **Examen**
  - oral (obligatoire)
    - à livre fermé
- **Notes de cours**
  - disponibles à l'AEEs
  - version HTML en ligne à l'adresse <http://www.ulg.ac.be/telecom>
  - version PDF disponible sur le site <http://orbi.ulg.ac.be>
- **Transparents**
  - version PDF en ligne à l'adresse <http://orbi.ulg.ac.be>

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic
- Étude des supports de transmission
  - Transmission dans le réseau téléphonique
  - Ingénierie des radiocommunications mobiles terrestres
- Fonctionnement du système de positionnement GPS

# Théorie de l'estimation et estimation spectrale

- Rappels de définitions et nouvelles définitions
- Notion de spectre
- Observation du spectre
- Estimation spectrale

# Rappels

- Moyenne temporelle

$$\mu_X(T) = \frac{1}{2T} \int_{-T}^T x(t) dt \quad (1)$$

- Moyenne statistique

$$\mu_X(t) = E \{X(t)\} \quad (2)$$

- Autocorrélation

$$\Gamma_{XX}(t_1, t_2) = E \{X(t_1)X(t_2)\} \quad (3)$$

## Rappels (suite)

- Dans la mesure où le processus est stationnaire au sens large, on a

$$\mu_X(t) = \mu_X = \text{constante} \quad (4)$$

$$\Gamma_{XX}(t_1, t_2) = \Gamma_{XX}(t_2 - t_1) = \Gamma_{XX}(\tau) \quad (5)$$

- Densité spectrale de puissance

$$\gamma_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{XX}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (6)$$

## Transformées de Fourier discrète

**Définition 1.** *[Transformée de Fourier à temps discret] La transformée de FOURIER à temps discret (dtFT) de cette séquence est définie par*

$$\mathcal{X}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x[nT_s] e^{-2\pi j f n T_s} \quad (7)$$

Il ne s'agit ni plus ni moins que de la transformée de FOURIER du signal échantillonné.

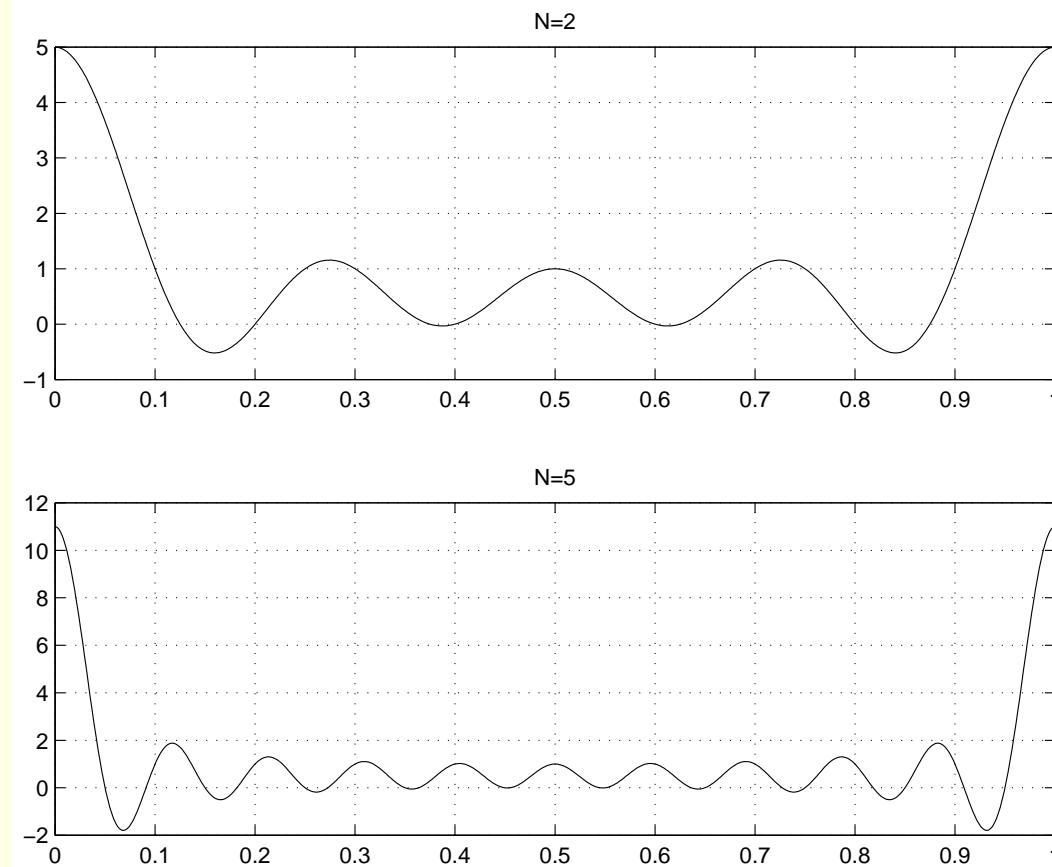
Cette fonction est continue et périodique de période  $f_s = \frac{1}{T_s}$ ; la connaissance de cette fonction sur l'intervalle  $[0, f_s[$  suffit donc.

Il est d'usage de définir une fréquence normalisée ou fréquence réduite  $F$  par

$$F = \frac{f}{f_s} \quad (8)$$

de sorte que  $F$  parcourt l'intervalle  $[0, 1[$  ou  $[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}[$ .

# Transformées de Fourier d'un signal rectangulaire ( $N = 2$ et $N = 5$ )



# Transformée de Fourier discrète

Définition 2. *[Transformée de Fourier discrète (DFT)]*

$$\mathcal{X}(F_k) = \sum_{n=0}^{N-1} x[n]e^{-2\pi j F_k n}, \quad F_k = \frac{k}{N}, \quad k \in \{0, \dots, N-1\} \quad (9)$$

Proposition 1. *[Égalité de Parseval]*

$$\sum_{n=0}^{N-1} \|x[n]\|^2 = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \|\mathcal{X}(F_k)\|^2, \quad F_k = \frac{k}{N} \quad (10)$$

# Exemple de transformée de Fourier

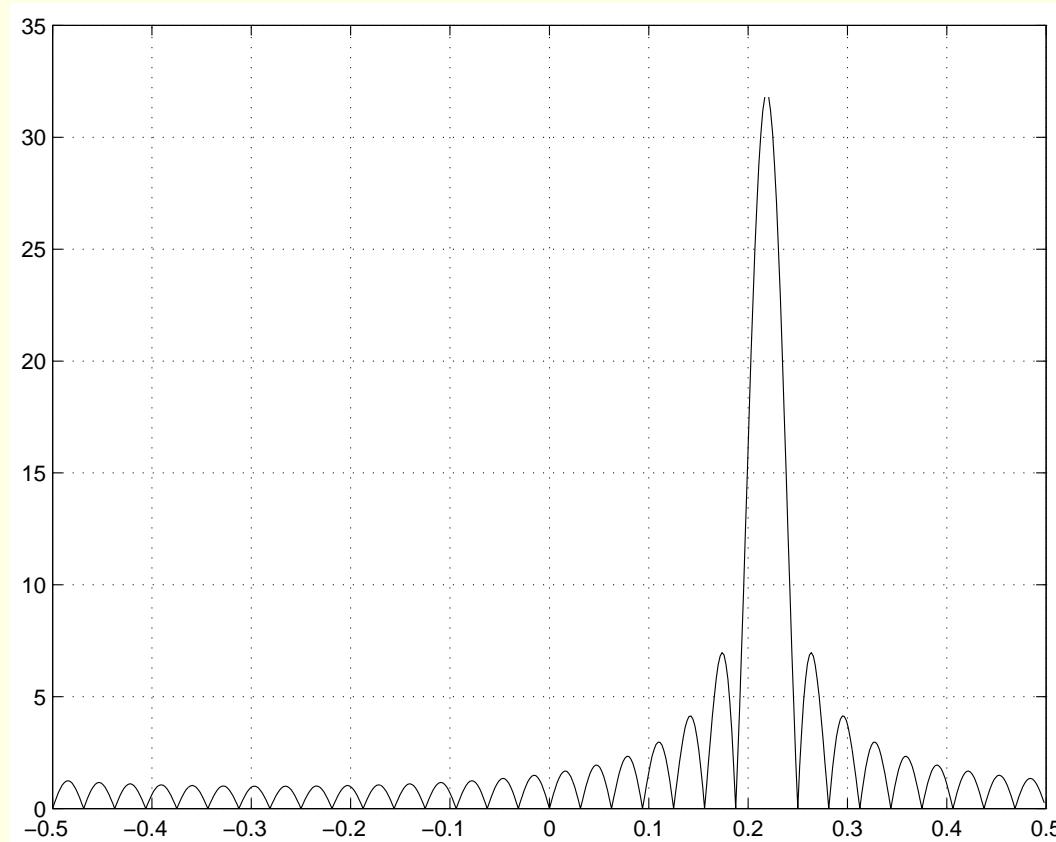


FIGURE 1: Transformée de FOURIER à temps discret de l'exponentielle complexe  $f_0 = \frac{7}{32}$  avec  $N = 32$ .

# Échantillonnage de la transformée de Fourier (I)

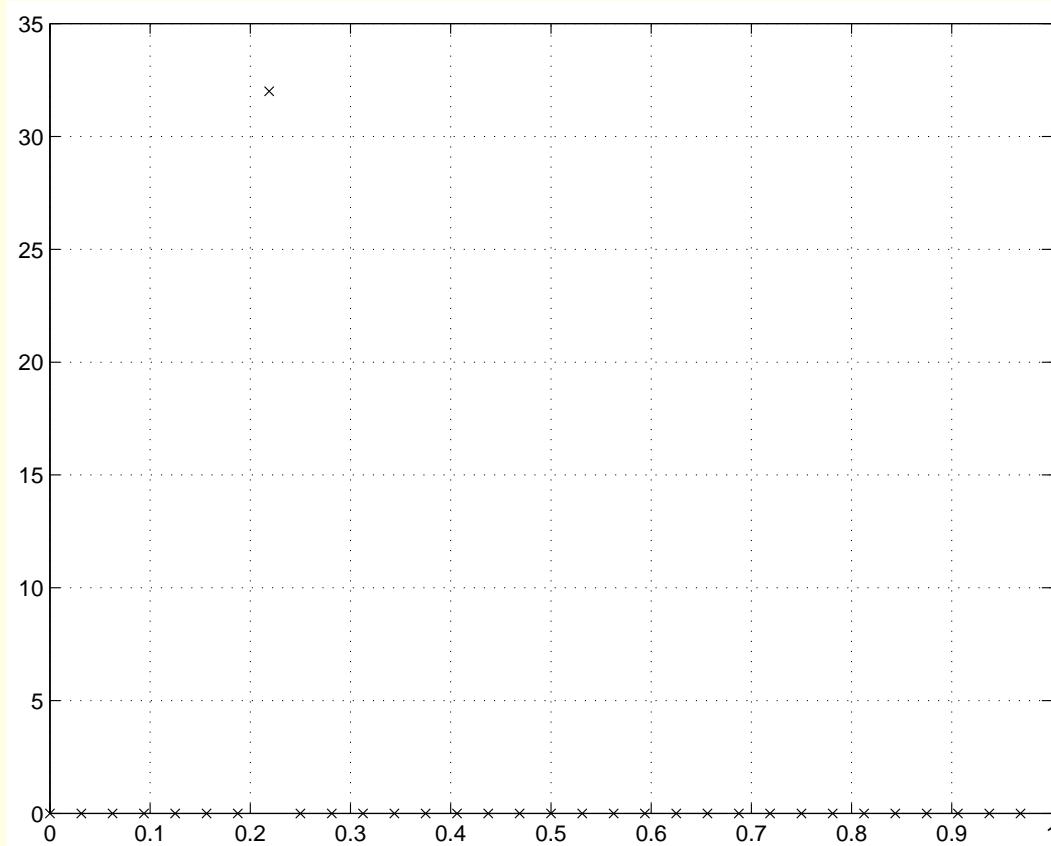


FIGURE 2: Transformée de FOURIER discrète de l'exponentielle complexe  $f_0 = \frac{7}{32}$  avec  $N = 32$ .

## Échantillonnage de la transformée de Fourier (II)

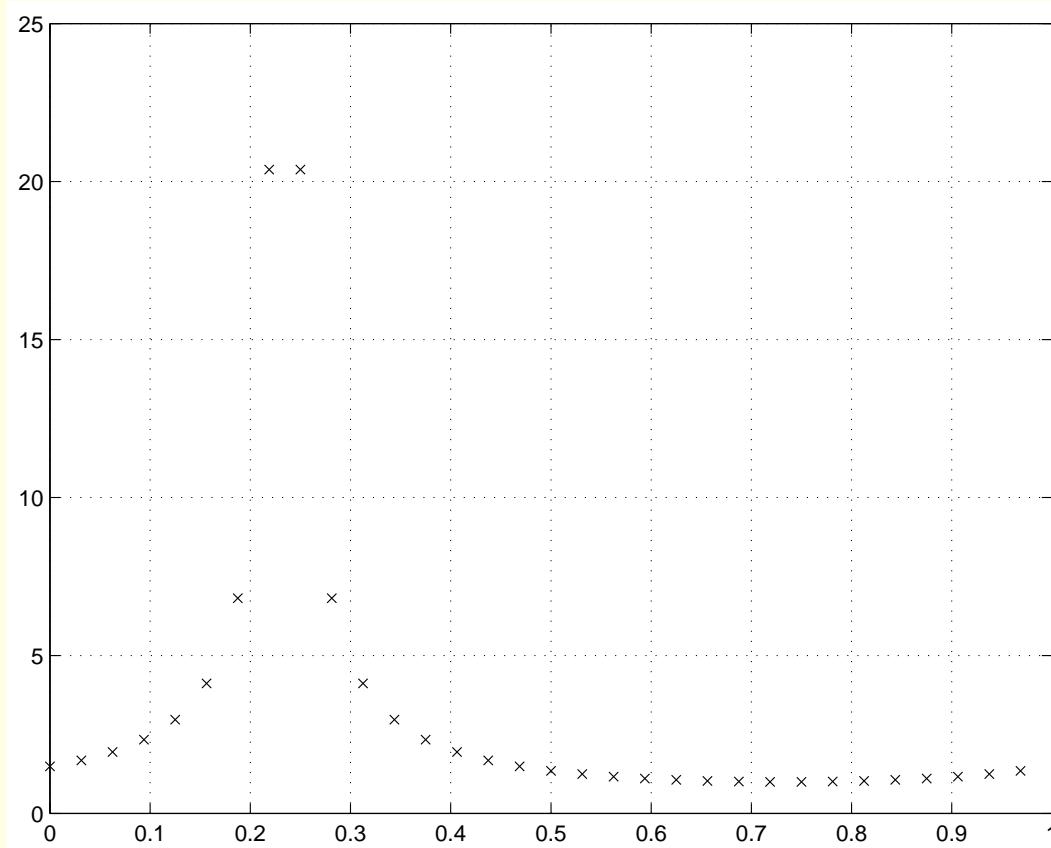


FIGURE 3: Transformée de FOURIER discrète de l'exponentielle complexe  $f_0 = \frac{7,5}{32}$  avec  $N = 32$ .

# La transformée de Fourier est un opérateur global

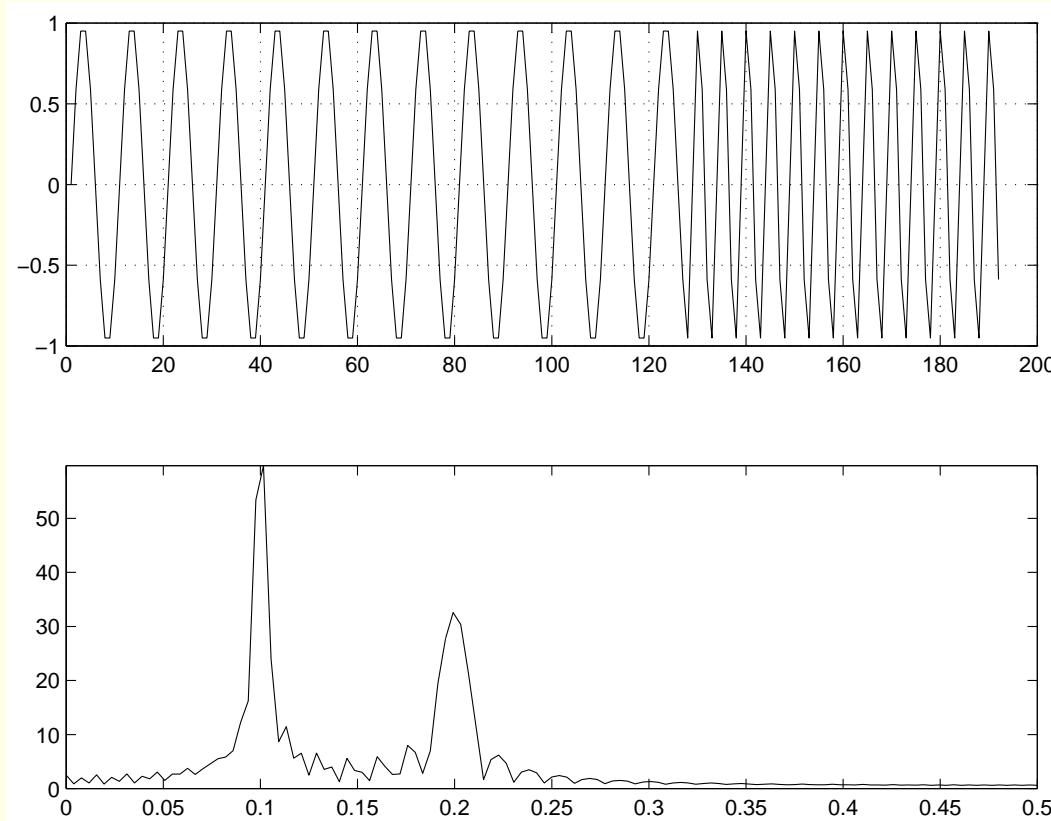


FIGURE 4: Deux portions de sinusoïdes et le spectre correspondant.

# Transformée de Fourier à fenêtre glissante

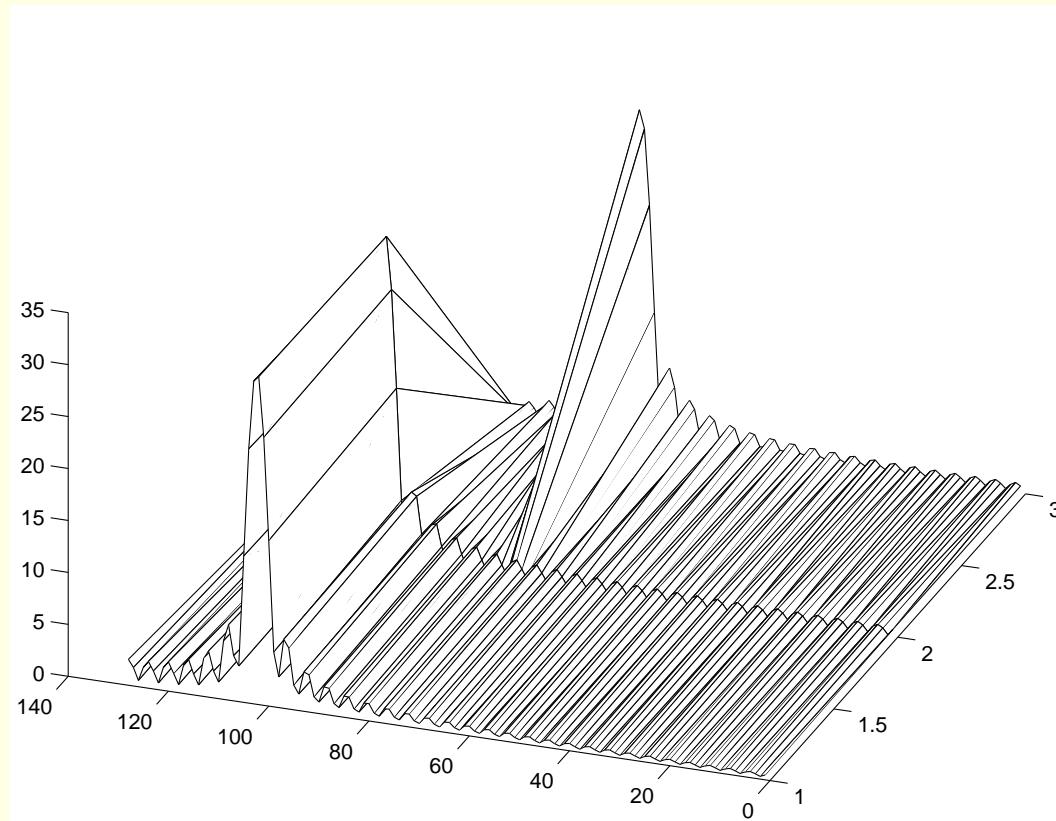


FIGURE 5: Deux portions de sinusoïdes et le spectre correspondant dans une fenêtre d'analyse glissante.

# Spectre de signaux stochastiques

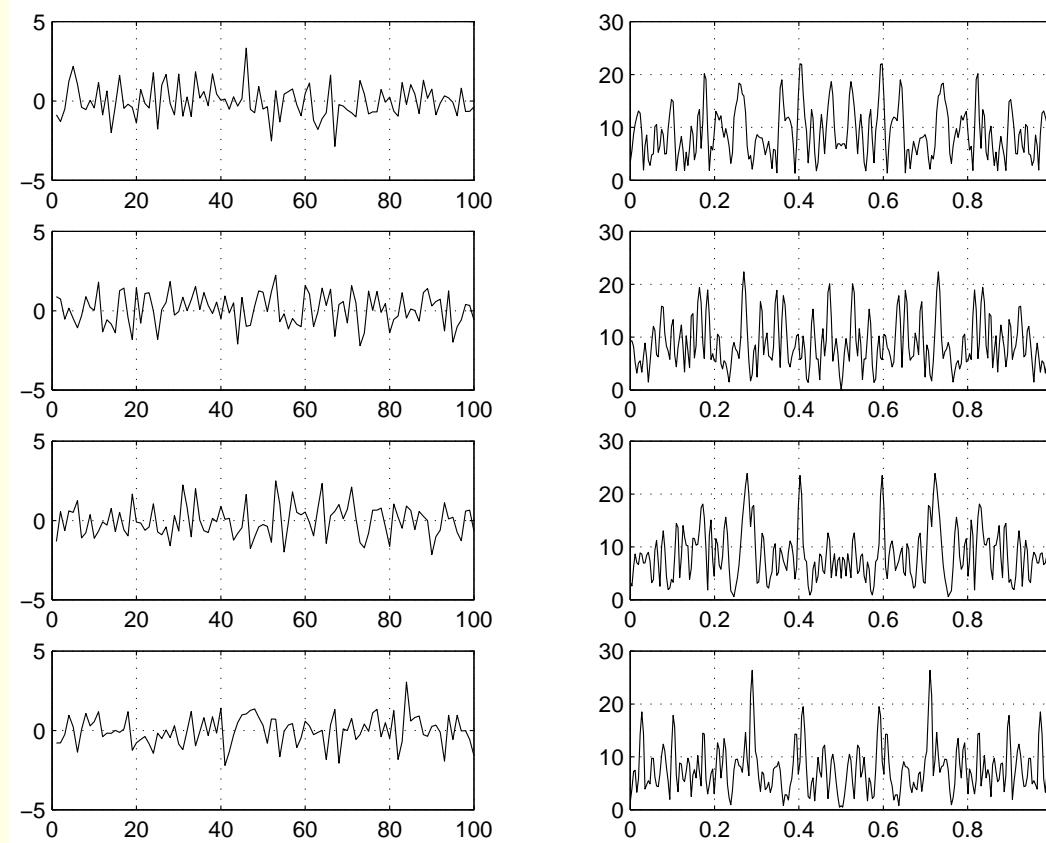


FIGURE 6: Une série de trajectoires et leur transformée de FOURIER à temps discret.

## Énoncé du problème de l'estimation

- Soit une série de  $N$  échantillons  $\{x[0], x[1], \dots, x[N - 1]\}$  obtenus par échantillonnage d'un processus stochastique. On veut estimer le paramètre  $\alpha$  à partir des échantillons  $\{x[0], x[1], \dots, x[N - 1]\}$ ; cette quantité est non aléatoire.

$$\hat{\alpha} = A(x[0], x[1], \dots, x[N - 1]) \quad (11)$$

- La fonction  $A$  est appelée estimateur de  $\alpha$ ;  $\hat{\alpha}$  est l'estimation.
- Contrairement à  $\alpha$ , l'estimation  $\hat{\alpha}$  est une variable aléatoire

## Propriétés d'un bon estimateur

L'estimation idéale aurait une densité de probabilité  $f_{\hat{\alpha}} = \delta(\alpha - \hat{\alpha})$ .

En pratique, on lui associe les paramètres de qualité suivants :

– le biais. Le biais est défini par

$$b_{\hat{\alpha}} = \mu_{\hat{\alpha}} - \alpha \quad (12)$$

Un estimateur de biais nul est dit non biaisé.

## Propriétés d'un bon estimateur

L'estimation idéale aurait une densité de probabilité  $f_{\hat{\alpha}} = \delta(\alpha - \hat{\alpha})$ .

En pratique, on lui associe les paramètres de qualité suivants :

- le biais. Le biais est défini par

$$b_{\hat{\alpha}} = \mu_{\hat{\alpha}} - \alpha \quad (12)$$

Un estimateur de biais nul est dit non biaisé.

- la variance de l'estimateur, qui est celle de la variable  $\hat{\alpha}$ , soit

$$\sigma_{\hat{\alpha}}^2 = E \{ (\hat{\alpha} - \mu_{\hat{\alpha}})^2 \} \quad (13)$$

## Propriétés d'un bon estimateur

L'estimation idéale aurait une densité de probabilité  $f_{\hat{\alpha}} = \delta(\alpha - \hat{\alpha})$ .

En pratique, on lui associe les paramètres de qualité suivants :

- le biais. Le biais est défini par

$$b_{\hat{\alpha}} = \mu_{\hat{\alpha}} - \alpha \quad (12)$$

Un estimateur de biais nul est dit non biaisé.

- la variance de l'estimateur, qui est celle de la variable  $\hat{\alpha}$ , soit

$$\sigma_{\hat{\alpha}}^2 = E \{ (\hat{\alpha} - \mu_{\hat{\alpha}})^2 \} \quad (13)$$

- l'erreur quadratique moyenne (Mean Square Error). Il s'agit de la quantité

$$MSE_{\hat{\alpha}} = E \{ (\hat{\alpha} - \alpha)^2 \} \quad (14)$$

On montre que

$$MSE_{\hat{\alpha}} = b_{\hat{\alpha}}^2 + \sigma_{\hat{\alpha}}^2 \quad (15)$$

## Un exemple : estimation de la moyenne

Supposons une séquence aléatoire  $x[n]$  stationnaire et ergodique. On dispose d'un enregistrement  $\{x[0], x[1], \dots, x[N - 1]\}$  de durée  $N$ , et l'on voudrait estimer la moyenne  $\mu_x$ . La moyenne arithmétique des échantillons

$$\widehat{\mu_x} = \frac{1}{N} \sum_{n=0}^{N-1} x[n] \quad (16)$$

semble être un estimateur raisonnable.

– Biais de  $\widehat{\mu_x}$  ?

En prenant l'espérance mathématique des deux membres de cette équation,

$$E \{ \widehat{\mu_x} \} = \mu_x \quad (17)$$

– Variance de  $\widehat{\mu_x}$  ?

$$\sigma_{\widehat{\mu_x}}^2 = \frac{1}{N^2} \sum_{i=-(N-1)}^{N-1} (N - |i|) C_{xx}[i] \quad (18)$$

## Estimation spectrale

L'estimation spectrale s'apparente à l'estimation de la transformée de FOURIER de la séquence observée.

Pour le démontrer, nous partons d'un signal  $x(t)$  déterministe, à énergie finie, c'est-à-dire tel que

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 dt \quad (19)$$

On définit

– une pseudo fonction d'autocorrélation par

$$\Gamma_{xx}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)x(t + \tau)dt \quad (20)$$

– une densité spectrale de puissance par

$$\gamma_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (21)$$

On peut réécrire l'expression de la densité spectrale en introduisant  $\mathcal{X}(f)$

$$\gamma_x(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{xx}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (22)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) x(t + \tau) dt \right) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \quad (23)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) \left( \int_{-\infty}^{+\infty} x(t + \tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \right) dt \quad (24)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) (\mathcal{X}(f) e^{2\pi j f t}) dt \quad (25)$$

$$= \mathcal{X}(f) \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{2\pi j f t} dt \quad (26)$$

$$= \mathcal{X}(f) \mathcal{X}^*(f) \quad (27)$$

$$= \|\mathcal{X}(f)\|^2 \quad (28)$$

## Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic
- Étude des supports de transmission
  - Transmission dans le réseau téléphonique
  - Ingénierie des radiocommunications mobiles terrestres
- Fonctionnement du système de positionnement GPS

# Représentation des signaux et des systèmes passe-bande

- Introduction
- Échantillonnage des signaux passe-bande
- Représentation des signaux passe-bande déterministes
- Systèmes linéaires, invariants en translation et passe-bande
- Représentation des signaux passe-bande aléatoires

## Échantillonnage des signaux passe-bande

**Théorème 1.** *Une fonction  $g(t)$  à énergie finie et à spectre limité, c'est-à-dire dont la transformée de FOURIER  $\mathcal{G}(f)$  est de largeur  $W$ , et qui admet une borne supérieure  $f_u$ , est entièrement déterminée par ses échantillons  $g[nT_s]$ ,  $n \in \{-\infty, +\infty\}$  si la fréquence d'échantillonnage  $f_s$  vaut  $\frac{2f_u}{k}$ , tel que  $k$  est le plus grand entier strictement inférieur à  $\frac{f_u}{W}$ . Il est à noter que toutes les fréquences d'échantillonnage ne conviennent pas sauf si elles sont strictement supérieures à  $2f_u$ .*

## Représentation des signaux passe-bande déterministes

**Définition 3. [Passe-bande]** *Un signal  $g(t)$  est de type passe-bande s'il existe deux valeurs  $W$  et  $f_0$ , pour lesquelles  $W \ll f_0$ , et telles que*

$$\forall f \notin \left[ f_0 - \frac{W}{2}, f_0 + \frac{W}{2} \right], \quad \|\mathcal{G}(f)\| = 0 \quad (29)$$

## Représentation des signaux passe-bande déterministes

**Définition 3. [Passe-bande]** *Un signal  $g(t)$  est de type passe-bande s'il existe deux valeurs  $W$  et  $f_0$ , pour lesquelles  $W \ll f_0$ , et telles que*

$$\forall f \notin \left[ f_0 - \frac{W}{2}, f_0 + \frac{W}{2} \right], \quad \|\mathcal{G}(f)\| = 0 \quad (29)$$

**Définition 4. [Passe-bas équivalent]** *Considérons un signal passe-bande déterministe  $g(t)$  dont la caractéristique est de posséder un contenu spectral concentré dans une certaine bande de fréquences. Le signal  $g(t)$  peut s'écrire sous la forme de*

$$g(t) = \operatorname{Re} (\bar{g}(t) e^{2\pi j f_0 t + j\varphi_0}) \quad (30)$$

*telle que  $f_0$  est une fréquence de référence contenue dans la bande utile du signal. Dans cette égalité,  $\bar{g}(t)$  porte le nom de passe-bas équivalent.*

# Signal analytique

Application d'un filtre

$$\mathcal{H}(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f < 0 \\ 2 & \text{si } f \geq 0 \end{cases} \quad (31)$$

$$h(t) = \delta(t) + \frac{j}{\pi t} \quad (32)$$

# Signal analytique

Application d'un filtre

$$\mathcal{H}(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f < 0 \\ 2 & \text{si } f \geq 0 \end{cases} \quad (31)$$

$$h(t) = \delta(t) + \frac{j}{\pi t} \quad (32)$$

**Définition 5. [Signal analytique]** La sortie d'un tel filtre à un signal d'entrée  $g(t)$  est appelée *signal analytique*. Elle vaut

$$g_a(t) = g(t) \otimes \left( \delta(t) + \frac{j}{\pi t} \right) \quad (33)$$

$$= g(t) + j g(t) \otimes \frac{1}{\pi t} \quad (34)$$

La norme du signal analytique est appelée enveloppe du signal.

## Transformée de Hilbert

**Définition 6.** *[Transformée de Hilbert] Soit un signal  $g(t)$ . Sa transformée de HILBERT, notée  $\tilde{g}(t)$ , vaut*

$$\tilde{g}(t) = g(t) \otimes \frac{1}{\pi t} \quad (35)$$

Par cette définition,

$$g_a(t) = g(t) + j\tilde{g}(t) \quad (36)$$

## Transformée de Hilbert

**Définition 6.** *[Transformée de Hilbert] Soit un signal  $g(t)$ . Sa transformée de HILBERT, notée  $\tilde{g}(t)$ , vaut*

$$\tilde{g}(t) = g(t) \otimes \frac{1}{\pi t} \quad (35)$$

Par cette définition,

$$g_a(t) = g(t) + j\tilde{g}(t) \quad (36)$$

### Propriétés de la transformée de Hilbert

- L'énergie (ou la puissance) d'un signal et celle de sa transformée de HILBERT sont égales.
- [Transformée de HILBERT d'un signal modulé] Soit un signal  $g(t)$  en bande de base,

$$g(t) \widetilde{\cos(2\pi f_c t)} = g(t) \sin(2\pi f_c t) \quad (37)$$

## Représentation passe-bande à partir du signal analytique

**Définition 7. [Enveloppe complexe du signal]** *Le signal obtenu par décalage du signal analytique le long de l'axe fréquentiel porte le nom d'enveloppe complexe du signal original. Elle sera notée  $e_g(t)$ .*

Par définition, l'enveloppe complexe et son spectre sont respectivement liés à leur équivalent analytique par les relations

$$e_g(t) = g_a(t)e^{-2\pi j f_0 t} \quad (38)$$

$$\mathcal{E}_g(f) = \mathcal{G}_a(f + f_0) \quad (39)$$

Reste à trouver un moyen commode de déterminer cette enveloppe complexe !

## Composantes de Rice

$$e_g(t) = g_I(t) + jg_Q(t) \quad (40)$$

Calcul pratique des composantes de RICE ?

## Composantes de Rice

$$e_g(t) = g_I(t) + jg_Q(t) \quad (40)$$

Calcul pratique des composantes de RICE ?

$$g_I(t) = \operatorname{Re}(e_g(t)) \quad (41)$$

$$= \operatorname{Re}(g_a(t)e^{-2\pi j f_0 t}) \quad (42)$$

$$= g(t) \cos(2\pi f_0 t) + \tilde{g}(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (43)$$

$$g_Q(t) = \operatorname{Im}(e_g(t)) \quad (44)$$

$$= \operatorname{Im}(g_a(t)e^{-2\pi j f_0 t}) \quad (45)$$

$$= -g(t) \sin(2\pi f_0 t) + \tilde{g}(t) \cos(2\pi f_0 t) \quad (46)$$

Dès lors,

$$g(t) = \operatorname{Re}(g_a(t)) \quad (47)$$

$$= \operatorname{Re}(e_g(t)e^{2\pi j f_0 t}) \quad (48)$$

$$= \operatorname{Re}((g_I(t) + jg_Q(t))e^{2\pi j f_0 t}) \quad (49)$$

$$= g_I(t) \cos(2\pi f_0 t) - g_Q(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (50)$$

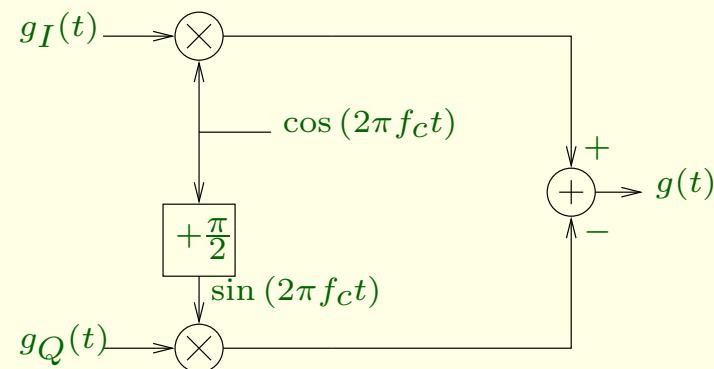
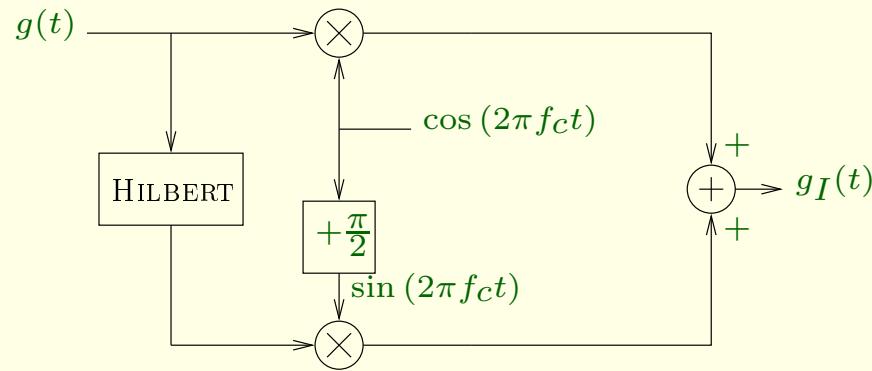


FIGURE 7: Schéma de reconstitution d'un signal à partir de ses composantes de RICE.

# Calcul des composantes de Rice

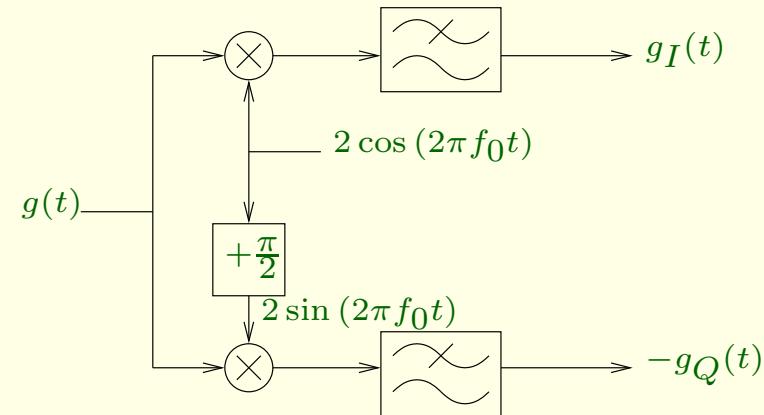


$$g(t) \times 2 \cos(2\pi f_0 t) = 2 [g_I(t) \cos(2\pi f_0 t) - g_Q(t) \sin(2\pi f_0 t)] \cos(2\pi f_0 t) \quad (51)$$

$$= 2 [g_I(t) \cos^2(2\pi f_0 t) - g_Q(t) \sin(2\pi f_0 t) \cos(2\pi f_0 t)] \quad (52)$$

$$= g_I(t) + g_I(t) \cos(4\pi f_0 t) - g_Q(t) \sin(4\pi f_0 t) \quad (53)$$

# Schéma pratique de calcul des composantes de Rice



# Systèmes linéaires, invariants en translation et passe-bande

$$h(t) = \operatorname{Re} (e_h(t) e^{2\pi j f_0 t}) \quad (54)$$

Le signal filtré vaut

$$y(t) = g(t) \otimes h(t) \quad (55)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) g(t - \lambda) d\lambda \quad (56)$$

# Systèmes linéaires, invariants en translation et passe-bande

$$h(t) = \operatorname{Re} (e_h(t) e^{2\pi j f_0 t}) \quad (54)$$

Le signal filtré vaut

$$y(t) = g(t) \otimes h(t) \quad (55)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda) g(t - \lambda) d\lambda \quad (56)$$

Thèse :

$$e_y(t) = \frac{1}{2} e_h(t) \otimes e_g(t) \quad (57)$$

## Démonstration

$$y(t) = g(t) \otimes h(t) \quad (58)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)g(t - \lambda)d\lambda \quad (59)$$

$$g(t) = \frac{1}{2} (e_g(t)e^{2\pi j f_0 t} + e_g^*(t)e^{-2\pi j f_0 t}) \text{ et } h(t) = \frac{1}{2} (e_h(t)e^{2\pi j f_0 t} + e_h^*(t)e^{-2\pi j f_0 t})$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4}e^{2\pi j f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e_h(\lambda)e_g(t - \lambda)d\lambda + \frac{1}{4}e^{-2\pi j f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e_h^*(\lambda)e_g^*(t - \lambda)d\lambda \\ &+ \frac{1}{4}e^{-2\pi j f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e_h(\lambda)e_g^*(t - \lambda)e^{4\pi j f_0 \lambda}d\lambda + \frac{1}{4}e^{2\pi j f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e_h^*(\lambda)e_g(t - \lambda)e^{-4\pi j f_0 \lambda}d\lambda \end{aligned}$$

## Démonstration

$$y(t) = g(t) \otimes h(t) \quad (58)$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} h(\lambda)g(t - \lambda)d\lambda \quad (59)$$

$$g(t) = \frac{1}{2} (e_g(t)e^{2\pi j f_0 t} + e_g^*(t)e^{-2\pi j f_0 t}) \text{ et } h(t) = \frac{1}{2} (e_h(t)e^{2\pi j f_0 t} + e_h^*(t)e^{-2\pi j f_0 t})$$

Dès lors,

$$\begin{aligned} y(t) &= \frac{1}{4}e^{2\pi j f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e_h(\lambda)e_g(t - \lambda)d\lambda + \frac{1}{4}e^{-2\pi j f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e_h^*(\lambda)e_g^*(t - \lambda)d\lambda \\ &+ \frac{1}{4}e^{-2\pi j f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e_h(\lambda)e_g^*(t - \lambda)e^{4\pi j f_0 \lambda}d\lambda + \frac{1}{4}e^{2\pi j f_0 t} \int_{-\infty}^{+\infty} e_h^*(\lambda)e_g(t - \lambda)e^{-4\pi j f_0 \lambda}d\lambda \end{aligned}$$

$$y(t) = \frac{1}{2} \operatorname{Re} ((e_h(t) \otimes e_g(t)) e^{2\pi j f_0 t}) \quad (60)$$

## Signal analytique d'un processus stochastique

Par analogie avec les signaux déterministes, on définit le signal analytique en filtrant le processus stochastique  $X(t)$  par un filtre  $\mathcal{H}(f)$  qui élimine les fréquences négatives

$$H(f) = \begin{cases} 0 & \text{si } f < 0 \\ 2 & \text{si } f \geq 0 \end{cases} \quad (61)$$

Par le théorème de WIENER-KINTCHINE, la densité spectrale de puissance du signal analytique est donnée par

$$\gamma_{X_a}(f) = \|\mathcal{H}(f)\|^2 \gamma_X(f) \quad (62)$$

$$= \begin{cases} 4 \gamma_X(f) & \text{si } f \geq 0 \\ 0 & \text{si } f < 0 \end{cases} \quad (63)$$

Observons que la densité spectrale de puissance du signal analytique peut encore s'écrire sous la forme  $\gamma_{X_a}(f) = 2\mathcal{H}(f)\gamma_X(f)$ .

## Lien entre un processus stochastique et son enveloppe complexe

Par analogie avec le cas déterministe, on peut exprimer l'enveloppe complexe directement sous la forme

$$X(t) = \operatorname{Re} (e_X(t) e^{2\pi j f_0 t}) \quad (64)$$

$X(t)$  étant un processus stochastique, l'enveloppe complexe  $e_X(t)$  est également un processus stochastique.

Ce processus stochastique  $X(t)$  n'est pas stationnaire car sa moyenne dépend du temps.

Solution : introduction d'une phase aléatoire  $\Theta$  uniformément répartie sur  $[0, 2\pi[$

$$X(t) = \operatorname{Re} (e_X(t) e^{j(2\pi f_0 t + \Theta)}) \quad (65)$$

## Décomposition de Rice d'un processus stochastique

Comme pour l'enveloppe complexe, on peut définir les composantes en phase et en quadrature d'un processus stochastique

$$e_X(t) = X_I(t) + j X_Q(t) \quad (66)$$

La décomposition de RICE du processus stochastique  $X(t)$  est alors donnée par

$$X(t) = \operatorname{Re} (e_X(t) e^{2\pi j f_0 t}) \quad (67)$$

$$= \operatorname{Re} ((X_I(t) + j X_Q(t)) e^{2\pi j f_0 t}) \quad (68)$$

$$= X_I(t) \cos(2\pi f_0 t) - X_Q(t) \sin(2\pi f_0 t) \quad (69)$$

## Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic
- Étude des supports de transmission
  - Transmission dans le réseau téléphonique
  - Ingénierie des radiocommunications mobiles terrestres
- Fonctionnement du système de positionnement GPS

# Étude du bruit

- Sources physiques de bruit
  - Bruit thermique
- Caractérisation d'un dipôle
  - Puissance disponible
  - Température de bruit d'un dipôle
  - Rapport signal à bruit
- Caractérisation d'un quadripôle
  - Gain
  - Facteur de bruit
  - Facteur de mérite
  - Température de bruit effective
  - Cas particulier : atténuateur
- Cascade de quadripôles

# Bruit thermique

$$\gamma_E(f) = 2k_B T R \quad (70)$$

où  $k_B = 1,38 \times 10^{-23} [J/K]$  est la constante de BOLTZMANN.

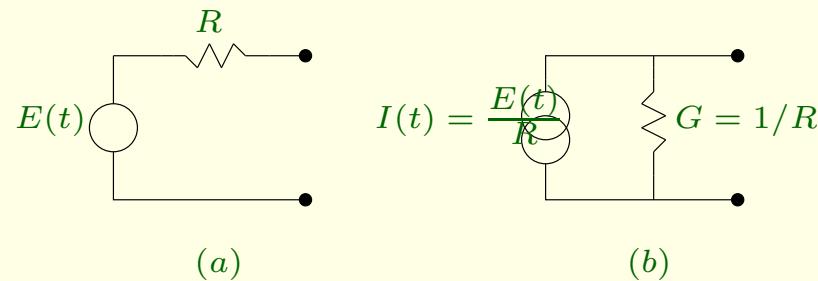


FIGURE 8: Équivalents de THÉVENIN (a) et de NORTON (b) correspondant au bruit thermique dans une résistance.

## Caractérisation d'un dipôle

$$Z_s(f) = R_s(f) + jX_s(f) \quad (71)$$

est l'impédance de source et  $Z_L(f)$  l'impédance de charge.

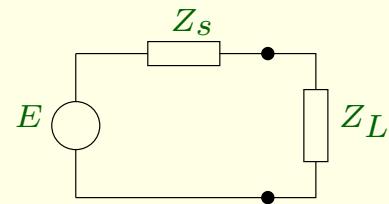


FIGURE 9: Une charge connectée à une source.

# Puissance disponible

## Cas des signaux sinusoïdaux

La puissance de source fournie par le dipôle  $P_{sf}$  vaut

$$P_{sf} = \frac{1}{T} \int_0^T v(t)i(t)dt = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \hat{V} \hat{I}^* \right) \quad (72)$$

Dans une charge  $Z_L$

$$P_{sf} = \frac{\hat{E}^2 \operatorname{Re} (Z_L)}{2 \left\| Z_s + Z_L \right\|^2} \quad (73)$$

## Puissance maximale ?

À adaptation conjuguée, on parle de puissance disponible du dipôle :

$$P_{sd} = \frac{\hat{E}^2}{8 \operatorname{Re} (Z_s)} \quad (74)$$

## Cas des processus stochastiques

Examinons la question pour un bruit aléatoire quelconque

$$P_{bf} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T V(t) I(t) dt \quad (75)$$

par application du théorème de WIENER-KINTCHINE,

$$\gamma_{bd}(f) = \frac{\gamma_E(f)}{4Re(Z_s)} \quad (76)$$

**Exemple.** Dans le cas particulier du bruit thermique

$$\gamma_{bd}(f) = \frac{\gamma_E(f)}{4Re(Z_s)} = \frac{2k_B T Re(Z_s)}{4Re(Z_s)} = \frac{k_B T}{2} \quad (77)$$

Rappel : hypothèse d'adaptation conjuguée ; dans le cas contraire, le résultat dépend des résistances !

## Résumé

	Charge quelconque	Adaptation conjuguée
Signaux sinusoïdaux	$P_{sf} = \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \hat{V} \hat{I}^* \right) = \frac{\hat{E}^2 \operatorname{Re}(Z_L)}{2 \ Z_s + Z_L\ ^2}$	$P_{sd} = \frac{\hat{E}^2}{8 \operatorname{Re}(Z_s)}$
Signaux stochastiques	$P_{bf} = \lim_{T \rightarrow +\infty} \frac{1}{T} \int_0^T V(t) I(t) dt$	$\gamma_{bd}(f) = \frac{\gamma_E(f)}{4 \operatorname{Re}(Z_s)}$
Bruit thermique		$\gamma_{bd}(f) = \frac{k_B T}{2}$

TABLE 1: Caractérisation des puissances d'un dipôle.

# Température de bruit d'un dipôle linéaire

## Température de bruit ponctuelle

**Définition 8.** *La température de bruit ponctuelle, ou à une fréquence donnée, est la température absolue à laquelle doit être portée une impédance pour produire, par bruit thermique, à cette fréquence, la même densité spectrale de la puissance de bruit disponible que le dipôle considéré.*

On a donc, par définition,

$$\gamma_{bd}(f) = \frac{k_B T(f)}{2} \quad (78)$$

# Température de bruit d'un dipôle linéaire

## Température de bruit ponctuelle

**Définition 8.** *La température de bruit ponctuelle, ou à une fréquence donnée, est la température absolue à laquelle doit être portée une impédance pour produire, par bruit thermique, à cette fréquence, la même densité spectrale de la puissance de bruit disponible que le dipôle considéré.*

On a donc, par définition,

$$\gamma_{bd}(f) = \frac{k_B T(f)}{2} \quad (78)$$

## Température de bruit et bande passante

**Définition 9.** *La valeur maximale de  $T(f)$ , notée  $T$ , est appelée température de bruit du dipôle et la bande passante est définie telle que*

$$P_{bd}(f) = k_B T W \quad (79)$$

## Rapport signal à bruit d'un dipôle générateur

**Définition 10.** *Le rapport signal à bruit ( $S/N$ ) du dipôle est défini comme le rapport de la puissance disponible du signal à celle du bruit*

$$\frac{S}{N} = \frac{P_{sd}}{P_{bd}} \quad (80)$$

Par convention, lorsque le signal est modulé, on utilise pour la définition de la puissance du signal :

- en modulation d'amplitude ou en modulation angulaire, la puissance de la porteuse non modulée (rapport porteuse à bruit  $\frac{C}{N}$ ),
- en modulation d'amplitude à porteuse supprimée, la puissance moyenne du signal, et
- en modulation d'impulsions, la puissance de crête.

# Caractérisation d'un quadripôle

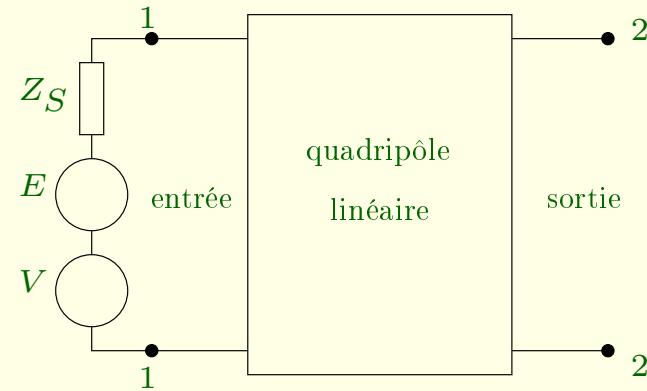


FIGURE 10: Schéma d'un quadripôle.

Démarche :

# Caractérisation d'un quadripôle

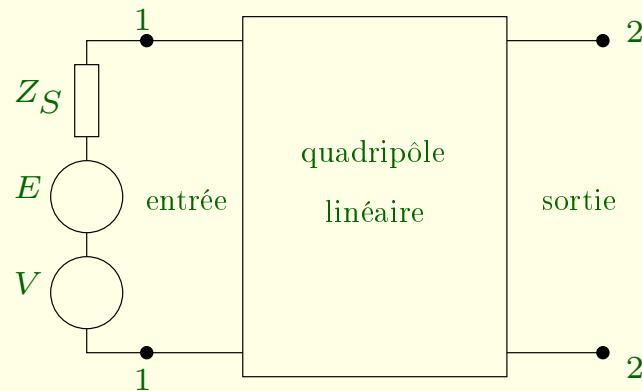


FIGURE 10: Schéma d'un quadripôle.

## Démarche :

- Notion de gain ?
  - Caractérisation du bruit interne du quadripôle au moyen de la notion de facteur de bruit (grandeur normalisée)
  - Circuits équivalents
  - Facteur de mérite (non normalisé)
  - Température de bruit effective
  - Cas particulier : atténuateur purement résistif

Hypothèse : adaptation conjuguée en entrée et en sortie

## Facteur de bruit d'un quadripôle

**Définition 11.** L'impédance interne du quadripôle générateur étant donnée, le facteur de bruit du quadripôle à la fréquence d'entrée  $f$ , noté  $F_0(f)$ , est le rapport de

- (1) la densité spectrale de bruit disponible à la sortie du quadripôle, à la fréquence correspondante, lorsque la température de bruit du dipôle générateur est  $T_0 = 290 \text{ [K]}$  à  
 (2) la partie de cette densité spectrale due au bruit du dipôle générateur à la fréquence  $f$ .

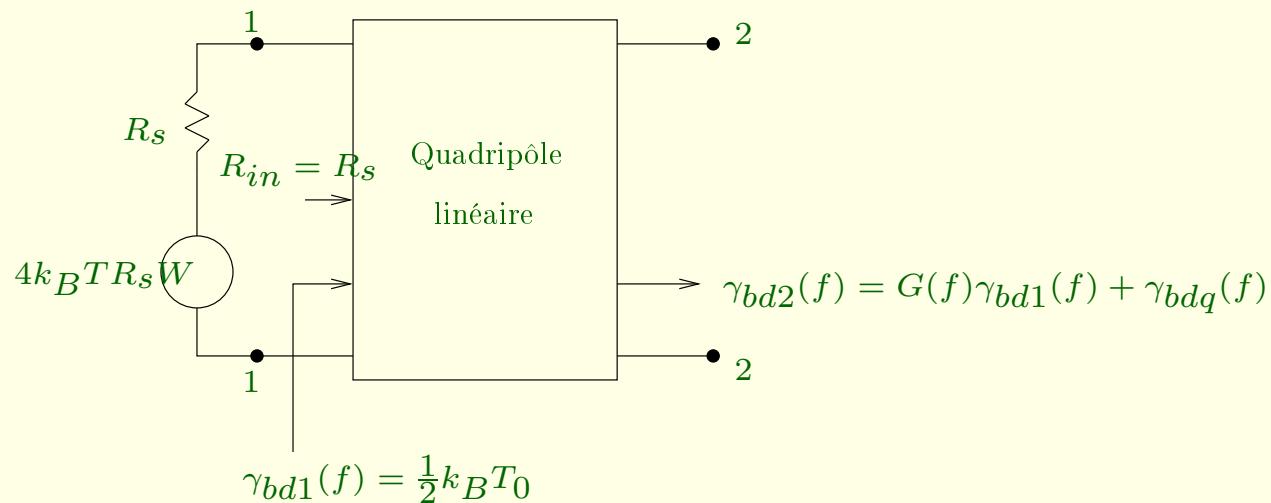


FIGURE 11: Schéma d'un quadripôle bruité.

# Circuits équivalents

$$\gamma_{bd2}(f) = \gamma_{bd1}(f) |_{T=T_0} G(f) F_0(f) \quad (81)$$

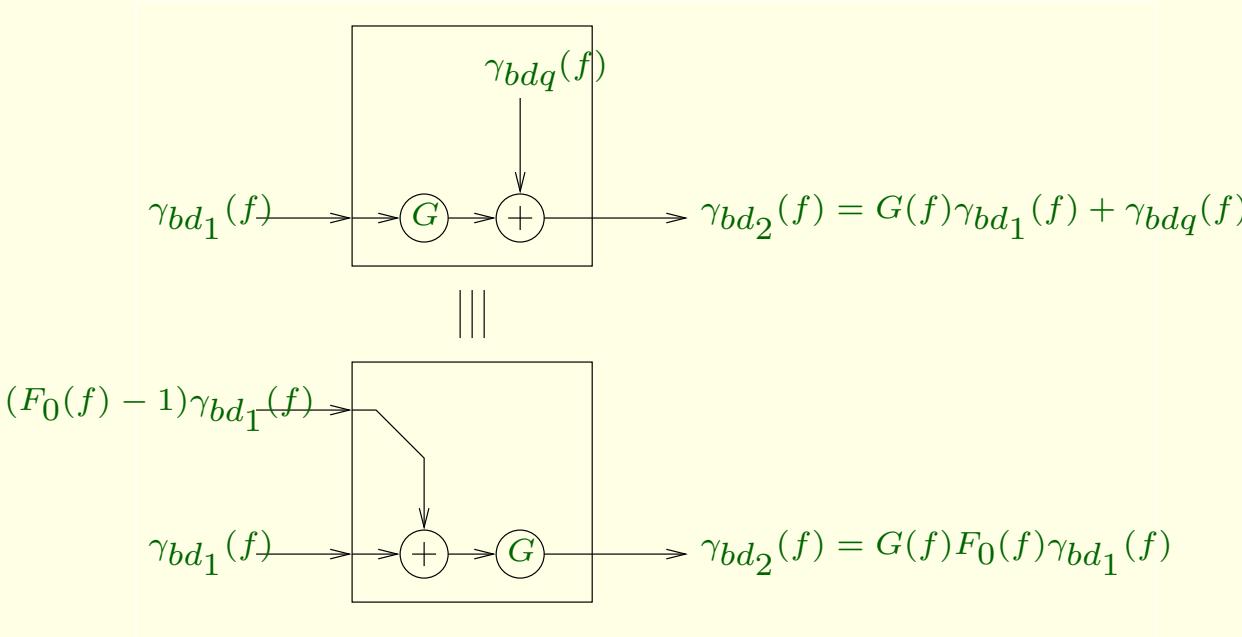


FIGURE 12: Un quadripôle bruité et son schéma équivalent.

## Interprétation de la notion de facteur de bruit

Le rapport du signal à bruit à l'entrée vaut

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}} = \frac{\gamma_{\text{in}}(f)}{\gamma_{bd1}(f)} \quad (82)$$

À la sortie du quadripôle,

$$\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}} = \frac{\gamma_{\text{out}}(f)}{\gamma_{bd2}(f)} \quad (83)$$

Dès lors,

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}}} = \frac{\gamma_{\text{in}}(f)}{\gamma_{bd1}(f)} \frac{\gamma_{bd2}(f)}{\gamma_{\text{out}}(f)} \quad (84)$$

Comme  $\gamma_{\text{out}}(f) = G(f)\gamma_{\text{in}}(f)$  , ce rapport devient

$$\frac{\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{in}}}{\left(\frac{S}{N}\right)_{\text{out}}} = \frac{\gamma_{bd2}(f)}{\gamma_{bd1}(f)G(f)} = F_0(f) \quad (85)$$

## Autres notions de facteur de bruit

### Facteur de bruit moyen

**Définition 12.** *Le facteur de bruit moyen est le rapport de*

- (1) *la puissance de bruit disponible à la sortie du quadripôle à*
- (2) *la partie de cette puissance due au dipôle générateur supposé à la température de bruit  $T_0 = 290 [K]$ .*

$$F_{0m} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} k_B T_0 G(f) F_0(f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2} k_B T_0 G(f) df} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} G(f) F_0(f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df} \quad (86)$$

## Autres notions de facteur de bruit

### Facteur de bruit moyen

**Définition 12.** *Le facteur de bruit moyen est le rapport de*

- (1) *la puissance de bruit disponible à la sortie du quadripôle à*
- (2) *la partie de cette puissance due au dipôle générateur supposé à la température de bruit  $T_0 = 290 [K]$ .*

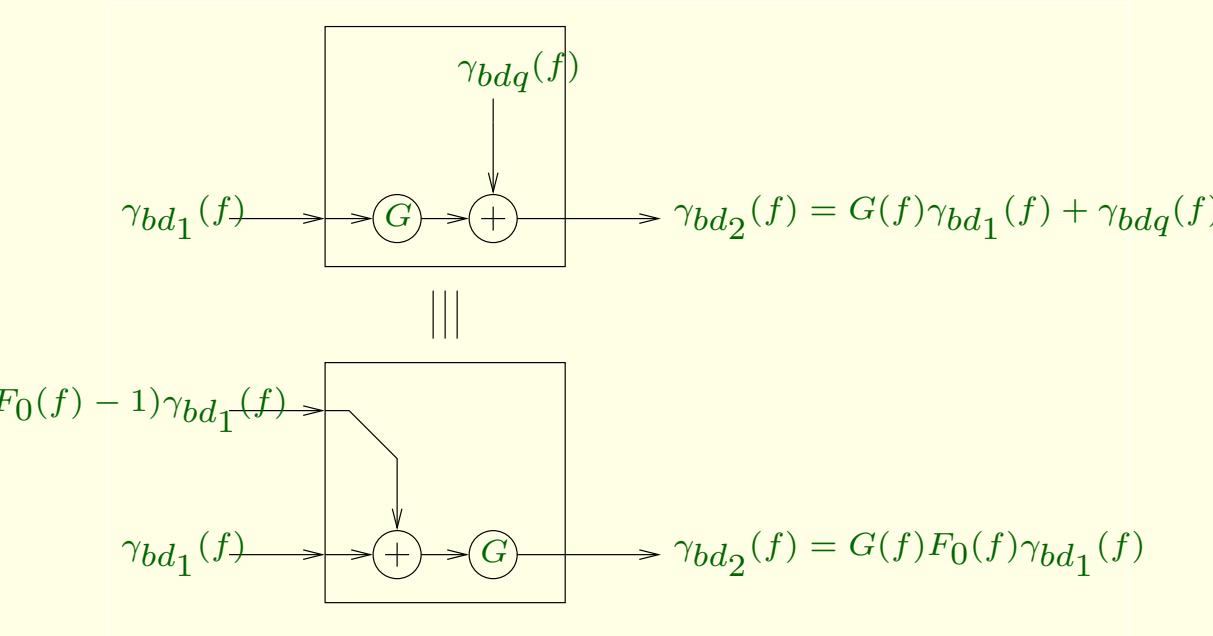
$$F_{0m} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}k_B T_0 G(f) F_0(f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{2}k_B T_0 G(f) df} = \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} G(f) F_0(f) df}{\int_{-\infty}^{+\infty} G(f) df} \quad (86)$$

**Facteur de mérite** (pour  $T_s \neq T_0$ ) : lien avec  $F_0$  ?

Comme  $\gamma_{bdq}(f) = \frac{1}{2}k_B(F_0 - 1)T_0G(f) = \frac{1}{2}k_B(F - 1)T_sG(f)$ ,

$$F = 1 + \frac{T_0}{T_s}(F_0 - 1) \quad (87)$$

# Température de bruit effective du quadripôle



$$\gamma_{bd2}(f) = \frac{1}{2}k_B T_0 G(f) + \gamma_{bdq}(f) = \frac{1}{2}k_B [T_0 + (F_0 - 1)T_0] G(f) \quad (88)$$

Température de bruit effective

$$T_e = (F_0 - 1)T_0 \quad (89)$$

## Cas du quadripôle atténuateur résistif de “gain” $G = 1/L$

Cet atténuateur purement résistif est supposé être à la même température  $T_0$  que la résistance équivalente d’entrée. L’observation nous enseigne que la puissance de bruit disponible en sortie vaut donc (à adaptation conjuguée en entrée et en sortie !)

$$\gamma_{bd2}(f) = \frac{1}{2}k_B T_0 \quad (90)$$

## Cas du quadripôle atténuateur résistif de “gain” $G = 1/L$

Cet atténuateur purement résistif est supposé être à la même température  $T_0$  que la résistance équivalente d’entrée. L’observation nous enseigne que la puissance de bruit disponible en sortie vaut donc (à adaptation conjuguée en entrée et en sortie !)

$$\gamma_{bd2}(f) = \frac{1}{2}k_B T_0 \quad (90)$$

Ceci doit être mis en correspondance avec le cadre définissant  $F_0$ . Si on caractérise l’atténuateur par sa température effective  $T_e$ ,

$$\gamma_{bd2}(f) = \frac{1}{2}k_B(T_0 + T_e)\frac{1}{L} \quad (91)$$

En combinant ces deux relations, on obtient  $T_e = (L - 1)T_0$ . Dès lors,

$$F_0 = 1 + \frac{(L - 1)T_0}{T_0} = L \quad (92)$$

# Cascade de quadripôles

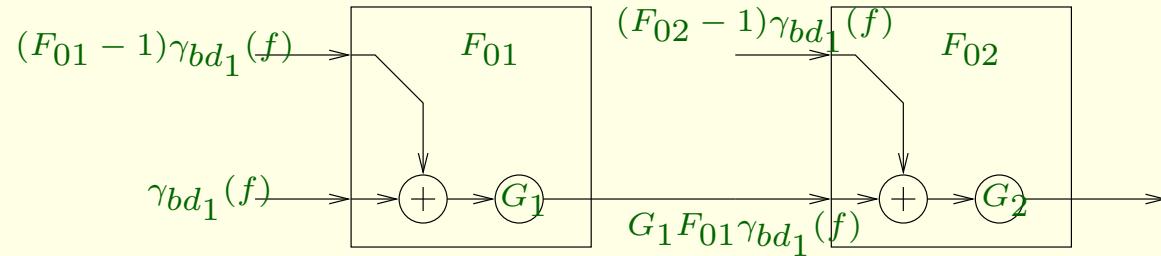


FIGURE 13: Mise en cascade de quadripôles.

# Cascade de quadripôles

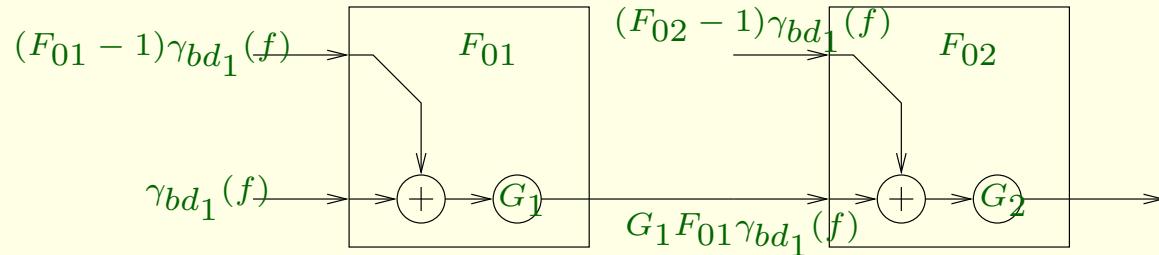


FIGURE 13: Mise en cascade de quadripôles.

Pour un quadripôle à  $n$  étages,

$$F_0 = F_{01} + \frac{F_{02} - 1}{G_1} + \frac{F_{03} - 1}{G_1 G_2} + \cdots = F_{01} + \sum_{i=2}^n \frac{F_{0i} - 1}{\prod_{j=1}^{i-1} G_j} \quad (93)$$

De même,

$$T_e = T_{e1} + \frac{T_{e2}}{G_1} + \frac{T_{e3}}{G_1 G_2} + \cdots = T_{e1} + \sum_{i=2}^n \frac{T_{ei}}{\prod_{j=1}^{i-1} G_j} \quad (94)$$

## Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic
- Étude des supports de transmission
  - Transmission dans le réseau téléphonique
  - Ingénierie des radiocommunications mobiles terrestres
- Fonctionnement du système de positionnement GPS

# Modulations numériques

- Critères de comparaison
- Définition des modulations numériques
- Modulations linéaires “classiques”
  - Description
  - Calcul de la densité spectrale de puissance
  - Modulation d'amplitude numérique (ASK)
  - Modulation de phase numérique (PSK)
  - Modulation en quadrature de phase (QPSK)
- Modulations linéaires à décalage
  - Description
  - Densité spectrale de puissance
  - Modulation en quadrature de phase à décalage (OQPSK)
  - Modulation à saut de phase minimum (MSK)

## Critères de comparaison

1. la résistance aux distorsions et aux interférences ; cette classe comporte les critères de
  - (a) la résistance au bruit en terme de probabilité d'erreur, celle-ci étant généralement une fonction du rapport énergie à bruit  $E_b/N_0$ ,
  - (b) la sensibilité aux interférences dues à des multitrajets,
  - (c) la sensibilité aux imperfections des filtres qui produit de l'interférence entre les symboles numériques,
  - (d) la sensibilité aux non-linéarités,
2. l'occupation spectrale caractérisée par
  - (a) l'efficacité spectrale exprimée en (bit/seconde) par HERTZ [ $b/s/Hz$ ], qui représente le débit binaire que l'on peut transmettre dans un canal large de 1 [ $Hz$ ] pour un type de modulation,
  - (b) le comportement asymptotique de la densité spectrale de puissance, c'est-à-dire la rapidité de décroissance de la courbe de densité spectrale de puissance en fonction de la fréquence,
3. la simplicité d'implémentation.

# Définition des modulations numériques

## Formulation générale

$$s(t) = \operatorname{Re} \left( \psi [m(t)] e^{j(2\pi f_c t + \varphi_c)} \right)$$

$\psi [m(t)]$  est une fonction du signal  $m(t)$  et constitue l'enveloppe complexe  $e_s(t)$  du signal modulé.

## Typologie des modulations

La fonction complexe  $\psi(\cdot) = \psi_I(\cdot) + j\psi_Q(\cdot)$  définit le type de modulation. On distingue généralement deux types de modulations :

- les modulations linéaires pour lesquelles  $\psi[m(t)]$  est une fonction linéaire de  $m(t)$ .
- les modulations angulaires pour lesquelles  $\psi[m(t)]$  a la forme

$$\psi[m(t)] = e^{j\varphi[m(t)]} \quad (95)$$

où  $\varphi[m(t)]$  est une fonction linéaire de  $m(t)$ .

Le signal modulé peut également s'exprimer par les relations

$$s(t) = \psi_I[m(t)] \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - \psi_Q[m(t)] \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (96)$$

et

$$s(t) = \|\psi[m(t)]\| \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \arg \psi[m(t)]) \quad (97)$$

Par la suite, nous nous concentrerons essentiellement sur les modulations numériques li-

néaires qui s'expriment par

$$s(t) = \operatorname{Re} \left( e^{j(2\pi f_c t + \varphi_c)} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k(t) e^{j(\theta_k - 2\pi f_c k T)} \right) \quad (98)$$

Deux types de modulation linéaire seront détaillées :

- les modulations “classiques”, pour lesquelles  $\theta_k = 2\pi f_c k T$ , et
- les modulations à décalage (ou offset), pour lesquelles  $\theta_k = 2\pi f_c k T + k \frac{\pi}{2}$ .

# Modulations linéaires “classiques”

## Description

Les modulations linéaires classiques sont telles que  $\theta_k = 2\pi f_c k T$ . Dès lors,

$$s(t) = \operatorname{Re} \left( e_s(t) e^{j(2\pi f_c t + \varphi_c)} \right) \quad (99)$$

où l'enveloppe complexe s'exprime par

$$e_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} d_k(t) \quad (100)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k g_k(t - kT) \quad (101)$$

$D_k = A_k + jB_k$  où  $A_k$  et  $B_k$  sont deux variables aléatoires réelles.

L'enveloppe complexe s'exprime également par  $e_s(t) = s_I(t) + j s_Q(t)$ . D'où

$$s_I(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT) \quad (102)$$

$$s_Q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k g(t - kT) \quad (103)$$

ce qui conduit à

$$s(t) = s_I(t) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - s_Q(t) \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (104)$$

soit encore, en remplaçant  $s_I$  et  $s_Q$  par leur valeur,

$$s(t) = \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT) \right] \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) - \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k g(t - kT) \right] \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (105)$$

# Calcul de la densité spectrale de puissance (I)

## Densité spectrale du puissance du signal modulé

Le signal numérique modulé est un processus stochastique  $S(t)$  que l'on peut écrire, en prenant arbitrairement  $\varphi_c = 0$ , sous la forme

$$S(t) = \text{Re} \left( M(t) e^{j2\pi f_c t} \right) \quad (106)$$

où  $M(t)$  est un processus stochastique complexe.

## Stationnarisation

Le processus stochastique  $S(t)$  n'est pas stationnaire au sens large vu car sa moyenne dépend du temps. Il est donc nécessaire de stationnariser le signal. Pour cela, nous ajoutons une phase aléatoire  $\Theta$  uniformément répartie sur  $[0, 2\pi[$

$$S(t) = \text{Re} \left( M(t) e^{j(2\pi f_c t + \Theta)} \right) \quad (107)$$

## Calcul de la densité spectrale de puissance (II)

Fonction d'autocorrélation

$$\Gamma_{SS}(t, t - \tau) = E \{ S(t) S(t - \tau) \} \quad (108)$$

Comme

$$S(t) = \frac{1}{2} \left[ M(t) e^{j(2\pi f_c t + \Theta)} + M^*(t) e^{-j(2\pi f_c t + \Theta)} \right] \quad (109)$$

Dès lors,

$$S(t) S(t - \tau) = \frac{1}{2} \left[ M(t) e^{j(2\pi f_c t + \Theta)} + M^*(t) e^{-j(2\pi f_c t + \Theta)} \right] \quad (110)$$

$$\times \frac{1}{2} \left[ M(t - \tau) e^{j(2\pi f_c(t - \tau) + \Theta)} + M^*(t - \tau) e^{-j(2\pi f_c(t - \tau) + \Theta)} \right] \quad (111)$$

Comme les termes qui font intervenir  $\Theta$  sont nuls après intégration,

$$\Gamma_{SS}(t, t - \tau) = \frac{1}{4} E \{ M(t) M^*(t - \tau) e^{j2\pi f_c \tau} + M^*(t) M(t - \tau) e^{-j2\pi f_c \tau} \} \quad (112)$$

$$= \frac{1}{4} E \{ 2 \operatorname{Re} (M(t) M^*(t - \tau) e^{j2\pi f_c \tau}) \} \quad (113)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( E \left\{ M(t) M^*(t - \tau) e^{j2\pi f_c \tau} \right\} \right) \quad (114)$$

$$= \frac{1}{2} \operatorname{Re} \left( \Gamma_{MM} (t, t - \tau) e^{j2\pi f_c \tau} \right) \quad (115)$$

Enfin, puisque

$$\Gamma_{SS} (\tau) = \frac{1}{4} \left[ \Gamma_{MM} (\tau) e^{j2\pi f_c \tau} + \Gamma_{MM} (\tau)^* e^{-j2\pi f_c \tau} \right] \quad (116)$$

on a

$$\gamma_S(f) = \frac{\gamma_M(f - f_c) + \gamma_M^*(-f - f_c)}{4} \quad (117)$$

où  $\gamma_M(f)$  est la densité spectrale de puissance de l'enveloppe complexe  $M(t)$ .

## Densité spectrale de l'enveloppe complexe

L'enveloppe complexe du signal modulé est

$$M(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} D_k g(t - kT) \quad (118)$$

La séquence de variables aléatoires  $D_k$  est caractérisée par

- sa moyenne :  $\mu_D = E \{D_k\}$
- sa variance :  $\sigma_D^2 = E \{(D_k - \mu_D)(D_k - \mu_D)^*\}$
- sa fonction d'autocorrélation :  $\Gamma_{AA}(k, k - l) = E \{D_k D_{k-l}^*\}$
- sa fonction d'autocovariance :  $C_{AA}(k, k - l) = E \{(D_k - \mu_D)(D_{k-l} - \mu_D)^*\}$

Après stationnarisation de la séquence de variables aléatoires  $D_k$ ,

$$\gamma_M(f) = \frac{\|\mathcal{G}(f)\|^2}{T} \left[ \sigma_D^2 + \|\mu_D\|^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta \left( f - \frac{m}{T} \right) \right] \quad (119)$$

En conclusion,  $\gamma_S(f) = \frac{\gamma_M(f-f_c) + \gamma_M(f+f_c)}{4}$

# Modulation d'amplitude numérique (Amplitude Shift Keying)

## Description

$$e_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT) \quad (120)$$

Choix courant : une impulsion rectangulaire de durée  $T$  :  $g(t) = \text{rect}_{[0,T]}(t)$

On doit déterminer l'enveloppe  $a(t)$  et la phase  $\varphi(t)$  du signal modulé. Ces deux signaux s'obtiennent à partir de l'enveloppe complexe par la relation

$$e_s(t) = a(t) e^{j\varphi(t)} \quad (121)$$

Comme  $A_k$  peut s'écrire  $A_k = \|A_k\| e^{(1 - \text{sgn}(A_k))\frac{\pi}{2}j}$ , nous pouvons déduire

$$a(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \|A_k\| \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (122)$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{\pi}{2} (1 - \text{sgn}(A_k)) \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (123)$$

# Diagramme de constellations

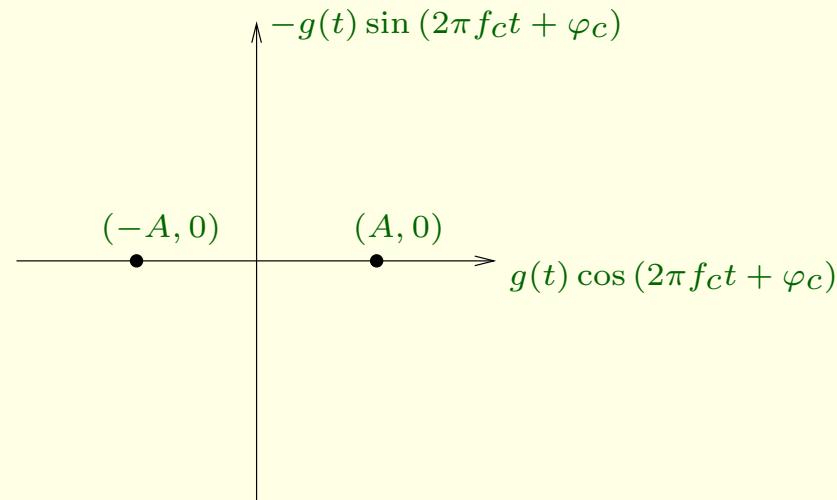


FIGURE 14: Diagramme des états de phase de la modulation ASK-2 ou BPSK.

## Densité spectrale de puissance de l'ASK-2

Hypothèse : les deux amplitudes  $\pm A$  sont équiprobables.

La moyenne  $\mu_A$  de la variable aléatoire  $A_k$  est donc nulle.

Sa variance est donnée par  $\sigma_A^2 = E \{ A_k^2 \} = A^2$ .

Le signal de mise en forme étant la fonction  $\text{rect}_{[0,T]}(t)$ , sa transformée de FOURIER vaut

$$\mathcal{G}(f) = e^{-j2\pi f \frac{T}{2}} T \text{sinc}(fT) \quad (124)$$

Il en résulte une densité spectrale de puissance pour l'enveloppe complexe donnée par

$$\gamma_{e_s}(f) = A^2 T \text{sinc}^2(fT) \quad (125)$$

et finalement une densité spectrale de puissance du signal modulé valant

$$\gamma_s(f) = \frac{A^2 T}{4} \{ \text{sinc}^2[(f - f_c)T] + \text{sinc}^2[(f + f_c)T] \}$$

# Modulation de phase numérique (Phase Shift Keying)

## Description

$$s(t) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \cos(2\pi f_c t + \varphi_c + \psi_k) \quad (126)$$

où  $\psi_k$  est une variable aléatoire constante sur l'intervalle de temps  $[kT, (k+1)T]$ , pouvant prendre  $N$  valeurs possibles D

$$\psi_k \in \left\{ \psi \left| \psi = \varphi_0 + i \frac{2\pi}{N}, i = 0, \dots, N-1 \right. \right\} \quad (127)$$

$$\begin{aligned} s(t) &= A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) [\cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \cos \psi_k - \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \sin \psi_k] \\ &= \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A \cos \psi_k \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \right] \cos(2\pi f_c t + \varphi_c) \end{aligned} \quad (128)$$

$$- \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A \sin \psi_k \operatorname{rect}_{[0,T]}(t - kT) \right] \sin(2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (129)$$

L'enveloppe complexe du signal s'en déduit

$$e_s(t) = s_I(t) + j s_Q(t) \quad (130)$$

$$= A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}_{[0,T]}(t - kT) (\cos \psi_k + j \sin \psi_k) \quad (131)$$

L'enveloppe et la phase du signal modulé :

$$a(t) = A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (132)$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \psi_k \operatorname{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (133)$$

# Modulation en quadrature de phase (Quadrature Phase Shift Keying)

## Description

$$D_k \in \left\{ A e^{-j\frac{3\pi}{4}}, A e^{-j\frac{\pi}{4}}, A e^{j\frac{\pi}{4}}, A e^{j\frac{3\pi}{4}} \right\} \quad (134)$$

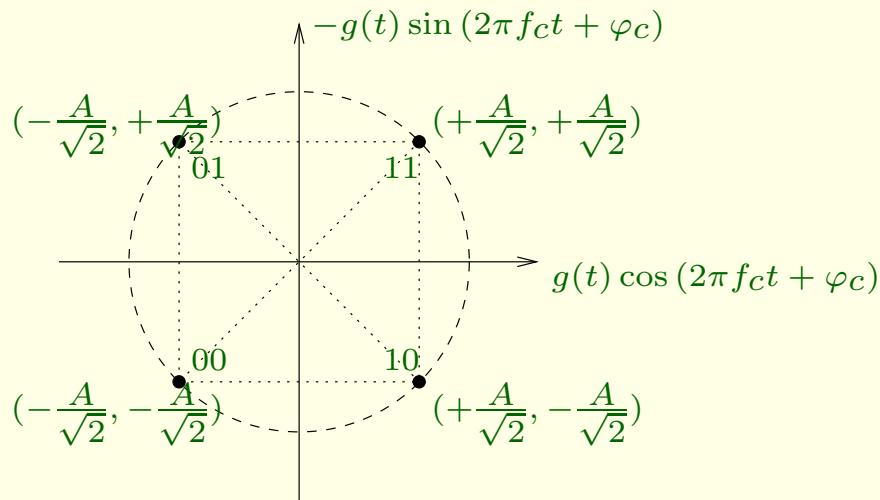


FIGURE 15: Diagramme de constellations pour la modulation QPSK.

Considérons une source binaire fournissant le train d'impulsions suivant

$$I(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k \delta(t - kT_b) \quad (135)$$

où  $I_k = +1$  correspond à l'information binaire 1 et  $I_k = -1$  correspond à l'information binaire 0.

## QPSK : décomposition en 2 séquences

À partir de la séquence  $I(t)$ , nous formons les deux séquences

$$s_I(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{2k} g(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT) \quad (136)$$

$$s_Q(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{2k+1} g(t - kT) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} B_k g(t - kT) \quad (137)$$

où

- $T = 2T_b$
- $g(t)$  est une impulsion de mise en forme de durée  $T$
- $A_k = I_{2k} \frac{A}{\sqrt{2}}$  (bits d'index pair)
- $B_k = I_{2k+1} \frac{A}{\sqrt{2}}$  (bits d'index impair)

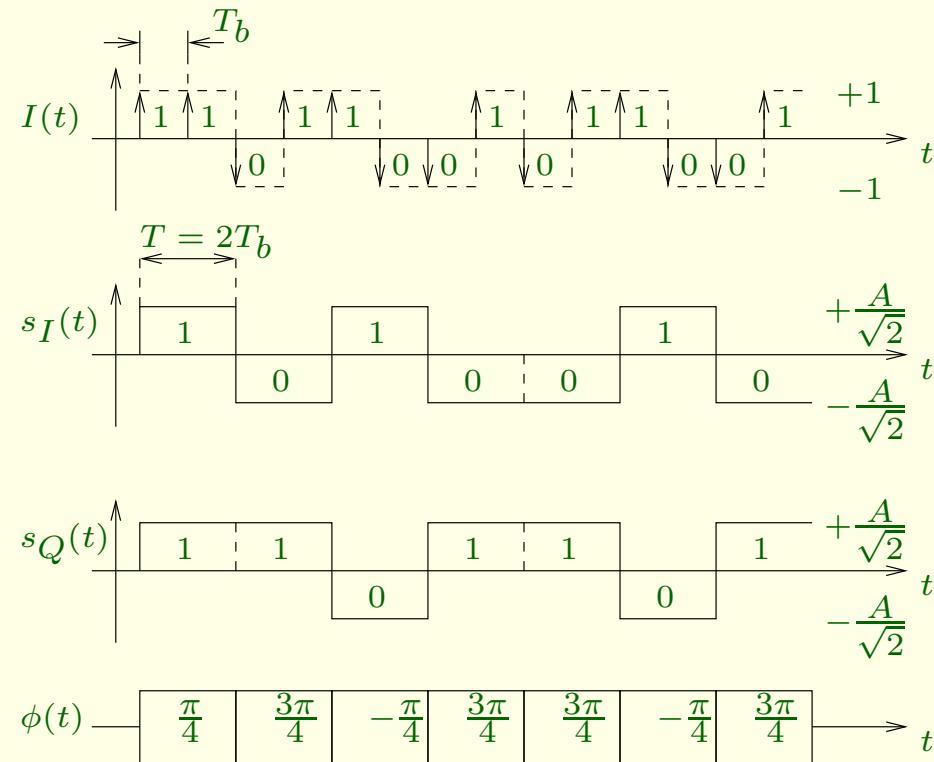


FIGURE 16: Formation des composantes en phase et en quadrature pour la modulation QPSK (avec mise en forme par un signal rectangulaire).

## Enveloppe complexe, enveloppe et phase du signal QPSK

$$e_s(t) = s_I(t) + j s_Q(t) \quad (138)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (A_k + j B_k) \operatorname{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (139)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (I_{2k} + j I_{2k+1}) \operatorname{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (140)$$

$$a(t) = \sqrt{s_I^2(t) + s_Q^2(t)} \quad (141)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \sqrt{I_{2k}^2 + I_{2k+1}^2} \operatorname{rect}_{[0,T]}(t - kT) \quad (142)$$

$$= A \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \operatorname{rect}_{[0,T]}(t - kT) = A \quad (143)$$

$$\varphi(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \text{rect}_{[0,T]}(t - kT) \tan^{-1} \left( \frac{I_{2k+1}}{I_{2k}} \right) \quad (144)$$

# QPSK : illustration

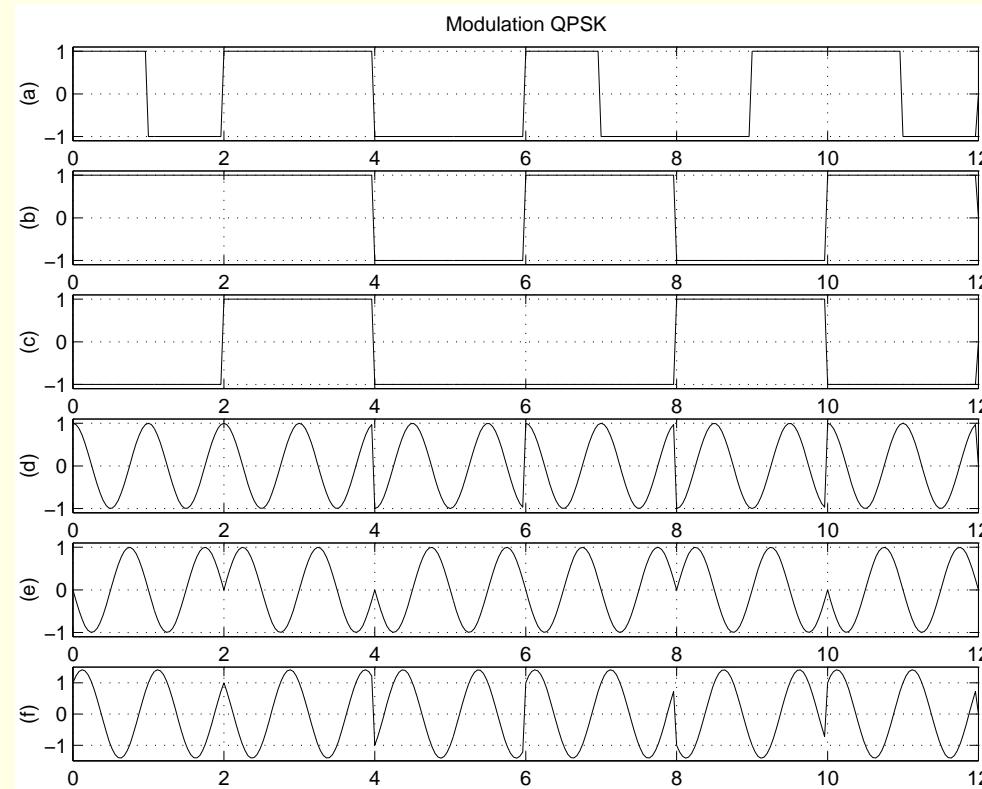


FIGURE 17: Illustration de la modulation QPSK : (a) séquence binaire  $I(t)$ , (b) signal  $s_I(t)$ , (c) signal  $s_Q(t)$ , (d)  $s_I(t) \cos(2\pi f_c t)$ , (e)  $s_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$  et (f) signal modulé  $s(t)$ .

# Modulateur QPSK

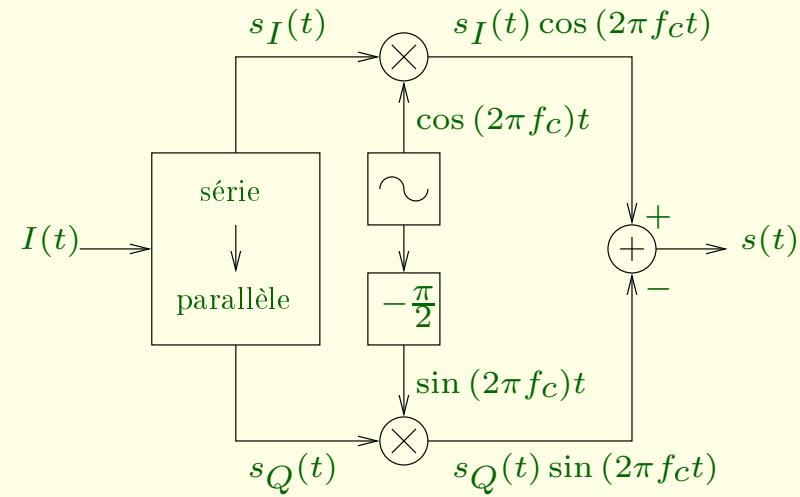


FIGURE 18: Modulateur QPSK.

# Démodulateur QPSK

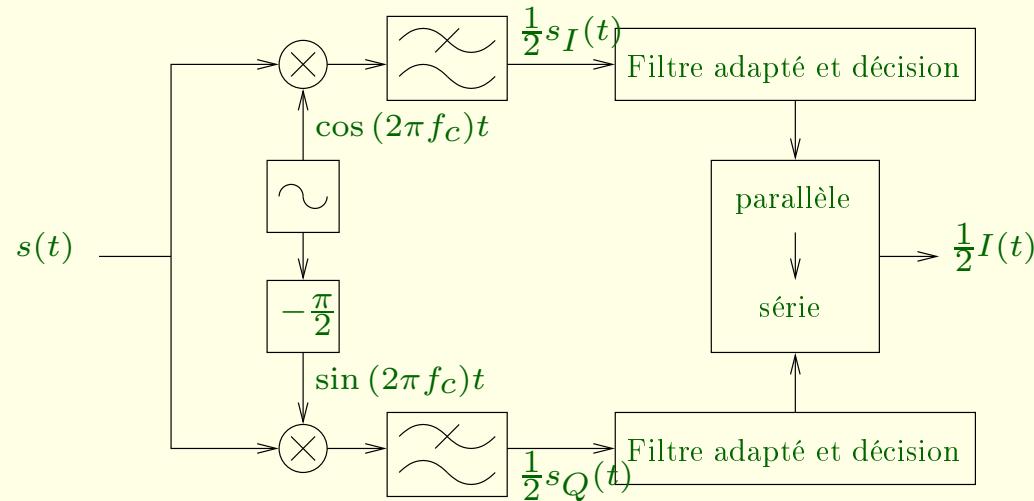


FIGURE 19: Démodulateur QPSK.

## Densité spectrale de puissance

$$\gamma_s(f) = \frac{A^2 T_b}{2} \left\{ \text{sinc}^2 [(f - f_c) 2T_b] + \text{sinc}^2 [(f + f_c) 2T_b] \right\} \quad (145)$$

Elle est identique à celle de la modulation BPSK pour un débit binaire double.

# Modulations linéaires à décalage I (Offset)

## Description

$$e_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT) e^{jk\frac{\pi}{2}} \quad (146)$$

$$s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) \cos \left( 2\pi f_c t + \varphi_c + k \frac{\pi}{2} \right) \quad (147)$$

$$= \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) \cos \left( k \frac{\pi}{2} \right) \right] \cos (2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (148)$$

$$- \left[ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) \sin \left( k \frac{\pi}{2} \right) \right] \sin (2\pi f_c t + \varphi_c) \quad (149)$$

## Modulations linéaires à décalage II (Offset)

En tenant compte du fait que  $\cos(k\pi/2) = 0$  pour  $k$  impair et que  $\sin(k\pi/2) = 0$  pour  $k$  pair, les composantes en phase et en quadrature peuvent s'exprimer par

$$s_I(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) \cos\left(k\frac{\pi}{2}\right) \quad (150)$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} A_{2k'} (-1)^{k'} g(t - 2k'T_b) \quad (151)$$

et

$$s_Q(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) \sin\left(k\frac{\pi}{2}\right) \quad (152)$$

$$= \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} A_{2k'+1} (-1)^{k'} g(t - (2k' + 1)T_b) \quad (153)$$

# Modulation en quadrature de phase à décalage (Offset Quadrature Phase Shift Keying)

## Description

Considérons une source binaire fournissant le train d'impulsions suivant

$$I(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_k \delta(t - kT_b) \quad (154)$$

On forme

$$\begin{aligned} s_I(t) &= \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k I_{2k} g(t - 2kT_b) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{2k} g(t - 2kT_b) \\ s_Q(t) &= \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} (-1)^k I_{2k+1} g(t - (2k+1)T_b) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_{2k+1} g(t - (2k+1)T_b) \end{aligned} \quad (155)$$

où  $g(t)$  est une impulsion de mise en forme de durée  $2T_b$ ,  
 $A_{2k} = \frac{A}{\sqrt{2}} (-1)^k I_{2k}$  et  $A_{2k+1} = \frac{A}{\sqrt{2}} (-1)^k I_{2k+1}$ ,  $\forall k$ .

Ces deux séquences correspondent respectivement aux bits pairs et impairs de la séquence de départ.

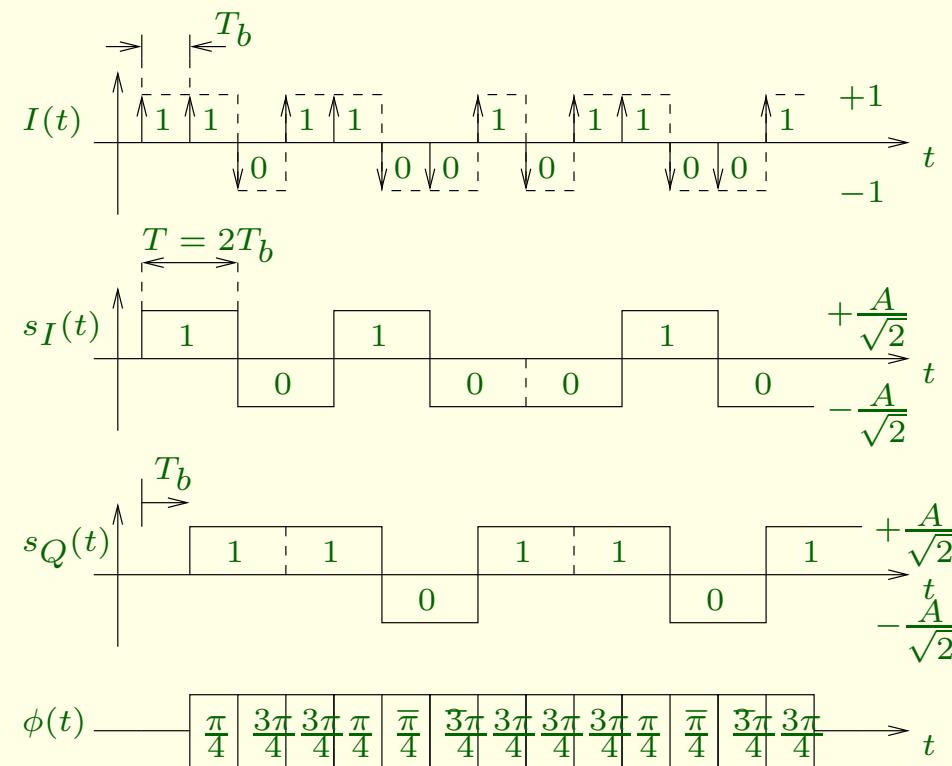


FIGURE 20: Formation des composantes en phase et en quadrature pour la modulation OQPSK (avec une mise en forme par un signal rectangulaire).

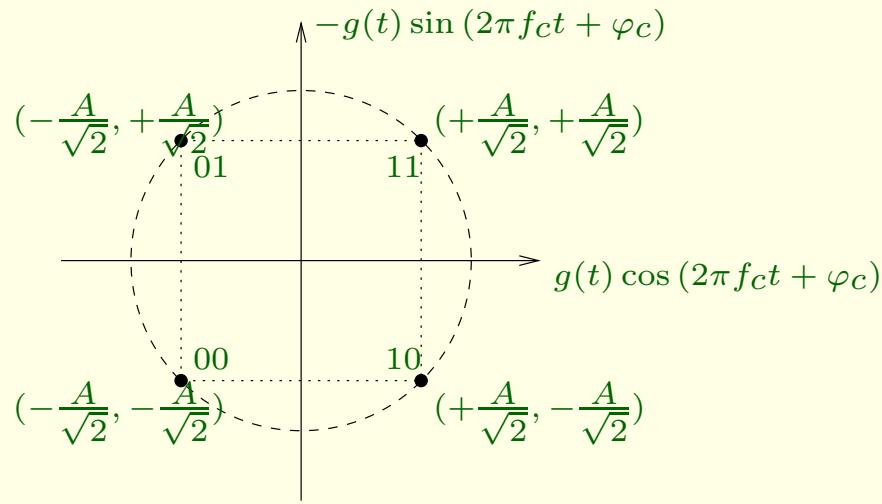


FIGURE 21: Diagramme de constellations pour la modulation OQPSK.

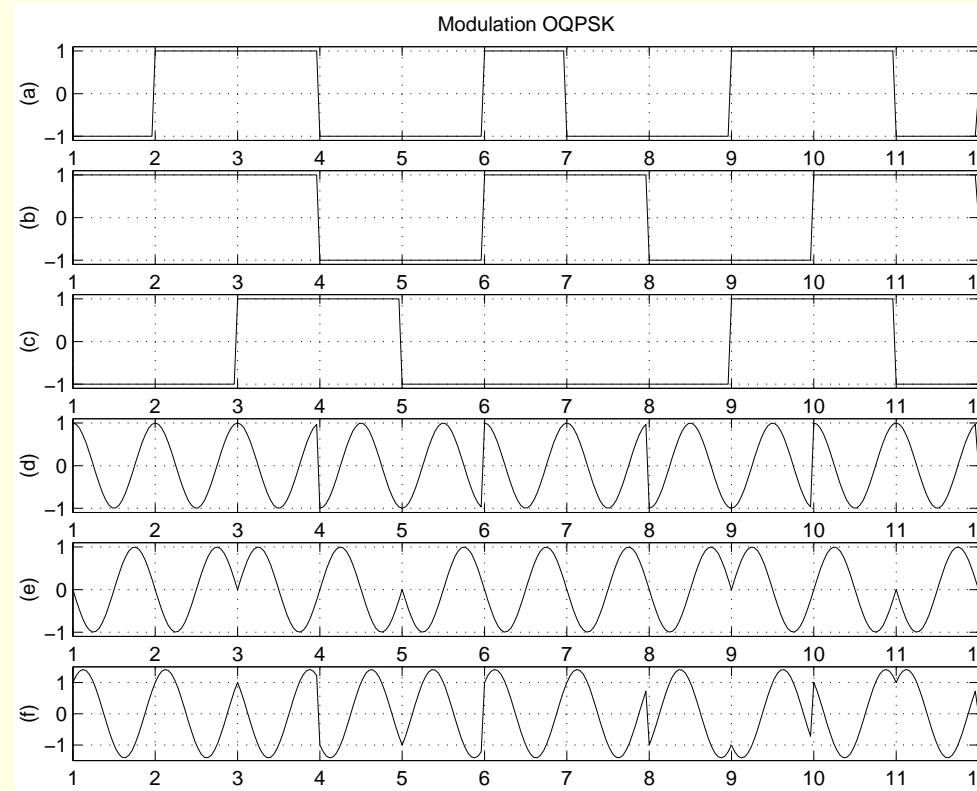


FIGURE 22: Illustration de la modulation OQPSK : (a) séquence binaire  $I(t)$ , (b)  $s_I(t)$ , (c)  $s_Q(t)$ , (d)  $s_I(t) \cos(2\pi f_c t)$ , (e)  $s_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$  et (f) signal modulé  $s(t)$ .

## Calcul de la densité spectrale de puissance pour modulations à décalage

L'idée consiste à modifier l'expression de la mise en forme en ajoutant un terme  $e^{-j2\pi\frac{t}{4T_b}}$ , de sorte à obtenir une onde de mise en forme qui vaudra :

$$g(t - kT) e^{jk\frac{\pi}{2}} e^{-j2\pi\frac{t}{4T_b}} = g(t - kT) e^{-j\frac{\pi}{2T}(t - kT)} \quad (156)$$

On compense cet ajout par l'introduction d'une nouvelle fréquence porteuse  $f'_c$

$$s(t) = \operatorname{Re} \left( e_s(t) e^{j(2\pi f_c t + \varphi_c)} \right) \quad (157)$$

$$= \operatorname{Re} \left( e_s(t) e^{-j2\pi\frac{t}{4T_b}} e^{j(2\pi(f_c + \frac{1}{4T_b})t + \varphi_c)} \right) \quad (158)$$

$$= \operatorname{Re} \left( v(t) e^{j(2\pi f'_c t + \varphi_c)} \right) \quad (159)$$

où  $v(t) = e^{-j2\pi\frac{t}{4T_b}} e_s(t)$  et  $f'_c = f_c + \frac{1}{4T_b}$ .

Si nous connaissons la densité spectrale de puissance du signal complexe  $v(t)$ , alors

$$\gamma_s(f) = \frac{\gamma_v(f - f'_c) + \gamma_v^*(-f - f'_c)}{4} = \frac{\gamma_v\left(f - f_c - \frac{1}{4T_b}\right) + \gamma_v^*\left(-f - f_c - \frac{1}{4T_b}\right)}{4} \quad (160)$$

Il reste à calculer  $\gamma_v(f)$ .

$$v(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) e^{jk\frac{\pi}{2}} e^{-j2\pi\frac{t}{4T_b}} \quad (161)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) e^{-j\frac{\pi}{2T_b}(t - kT_b)} \quad (162)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k h(t - kT_b) \quad (163)$$

où nous avons posé

$$h(t) = g(t) e^{-j\frac{\pi t}{2T_b}} \quad (164)$$

Le signal  $h(t)$  correspond à un nouveau signal de mise en forme dont la transformée de FOURIER se déduit du signal  $g(t)$

$$\mathcal{H}(f) = \mathcal{G} \left( f + \frac{1}{4T_b} \right) \quad (165)$$

La densité spectrale de puissance du signal  $v(t)$  s'obtient alors en adaptant la formule

$$\gamma_v(f) = \frac{\|\mathcal{H}(f)\|^2}{T_b} \left[ \sigma_A^2 + \mu_A^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T_b} \delta \left( f - \frac{m}{T_b} \right) \right] \quad (166)$$

dans

$$\gamma_s(f) = \frac{\gamma_v \left( f - f_c - \frac{1}{4T_b} \right) + \gamma_v^* \left( -f - f_c - \frac{1}{4T_b} \right)}{4} \quad (167)$$

Or la composante  $\frac{1}{4T_b}$  du filtre et celle  $-\frac{1}{4T_b}$  de  $\gamma_s(f)$  se compensent.

En conclusion, la modulation en quadrature et la modulation en quadrature à décalage ont la même densité spectrale de puissance.

## Densité spectrale de puissance d'une OQPSK à 4 états

L'enveloppe complexe du signal modulé est donnée par

$$e_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) e^{jk\frac{\pi}{2}} \quad (168)$$

où le signal de mise en forme  $g(t)$  et la variable aléatoire  $A_k$  valent respectivement

$$g(t) = \text{rect}_{[0,2T_b]}(t) \quad (169)$$

$$A_k \in \left\{ +\frac{A}{\sqrt{2}}, -\frac{A}{\sqrt{2}} \right\} \quad (170)$$

La densité spectrale de  $v$  se calcule comme :

$$\gamma_v(f) = 2A^2 T_b \text{sinc}^2 \left[ \left( f + \frac{1}{4T_b} \right) 2T_b \right] \quad (171)$$

La densité spectrale de puissance d'un signal modulé en OQPSK s'exprime par

$$\gamma_s(f) = \frac{A^2 T_b}{2} \{ \text{sinc}^2 [(f - f_c) 2T_b] + \text{sinc}^2 [(f + f_c) 2T_b] \} \quad (172)$$

et est exactement identique à celle d'un signal modulé QPSK.

# Modulation à saut de phase minimum (Minimum Shift Keying)

## Description

La caractéristique qui différencie la modulation MSK de la modulation OQPSK est le signal de mise en forme qui prend maintenant la forme

$$g(t) = \text{rect}_{[0,2T_b]}(t) \sin\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \quad (173)$$

Les séquences  $s_I(t)$  et  $s_Q(t)$  sont formées exactement de la même manière que pour la modulation OQPSK. La composante en phase  $s_I(t)$  s'écrit sous la forme

$$s_I(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{2k} \text{rect}_{[0,2T_b]}(t - 2kT_b) \sin\left[\frac{\pi(t - 2kT_b)}{2T_b}\right] \quad (174)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{2k} \text{rect}_{[0,2T_b]}(t - 2kT_b) \sin\left[\frac{\pi t}{2T_b} - k\pi\right] \quad (175)$$

Comme  $\sin(a - b) = \sin a \cos b - \cos a \sin b$ ,

$$s_I(t) = \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{2k} \operatorname{rect}_{[0,2T_b]}(t - 2kT_b) \sin \left[ \frac{\pi t}{2T_b} - k\pi \right] \quad (176)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{2k} \operatorname{rect}_{[0,2T_b]}(t - 2kT_b) \left[ \sin \left( \frac{\pi t}{2T_b} \right) \cos(k\pi) - \cos \left( \frac{\pi t}{2T_b} \right) \sin(k\pi) \right] \quad (177)$$

$$= \frac{A}{\sqrt{2}} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} I_{2k} \operatorname{rect}_{[0,2T_b]}(t - 2kT_b) \sin \left( \frac{\pi t}{2T_b} \right) \cos(k\pi) \quad (178)$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\sqrt{2}} I_{2k} (-1)^k \operatorname{rect}_{[0,2T_b]}(t - 2kT_b) \sin \left( \frac{\pi t}{2T_b} \right) \quad (179)$$

$$= \cos \left( \frac{\pi}{2} - \frac{\pi t}{2T_b} \right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\sqrt{2}} I_{2k} (-1)^k \operatorname{rect}_{[0,2T_b]}(t - 2kT_b) \quad (180)$$

$$= \cos \left( \frac{\pi t}{2T_b} - \frac{\pi}{2} \right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\sqrt{2}} I_{2k} (-1)^k \operatorname{rect}_{[0,2T_b]}(t - 2kT_b) \quad (181)$$

De même,

$$s_Q(t) = \sin \left( \frac{\pi t}{2T_b} - \frac{\pi}{2} \right) \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\sqrt{2}} I_{2k+1} (-1)^k \operatorname{rect}_{[0,2T_b]}(t - (2k+1)T_b) \quad (182)$$

L'enveloppe instantanée du signal modulé vaut :

$$a(t) = \sqrt{s_I^2(t) + s_Q^2(t)} \quad (183)$$

$$= \sqrt{\left( \frac{A}{\sqrt{2}} \right)^2 \cos^2 \left( \frac{\pi t}{2T_b} - \frac{\pi}{2} \right) + \left( \frac{A}{\sqrt{2}} \right)^2 \sin^2 \left( \frac{\pi t}{2T_b} - \frac{\pi}{2} \right)} \quad (184)$$

$$= A \quad (185)$$

La phase instantanée :

$$\varphi(t) = \tan^{-1} \left[ \frac{s_Q(t)}{s_I(t)} \right] \quad (186)$$

$$= \tan^{-1} \left[ \tan \left( \frac{\pi t}{2T_b} - \frac{\pi}{2} \right) \frac{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\sqrt{2}} I_{2k+1} (-1)^k \operatorname{rect}_{[0,2T_b]}(t - (2k+1)T_b)}{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{A}{\sqrt{2}} I_{2k} (-1)^k \operatorname{rect}_{[0,2T_b]}(t - 2kT_b)} \right] \quad (187)$$

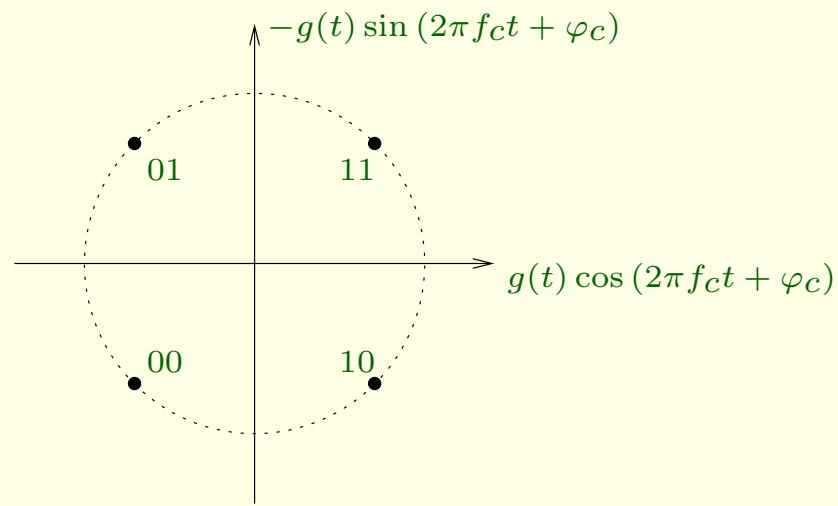


FIGURE 23: Diagramme de constellation pour la modulation MSK.

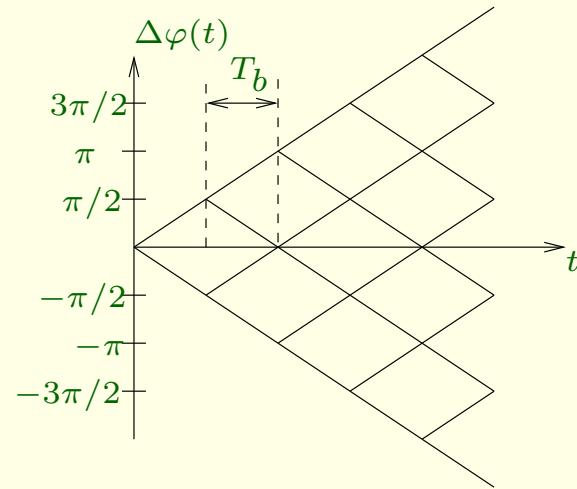


FIGURE 24: Treillis de phase pour la modulation MSK.

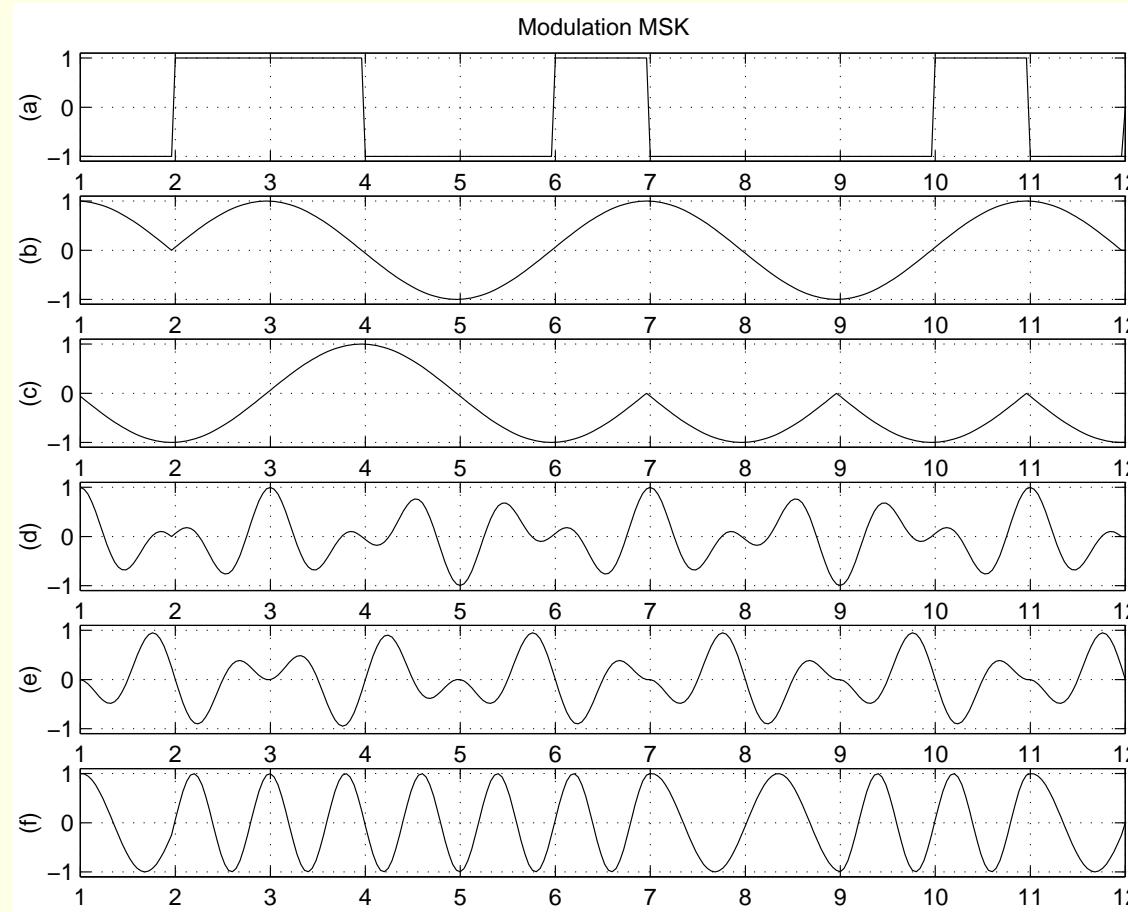


FIGURE 25: Illustration de la modulation MSK : (a) séquence binaire  $I(t)$ , (b)  $s_I(t)$ , (c)  $s_Q(t)$ , (d)  $s_I(t) \cos(2\pi f_c t)$ , (e)  $s_Q(t) \sin(2\pi f_c t)$  et (f) signal modulé  $s(t)$ .

## Type de modulation angulaire de la MSK ?

Comme l'enveloppe est constante et que la variation de phase vaut

$$\Delta\varphi(t) = \pm \frac{\pi t}{2T_b} \quad (188)$$

On peut écrire

$$s(t) = A \cos \left( 2\pi f_c t \pm \frac{\pi t}{2T_b} \right) \quad (189)$$

$$= A \cos \left[ 2\pi \left( f_c \pm \frac{1}{4T_b} \right) t \right] \quad (190)$$

La modulation MSK est donc une modulation de fréquence (dont l'excursion est égale à  $\Delta f = \frac{1}{4T_b}$ ).

## Densité spectrale de puissance

L'enveloppe complexe du signal modulé est à nouveau donnée par

$$e_s(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k g(t - kT_b) e^{jk\frac{\pi}{2}} \quad (191)$$

où le signal de mise en forme  $g(t)$  et la variable aléatoire  $A_k$  valent respectivement

$$g(t) = \text{rect}_{[0,2T_b]}(t) \sin\left(\frac{\pi t}{2T_b}\right) \quad (192)$$

$$A_k \in \{+A, -A\} \quad (193)$$

Après calcul de la transformée de FOURIER du signal de mise en forme  $\mathcal{H}(f) = \mathcal{G}\left(f + \frac{1}{4T_b}\right)$ ,

$$\gamma_v(f) = \frac{16 A^2 T_b}{\pi^2} \left\{ \frac{\cos\left[2\pi\left(f + \frac{1}{4T_b}\right) T_b\right]}{1 - 16 \left(f + \frac{1}{4T_b}\right)^2 T_b^2} \right\}^2 \quad (194)$$

La densité spectrale de puissance d'un signal modulé en MSK s'exprime finalement par

$$\gamma_s(f) = \frac{4 A^2 T_b}{\pi} \left\{ \left( \frac{\cos [2\pi (f - f_c) T_b]}{1 - 16 (f - f_c)^2 T_b^2} \right)^2 + \left( \frac{\cos [2\pi (f + f_c) T_b]}{1 - 16 (f + f_c)^2 T_b^2} \right)^2 \right\} \quad (195)$$

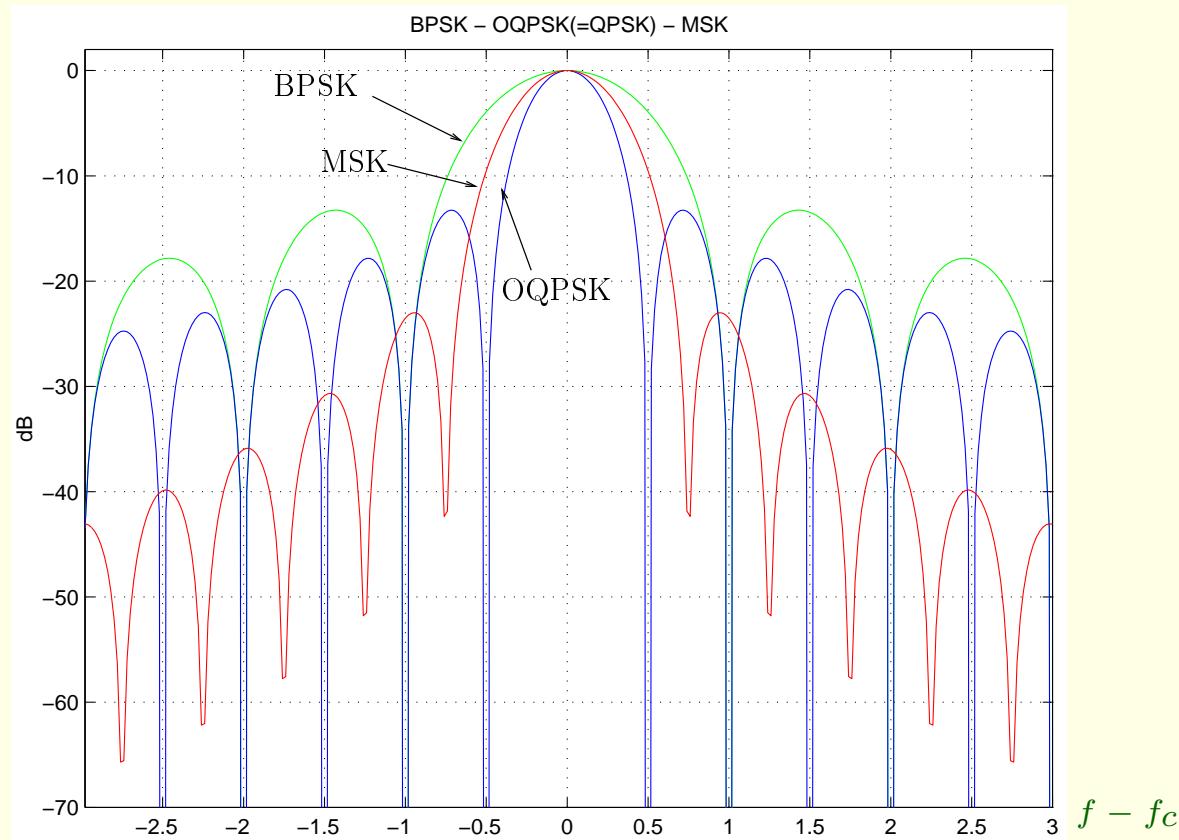


FIGURE 26: Comparaison des densités spectrales de puissance.

La modulation utilisée pour la transmission GSM est une variante de la MSK ; il s'agit d'une technique appelée **Gaussian Minimum Shift Keying** (GMSK) pour laquelle l'onde de mise en forme est une gaussienne.

## Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic
- Étude des supports de transmission
  - Transmission dans le réseau téléphonique
  - Ingénierie des radiocommunications mobiles terrestres
- Fonctionnement du système de positionnement GPS

# Modélisation du canal pour la transmission de signaux numériques et interférence inter-symboles

- Définition de l'interférence inter-symboles
- Critère de NYQUIST
  - Canal idéal de NYQUIST
  - Impulsion en cosinus surélevé

## Modulation de base

**Théorème 2. [Formule d'interpolation de Whittaker]** Soit  $y(t)$  un signal analogique intégrable de spectre borné  $[-W, W]$ . Soit  $\{y[nT_b]\}$  l'ensemble de ses échantillons de pas  $T_b = 1/f_b$ . La fonction  $y(t)$  s'écrit comme la série de fonctions (avec  $W = f_b/2$ )

$$y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} y[nT_b] \operatorname{sinc} \left( \frac{t - nT_b}{T_b} \right) \quad (196)$$

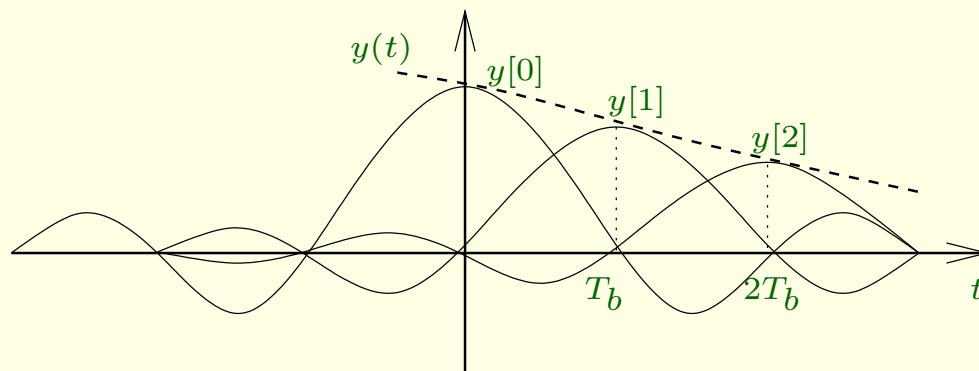


FIGURE 27: Interprétation des termes de la formule d'interpolation de WHITTAKER.

## Interprétation de la formule d'interpolation

- $y(t)$  : signal analogique complet (et théoriquement parfait)
- $y[nT_b]$  : échantillons à cadence  $T_b$
- $\text{sinc}\left(\frac{t-nT_b}{T_b}\right) = p(t)$  : onde de mise en forme (pulse) dont le spectre est strictement limité à  $[-W, W]$ , ce qui est malheureusement irréalisable.

Quid des imperfections dans un canal ?

- Bruit ?  $\Rightarrow$  récepteur “adapté”
- Onde de mise en forme ? Certaines ondes de mise en forme sont impossibles à réaliser.
- Multi-trajets, obstacles, etc  $\Rightarrow$  voir chapitres sur les radio-communications mobiles terrestres

Au récepteur, on n'est pas intéressé par  $y(t)$ , mais par cette valeur au moment de prendre la décision sur le symbole transmis. Autrement dit,  $y[kT_b]$  au droit de l'entrée de l'organe de décision.

## Choix d'une onde de mise en forme $p(t)$

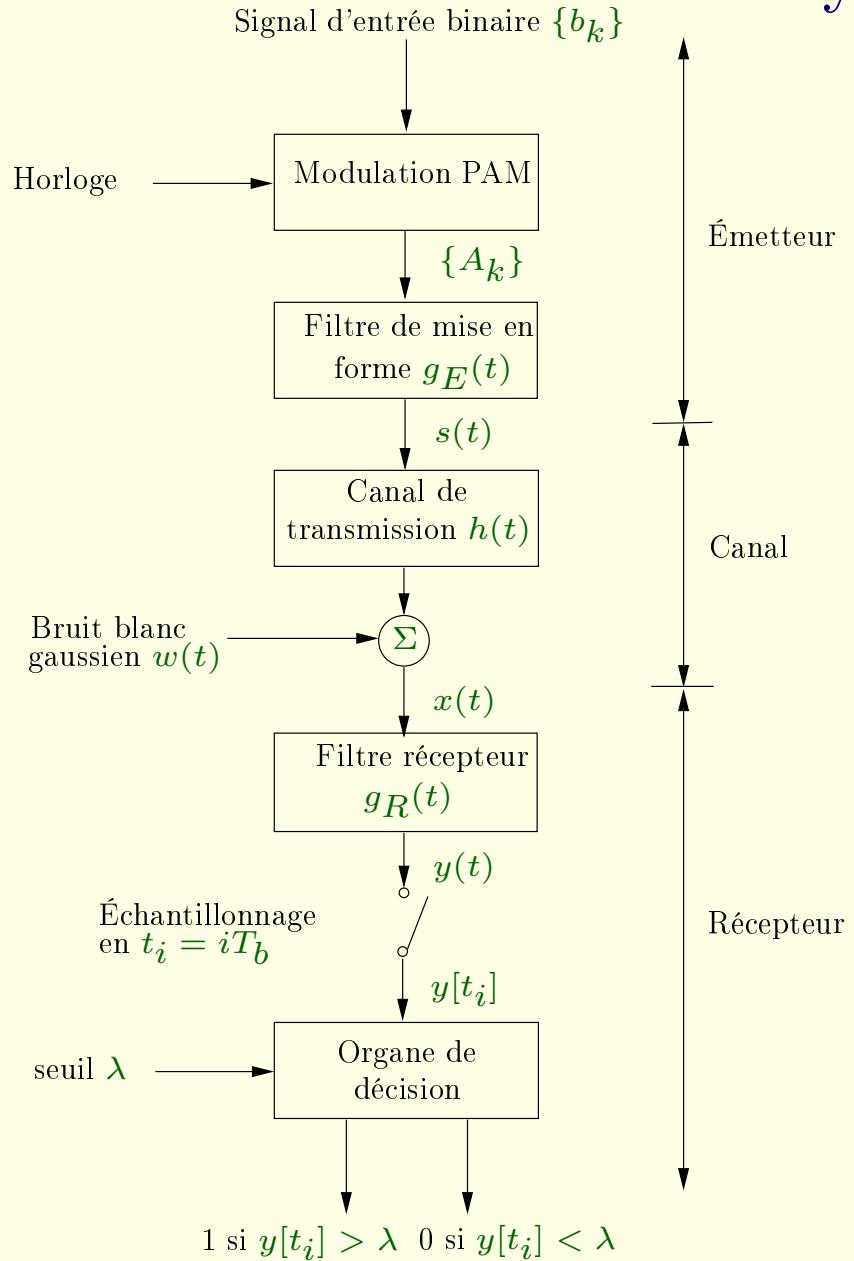
Considérations :

1.  $p(t)$  doit être limité dans le temps. Ainsi,  $p(t) = 0$  pour  $t < -\tau$ . En effet, si le  $k$ -ième symbole arrive au temps  $kT - \tau$ , il ne peut contribuer à  $y(t)$  avant  $kT - \tau$ .
2.  $\mathcal{P}(f)$  doit essentiellement être un signal passe-bande, dont le contenu est surtout confiné dans  $[-\frac{1}{2T_b}, -\frac{1}{2T_b}]$ .
3. en l'absence de bruit, on doit retrouver le signal exact.

On peut noter qu'il est impossible de réaliser 1. et 2.

Il faut donc regarder si au delà d'un certain intervalle  $p(t)$  est suffisamment proche de 0 et l'occupation fréquentielle suffisamment faible en dehors de la bande passante.

# Définition de l'interférence inter-symboles



## Modèle

La sortie du filtre de réception peut s'écrire sous la forme

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t - kT_b) \otimes g_E(t) \otimes h(t) \otimes g_R(t) + w(t) \otimes g_R(t) \quad (197)$$

où le symbole  $\otimes$  est une convolution.

## Modèle

La sortie du filtre de réception peut s'écrire sous la forme

$$y(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t - kT_b) \otimes g_E(t) \otimes h(t) \otimes g_R(t) + w(t) \otimes g_R(t) \quad (197)$$

où le symbole  $\otimes$  est une convolution.

On adopte les notations (on choisit  $\mu$  tel que  $p(0) = 1$ ) :

$$\mu p(t) = g_E(t) \otimes h(t) \otimes g_R(t) \quad (198)$$

$$n(t) = w(t) \otimes g_R(t) \quad (199)$$

Dans le domaine fréquentiel,

$$\mu \mathcal{P}(f) = \mathcal{G}_E(f) \mathcal{H}(f) \mathcal{G}_R(f) \quad (200)$$

Comme  $w(t)$  est modélisé comme un bruit blanc additif gaussien de moyenne nulle

$$y(t) = \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p(t - kT_b) + n(t) \quad (201)$$

Le signal  $y(t)$  à la sortie du filtre de réception est échantillonné aux instants  $t_i = iT_b$

$$y[t_i] = \mu \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p[(i - k)T_b] + n[t_i] \quad (202)$$

$$= \mu A_i + \sum_{\substack{k = -\infty \\ k \neq i}}^{+\infty} A_k p[(i - k)T_b] + n[t_i] \quad (203)$$

$$\text{Analyse de } y[t_i] = \mu A_i + \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p[(i-k)T_b] + n[t_i]$$

$$k \neq i$$

- Signal utile :  $\mu A_i$
- Bruit :
  - $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k p[(i-k)T_b]$  représente l'effet résiduel de tous les autres bits transmis sur le  $i$ -ème bit. Il est appelé interférence inter-symboles. On doit annuler, du moins tenter de minimiser ce bruit “artificiel”.
  - on réduit la puissance du bruit  $n[t_i]$  grâce au filtre du récepteur (suppression du bruit hors bande).

Minimiser le terme d'interférence inter-symboles à l'entrée de l'organe de décision permet d'augmenter le rapport signal à bruit. Au bout du compte, cela permet de réduire  $P_e$ .

## Critère de Nyquist

But : choisir la forme de  $p(t)$  de manière à minimiser, voire éliminer, le terme d'interférence.

## Critère de Nyquist

But : choisir la forme de  $p(t)$  de manière à minimiser, voire éliminer, le terme d'interférence.  
Il faut que l'impulsion  $p(t)$  vérifie la condition

$$p[(i - k)T_b] = \begin{cases} 1 & \text{si } i = k \\ 0 & \text{si } i \neq k \end{cases} \quad (204)$$

où  $p[0] = 1$  par normalisation. Pour une transmission en bande de base idéale en l'absence de bruit.

On cherche la forme “idéale” de  $p(t)$ . Pour la déterminer, on va injecter les contraintes sur  $p[(i - k)T_b]$  dans l'expression de la transformée de FOURIER.

## Élaboration du critère de Nyquist

### Version échantillonnée de $p(t)$

Considérons la version échantillonnée de  $p(t)$  représentée par la séquence d'échantillons  $\{p[mT_b]\}$  pour  $m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$  Le signal

$$p_s(t) = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} p[mT_b] \delta(t - mT_b) \quad (205)$$

représente alors une version échantillonnée du signal  $p(t)$ .

Sa transformée de FOURIER du signal vaut

$$\mathcal{P}_s(f) = f_b \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(f - mf_b) \quad (206)$$

où  $f_b = 1/T_b$  est le débit binaire (ou rythme) exprimé en  $[b/s]$ .

## Deux expressions pour la transformée de Fourier $\mathcal{P}_s(f)$

Analytiquement, elle peut encore s'écrire sous la forme

$$\mathcal{P}_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{+\infty} [p[mT_b]\delta(t - mT_b)] e^{-2\pi jft} dt \quad (207)$$

mais vu que la somme se réduit au terme correspondant à  $m = 0$ , on peut encore écrire

$$\mathcal{P}_s(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} p[0]\delta(t)e^{-2\pi jtf} dt = 1 \quad (208)$$

En combinant  $\mathcal{P}_s(f) = f_b \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(f - mf_b)$  et  $\mathcal{P}_s(f) = 1$  :

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(f - mf_b) = T_b \quad (209)$$

C'est le critère de NYQUIST pour une transmission en bande de base idéale en l'absence de bruit.

**Proposition 2. [Critère de Nyquist]** *La transformée de FOURIER  $\mathcal{P}(f)$  de l'impulsion  $p(t)$  élimine totalement l'interférence inter-symboles pour des échantillons pris toutes les  $T_b$  secondes si elle vérifie la condition*

$$\sum_{m=-\infty}^{+\infty} \mathcal{P}(f - mf_b) = T_b \quad (210)$$

## “Canal” idéal de Nyquist

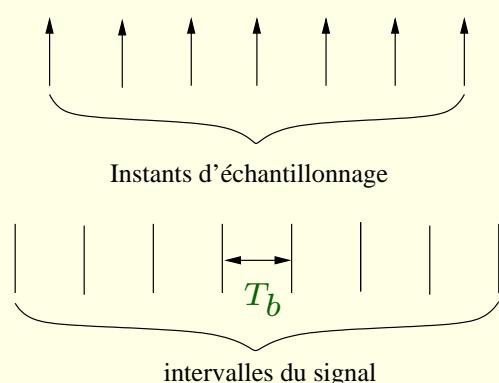
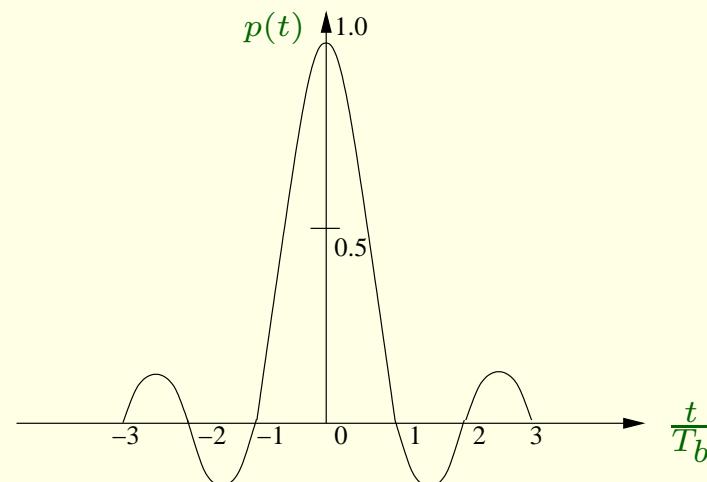
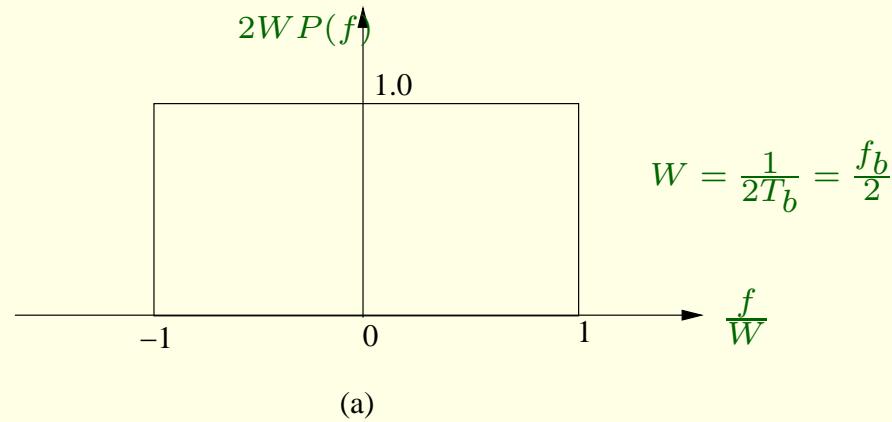
La façon la plus simple de satisfaire le critère de NYQUIST consiste à choisir pour  $\mathcal{P}(f)$  une impulsion de forme rectangulaire

$$\mathcal{P}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W} & -W < f < W \\ 0 & |f| > W \end{cases} \quad (211)$$

$$= \frac{1}{2W} \text{rect}_{[-W, +W]}(f) \quad (212)$$

où la bande de base du système  $W$  est définie par

$$W = \frac{f_b}{2} = \frac{1}{2T_b} \quad (213)$$



## Autres formes d'impulsion

Il existe cependant des raisons pour lesquelles l'impulsion en sinus cardinal ne peut être utilisée en pratique :

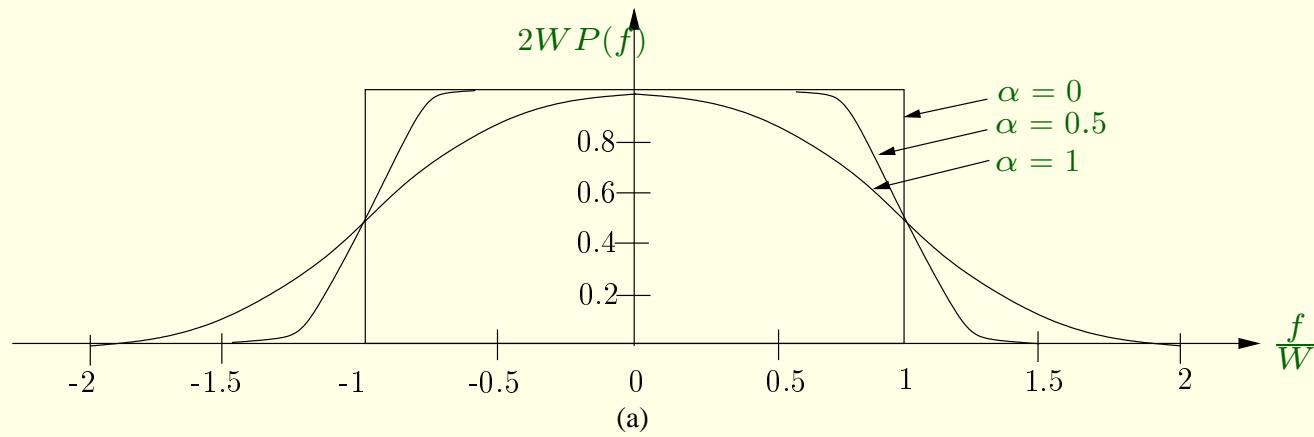
1. elle nécessite que  $\mathcal{P}(f)$  soit constante sur l'intervalle de fréquence  $[-W, +W]$  et nulle partout ailleurs.
2. la fonction  $p(t)$  décroît en  $1/|t|$  pour  $|t|$  élevé ; elle décroît donc très lentement, les sinus cardinal se répercuteront donc sur des échantillons lointains.

Impulsion en cosinus surélevé dont le spectre est donné par

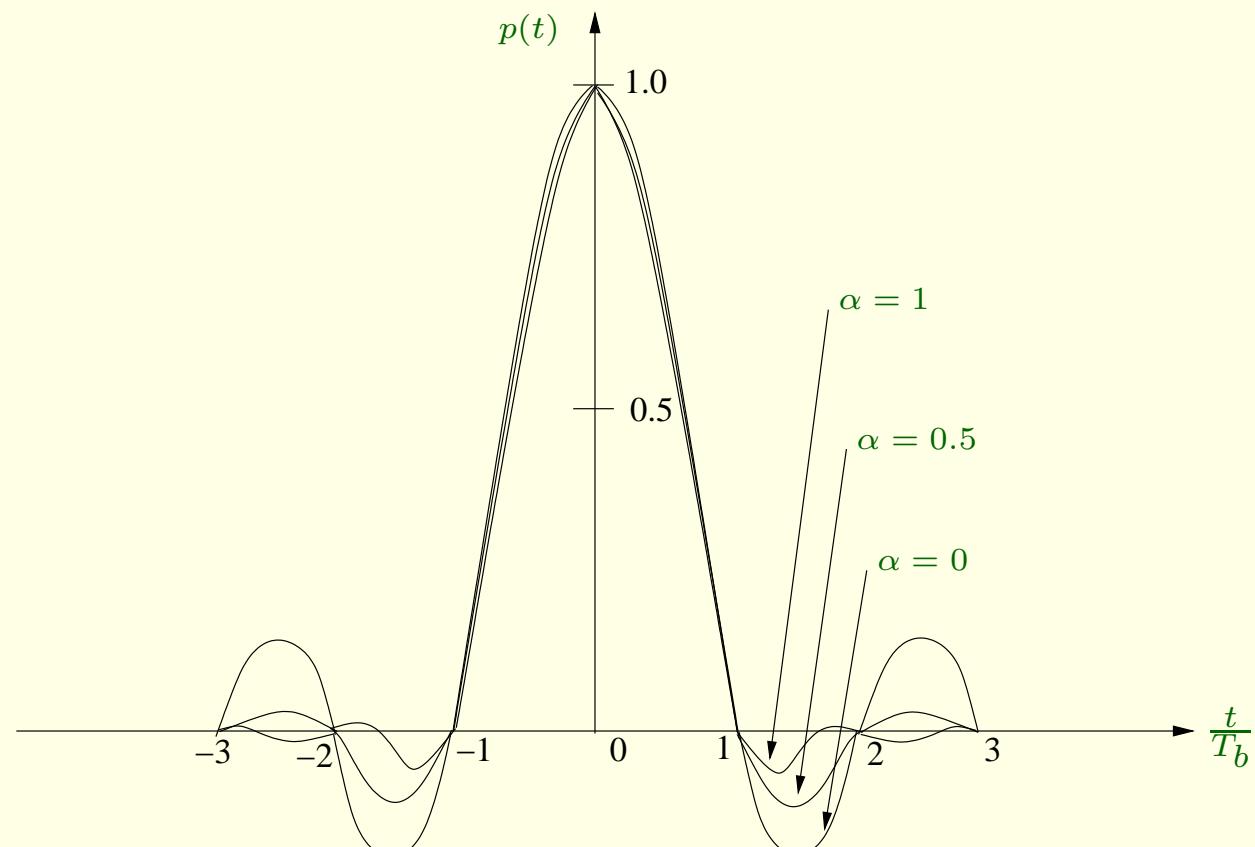
$$\mathcal{P}(f) = \begin{cases} \frac{1}{2W} \left\{ 1 - \sin \left[ \frac{\pi(|f|-W)}{2W-2f_1} \right] \right\} & 0 \leq |f| < f_1 \\ 0 & f_1 \leq |f| \leq 2W - f_1 \\ & |f| \geq 2W - f_1 \end{cases} \quad (214)$$

La constante  $f_1$  et la bande de base  $W$  sont liées par ( $\alpha$  est le facteur de rolloff)

$$\alpha = 1 - \frac{f_1}{W} \quad (215)$$



(a)



(b)

Bandé passante du système  $B_T$  égale à

$$B_T = 2W - f_1 = W(1 + \alpha) \quad (216)$$

## Remarques pratiques

$$\mu \mathcal{P}(f) = \mathcal{G}_E(f) \mathcal{H}(f) \mathcal{G}_R(f) \quad (217)$$

C'est donc l'ensemble des filtres d'une chaîne qu'il faudrait "optimiser", en incluant  $\mathcal{H}(f)$  qui est inconnu !

Solution :

1. estimer  $\mathcal{H}(f)$  au moyen de  $\widehat{\mathcal{H}}(f)$ .
2. compenser  $\mathcal{H}(f)$  au moyen de l'inverse de  $\widehat{\mathcal{H}}(f)$ .

En conclusion, après compensation, on doit avoir

$$\mu \mathcal{P}(f) = \mathcal{G}_E(f) \mathcal{G}_R(f) \quad (218)$$

## Mais comment choisir les filtres à l'émission et à la réception ?

Dans un système réel :

- il faut filtrer à l'émission, pour éviter d'émettre des parasites dans les bandes voisines.
- il faut filtrer à la réception, pour éliminer la contribution de puissance du bruit hors bande.
- $\mathcal{P}(f)$  est contraint à une certaine expression  
     $\Rightarrow$  on peut répartir  $\mathcal{P}(f)$  sur l'émission et la réception (on parle parfois de demi-NYQUIST)

Analogie avec le canal idéal pour la transmission de signaux analogiques :

$$\mathcal{H}(f) = Ae^{-2\pi j f \tau} \quad (219)$$

## Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic
- Étude des supports de transmission
  - Transmission dans le réseau téléphonique
  - Ingénierie des radiocommunications mobiles terrestres
- Fonctionnement du système de positionnement GPS

# Étalement de spectre

- Introduction
  - Utilisation
  - Techniques d'étalement
- Étalement direct
  - Principes de base
  - Génération de séquences pseudo-aléatoires
  - Principe de la transmission en bande de base
  - Étalement direct par modulation BPSK
- Étude des performances
  - Gain d'étalement
  - Probabilité d'erreur
  - Marge d'interférence
  - Capacité

# Introduction

Objectifs	Domaine militaire	Application commerciale
Lutte contre le brouillage	✓	✓
Accès multiple	✓	✓
Détection difficile	✓	
Protection des données	✓	✓
Appel sélectif	✓	✓
Identification	✓	✓
Navigation	✓	✓
Protection contre les multi-trajets	✓	✓
Faible densité de flux émis	✓	✓

TABLE 2: Applications de systèmes à étalement de spectre.

Il existe essentiellement deux techniques d'étalement du spectre

- l'étalement par sauts de fréquence ou Frequency Hopping.
- l'étalement direct ou Direct Spreading (DS). Cette technique porte aussi le nom Code-Division Multiplexing (CDM).

## Principes de base de l'étalement direct

Dans un système à étalement de spectre, on considère deux types de signaux :

1. le signal contenant les données à transmettre, de période  $T_b$ ,
2. le signal permettant d'effectuer l'étalement, de période  $T_c$  (on parle de “chip”), nettement plus petite que  $T_b$ .

Par la suite, nous prendrons

$$T_b = NT_c \tag{220}$$

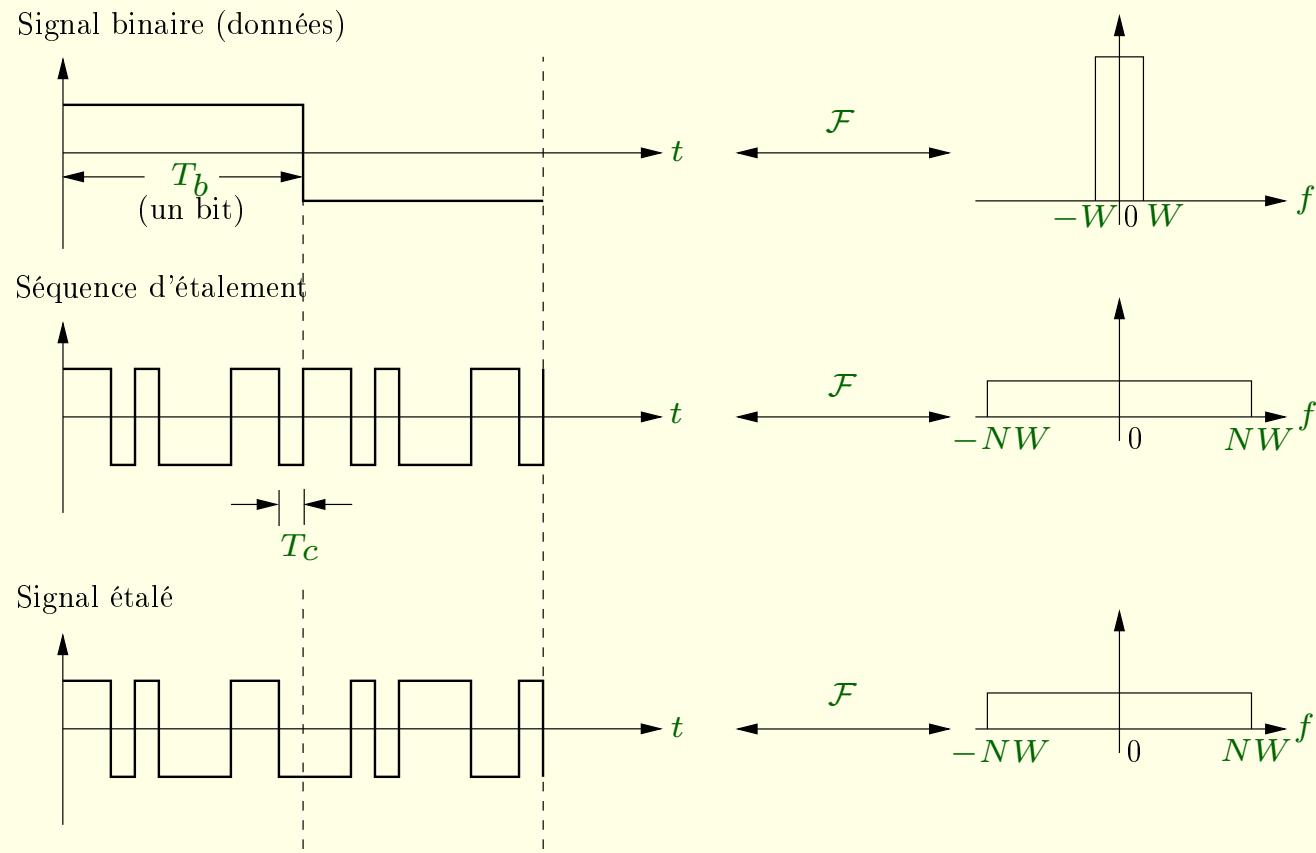


FIGURE 28: Exemple d'étalement d'un signal de données binaires.

# Densités spectrales

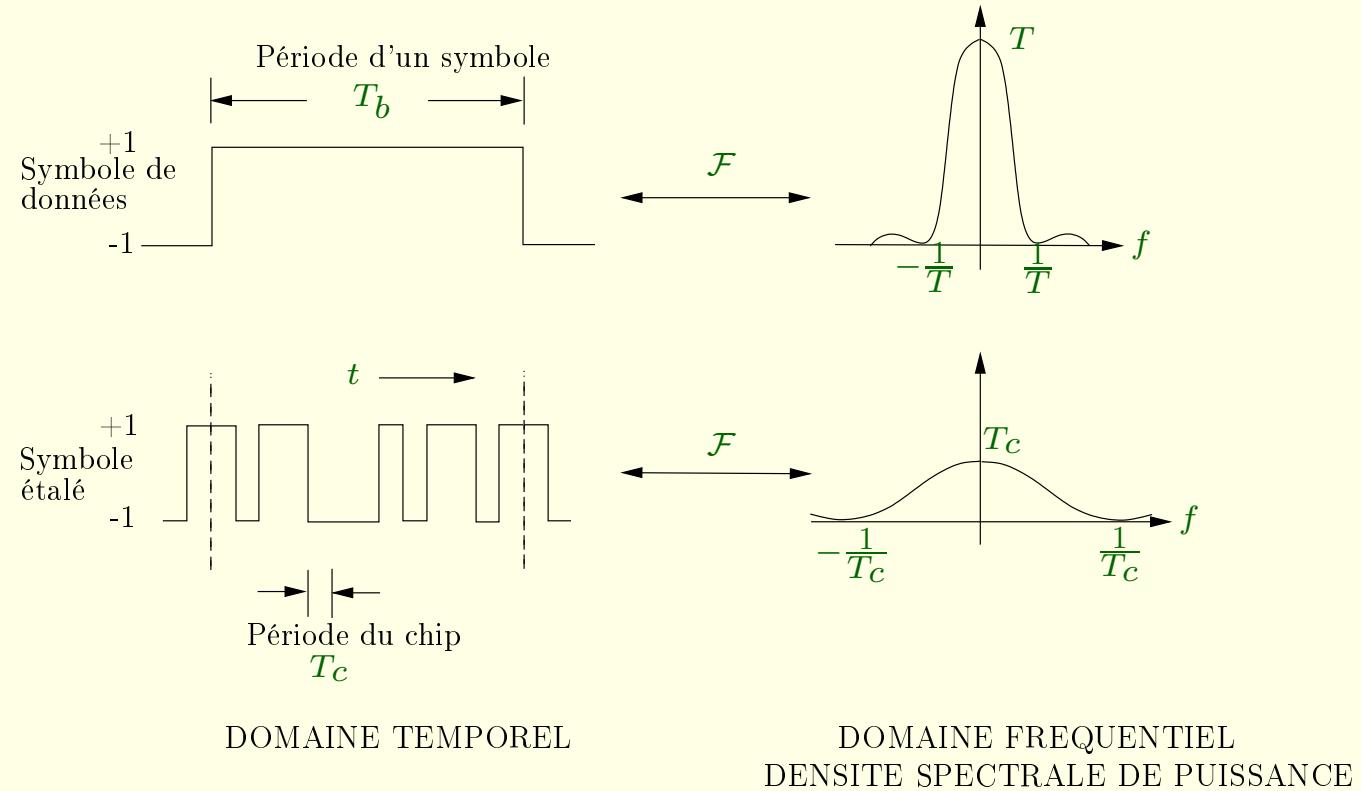


FIGURE 29: Effet de la multiplication par une séquence sur le spectre.

# Génération des séquences pseudo-aléatoires

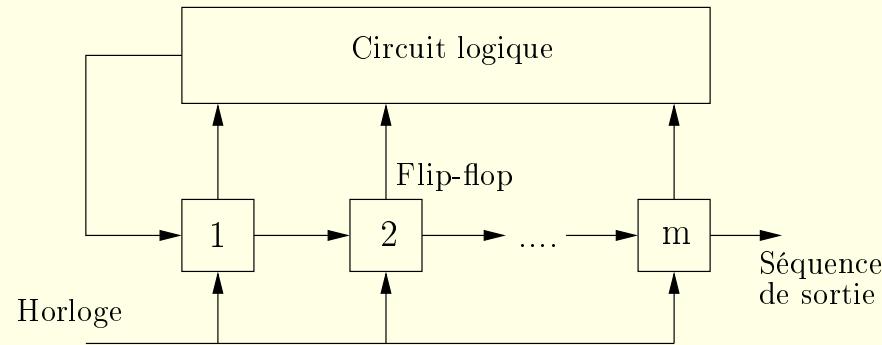


FIGURE 30: Registre à décalage à contre-réaction.

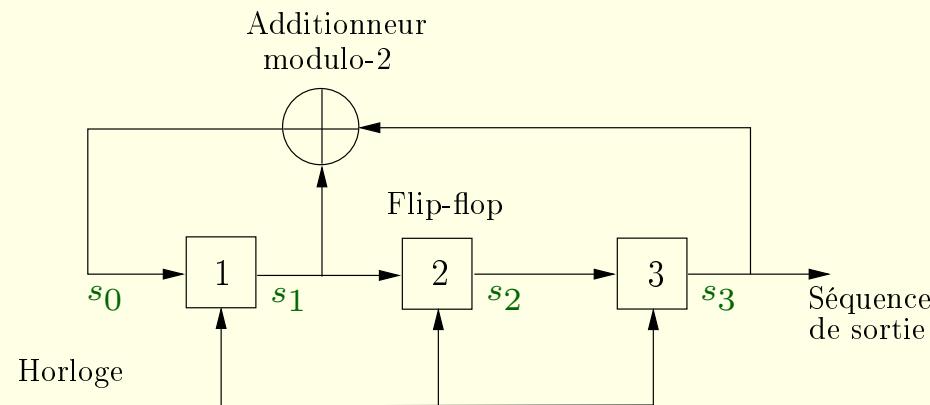


FIGURE 31: Exemple de registre à décalage linéaire.

# Propriétés d'une séquence de longueur maximale

## 1. [Espérance]

L'espérance vaut

$$E \{c(t)\} = \frac{1}{N} \quad (221)$$

Contrairement à une séquence aléatoire, l'espérance n'est pas nulle mais elle diminue avec la taille du code d'étalement.

## 2. [Périodicité de la fonction d'auto-corrélation]

La fonction d'autocorrélation d'une séquence de longueur maximale est périodique.

## 3. [Fonction d'autocorrélation]

La fonction d'autocorrélation d'une séquence de longueur maximale est donnée par

$$\Gamma_{cc}(\tau) = \begin{cases} 1 - \frac{N+1}{NT_c} |\tau|, & |\tau| \leq T_c \\ -\frac{1}{N} & \text{ailleurs} \end{cases} \quad (222)$$

## Densité spectrale de puissance d'un signal étalé

$$\gamma_c(f) = \frac{1}{N^2} \delta(f) + \frac{1+N}{N^2} \sum_{n=-\infty, n \neq 0}^{+\infty} \left( \frac{\sin(\pi \frac{n}{N})}{\pi \frac{n}{N}} \right)^2 \delta \left( f - \frac{n}{NT_c} \right) \quad (223)$$

Comparons une séquence de longueur maximale et une séquence réellement aléatoire :

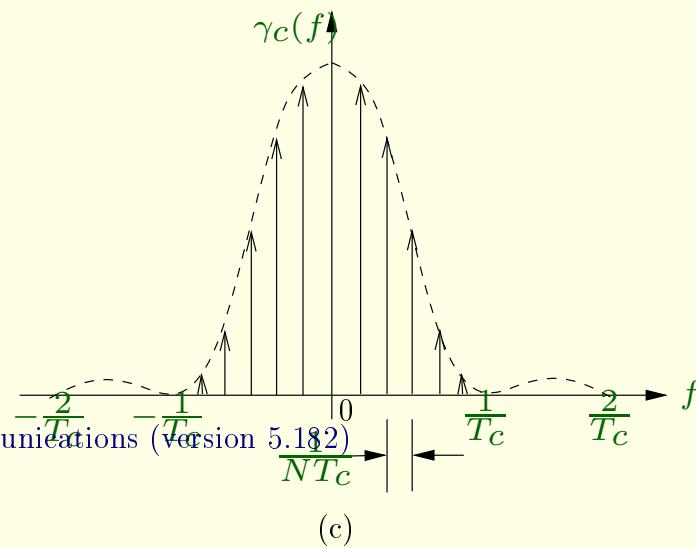
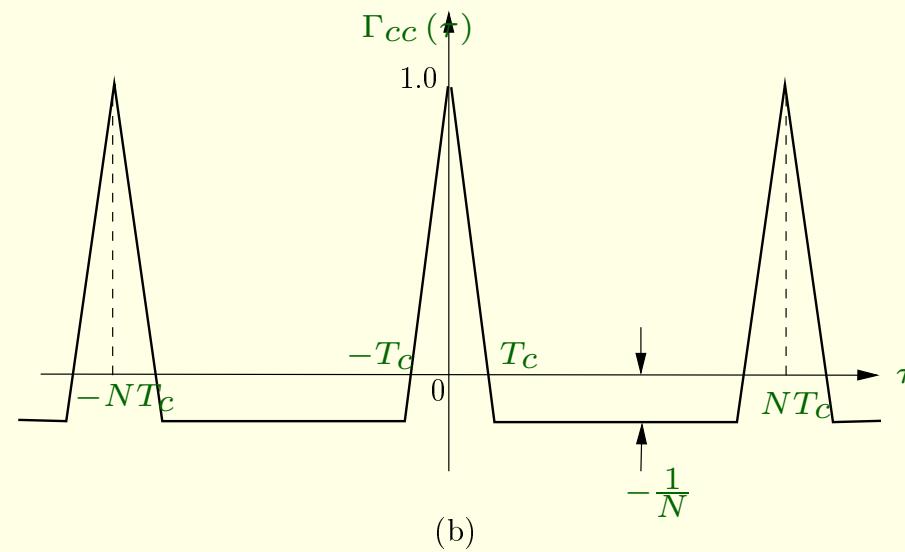
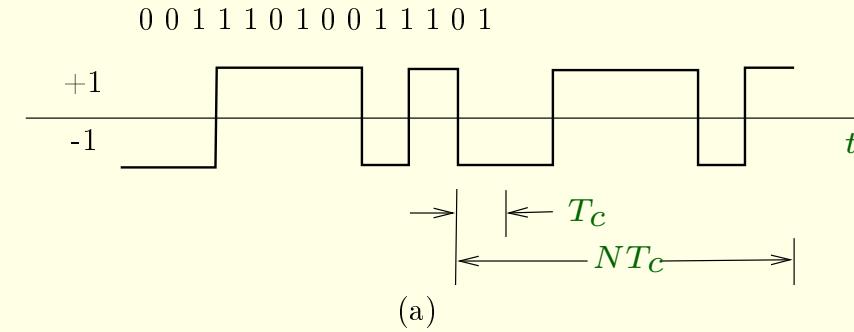
- sur une période de la séquence de longueur maximale, la fonction d'autocorrélation de  $c(t)$  est similaire à celle de la séquence aléatoire.

$$\begin{cases} 1 - \frac{|\tau|}{T_c} & |\tau| \leq T_c \\ 0 & |\tau| > T_c \end{cases} \quad (224)$$

Les densités spectrales des deux séquences ont une même enveloppe.

- la différence fondamentale réside dans le fait que le spectre de la séquence aléatoire est continu tandis que celui de la séquence de longueur maximale est composé de raies espacées de  $1/NT_c$ .

Séquence binaire



# Choix d'une séquence de longueur maximale

Registre à décalage de longueur m	Configurations possibles pour la rétroaction
2	$[2,1]$
3	$[3,1]$
4	$[4,1]$
5	$[5,2]$ , $[5,4,3,2]$ , $[5,4,2,1]$
6	$[6,1]$ , $[6,5,2,1]$ , $[6,5,3,2]$
7	$[7,1]$ , $[7,3]$ , $[7,3,2,1]$ , $[7,4,3,2]$ , $[7,6,4,2]$ , $[7,6,3,1]$ , $[7,6,5,2]$ , $[7,6,5,4,2,1]$ , $[7,5,4,3,2,1]$
8	$[8,4,3,2]$ , $[8,6,5,3]$ , $[8,6,5,2]$ , $[8,5,3,1]$ , $[8,6,5,1]$ , $[8,7,6,1]$ , $[8,7,6,5,2,1]$ , $[8,6,4,3,2,1]$

FIGURE 32: Table permettant de construire le registre à décalage adéquat.

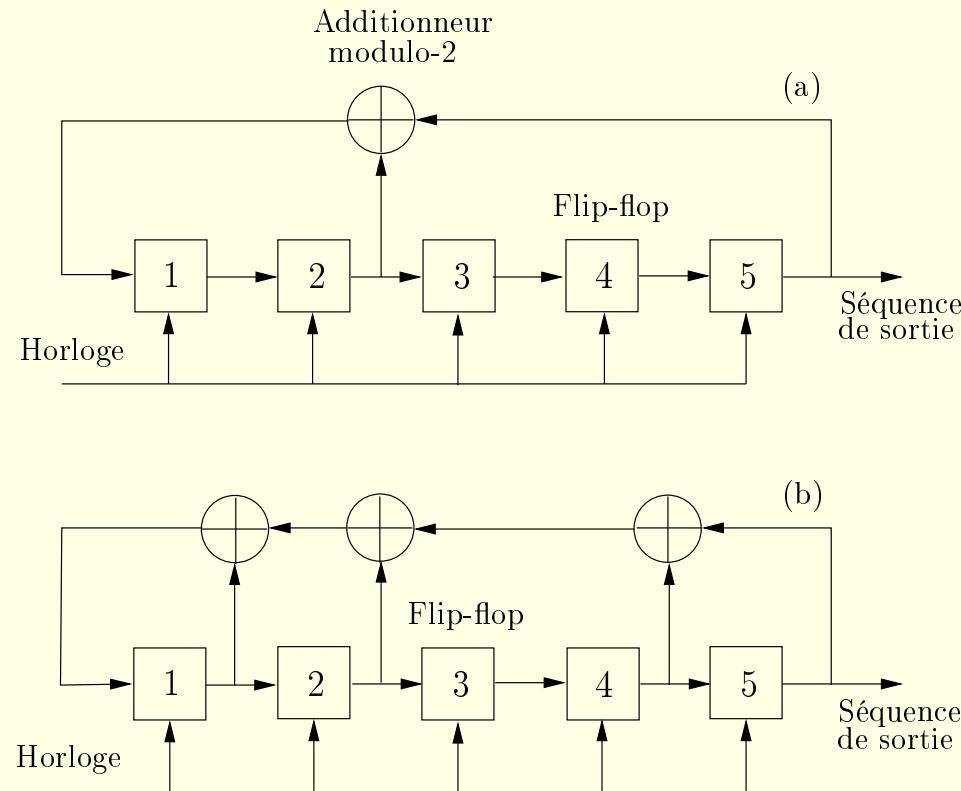


FIGURE 33: Deux schémas possibles pour  $m = 5$ .

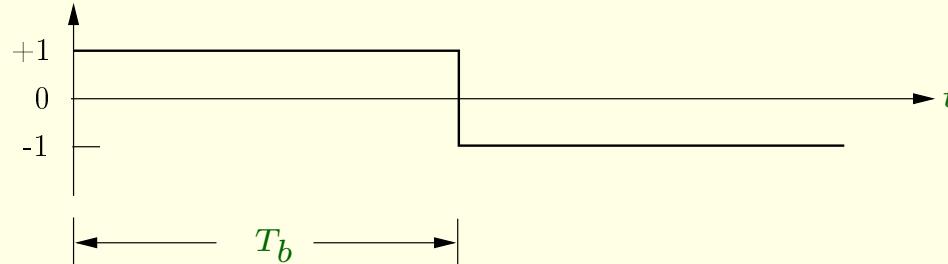
Bit de rétroaction	Registres					Bit de sortie
	1	0	0	0	0	
0	0	1	0	0	0	0
1	1	0	1	0	0	0
0	0	1	0	1	0	0
1	1	0	1	0	1	0
1	1	1	0	1	0	1
1	1	1	1	0	1	0
0	0	1	1	1	0	1
1	1	0	1	1	1	0
1	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1	1
0	0	0	1	1	0	1
...	...	...	...	...	...	...

TABLE 3: Évolution du registre au cours d'une période de la séquence.

# Principe de la transmission en bande de base

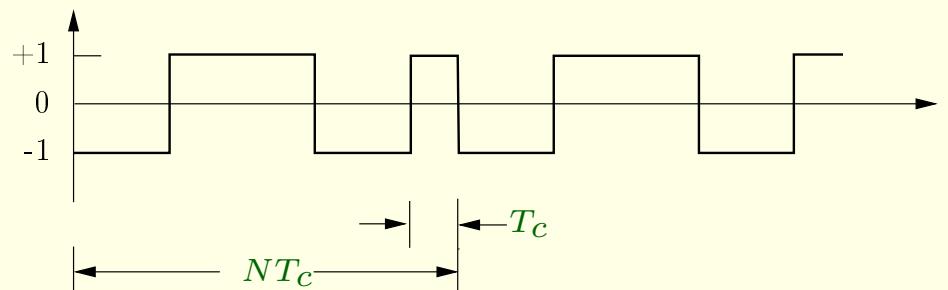
Soit la séquence binaire  $\{b_k\}$  représentant l'information à transmettre. On définit une onde continue  $b(t)$  par un codage de type NRZ bipolaire  $\pm 1$ .

Signal de données  $b(t)$



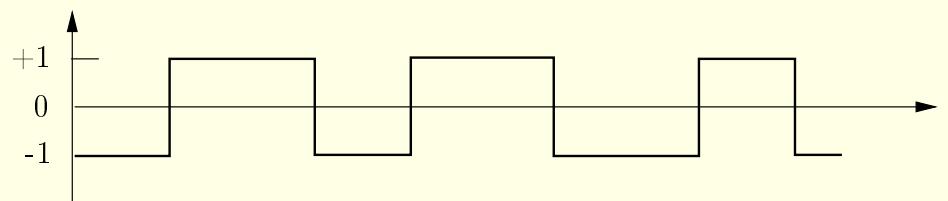
(a)

Code d'étalement  $c(t)$

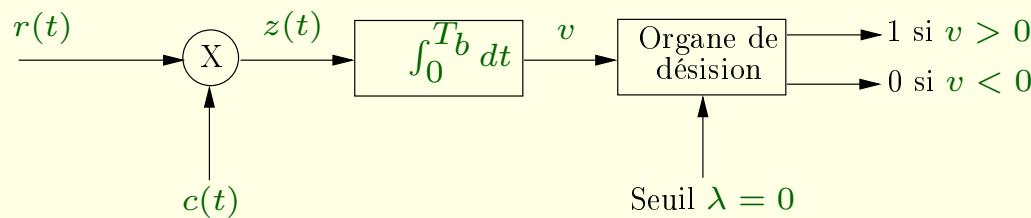
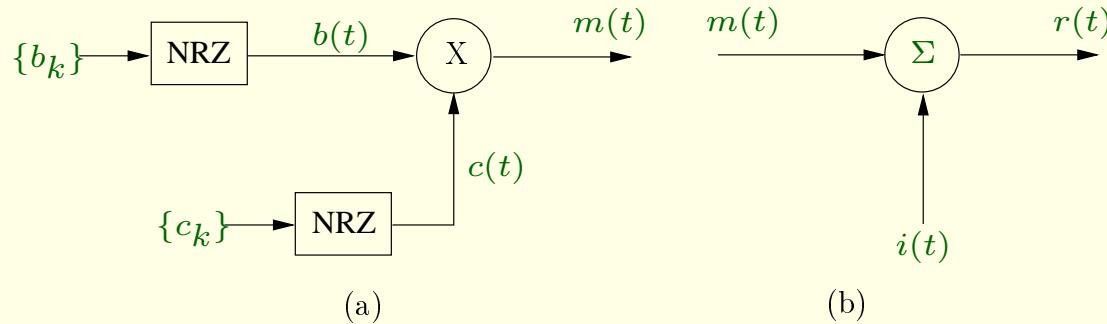


(b)

Signal étalé  $m(t)$



(c)



(c)

$$m(t) = c(t)b(t) \quad (225)$$

$$\mathcal{M}(f) = \mathcal{B}(f) \otimes \mathcal{C}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{C}(\tau) \mathcal{B}(f - \tau) d\tau \quad (226)$$

La séquence  $c(t)$  joue le rôle de code d'étalement.

## Réception

Le récepteur reçoit le signal étalé  $m(t)$  bruité par des interférences caractérisées par le signal  $i(t)$

$$r(t) = m(t) + i(t) \quad (227)$$

$$= c(t)b(t) + i(t) \quad (228)$$

Si l'émetteur et le récepteur sont parfaitement synchronisés, la sortie du multiplicateur est

$$z(t) = c(t)r(t) \quad (229)$$

$$= c^2(t)b(t) + c(t)i(t) \quad (230)$$

Le signal  $c^2(t)$  est égal à 1 pour tout instant  $t$ . D'où

$$z(t) = b(t) + c(t)i(t) \quad (231)$$

# Étalement direct par modulation BPSK

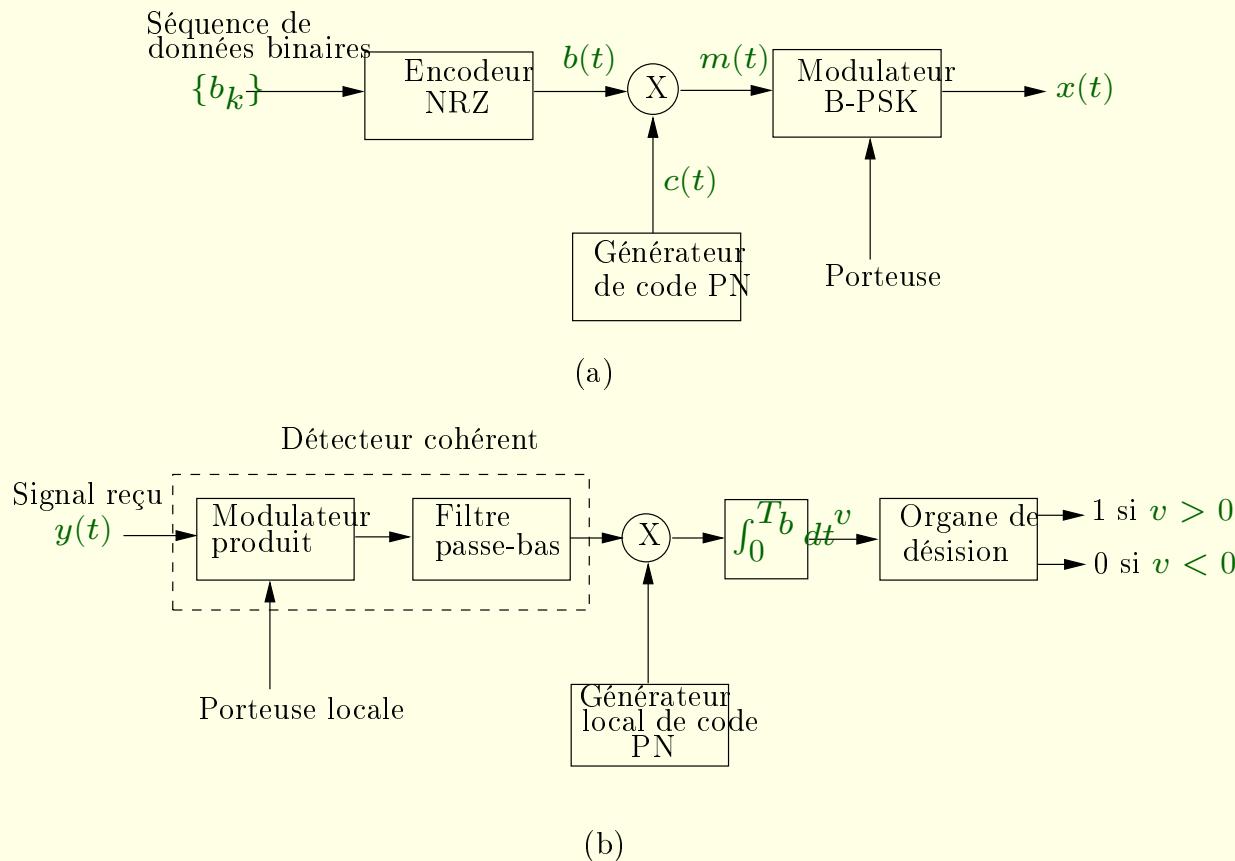
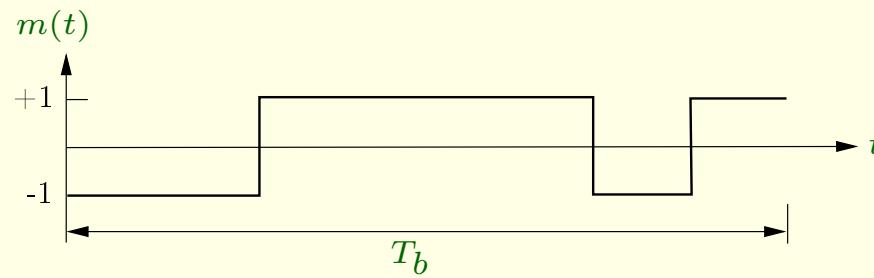
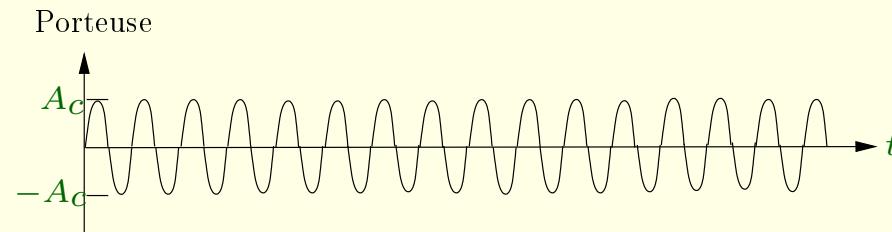


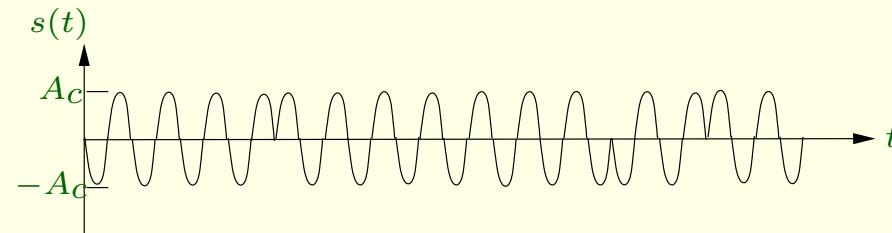
FIGURE 34: Schéma-bloc de la modulation DS/BPSK.



(a)



(b)



(c)

FIGURE 35: Modulation et démodulation BPSK du signal.

## Bruits présents dans le canal

- un bruit blanc additif gaussien, qui modélise la présence d'une somme de bruits indépendant entre eux.
- des interférences à bande étroite, qui viennent se “loger” dans certaines bandes de fréquence.
- les signaux BPSK/CDMA des autres utilisateurs.

Si  $M$  représente le nombre d'utilisateurs dans la même bande de fréquence, on considère généralement une puissance de bruit égale à  $M - 1$  fois la puissance nominale d'un utilisateur.

# Analyse du schéma

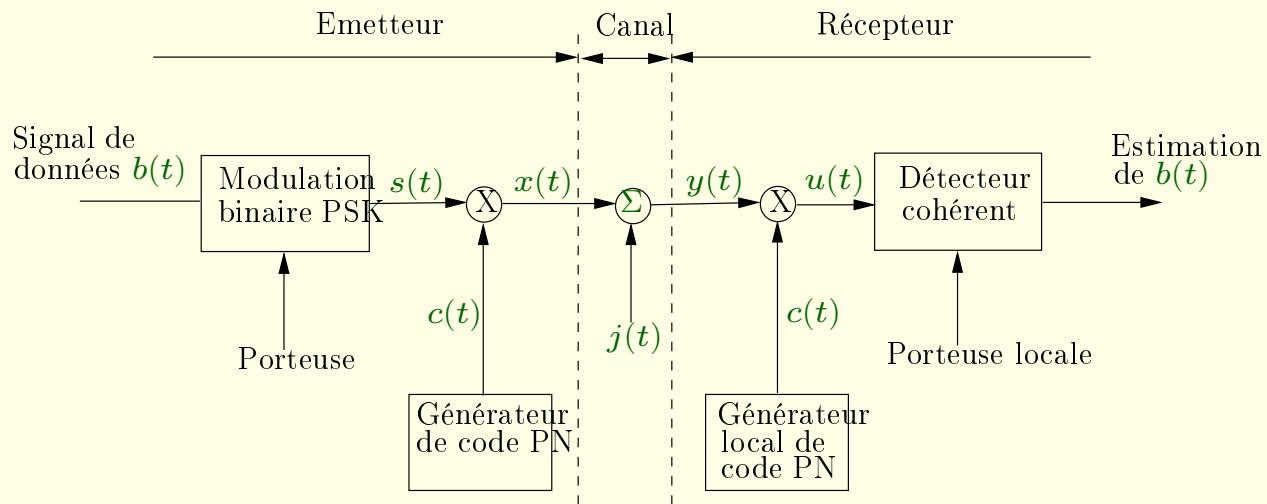


FIGURE 36: Permutation entre étalement et modulation de phase

Pour la facilité, on permute deux étapes de modulation. Les interférences sont modélisées par  $j(t)$  qui est de type passe-bande.

Au récepteur,

$$u(t) = c(t)y(t) = c(t)[s(t)c(t) + j(t)] \quad (232)$$

$$= c^2(t)s(t) + c(t)j(t) = s(t) + c(t)j(t) \quad (233)$$

## Performances : gain d'étalement

Un calcul complet débouche sur

$$10 \log \left( \frac{S}{N} \right)_{OUT} = 10 \log \left( \frac{S}{N} \right)_{IN} + 3 + 10 \log \left( \frac{T_b}{T_c} \right) \quad (234)$$

Le terme de 3 dB provient de l'utilisation de la détection cohérente.

## Performances : gain d'étalement

Un calcul complet débouche sur

$$10 \log \left( \frac{S}{N} \right)_{OUT} = 10 \log \left( \frac{S}{N} \right)_{IN} + 3 + 10 \log \left( \frac{T_b}{T_c} \right) \quad (234)$$

Le terme de 3 dB provient de l'utilisation de la détection cohérente.

**Définition 13.** *On définit le gain d'étalement (en [dB]) comme*

$$GE = 10 \log \left( \frac{T_b}{T_c} \right) \quad (235)$$

## Performances : gain d'étalement

Un calcul complet débouche sur

$$10 \log \left( \frac{S}{N} \right)_{OUT} = 10 \log \left( \frac{S}{N} \right)_{IN} + 3 + 10 \log \left( \frac{T_b}{T_c} \right) \quad (234)$$

Le terme de 3 dB provient de l'utilisation de la détection cohérente.

**Définition 13.** *On définit le gain d'étalement (en [dB]) comme*

$$GE = 10 \log \left( \frac{T_b}{T_c} \right) \quad (235)$$

Probabilité d'erreur pour la modulation DS/BPSK :

$$P_e \simeq \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{IT_c}} \right) \quad (236)$$

où  $I$  est la puissance moyenne du signal d'interférence  $I = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} j^2(t) dt$

## Performances : marge d'interférence

Définissons certains paramètres

- $S [W]$  le niveau de puissance du signal utile, égal au produit de l'énergie par bit et de la fréquence d'émission des bits,
- $B [Hz]$  la largeur du canal spectral disponible,
- $R_b = \frac{1}{T_b} [Hz]$  le débit utile ou la fréquence bit du message à transmettre,
- $E_b [J = W \times s]$  l'énergie par bit,
- $I [W]$  le niveau de puissance des signaux d'interférence (celui-ci comprend tous les types d'interférence), et
- $N_0 [W/Hz]$  la densité spectrale de bruit.

Interprétation : le rapport suivant est comme un rapport du niveau d'interférence à signal utile

$$\frac{I}{S} = \frac{N_0 B}{E_b / T_b} = \frac{B T_b}{E_b / N_0} = \frac{B / R_b}{E_b / N_0} \quad (237)$$

Pour un rapport énergie à bruit requis au récepteur  $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{req}$ , on dispose d'une marge

$$\frac{I}{S} [dB] = \frac{B}{R_b} [dB] - \left(\frac{E_b}{N_0}\right)_{req} [dB] \quad (238)$$

Le rapport  $\frac{I}{S}$  est appelé marge d'interférence tandis que le rapport  $\frac{B}{R_b}$  est le gain d'étalement. En effet,

$$\frac{B}{R_b} = \frac{T_b}{T_c} \quad (239)$$

Pour un gain d'étalement unitaire, la valeur du rapport  $\left(\frac{E_b}{N_0}\right)$  est égale au rapport signal  $S$  à interférence  $I$ .

## Performances : capacité d'un système à étalement de spectre

**Proposition 3.** *La capacité d'un système à étalement de spectre est proportionnelle au gain d'étalement.*

Pour l'établir, supposons qu'un utilisateur soit le seul à occuper la bande de fréquences.

– La puissance de porteuse est alors

$$C = S = E_b/T_b = R_b E_b \quad (240)$$

– La puissance de bruit à l'entrée de la station de base vaut

$$I = BN_0 \quad (241)$$

Dès lors, le rapport de la puissance de porteuse d'un mobile à l'entrée de la station de base vaut

$$\frac{C}{I} = \frac{R_b E_b}{BN_0} = \frac{E_b/N_0}{B/R_b} \quad (242)$$

Soit  $M$  le nombre de mobiles traités par la cellule. Les autres mobiles produisent une puissance d'interférence

$$I = C(M - 1) \quad (243)$$

ce qui conduit à

$$\frac{C}{I} = \frac{1}{M - 1} \quad (244)$$

En combinant les deux expressions de  $\frac{C}{I}$ , on en déduit

$$M = \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} + 1 \simeq \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} \quad (245)$$

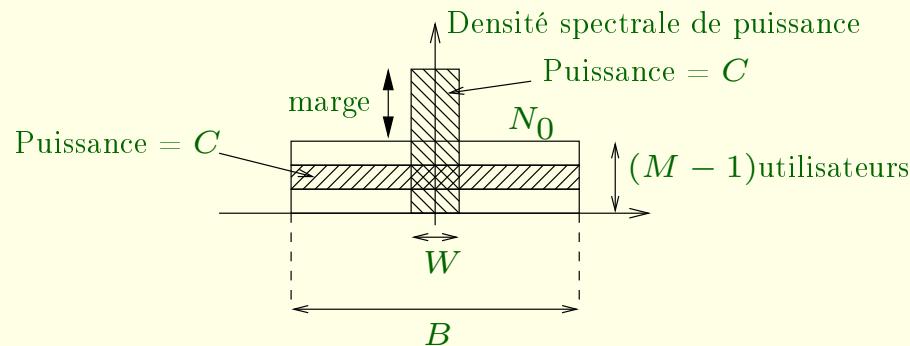


FIGURE 37: Interprétation de l'étalement de spectre.

## Autres gains

- Facteur d'occupation  $\alpha$  de 50%, ce qui statistiquement mène à un nombre d'utilisateurs simultanés

$$M \simeq \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} \frac{1}{\alpha} \quad (246)$$

## Autres gains

- Facteur d'occupation  $\alpha$  de 50%, ce qui statistiquement mène à un nombre d'utilisateurs simultanés

$$M \simeq \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} \frac{1}{\alpha} \quad (246)$$

- Directivité des antennes. Elle amène un gain  $G$  supplémentaire conduisant à une valeur de  $M$  de

$$M \simeq \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} \frac{1}{\alpha} G \quad (247)$$

## Autres gains

- Facteur d'occupation  $\alpha$  de 50%, ce qui statistiquement mène à un nombre d'utilisateurs simultanés

$$M \simeq \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} \frac{1}{\alpha} \quad (246)$$

- Directivité des antennes. Elle amène un gain  $G$  supplémentaire conduisant à une valeur de  $M$  de

$$M \simeq \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} \frac{1}{\alpha} G \quad (247)$$

- Facteur de réutilisation de fréquence  $F_e$  inférieur à l'unité (pour le GSM,  $F_e \simeq 1$ .).

$$F_e = \frac{\text{Surface utile}}{\text{Surface géographique totale}} \quad (248)$$

## Autres gains

- Facteur d'occupation  $\alpha$  de 50%, ce qui statistiquement mène à un nombre d'utilisateurs simultanés

$$M \simeq \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} \frac{1}{\alpha} \quad (246)$$

- Directivité des antennes. Elle amène un gain  $G$  supplémentaire conduisant à une valeur de  $M$  de

$$M \simeq \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} \frac{1}{\alpha} G \quad (247)$$

- Facteur de réutilisation de fréquence  $F_e$  inférieur à l'unité (pour le GSM,  $F_e \simeq 1$ .).

$$F_e = \frac{\text{Surface utile}}{\text{Surface géographique totale}} \quad (248)$$

## Estimation finale pour le nombre d'utilisateurs par cellule

$$M \simeq \frac{B}{R_b} \frac{1}{E_b/N_0} \frac{1}{\alpha} G F_e \quad (249)$$

## Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic
- Étude des supports de transmission
  - Transmission dans le réseau téléphonique
  - Ingénierie des radiocommunications mobiles terrestres
- Fonctionnement du système de positionnement GPS

# Multiplexage et accès au multiplex

- Multiplexage : principes et modes d'accès
- Multiplexage par répartition en fréquences
- Multiplexage par répartition temporelle
  - Exemple : système téléphonique numérique entre centraux
- Multiplexage par répartition de codes

# Multiplexage

Historiquement, on distingue principalement :

- le multiplexage en fréquences (Frequency Division Multiplexing - FDM). Cette technique de multiplexage alloue une bande de fréquences spécifique à chaque signal.
- le multiplexage temporel (Time Division Multiplexing - TDM). Il consiste à réguler les moments d'occupation du canal pour chaque signal.

# Multiplexage

Historiquement, on distingue principalement :

- le multiplexage en fréquences (Frequency Division Multiplexing - FDM). Cette technique de multiplexage alloue une bande de fréquences spécifique à chaque signal.
- le multiplexage temporel (Time Division Multiplexing - TDM). Il consiste à réguler les moments d'occupation du canal pour chaque signal.

Technique plus récente : multiplexage par étalement de spectre

Pour les fibres optiques :

- techniques de multiplexage par longueurs d'onde (Wave Division Multiplexing - WDM)
- quelques variantes particulièrement adaptées à la transmission à très haut débit (Dense Wave Division Multiplexing - DWDM) .

# Accès multiple

Dès lors qu'il y a multiplexage et donc partage des ressources, il convient de définir

- des moyens techniques pour accéder à ces ressources individuelles. On parle de méthodes d'accès telles que le FDMA (la lettre A désignant Access), TDMA, CDMA, ...
- des stratégies pour disposer du canal. C'est par le biais de stratégies qu'on espère atteindre au haut de performance (haut débit, faible délai, faible taux de congestion, ...). La question des stratégies ne sera pas abordée ici.

## Multiplexage par répartition en fréquences : principe

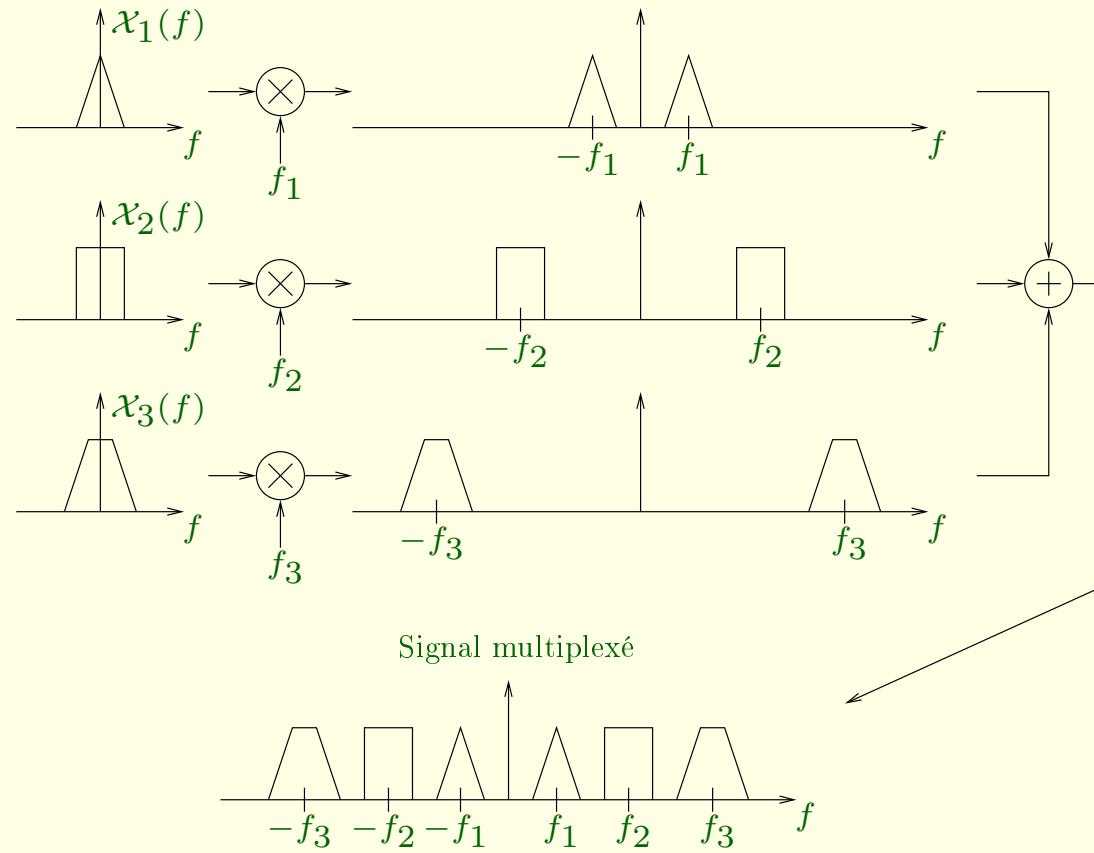


FIGURE 38: Principe du multiplexage en fréquence.

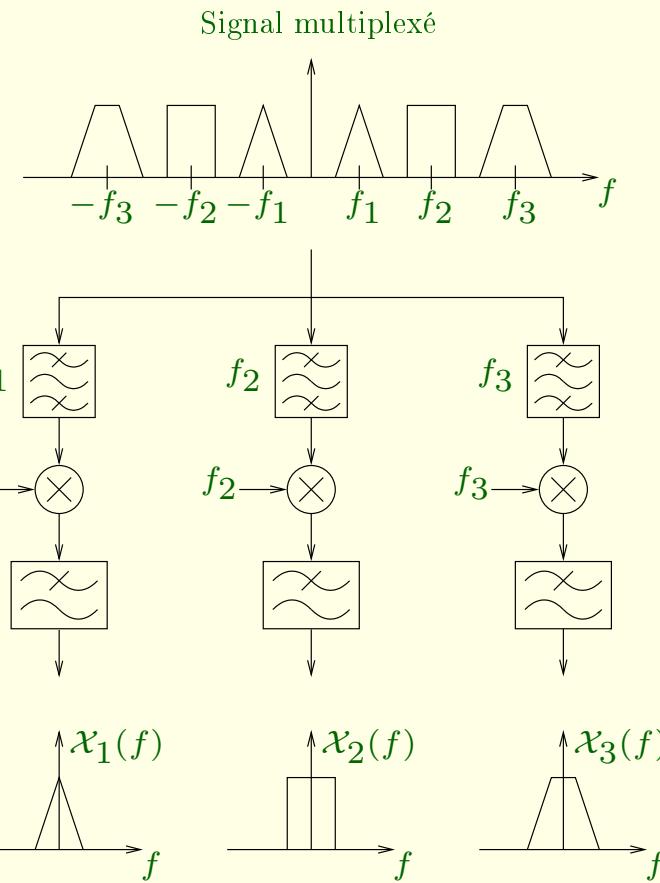


FIGURE 39: Principe du démultiplexage en fréquence.

# Bandé passante et accès au multiplex

$$W > \sum_i W_i \quad (250)$$

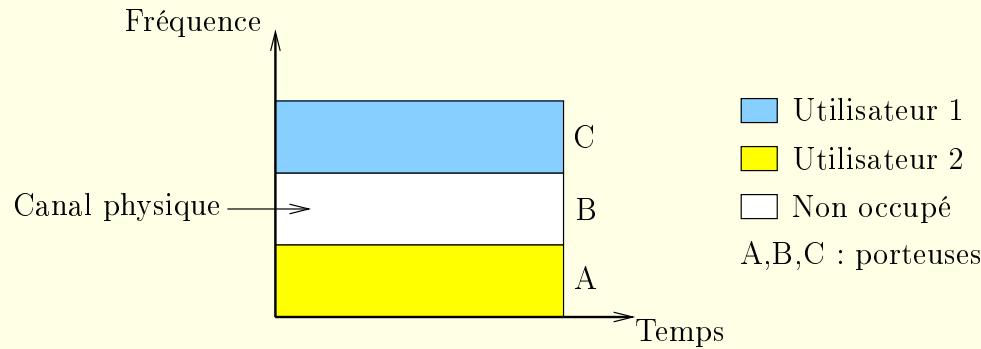


FIGURE 40: Partage des ressources par multiplexage en fréquence : le FDMA (Frequency Division Multiple Access).

# Multiplex de téléphonie analogique entre centraux (obsolète en pratique)

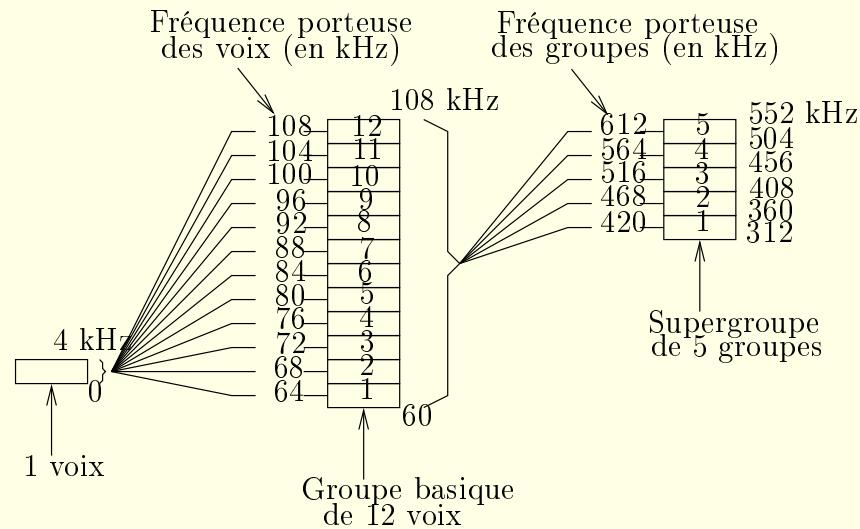


FIGURE 41: Les étapes de constitution d'un groupe de base et d'un super-groupe.

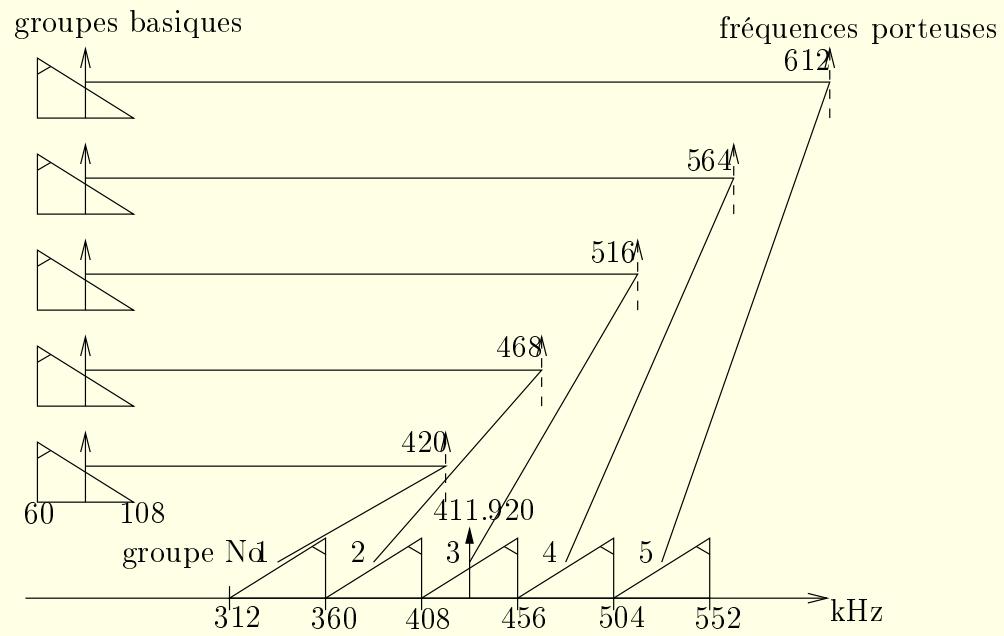


FIGURE 42: Constitution de super-groupes.

# Multiplexage par répartition temporelle : principe

Le multiplexage par répartition temporelle = TDM (Time Division Multiplexing)

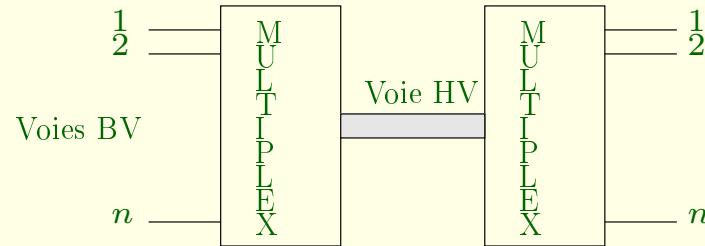


FIGURE 43: Multiplex temporel.

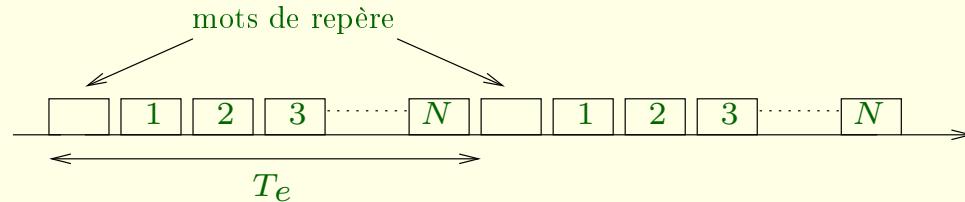


FIGURE 44: Mot de repère.

L'ensemble constitué du mot de repère et de l'information de même rang pour toutes les voies est appelé trame.

# Bande passante

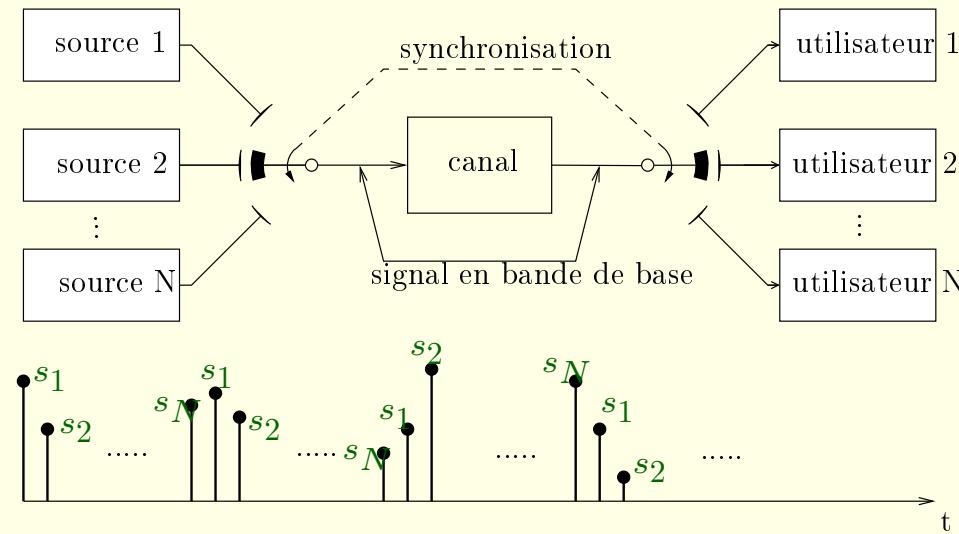


FIGURE 45: Schéma de multiplexage temporel.

Le nombre total d'échantillons pour tous les signaux vaut  $n_s = \sum_i 2W_i T$

Si le signal final est en bande de base  $W$ , il faut  $2W$  échantillons. Pour l'intervalle  $T$ , on a donc

$$n_s = 2WT = \sum_i 2W_i T \quad (251)$$

Dès lors,

$$W = \sum_i W_i \quad (252)$$

# Accès au multiplex

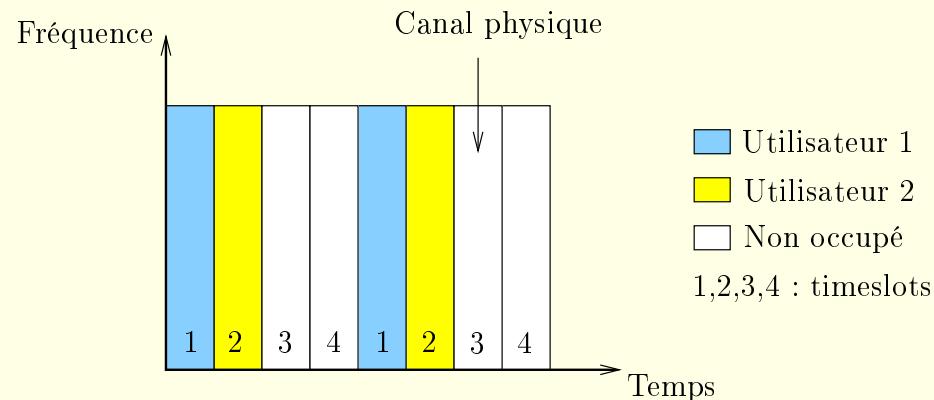


FIGURE 46: Partage des ressources par multiplexage en temps : le TDMA (Time Division Multiple Access).

# Système téléphonique numérique PCM 30 voies européen

## Caractéristiques

Il permet de transmettre simultanément sur un même support 30 voies téléphoniques classiques :

- $B =$  bande passante du signal à coder =  $300 - 3400 [Hz]$  et  $f_e = 8 [kHz]$ .
- numérisation PCM avec loi A ( $=87,6$ ) de compression 13 segments sur 8 bits,  $D_{bv} =$  débit basse vitesse =  $64 [kb/s]$ .
- multiplexage temporel à 32 intervalles de temps (IT) comprenant un IT de verrouillage de trame (VT) et un IT de signalisation (SI).

# Structure de la trame

Elle est découpée en 32 IT, chacun composé d'un octet (8 bits), numérotés de 0 à 31.



FIGURE 47: Structure de la trame.

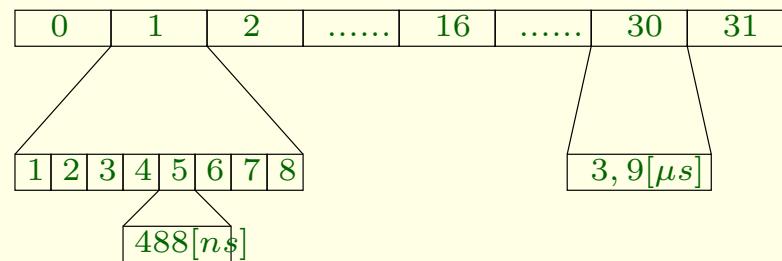


FIGURE 48: Structure de la trame au niveau bit.

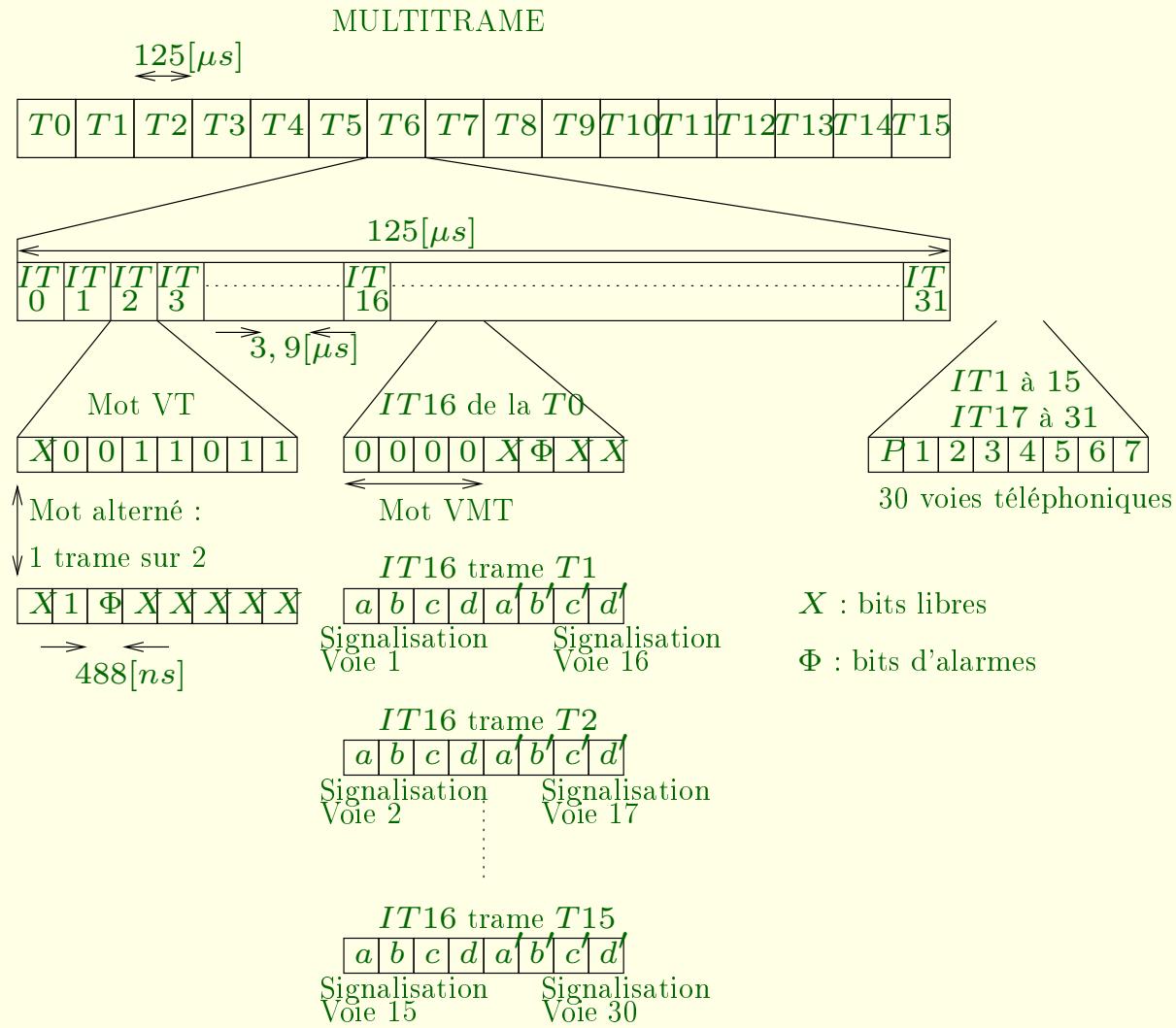


FIGURE 49: Multitrame.

# Multiplexage par répartition de codes

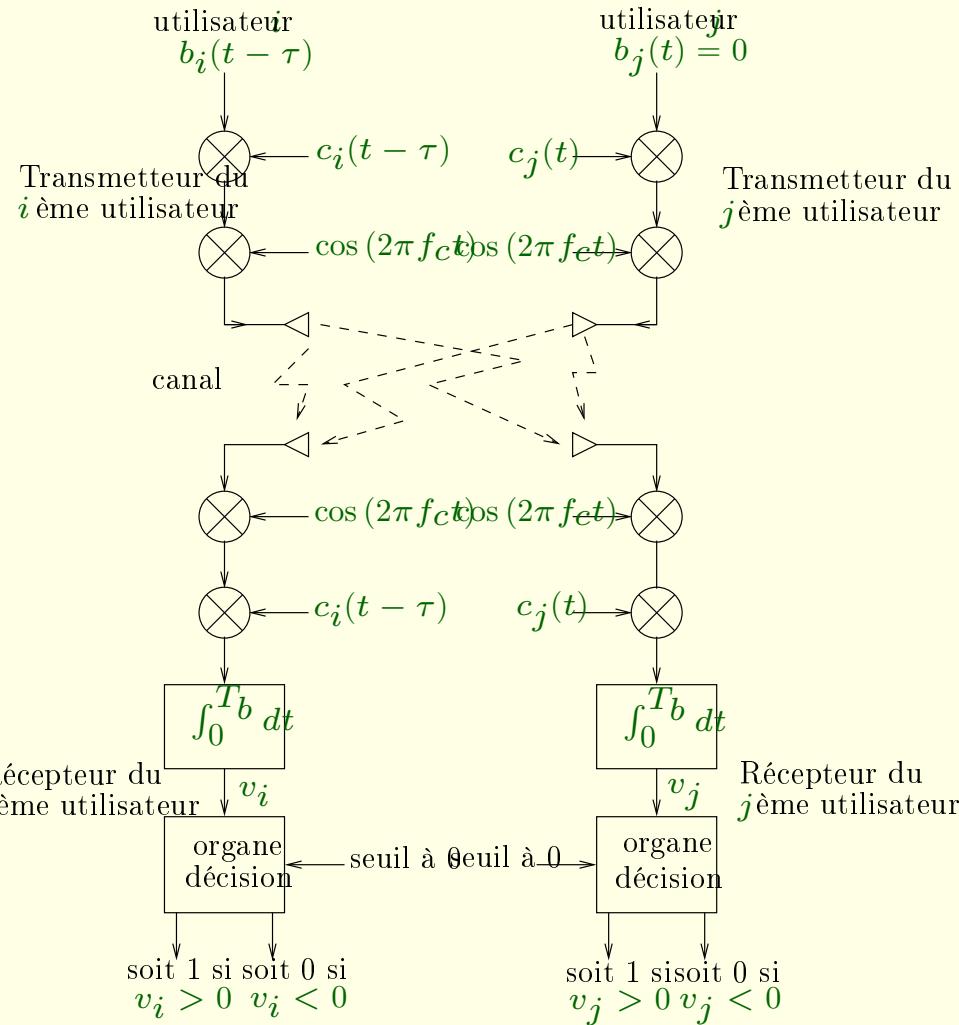


FIGURE 50: Schéma d'analyse pour l'intercorrélation des séquences étalées.

L'interférence de  $i$  à l'entrée de l'organe de décision de  $j$  vaut

$$v_j(\tau)|_{b_j(t)=0} = \int_0^{T_b} b_i(t-\tau) c_j(t) c_i(t-\tau) dt \quad (253)$$

$$= \pm \int_0^{T_b} c_j(t) c_i(t-\tau) dt \quad (254)$$

On peut choisir de réécrire cette équation sous la forme

$$v_j(\tau)|_{b_j(t)=0} = \pm T_b \Gamma_{ji}(\tau) \quad (255)$$

où

$$\Gamma_{ji}(\tau) = \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} c_j(t) c_i(t-\tau) dt \quad (256)$$

Cette moyenne temporelle est appelée fonction d'intercorrélation partielle.

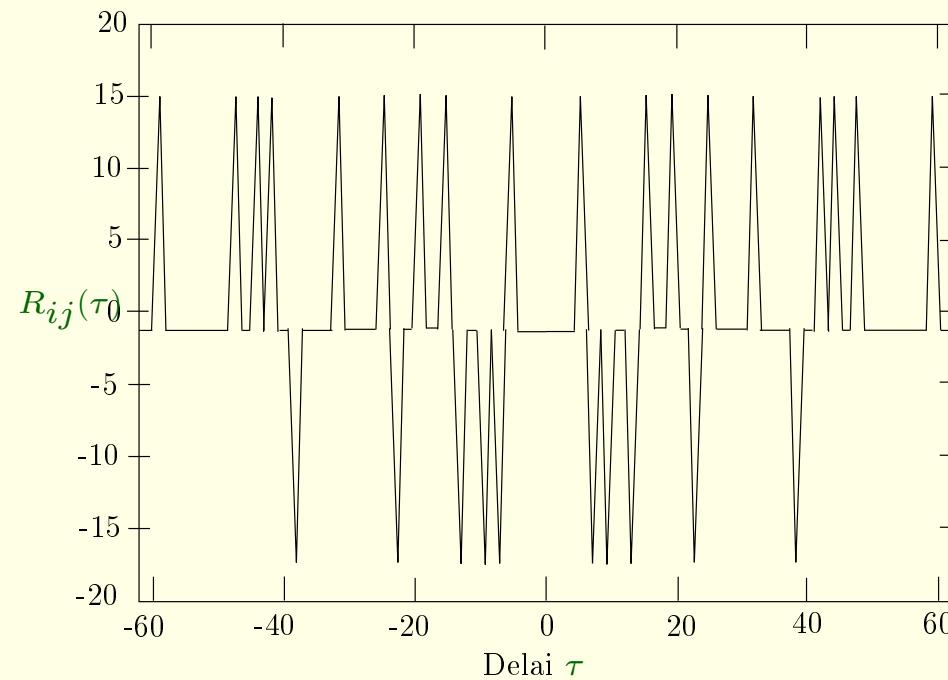


FIGURE 51: Fonction d'intercorrélation de deux séquences pseudo-aléatoires de période  $N = 63$  ([6, 1] et [6, 5, 2, 1]).

# Accès au multiplex (CDMA)

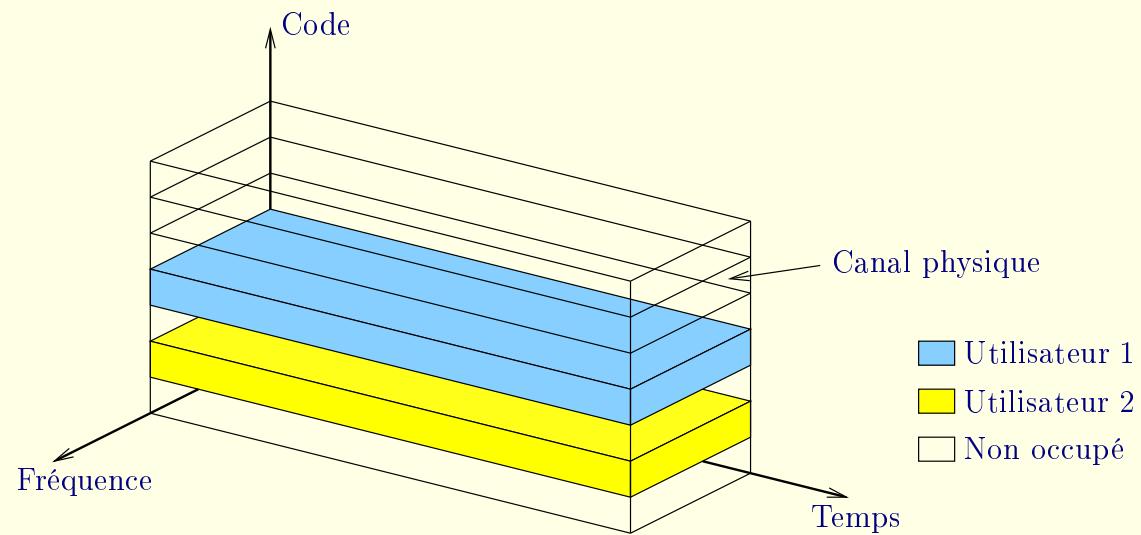


FIGURE 52: Multiplexage de ressources par répartition de code (Code Division Multiple Access).

# Combinaison de techniques de multiplexage

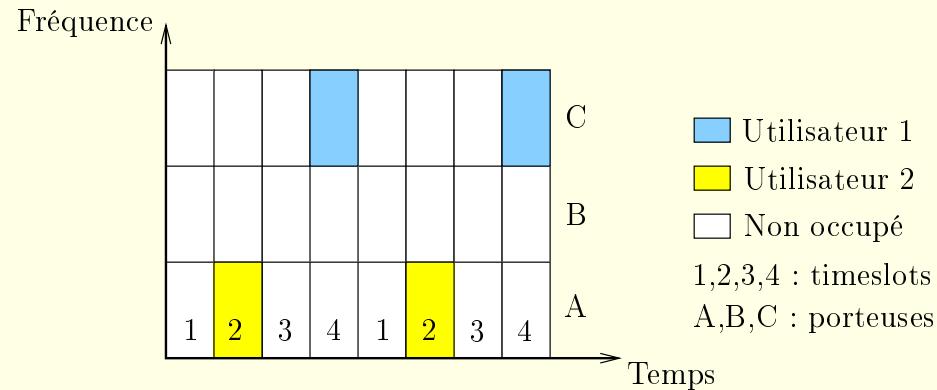


FIGURE 53: Partage de ressources par multiplexage en temps et en fréquence, combinaison du TDMA et du FDMA.

# Comparaison de normes de mobilophonie

Système	GSM	DCS-1800	IS-54	IS-95 (DS)
Mode d'accès	TDMA/FDMA	TDMA/FDMA	TDMA/FDMA	CDMA/FDMA
Bande de fréquence				
Montée (Mhz)	890-915	1710-1785	824-849	824-849
Descente (Mhz)	935-960	1805-1880	869-894	869-894
	(Europe)	(Europe)	(USA)	(USA)
Espacement des canaux				
Descente (kHz)	200	200	30	1250
Montée (kHz)	200	200	30	1250
Modulation	GMSK	GMSK	$\pi/4$ DQPSK	BPSK/QPSK
Puissance du mobile				
Max./Moyenne	1W/125mW	1W/125mW	600mW/200mW	600mW
Codage de voix	RPE-LTP	RPE-LTP	VSELP	QCELP
Débit voix (kb/s)	13	13	7,95	8 (var.)
Débit binaire canal				
Montée (kb/s)	270,833	270,833	48,6	
Descente (kb/s)	270,833	270,833	48,6	
Trame (ms)	4,615	4,615	40	20

## Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic
- Étude des supports de transmission
  - Transmission dans le réseau téléphonique
  - Ingénierie des radiocommunications mobiles terrestres
- Fonctionnement du système de positionnement GPS

# Étude du trafic

- Caractérisation du trafic d'un réseau
  - Intensité
  - Charge de trafic écoulé
  - Charge de référence
  - Charge offerte
- Analyse statistique des appels
  - Processus de dénombrement
  - Variable aléatoire de POISSON : définition et propriétés
  - Processus de POISSON
  - Temps entre occurrences
  - Temps de communication
- Lois d'analyse de trafic
  - Modèle d'un système sans mémoire : statistique d'ERLANG B
  - Dimensionnement
  - Autres modèles

# Structure d'un réseau commuté

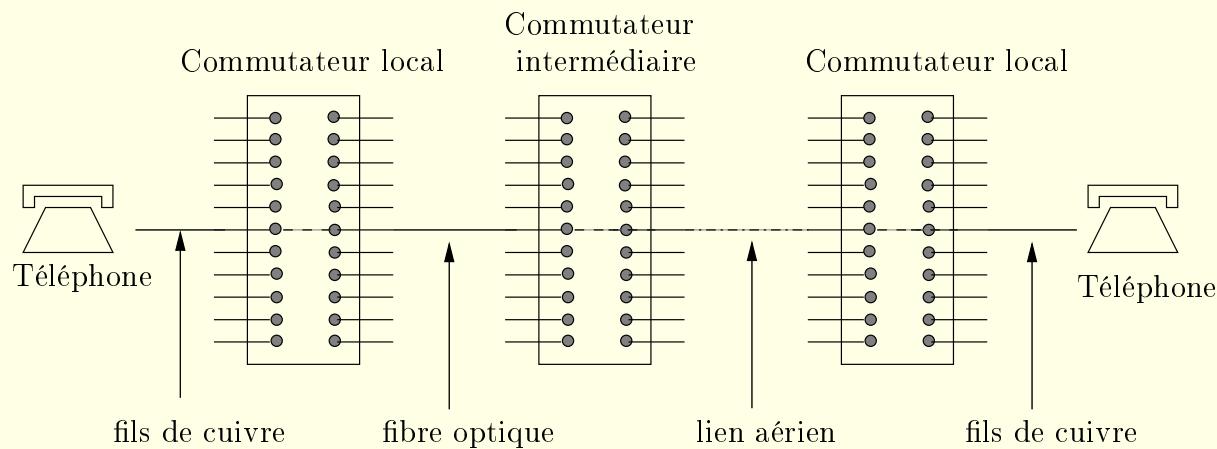


FIGURE 54: Structure d'un réseau commuté.

# Intensité, trafic et charge : quelles mesures ?

Un réseau téléphonique est constitué de deux types de lignes :

- les lignes où vont transiter les communications ou les données,
- les lignes où va transiter la signalisation nécessaire à l'établissement de la liaison entre deux terminaux.

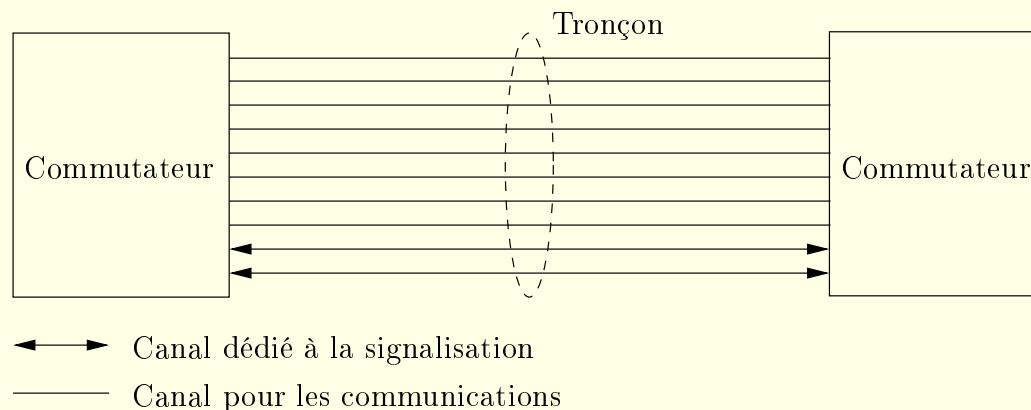


FIGURE 55: Faisceau entre deux commutateurs.

## Mesures d'intensité

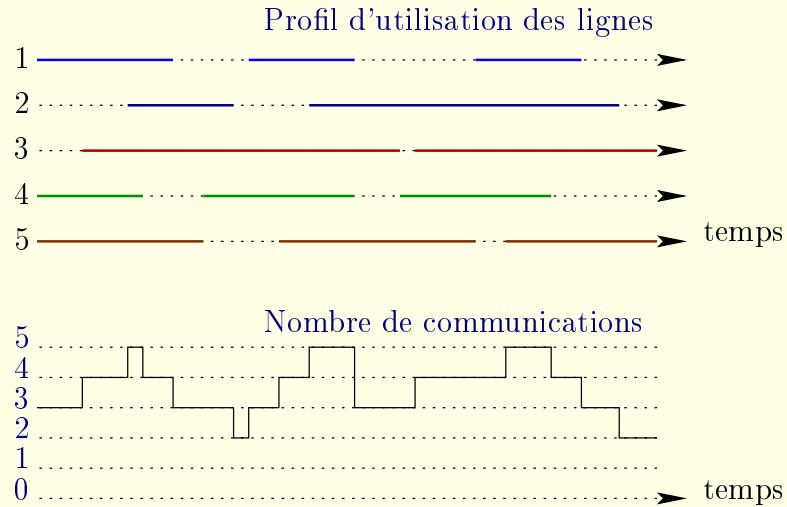


FIGURE 56: Profil d'activité d'un faisceau composé de 5 lignes.

**Définition 14. [Intensité du trafic écoulé]** *L'intensité du trafic écoulé  $I$  est le rapport entre le volume du trafic observé et la période d'observation  $T$ .*

En fait, l'intensité est un estimateur du trafic écoulé.

## Intensité et mesures dérivées

Pour un faisceau de  $N$  circuits, l'intensité vaut alors

$$I = \frac{\int_0^T \sum_{i=1}^N 1_i(t) dt}{T} = \frac{\sum_{i=1}^N \int_0^T 1_i(t) dt}{T} \quad (257)$$

L'intensité de trafic représente donc l'occupation moyenne du lien durant une certaine période. Bien que l'intensité soit adimensionnelle, on parle d'ERLANG, noté  $[E]$ .

## Intensité et mesures dérivées

Pour un faisceau de  $N$  circuits, l'intensité vaut alors

$$I = \frac{\int_0^T \sum_{i=1}^N 1_i(t) dt}{T} = \frac{\sum_{i=1}^N \int_0^T 1_i(t) dt}{T} \quad (257)$$

L'intensité de trafic représente donc l'occupation moyenne du lien durant une certaine période. Bien que l'intensité soit adimensionnelle, on parle d'ERLANG, noté  $[E]$ .

En pratique, on utilise deux paramètres importants pour caractériser le trafic :

1. le taux moyen d'appels entrants  $\lambda_e$ , mesuré en [appels/s],
2. la durée moyenne d'un appel  $t_m$ , en [s/appel]. Si  $\#_T$  représente le nombre d'appels effectués pendant l'intervalle de temps  $T$ , alors la durée moyenne vaut

$$t_m = \frac{\sum_{i=1}^N \int_0^T 1_i(t) dt}{\#_T} \quad (258)$$

## Charge(s)

**Définition 15. [Charge de trafic écoulé]** *On définit la charge écoulée d'un faisceau, exprimée en ERLANG, comme le produit du taux d'appels entrants (donc écoulés) par la durée moyenne d'appel. On la note  $A_e$ .*

$$A_e = \lambda_e t_m \quad (259)$$

## Charge(s)

**Définition 15. [Charge de trafic écoulé]** *On définit la charge écoulée d'un faisceau, exprimée en ERLANG, comme le produit du taux d'appels entrants (donc écoulés) par la durée moyenne d'appel. On la note  $A_e$ .*

$$A_e = \lambda_e t_m \quad (259)$$

### Charge de référence

La charge maximale disponible sur un faisceau à  $N$  liens vaut théoriquement  $N$ . Elle correspond à une occupation permanente des canaux.

Lors de l'étude du trafic, il faut distinguer deux types de charge :

1. la charge offerte, c'est la charge qui serait transportée par le réseau s'il pouvait honorer toutes les demandes de connexion.
2. la charge écoulée ; la charge réellement mesurée dans le réseau.

## Charge offerte

La charge offerte est utilisée dans la définition de la charge  $A$ .

**Définition 16.** *La charge offerte  $A$  vaut*

$$A = \lambda t_m \quad (260)$$

où  $\lambda$  est le taux moyen de tentatives d'appels.

Il est d'usage de choisir une charge de référence pour une heure de pointe, représentant la charge à allouer par utilisateur. Par exemple, le réseau doit réservé une capacité  $A_0$  de 0,02 à 0,1 [E].

Un réseau bien dimensionné est tel que la charge écoulée est fort proche de la charge offerte en période de pointe et égale hors période de pointe.

## Mesures dans un réseau réel

On peut obtenir d'un central téléphonique les valeurs suivantes, pour une période donnée (typiquement un quart d'heure) :

- durée moyenne d'un appel. Attention, certains appels ont démarré avant la période de calcul ou se terminent après.
- nombre de tentatives d'appel (compteur).
- nombre d'appels écoulés (compteur).
- nombre d'appels qui se sont terminés (compteur).

## Analyse statistique des appels

Pour calculer la capacité d'un réseau téléphonique, il faut tenir compte de deux paramètres :

1. le nombre de tentatives d'appels durant une période déterminée et
2. la durée des appels.

# Processus de dénombrement

Nous allons partir d'un processus aléatoire de dénombrement ou de comptage  $D(t)$  qui détermine pour tout temps  $t$  le nombre d'appels initiés après  $t = 0$ .

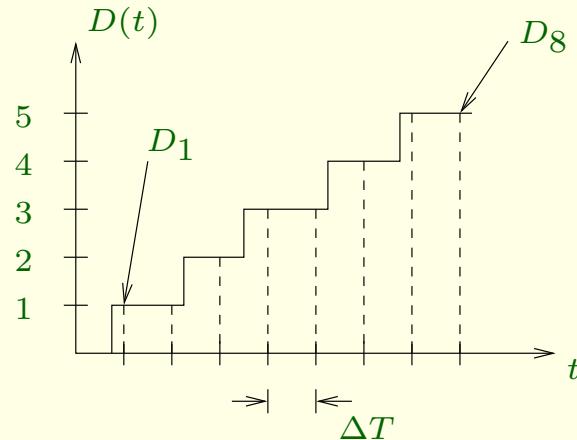


FIGURE 57: Réalisations d'un processus de comptage.

Si  $\lambda\Delta T$  représente la probabilité de réussite de chacune des variables  $D_1, D_2, \dots$ , considérant un intervalle de temps  $T = m\Delta T$ , on obtient les probabilités suivantes :

1. probabilité d'avoir  $n$  tentatives d'appels pendant la durée  $T$  et donc sur les  $m$  intervalles de temps  $\Delta T$  ( $n$  réussites pour la loi binomiale) :

$$(\lambda\Delta T)^n = \left(\frac{\lambda T}{m}\right)^n \quad (261)$$

2. probabilité d'avoir  $m - n$  intervalles de temps  $\Delta T$  sans tentative d'appel ( $m - n$  échecs)

$$(1 - \lambda\Delta T)^{m-n} = \left(1 - \frac{\lambda T}{m}\right)^{m-n} \quad (262)$$

## Loi binomiale

Le nombre d'occurrences  $D_m$  obtenues pendant un intervalle de temps  $T = m\Delta T$  obéit dès lors à la fonction de densité de probabilité suivante (loi binomiale)

$$f_{D_m}(n) = p(D_m = n) = \begin{cases} C_m^n \left(\frac{\lambda T}{m}\right)^n \left(1 - \frac{\lambda T}{m}\right)^{m-n} & n = 0, 1, \dots, m \\ 0 & n \neq 0, 1, \dots, m \end{cases} \quad (263)$$

La variable aléatoire  $D_m$ , représentant le nombre de tentatives d'appel pendant l'intervalle de temps  $T$ , est une variable aléatoire binomiale de moyenne  $m(\frac{\lambda T}{m}) = \lambda T$ .

## Variable aléatoire de Poisson : définition et propriétés

Lorsque  $\Delta T \rightarrow 0$

$$f_{D_m}(n) = C_m^n \left( \frac{\lambda T}{m} \right)^n \left( 1 - \frac{\lambda T}{m} \right)^{m-n} \quad (264)$$

$$= \frac{m!}{n!(m-n)!} \left( \frac{\lambda T}{m} \right)^n \left( 1 - \frac{\lambda T}{m} \right)^{m-n} \quad (265)$$

$$= \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{n!} \frac{(\lambda T)^n}{m^n} \left( 1 - \frac{\lambda T}{m} \right)^{m-n} \quad (266)$$

$$= \frac{m(m-1)\dots(m-n+1)}{m^n} \frac{(\lambda T)^n}{n!} \left( 1 - \frac{\lambda T}{m} \right)^{m-n} \quad (267)$$

Dès lors,

$$\lim_{m \rightarrow +\infty} f_{D_m}(n) = \begin{cases} \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} & n = 0, 1, \dots, m \\ 0 & n \neq 0, 1, \dots, m \end{cases} \quad (268)$$

qui est la variable aléatoire de POISSON de paramètre  $\alpha = \lambda T$ .

## Variable de Poisson

**Définition 17. [Variable aléatoire de Poisson]** *On appelle variable aléatoire de POISSON une variable aléatoire  $D$  discrète dont la densité de probabilité est*

$$f_D(n) = \begin{cases} \frac{(\lambda T)^n}{n!} e^{-\lambda T} & n = 0, 1, \dots \\ 0 & n \neq 0, 1, \dots \end{cases} \quad (269)$$

**Théorème 3.** *Soit à effectuer  $n$  tirages. Pour chaque tirage, la probabilité de l'événement pertinent est définie égale à  $\frac{\alpha}{n}$ , où  $\alpha > 0$  est une constante et  $n > \alpha$ . Soit une variable aléatoire  $S_n$  qui dénombre les occurrences d'événements pertinents pour  $n$  tirages effectués. Lorsque  $n \rightarrow +\infty$ , la densité de probabilité de  $S_n$  converge vers une loi de POISSON de paramètre  $\alpha$ .*

**Théorème 4.** *L'espérance et la variance d'une variable aléatoire de POISSON valent toutes deux  $\alpha$*

$$\mu_D = \alpha \quad (270)$$

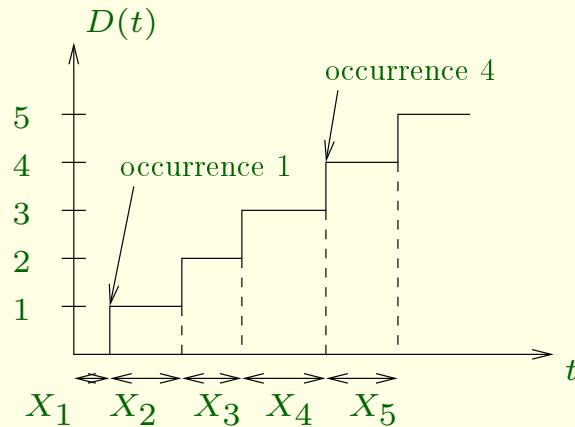
$$\sigma_D^2 = \alpha \quad (271)$$

## Processus de Poisson

**Définition 18. [Processus de Poisson]** *Un processus de dénombrement  $D(t)$  est un processus de POISSON d'intensité  $\lambda$  s'il respecte la double condition suivante*

- (1) *le nombre d'occurrences durant tout intervalle de temps  $]t_0, t_1]$ ,  $D(t_1) - D(t_0)$ , est une variable aléatoire de POISSON d'espérance  $\lambda(t_1 - t_0)$ , et*
- (2) *pour toute paire d'intervalle  $]t_0, t_1]$ ,  $]t_2, t_3]$ , le nombre d'occurrences durant ces intervalles,  $D(t_1) - D(t_0)$  et  $D(t_3) - D(t_2)$ , sont des variables aléatoires indépendantes.*

## Temps entre occurrences



**Théorème 5.** *Les variables aléatoires  $X_1, X_2, \dots$  représentant les temps entre occurrences d'un processus aléatoire de POISSON d'intensité  $\lambda$  sont indépendantes et elles ont pour densité de probabilité*

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x} & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad (272)$$

**Corollaire 1.** *La probabilité  $P_0$  de ne pas avoir d'occurrences pendant l'intervalle de temps  $t$  vaut*

$$P_0(\lambda t) = e^{-\lambda t} \quad (273)$$

## Temps de communication

- Hypothèse 1 : temps de communication constant.

La probabilité d'avoir  $n$  circuits occupés s'obtient par la loi de POISSON. Cette probabilité vaut

$$f_D(n) = \frac{A_e^n}{n!} e^{-A_e} \quad (274)$$

- Hypothèse 2 : temps de communication à décroissance exponentielle.

La probabilité que la conversation dure plus longtemps de  $t$  vaut alors

$$P(> t) = e^{-\frac{t}{t_m}} \quad (275)$$

où  $t_m$  est le temps de communication moyen.

## Dimensionnement d'un tronçon

- On peut mesurer certaines grandeurs ( $\lambda$ ,  $t_m$ , etc). A défaut, on prend des valeurs de bonne pratique (charge de référence pour un client suivant son profil, etc).
- On connaît la loi de dénombrement pour appels écoulés, tentatives d'appel et relâchement de lignes. Il s'agit de la même loi (loi de POISSON), mais leur paramètre est différent.
- Il faut déterminer la probabilité  $P_k$  d'avoir  $k$  lignes occupées parmi un tronçon (faisceau) de  $N$  lignes. C'est  $P_N$  qui est important (en heure de pointe).

Démarche :

- détermination des équations de transition, faisant intervenir  $p(k; t)$  et  $p(k; t + dt)$ .
- ajout d'une hypothèse pour réduire le nombre d'inconnues.
- établissement de la valeur de  $P_N$ .

# Modèle d'un système avec perte (sans mémoire) : statistique d'Erlang B

## Nombre de tentatives d'appel

Pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  (intervalle de temps d'observation), le nombre de tentatives d'appel  $N_A$  est donc une variable aléatoire de POISSON telle que

$$p(N_A = n) = \frac{(\lambda \Delta t)^n}{n!} e^{-\lambda \Delta t}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (276)$$

où  $\lambda$  représente le nombre moyen de tentatives par unité de temps.

# Modèle d'un système avec perte (sans mémoire) : statistique d'Erlang B

## Nombre de tentatives d'appel

Pendant l'intervalle de temps  $\Delta t$  (intervalle de temps d'observation), le nombre de tentatives d'appel  $N_A$  est donc une variable aléatoire de POISSON telle que

$$p(N_A = n) = \frac{(\lambda \Delta t)^n}{n!} e^{-\lambda \Delta t}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (276)$$

où  $\lambda$  représente le nombre moyen de tentatives par unité de temps.

## Nombre d'arrêts d'appel (relâchements de ligne)

De même, le nombre d'arrêts  $N_D$  pour un nombre d'arrêt moyen  $\eta$  par unité de temps vaut

$$p(N_D = n) = \frac{(\eta \Delta t)^n}{n!} e^{-\eta \Delta t}, \quad n = 0, 1, \dots \quad (277)$$

## Charge

À tout moment, la charge fluctue entre  $0$  et  $N$  appels en cours. Pour un intervalle de temps très court  $dt$ ,

- la probabilité d'avoir exactement une tentative d'appel ( $n = 1$ ) vaut  $\lambda dte^{-\lambda dt} \simeq \lambda dt$
- la probabilité d'avoir un appel qui se termine vaut  $\eta dte^{-\eta dt} \simeq \eta dt$ .

Dès lors, à supposer que  $k$  lignes sur un total de  $N$  lignes soient occupées à l'instant  $t$ , on calcule respectivement trois probabilités sur un intervalle de temps  $dt$

- $P_1$  la probabilité d'une tentative d'appel,
- $P_2$  la probabilité d'un arrêt et
- $P_3$  la probabilité d'un statu quo en matière d'occupation de lignes.

## Charge

À tout moment, la charge fluctue entre 0 et  $N$  appels en cours. Pour un intervalle de temps très court  $dt$ ,

- la probabilité d'avoir exactement une tentative d'appel ( $n = 1$ ) vaut  $\lambda dt e^{-\lambda dt} \simeq \lambda dt$
- la probabilité d'avoir un appel qui se termine vaut  $\eta dt e^{-\eta dt} \simeq \eta dt$ .

Dès lors, à supposer que  $k$  lignes sur un total de  $N$  lignes soient occupées à l'instant  $t$ , on calcule respectivement trois probabilités sur un intervalle de temps  $dt$

- $P_1$  la probabilité d'une tentative d'appel,
- $P_2$  la probabilité d'un arrêt et
- $P_3$  la probabilité d'un statu quo en matière d'occupation de lignes.

Elles valent respectivement

$$P_1 = \lambda dt \tag{278}$$

$$P_2 = C_k^1 (\eta dt)^1 (1 - \eta dt)^{k-1} \simeq k \eta dt \tag{279}$$

$$P_3 = (1 - \lambda dt)(1 - k \eta dt) \simeq 1 - \lambda dt - k \eta dt \tag{280}$$

## Équations des transitions

Définissons alors  $p(k; t + dt)$  comme la probabilité qu'il y ait  $k$  lignes occupées à l'instant  $t + dt$ . Il est alors possible de déterminer  $p(k; t + dt)$  en utilisant les probabilités  $P_1$ ,  $P_2$  et  $P_3$

$$\begin{aligned} p(k; t + dt) &= P_3 p(k; t) + P_1 p(k - 1; t) + P_2 p(k + 1; t) \\ &\simeq (1 - \lambda dt - k\eta dt) p(k; t) + \lambda dt p(k - 1; t) + (k + 1)\eta dt p(k + 1; t) \end{aligned} \quad (281)$$

Il existe cependant deux cas particuliers correspondant à  $k = 0$  et  $k = N$

$$p(0; t + dt) = (1 - \lambda dt) p(0; t) + \eta dt p(1; t) \quad (282)$$

représentant le cas où aucune ligne n'est occupée et

$$p(N; t + dt) = (1 - \lambda dt - N\eta dt) p(N; t) + \lambda dt p(N - 1; t) \quad (283)$$

pour le cas où toutes les lignes sont occupées.

## En régime

On peut faire l'hypothèse que les probabilités ne sont pas fonction du temps et écrire

$$p(k; t + dt) = p(k; t) = P_k, \quad k = 0, 1, 2, \dots, N \quad (284)$$

L'équation de transition devient

$$P_k = (1 - \lambda dt - k\eta dt) P_k + \lambda dt P_{k-1} + (k + 1)\eta dt P_{k+1} \quad (285)$$

$$\Rightarrow 0 = [(-\lambda - k\eta) P_k + \lambda P_{k-1} + (k + 1)\eta P_{k+1}] dt \quad (286)$$

$$\Rightarrow (\lambda + k\eta) P_k = \lambda P_{k-1} + (k + 1)\eta P_{k+1}, \quad 0 < k < N \quad (287)$$

De même, les deux cas particuliers deviennent

$$\lambda P_0 = \eta P_1, \quad k = 0 \quad (288)$$

$$(\lambda + N\eta) P_N = \lambda P_{N-1}, \quad k = N \quad (289)$$

De plus, les probabilités  $P_k$  doivent respecter la condition suivante

$$P_0 + P_1 + \dots + P_N = 1 \quad (290)$$

L'expression de  $P_k$  vérifiant toutes ces conditions est donnée par

$$P_k = \frac{\frac{(\lambda/\eta)^k}{k!}}{\sum_{i=0}^N \frac{(\lambda/\eta)^i}{i!}} \quad (291)$$

Cette formule représente ainsi la probabilité d'avoir  $k$  lignes occupées.

## Formule d'Erlang B

L'état qui résulte d'une occupation de toutes les lignes est appelé congestion. Si un appel est rejeté en raison d'une occupation des  $N$  lignes, la probabilité de cet événement de blocage est celle de  $P_N$  ( $k = N$ )

$$B = P_N = \frac{\frac{(\lambda/\eta)^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{(\lambda/\eta)^i}{i!}} \quad (292)$$

Cette expression de la probabilité de blocage est la formule dite d'ERLANG B.

## Formule d'Erlang B

L'état qui résulte d'une occupation de toutes les lignes est appelé congestion. Si un appel est rejeté en raison d'une occupation des  $N$  lignes, la probabilité de cet événement de blocage est celle de  $P_N$  ( $k = N$ )

$$B = P_N = \frac{\frac{(\lambda/\eta)^N}{N!}}{\sum_{i=0}^N \frac{(\lambda/\eta)^i}{i!}} \quad (292)$$

Cette expression de la probabilité de blocage est la formule dite d'ERLANG B.

**Proposition 4.** *[Espérance de la loi la distribution d'Erlang B]* *L'espérance des probabilités  $P_k$  fournit le nombre moyen de lignes occupées, c'est-à-dire la charge du trafic écoulé. Cette espérance vaut*

$$E\{k\} = A(1 - B) \quad (293)$$

La probabilité de blocage s'exprime donc par l'expression

$$B = P_N = \frac{\frac{A^N}{N!}}{\sum_{k=0}^N \frac{A^k}{k!}}, \quad A = \frac{\lambda}{\eta} \quad (294)$$

# Interprétation

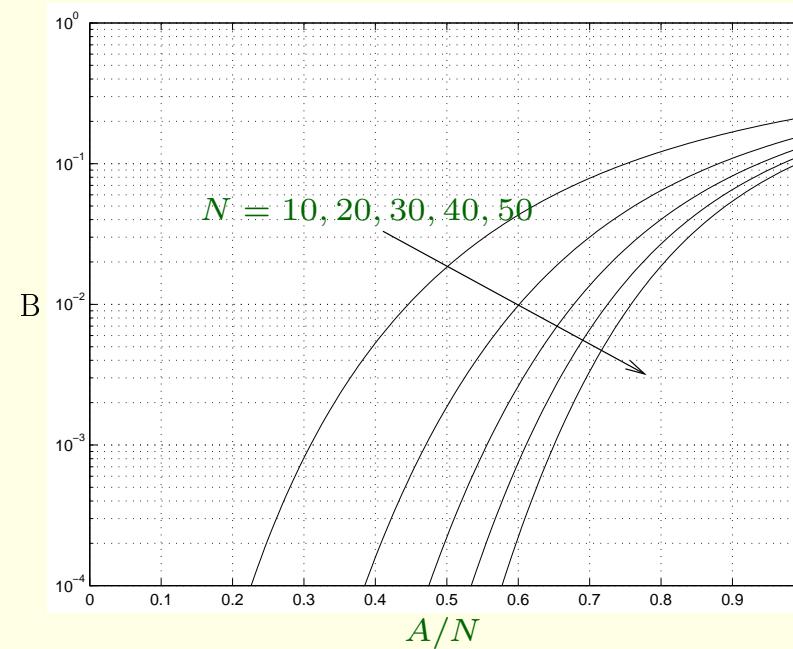


FIGURE 58: Loi de probabilité ERLANG B.

$N$	10	20	30	40	50	60	70	80	90	100
$A$	4,5	12,0	20,3	29,0	37,9	46,9	56,1	65,4	74,7	84,1
$\frac{A}{N}$	0,45	0,60	0,68	0,73	0,76	0,78	0,80	0,82	0,83	0,84

TABLE 4: Illustration des proportions pour  $B = 0,01$

# Dimensionnement

	<i>B</i>					<i>B</i>			
<i>N</i>	0,01	0,005	0,003	0,001	<i>N</i>	0,01	0,005	0,003	0,001
1	0,01	0,005	0,003	0,001	31	21,2	19,9	19,0	17,4
2	0,153	0,105	0,081	0,046	32	22,0	20,7	19,8	18,2
3	0,46	0,35	0,29	0,19	33	22,9	21,5	20,6	19,0
4	0,87	0,7	0,6	0,44	34	23,8	22,3	21,4	19,7
5	1,4	1,1	1,0	0,8	35	24,6	23,2	22,2	20,5
6	1,9	1,6	1,4	1,1	36	25,5	24,0	23,1	21,3
7	2,5	2,2	1,9	1,6	37	26,4	24,8	23,9	22,1
8	3,1	2,7	2,5	2,1	38	27,3	25,7	24,7	22,9
9	3,8	3,3	3,1	2,6	39	28,1	26,5	25,5	23,7
10	4,5	4,0	3,6	3,1	40	29,0	27,4	26,3	24,4
11	5,2	4,6	4,3	3,7	41	29,9	28,2	27,2	25,2
12	5,9	5,3	4,9	4,2	42	30,8	29,1	28,0	26,0
...	...	...	...	...	...	...	...	...	...

TABLE 5: Tables de la loi d'ERLANG B.

## Autres modèles

### Tentatives et essais reconduits.

Appelons  $A'$  la charge réelle qui tient compte de la reconduite des tentatives échouées. On a

$$A' = A + AB + (AB)B + (AB^2)B + \dots = \frac{A}{1 - B} \quad (295)$$

Type d'analyse	Traitement des appels perdus	Formule de blocage
<b>Formules pour un grand nombre (infini) de sources de trafic</b>		
ERLANG B	pas de reconduite	$B_1 = \frac{P_N}{\sum_{k=0}^N P_k}$ avec $P_k = \frac{A^k}{k!}$
Reconduite des appels échoués	appels échoués reconduits tant qu'ils échouent	si $B$ est la probabilité d'erreur $A' = A/(1 - B)$
ERLANG C	appels échoués placés dans une file d'attente infinie	$B = \frac{B_1}{\left[1 - \frac{A(1-B_1)}{N}\right]}$
MOLINA	idem que ERLANG C	$B = 1 - e^{-A} \sum_{k=0}^{N-1} P_k = e^{-A} \sum_{k=N}^{\infty} P_k$
<b>Formules pour un nombre fini de sources, <math>M</math></b>		
ENGEST	pas de reconduite	$B_2(\rho) = \frac{p_N}{\sum_{k=0}^N p_k}$ , $p_k = \binom{M}{k} \rho^k$ et $A(\rho) \simeq \frac{M\rho}{[1+\rho B_2(\rho)]}$
BERNOULLI	appels perdus retenus	$B = \sum_{k=N}^M \binom{M}{k} \left(\frac{A}{M}\right)^k \left(1 - \frac{A}{M}\right)^{M-k}$

TABLE 6: Résumé de différentes formules de blocage.

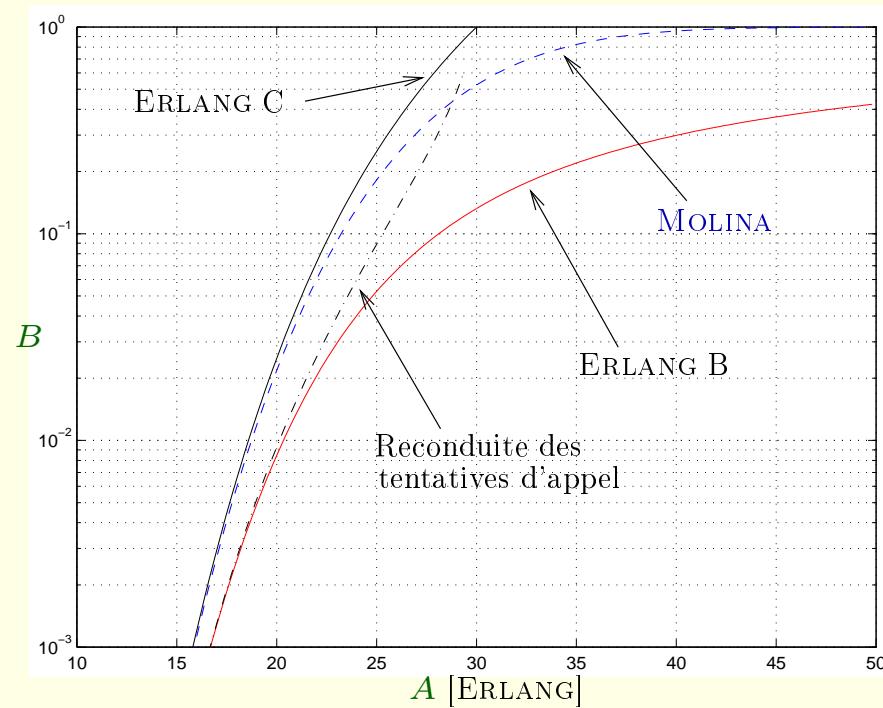


FIGURE 59: Comparaison des probabilités de blocage.

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic
- Étude des supports de transmission
  - Transmission dans le réseau téléphonique
  - Ingénierie des radiocommunications mobiles terrestres
- Fonctionnement du système de positionnement GPS

# Transmission sur ligne à paires symétriques et réseau téléphonique

- Introduction
  - Probabilité d'erreur par paquet
- Transmission par ligne
  - Propriétés électriques
  - Modèle
  - Étude fréquentielle
  - Exemples de lignes
- Réseau téléphonique
- Diaphonie et transmission à haut débit
  - Principe
  - Étude de la diaphonie
  - NEXT, FEXT, rapport signal à bruit
- Estimation de la capacité de canal
  - Information, incertitude et entropie
  - Canal discret sans mémoire
  - Information mutuelle
  - Capacité de canal

# Introduction

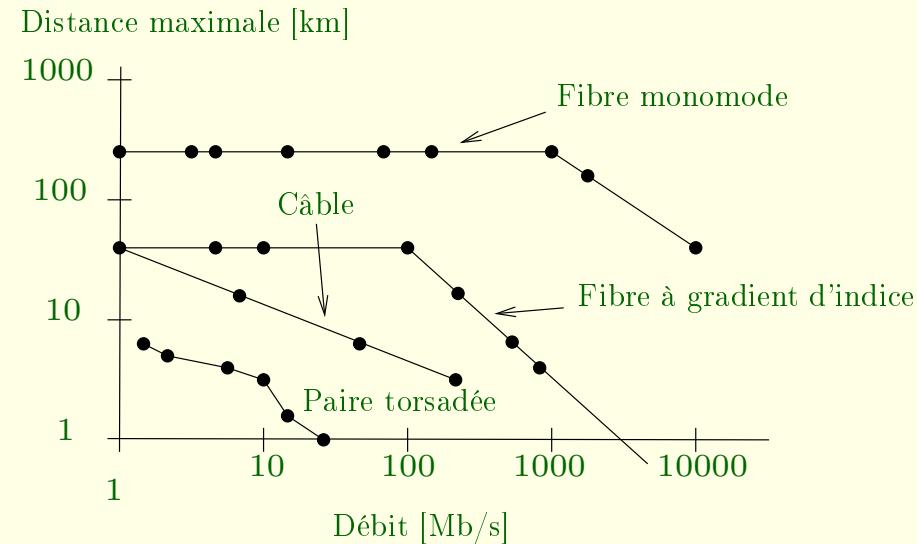


FIGURE 60: Comparaison de divers supports de transmission.

# Limitations

Plusieurs phénomènes affectent la transmission d'un signal numérique par une onde électromagnétique. Citons en quelques-uns :

**Atténuation** L'atténuation est un phénomène équivalent à une perte d'énergie du signal se propageant. On l'exprime généralement en [ $dB$ ] par kilomètre.

## Distorsion

**Dispersion** La dispersion est le phénomène à l'origine d'un étalement de l'onde, ce qui dans le cas de communications numériques, se répercute par une confusion entre symboles successifs.

## Bruit

## Probabilité d'erreur par paquet

Soit  $N$  la taille des paquets à transmettre. La probabilité d'erreur par paquet vaut le complémentaire de la probabilité qu'aucun des  $N$  bits ne soit erroné.

$$P_P = 1 - (1 - P_e)^N \quad (296)$$

en négligeant les termes du second ordre, on obtient

$$P_P \simeq N \times P_e \text{ si } N \times P_e \ll 1 \quad (297)$$

**Exemple.** Une taille de paquet de  $N = 10^5$  bits et un taux d'erreur par bit  $P_e = 10^{-7}$  conduisent à  $P_P \simeq 10^{-2}$ .

## Transmission par ligne

**Définition 19.** *On appelle ligne tout support physique de transmission constitué d'un milieu matériel fini.*

Les deux formes de lignes les plus courantes sont

- la paire torsadée constituée de deux conducteurs arrangés en hélice et
- la paire coaxiale formée de deux conducteurs concentriques séparés par un isolant.

**Définition 20.** *On appelle câble de transmission, tout support physique constitué d'un ensemble de lignes.*

# Propriétés électriques du cuivre

En régime statique.

## Résistance

Un fil de cuivre de section  $S$  présente une résistance au courant de valeur

$$R = \frac{\rho l}{S} \quad (298)$$

où  $\rho$  et  $l$  désignent respectivement la résistivité et la longueur.

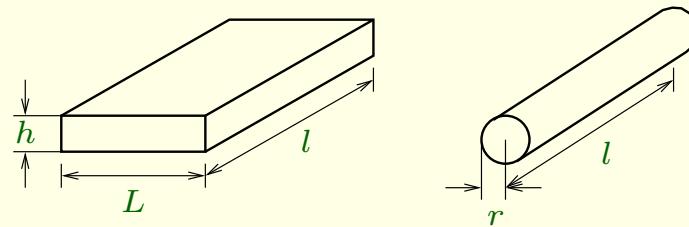


FIGURE 61: Résistance d'un conducteur.

## Capacitance

Les capacités par unité de longueur valent respectivement

$$C = \frac{2\pi\epsilon}{\ln(r_2/r_1)} \quad (299)$$

$$C = \frac{\pi\epsilon}{\ln(s/r)} \quad (300)$$

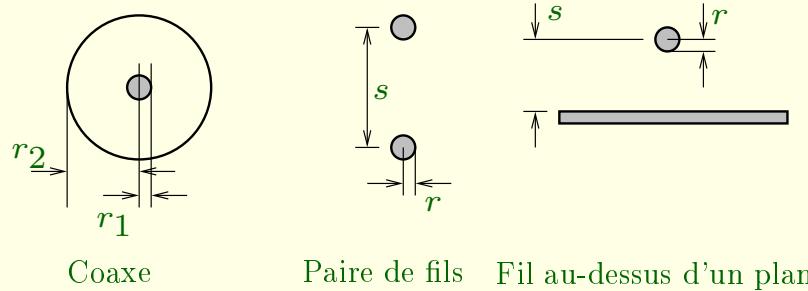


FIGURE 62: Section de différentes lignes.

## Inductance

Quant à la valeur de l'inductance, elle s'obtient en tirant profit de la propriété générale suivante

$$LC = \epsilon \quad (301)$$

# Propagation

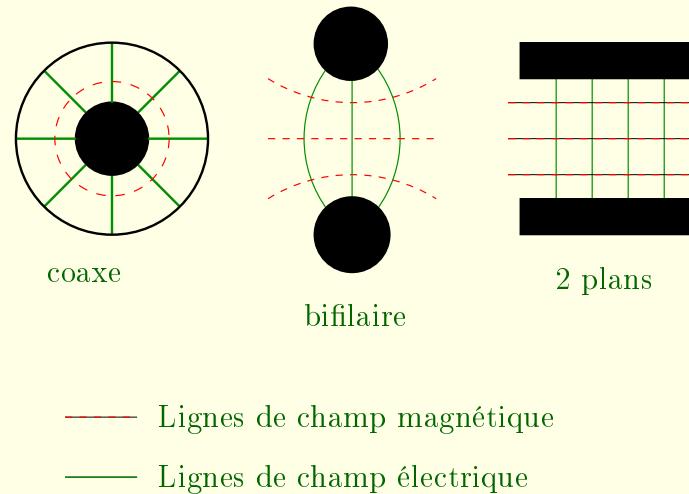


FIGURE 63: Configuration du champ électromagnétique en mode TEM pour quelques types de lignes.

# Modèle électrique

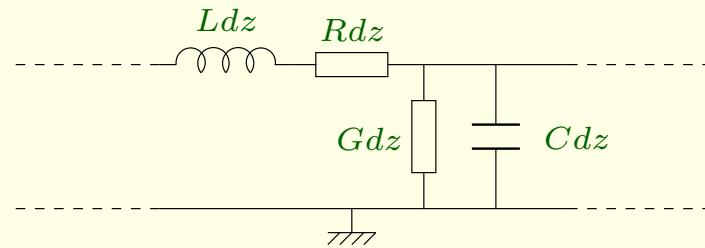


FIGURE 64: Segment de ligne infinitésimal.

## Paramètres primaires

$R$ ,  $L$ ,  $C$  et  $G$  sont appelés paramètres primaires de la ligne avec

- $R$  = résistance linéique élémentaire, représentant la résistance de la ligne par unité de longueur [ $\Omega/m$ ]. Elle dépend en particulier de la section et de la nature du conducteur,
- $L$  = inductance linéique [ $H/m$ ], modélisant la présence d'un flux variable autour et entre les structures conductrices,
- $C$  = capacité linéique [ $F/m$ ], caractérisant la capacité du diélectrique constituant la ligne,
- $G$  = admittance linéique [ $\Omega^{-1}/m$ ], représentant les pertes diélectriques et les défauts d'isolation de la ligne. Elle dépend de la nature des isolants.

# Équations des télégraphistes

En mettant bout à bout des segments de ligne infinitésimaux,

$$\frac{\partial V}{\partial z} = -RI - L\frac{\partial I}{\partial t} \quad (302)$$

$$-\frac{\partial I}{\partial z} = GV + C\frac{\partial V}{\partial t} \quad (303)$$

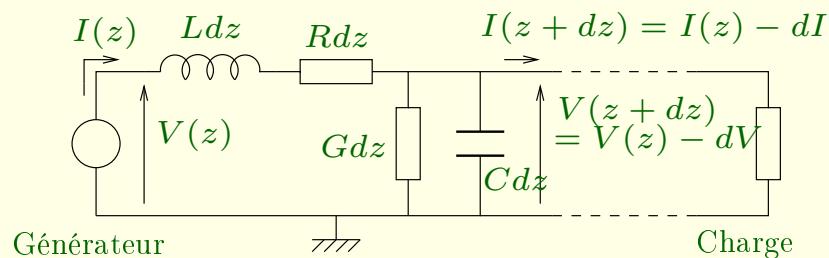


FIGURE 65: Modèle d'une ligne de transmission électrique.

## Solution du système

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = RGV + (RC + LG)\frac{\partial V}{\partial t} + LC\frac{\partial V^2}{\partial t^2} \quad (304)$$

## Solution du système

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = RGV + (RC + LG)\frac{\partial V}{\partial t} + LC\frac{\partial V^2}{\partial t^2} \quad (304)$$

### Cas particulier 1 : ligne sans perte

Dans le cas d'une ligne sans perte ( $R = G = 0$ ),

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC\frac{\partial V^2}{\partial t^2} \quad (305)$$

ce qui correspond à

$$V(z, t) = (A \cos kz + B \sin kz)(C \cos 2\pi ft + D \sin 2\pi ft) \quad (306)$$

## Solution du système

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = RGV + (RC + LG)\frac{\partial V}{\partial t} + LC\frac{\partial V^2}{\partial t^2} \quad (304)$$

### Cas particulier 1 : ligne sans perte

Dans le cas d'une ligne sans perte ( $R = G = 0$ ),

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = LC\frac{\partial V^2}{\partial t^2} \quad (305)$$

ce qui correspond à

$$V(z, t) = (A \cos kz + B \sin kz)(C \cos 2\pi ft + D \sin 2\pi ft) \quad (306)$$

### Cas particulier 2 : régime permanent

En régime permanent,  $V(z, t) = V(z)e^{j\omega t}$ . La solution est de la forme

$$\frac{\partial^2 V}{\partial z^2} = (R + jL\omega)(G + jC\omega)V(z) = \gamma^2 V(z) \quad (307)$$

En prenant une constante de propagation  $\gamma = \alpha + j\beta$ , on obtient

$$V(z) = V_i e^{-\gamma z} + V_r e^{\gamma z} \quad (308)$$

# Atténuation et spectre

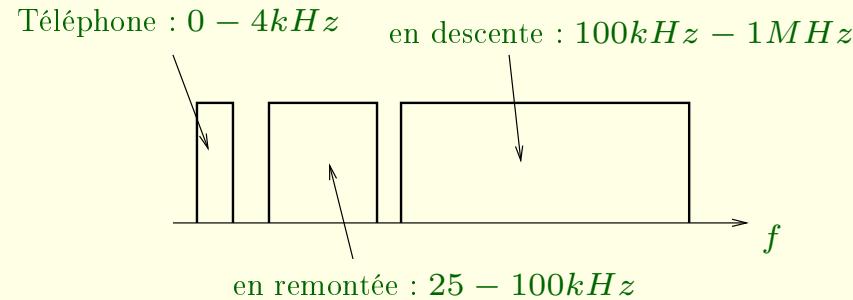


FIGURE 66: Spectre d'un signal ADSL.

## Paramètres secondaires

Les paramètres primaires ne modélisent la ligne que d'une manière microscopique. On leur préfère souvent les paramètres dits secondaires suivants pour déterminer les propriétés macroscopiques du support :

- impédance caractéristique  $Z_c$ .

En pratique, on doit absolument tenir compte de la valeur de l'impédance lors du raccordement de lignes ou d'équipements à un réseau (adaptation d'impédance)

- coefficient de propagation  $\gamma$

Par définition :  $\gamma = \alpha + j\beta$  où

- $\alpha$  = affaiblissement linéique en Néper/mètre [ $Np/m$ ]
- $\beta$  = déphasage linéique (en [ $rad/m$ ])

## Relations entre les paramètres primaires et secondaires

Les paramètres primaires et secondaires sont liés par les relations suivantes

$$Z_c = \sqrt{\frac{R + j\omega L}{G + j\omega C}} \quad (309)$$

$$\gamma = \sqrt{(R + j\omega L)(G + j\omega C)} \quad (310)$$

Si  $G = 0$ ,

$$Z_c \simeq \sqrt{\frac{R + j\omega L}{j\omega C}} \quad (311)$$

$$\gamma \simeq \sqrt{(R + j\omega L)j\omega C} \quad (312)$$

## Étude fréquentielle des paramètres

À haute fréquence,

$$\gamma \simeq \sqrt{(R + j\omega L)j\omega C} \quad (313)$$

$$\simeq \sqrt{j\omega C} \sqrt{j\omega L} \sqrt{1 + \frac{R}{j\omega L}} \quad (314)$$

$$\simeq \sqrt{j\omega C} \sqrt{j\omega L} \left( 1 + \frac{R}{j2\omega L} \right) \quad (315)$$

$$\simeq \frac{1}{2}R \sqrt{\frac{C}{L}} + j\omega \sqrt{LC} \quad (316)$$

On admet que

- $C$  et  $L$  sont indépendants de la fréquence.
- $R$  est proportionnel à  $\sqrt{f}$  :  $R = R_0\sqrt{f}$

## Atténuation en décibels

$$A [dB] = 20 \log [e^{-k\sqrt{f}L_o}] = \frac{20 \ln [e^{-k\sqrt{f}L_o}]}{\ln 10} \quad (317)$$

Dès lors, l'affaiblissement linéique vaut

$$A [dB] = A_0 \sqrt{f} L_o \quad (318)$$

où  $L_o$  désigne la longueur de la ligne.

Passer de  $L_o$  à  $2L_o$  double les pertes.

## Exemples de lignes

### Lignes à paires symétriques

Fréquence	$R [\Omega/km]$	$L [\mu H/km]$	$ Z _c [\Omega]$	$\alpha [mNp/km]$
10 [kHz]	52,3	766	188	151
120 [kHz]	98,7	67,5	156	363

TABLE 7: Ordres de grandeur des paramètres d'une ligne téléphonique.

# Lignes pour transmissions numériques

Dans un réseau local, les câbles peuvent être constitués de

- paires non blindées (UTP, Unshielded Twisted Pair),
- écrantées (FTP, Foiled Twisted Pair) ou
- écrantées paire par paire (STP, Shielded Twisted Pair).

Catégorie	Bandé passante	Exemples d'utilisation
1, 2		Distribution téléphonique (voix)
3	16 [MHz]	Voix numérique, réseaux locaux Ethernet 10 [Mb/s] et Any Lan
4	20 [MHz]	Réseaux Token Ring
5	100 [MHz]	Réseaux locaux Ethernet 10 et 100 [Mb/s], Token Ring et Any Lan

TABLE 8: Catégories de câbles.

## Lignes à paires coaxiales

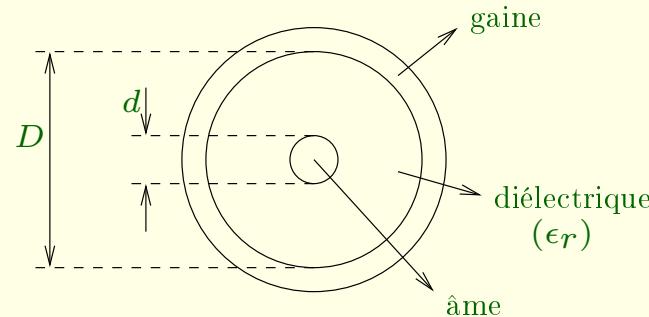


FIGURE 67: Vue de face d'un câble coaxial.

Pour des conducteurs en cuivre :

$$\alpha [Np/km] = \frac{0,692 \times 10^{-3} \sqrt{\epsilon_r f} \left[ \frac{1}{d} + \frac{1}{D} \right]}{\log(D/d)}$$

avec  $d$  et  $D$  en [mm],  $f$  en [Hz].

Type	D [mm]	$Z_c [\Omega]$	$\alpha [dB/100m]$ à 200 [MHz]	$\alpha [dB/100m]$ à 3 [GHz]
RG58W	4,95	50	24	140
RG35BU	17,27	75	4,7	37

TABLE 9: Caractéristiques de deux câbles coaxiaux.

# Réseau téléphonique

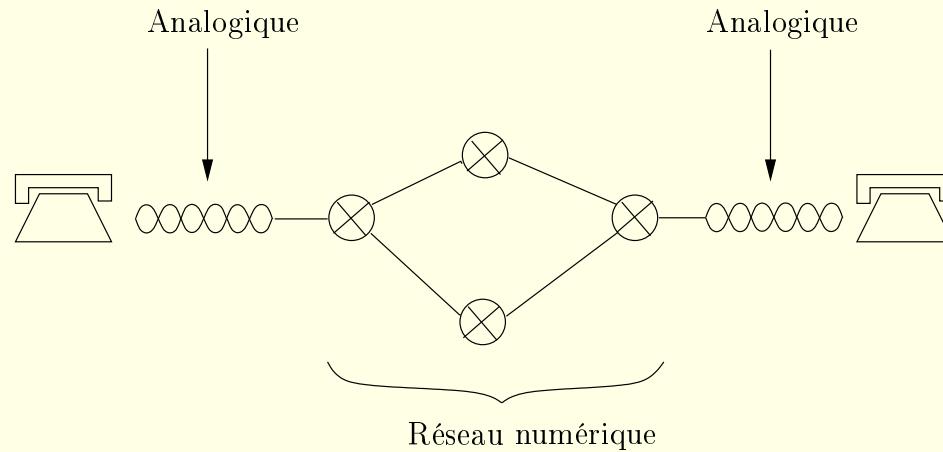


FIGURE 68: Ligne analogique.

On parle de circuit ou de mode connecté.

Bandé passante : [300 Hz, 3400 Hz] ; on parle de la bande vocale.

# Transmission par modem

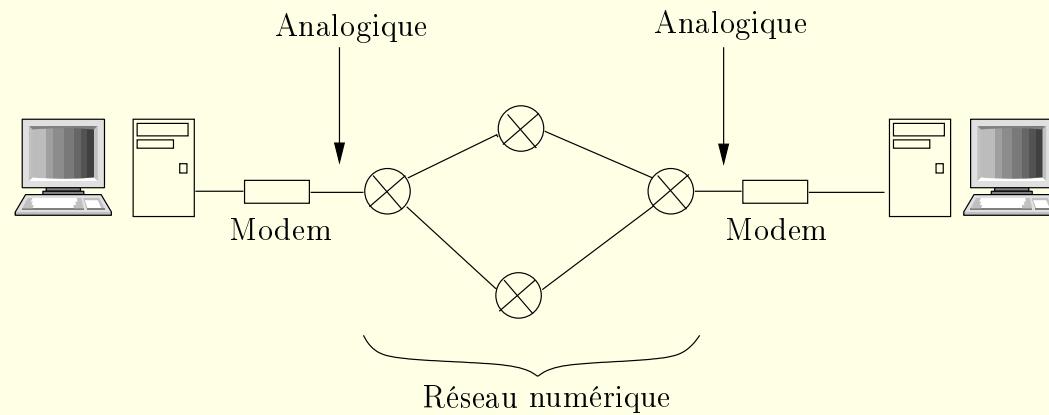


FIGURE 69: Transmission par modem dans la bande  $[300 \text{ Hz}, 3400 \text{ Hz}]$ .

# Réseau Numérique à Intégration de Services (RNIS)

Pour un accès de base, l'abonné dispose de 2 canaux à  $64 [kb/s]$ . Ces canaux sont compatibles avec les canaux  $64 [kb/s]$  utilisés entre centraux.

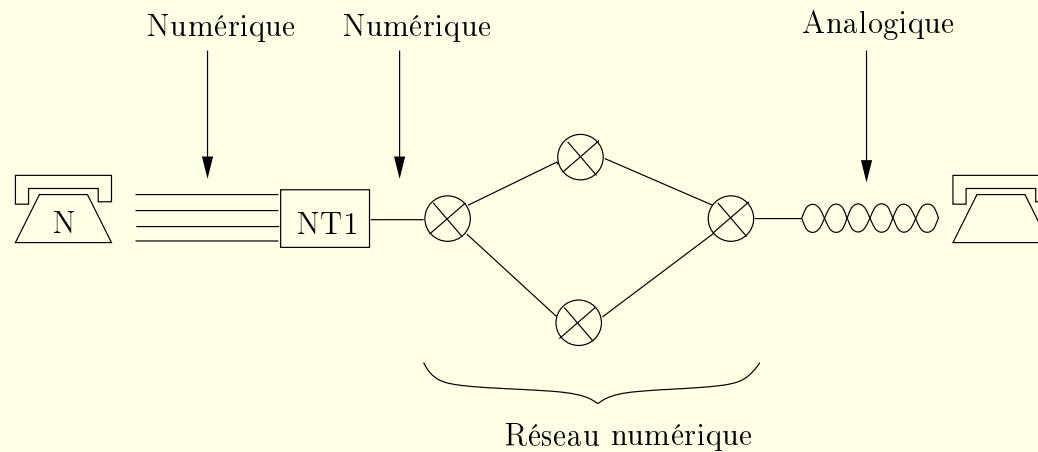


FIGURE 70: RNIS.

# Transmission ADSL

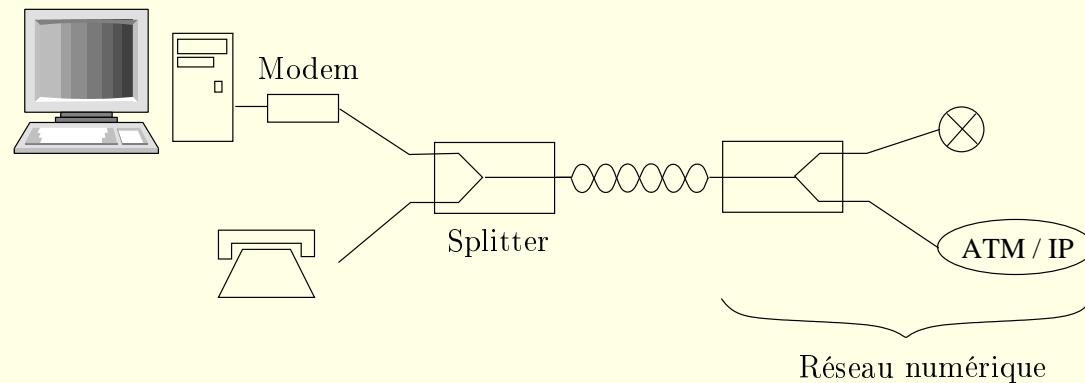


FIGURE 71: Configuration d'une connexion ADSL.

## Filtre de séparation

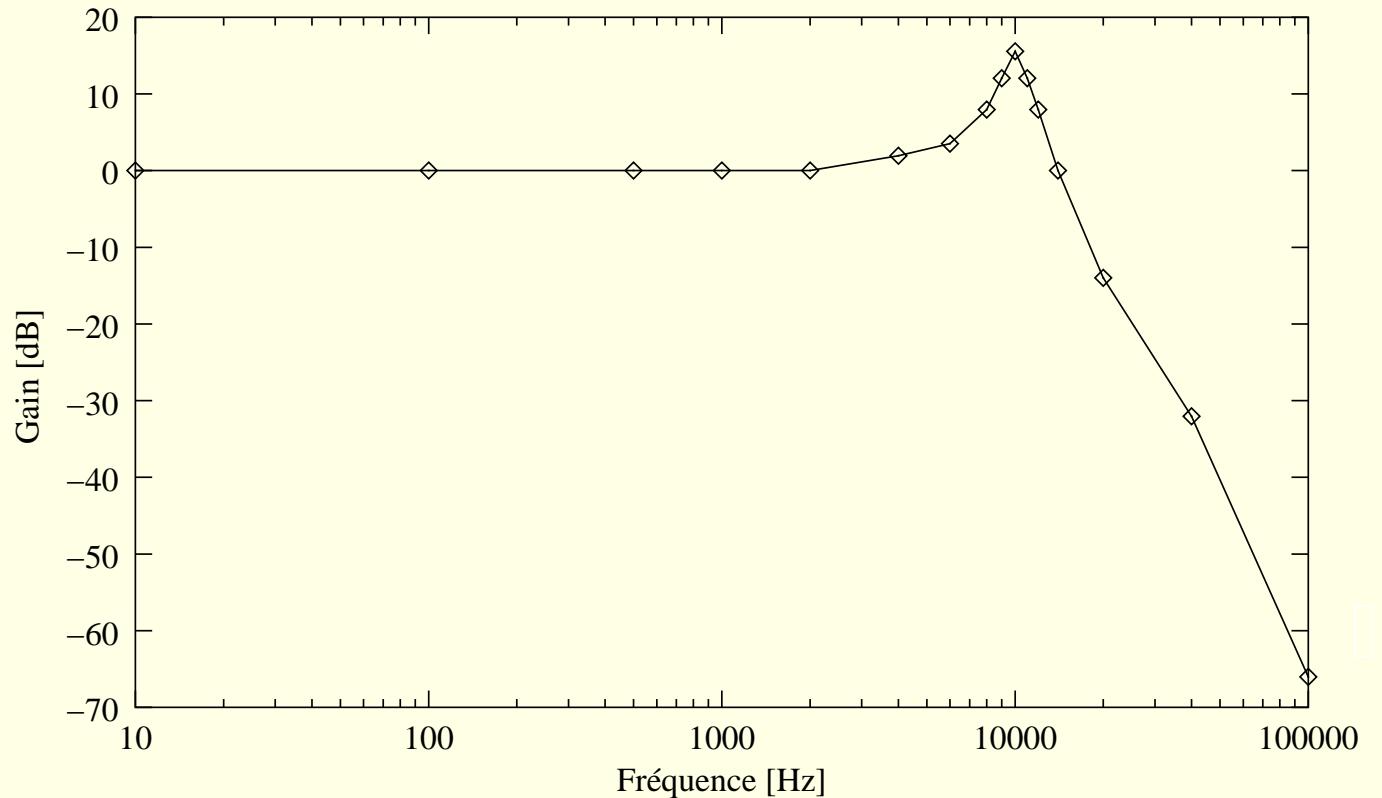


FIGURE 72: Filtre de séparation pour les signaux d'une ligne convertie à l'ADSL et sa courbe de gain.

## Principe

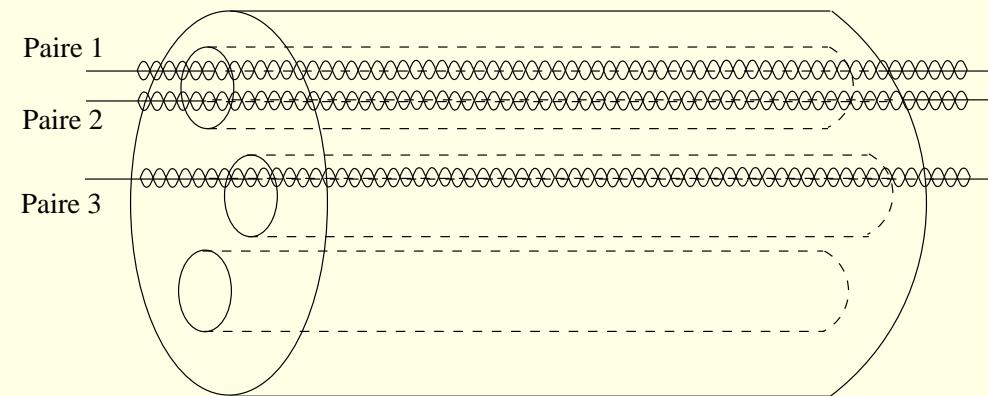


FIGURE 73: La diaphonie provient de la proximité des paires de cuivre.

# Paradiaphonie et télédiaphonie

Selon que la ligne perturbatrice provoque un parasite vers l'une ou l'autre des extrémités de la ligne parasitée, on parle de paradiaphonie ou de télédiaphonie.

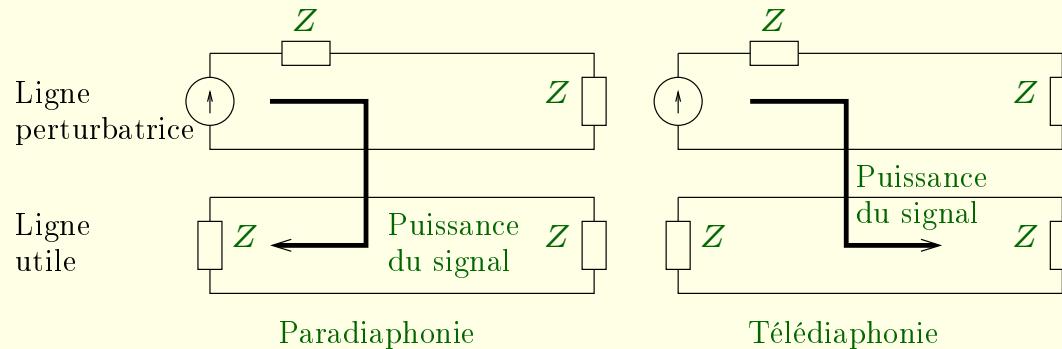


FIGURE 74: Paradiaphonie et télédiaphonie.

# Diaphonie dans le réseau téléphonique

Le NEXT (Near-End Crosstalk) et le FEXT (Far-End Crosstalk) représentent respectivement la para et la télédiaphonie.

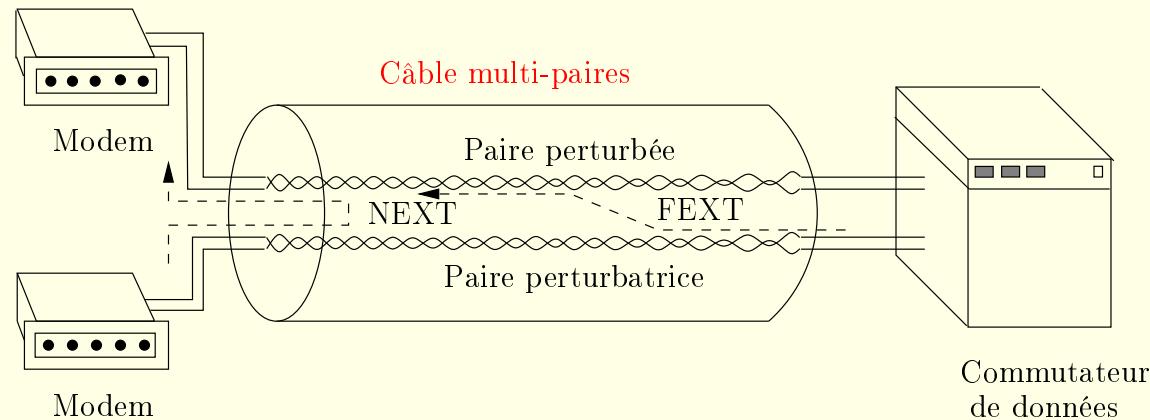


FIGURE 75: Diaphonie dans le réseau téléphonique

## Approche analytique

On cherchera donc à établir une fonction de transfert de puissance entre lignes de référence.

On distingue deux types de modèle pour expliquer les phénomènes de diaphonie :

- le modèle des capacités non équilibrées et
- le modèle des inductances non équilibrées.

## Modèle des capacités non équilibrées

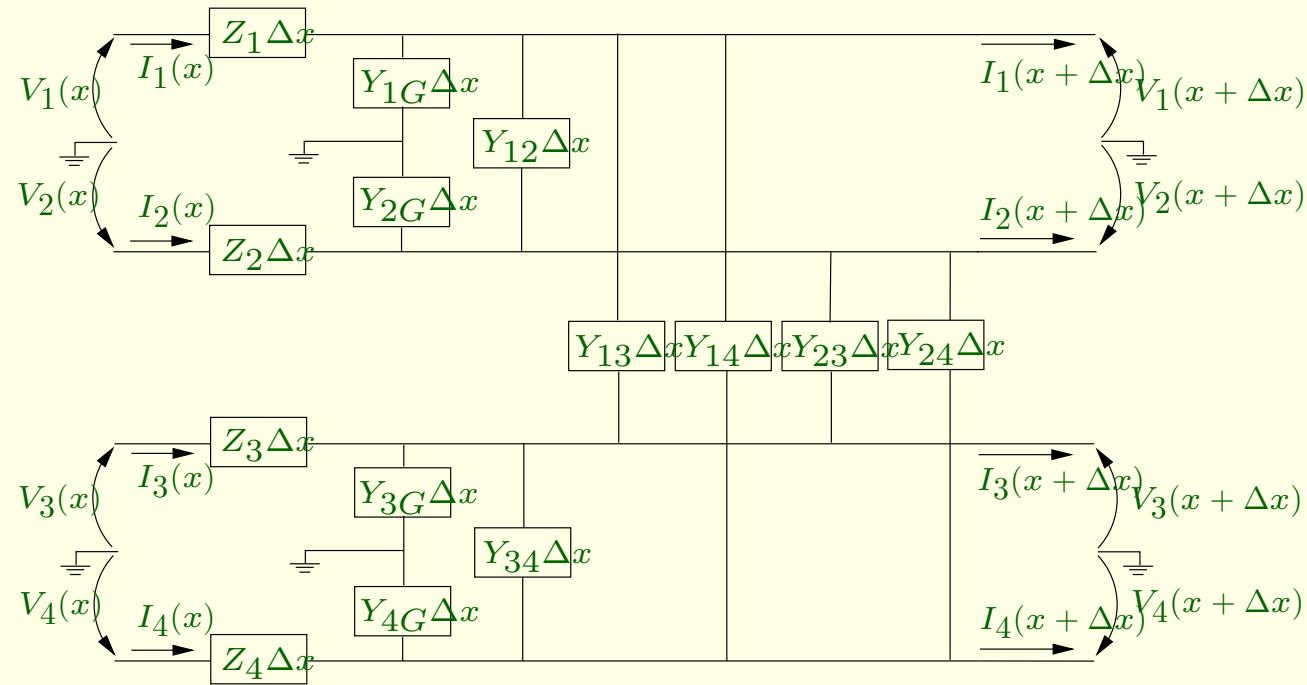


FIGURE 76: Modèle capacitif de deux paires

Pour la facilité, on écrit les capacités comme des admittances :  $Y = j\omega C$  (on admet que  $G = 0$ ). Pour les calculs, les tensions référencées par rapport à la masse.

L'application de la loi des mailles donne les équations suivantes

$$V_1(x + \Delta x) = V_1(x) - I_1(x)Z_1\Delta x \quad (319)$$

$$V_2(x + \Delta x) = V_2(x) - I_2(x)Z_2\Delta x \quad (320)$$

$$V_3(x + \Delta x) = V_3(x) - I_3(x)Z_3\Delta x \quad (321)$$

$$V_4(x + \Delta x) = V_4(x) - I_4(x)Z_4\Delta x \quad (322)$$

et l'application de la loi des nœuds fournit les équations suivantes

$$\begin{aligned} I_1(x + \Delta x) &= I_1(x) - V_1(x + \Delta x)Y_{1G}\Delta x - [V_1(x + \Delta x) - V_2(x + \Delta x)]Y_{12}\Delta x \\ &\quad - [V_1(x + \Delta x) - V_3(x + \Delta x)]Y_{13}\Delta x - [V_1(x + \Delta x) - V_4(x + \Delta x)]Y_{14}\Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_2(x + \Delta x) &= I_2(x) - V_2(x + \Delta x)Y_{2G}\Delta x - [V_2(x + \Delta x) - V_1(x + \Delta x)]Y_{12}\Delta x \\ &\quad - [V_2(x + \Delta x) - V_3(x + \Delta x)]Y_{23}\Delta x - [V_2(x + \Delta x) - V_4(x + \Delta x)]Y_{24}\Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_3(x + \Delta x) &= I_3(x) - V_3(x + \Delta x)Y_{3G}\Delta x - [V_3(x + \Delta x) - V_1(x + \Delta x)]Y_{13}\Delta x \\ &\quad - [V_3(x + \Delta x) - V_2(x + \Delta x)]Y_{23}\Delta x - [V_3(x + \Delta x) - V_4(x + \Delta x)]Y_{34}\Delta x \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} I_4(x + \Delta x) &= I_4(x) - V_4(x + \Delta x)Y_{4G}\Delta x - [V_4(x + \Delta x) - V_1(x + \Delta x)]Y_{13}\Delta x \\ &\quad - [V_4(x + \Delta x) - V_2(x + \Delta x)]Y_{24}\Delta x - [V_4(x + \Delta x) - V_3(x + \Delta x)]Y_{34}\Delta x \end{aligned}$$

Dans toutes ces équations, on peut passer à la limite  $\Delta x \rightarrow 0$  après avoir divisé tous les membres par  $\Delta x$ .

Les 8 équations s'expriment alors sous la forme matricielle suivante

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -Z_4 \\ A_1 & Y_{12} & Y_{13} & Y_{14} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{12} & A_2 & Y_{23} & Y_{24} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{13} & Y_{23} & A_3 & Y_{34} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ Y_{14} & Y_{24} & Y_{34} & A_4 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ V_3 \\ V_4 \\ I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \end{bmatrix} = \underline{A} \vec{S} \quad (323)$$

où

$$A_1 = -(Y_{1G} + Y_{12} + Y_{13} + Y_{14}) \quad (324)$$

$$A_2 = -(Y_{2G} + Y_{12} + Y_{23} + Y_{24}) \quad (325)$$

$$A_3 = -(Y_{3G} + Y_{13} + Y_{23} + Y_{34}) \quad (326)$$

$$A_4 = -(Y_{4G} + Y_{14} + Y_{24} + Y_{34}) \quad (327)$$

## Changements de variables suivants

$$V_{1M} = V_1 - V_2 \quad (328)$$

$$V_{2M} = V_3 - V_4 \quad (329)$$

$$V_{1L} = \frac{V_1 + V_2}{2} \quad (330)$$

$$V_{2L} = \frac{V_3 + V_4}{2} \quad (331)$$

$$I_{1M} = \frac{I_1 - I_2}{2} \quad (332)$$

$$I_{2M} = \frac{I_3 - I_4}{2} \quad (333)$$

$$I_{1L} = I_1 + I_2 \quad (334)$$

$$I_{2L} = I_3 + I_4 \quad (335)$$

Ces équations peuvent également être regroupées sous forme matricielle

$$\vec{S} = \underline{T} \begin{bmatrix} V_{1M} \\ V_{1L} \\ V_{2M} \\ V_{2L} \\ I_{1M} \\ I_{1L} \\ I_{2M} \\ I_{2L} \end{bmatrix} = \underline{T} \vec{S}' \quad (336)$$

où  $\underline{T}$  est une matrice permettant d'effectuer le changement de variables

$$\underline{T} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{2} & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & \frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & -1 & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \quad (337)$$

Dès lors,

$$\vec{S}' = \underline{T}^{-1} \vec{S} \quad (338)$$

L'ensemble s'écrit finalement

$$\frac{d}{dx} \vec{S} = \underline{A} \vec{S} \quad (339)$$

$$\frac{d}{dx} \underline{T}^{-1} \vec{S} = \underline{T}^{-1} \underline{A} \vec{S} \quad (340)$$

$$\frac{d}{dx} \vec{S}' = \underline{T}^{-1} \underline{A} \underline{T} \vec{S}' \quad (341)$$

La conséquence du changement de variables est le découplage des équations. Dès lors, en remplaçant  $Y$  par  $j\omega C$ ,

$$\frac{d}{dx} \begin{bmatrix} I_{1M} \\ I_{1L} \\ I_{2M} \\ I_{2L} \end{bmatrix} = -\frac{j\omega}{4} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_{1M} \\ V_{1L} \\ V_{2M} \\ V_{2L} \end{bmatrix} \quad (342)$$

où

$$a_{11} = C_{1G} + C_{2G} + 4C_{12} + C_{13} + C_{14} + C_{23} + C_{24} \quad (343)$$

$$a_{21} = a_{12} = 2C_{1G} - 2C_{2G} + 2C_{13} + 2C_{14} - 2C_{23} - 2C_{24} \quad (344)$$

$$a_{31} = a_{13} = -C_{13} + C_{14} + C_{23} - C_{24} \quad (345)$$

$$a_{41} = a_{14} = -2C_{13} - 2C_{14} + 2C_{23} + 2C_{34} \quad (346)$$

$$a_{22} = 4C_{1G} + 4C_{2G} + 4C_{13} + 4C_{14} + 4C_{23} + 4C_{24} \quad (347)$$

$$a_{23} = a_{32} = -2C_{13} + 2C_{14} - 2C_{23} + 2C_{34} \quad (348)$$

$$a_{24} = a_{42} = -4C_{13} - 4C_{14} - 4C_{23} - 4C_{24} \quad (349)$$

$$a_{33} = C_{3G} + C_{4G} + C_{13} + C_{14} + C_{23} + C_{24} + 4C_{34} \quad (350)$$

$$a_{34} = a_{43} = 2C_{3G} - 2C_{4G} + 2C_{13} - 2C_{14} + 2C_{23} - 2C_{24} \quad (351)$$

$$a_{44} = 4C_{3G} + 4C_{4G} + 4C_{13} + 4C_{14} + 4C_{23} + 4C_{24} \quad (352)$$

Le paramètre  $a_{31}$  de ces équations détermine le couplage entre la tension sur une paire et le courant induit dans l'autre paire. Ce terme serait nul si toutes les capacités étaient égales. C'est ce déséquilibre de capacités qui est à l'origine d'un effet diaphonique ; il s'exprime par

$$\frac{d}{dx}I_{2M} = -\frac{j\omega}{4}C_{M_1M_2}V_{1M} \quad (353)$$

où  $C_{M_1M_2}$  est égal à  $a_{31}$  (ou  $a_{13}$ ).

## Modèle des inductances non équilibrées

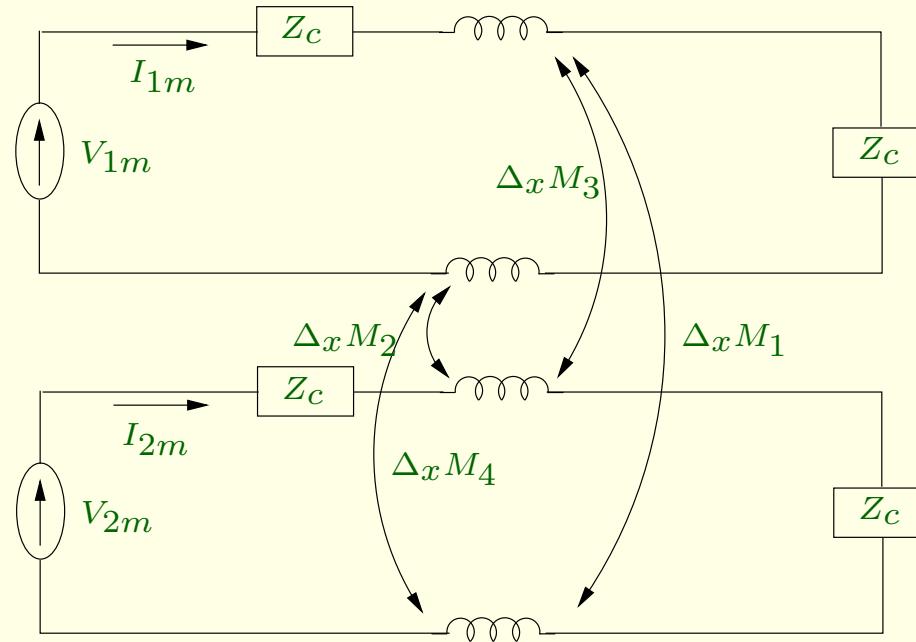


FIGURE 77: Modèle inductif de deux paires.

L'analyse détaillée de la question montre que

$$\frac{d}{dx} I_{2M} \simeq \frac{j\omega M}{4Z_c^2} V_{1M} \quad (354)$$

où  $M$  vaut  $M_1 + M_2 + M_3 + M_4$ .

## Conclusion

Il apparaît donc que les effets des deux modèles fournissent un courant perturbateur tel que

$$\frac{d}{dx}I_{2M} = \left( \frac{j\omega M}{4Z_c^2} - \frac{j\omega}{4}C_{M_1M_2} \right) V_{1M} \quad (355)$$

que l'on écrira plus généralement

$$\frac{d}{dx}I_{2M} = j\omega Q_{M_1M_2} V_{1M} \quad (356)$$

où  $Q_{M_1M_2}$  tient compte des effets capacitifs et inductifs.

# Calcul du NEXT

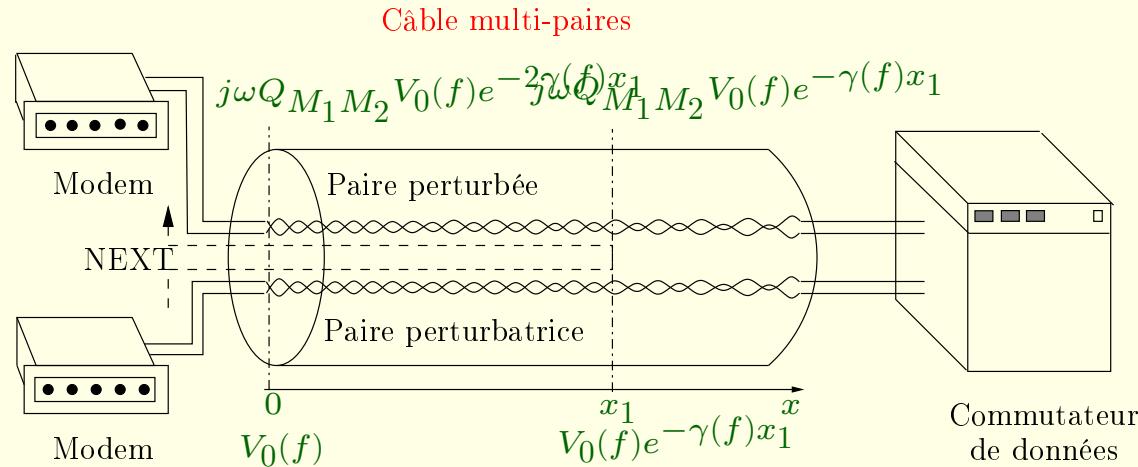


FIGURE 78: Paradiaphonie au droit de  $x_1$ .

# Calcul du NEXT

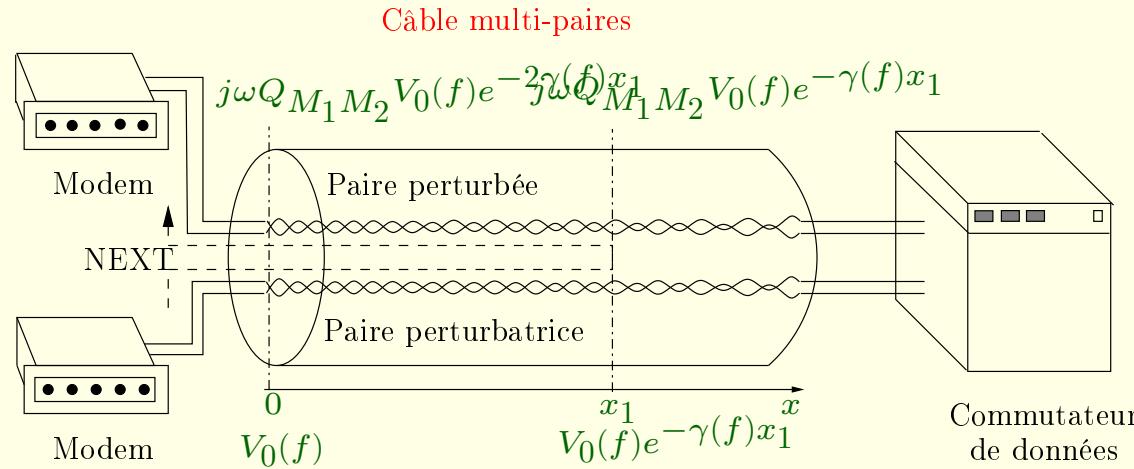


FIGURE 78: Paradiaphonie au droit de  $x_1$ .

Au droit de  $x_1$ , la tension sur la paire perturbatrice vaut

$$V_0(f)e^{-\gamma(f)x_1} \quad (357)$$

Le courant diaphonique induit sur la paire perturbée vaut

$$\frac{d}{dx} I_2(f, x_1) = j\omega Q_{M_1 M_2} V_1(f, x_1) = j\omega Q_{M_1 M_2} V_0(f) e^{-\gamma(f)x_1} \quad (358)$$

## Intégration le long de la ligne

$$I_2(f) = \int_0^L j\omega Q_{M_1 M_2}(x) V_0(f) e^{-2\gamma(f)x} dx \quad (359)$$

En terme de puissance, le signal perturbateur s'exprime par

$$P_2(f) = V_2(f) I_2^* = Z_L I_2(f) I_2^*(f) \quad (360)$$

$Q_{M_1 M_2}$  est malheureusement inconnu  $\Rightarrow$  approche statistique

$$E \{ P_2(f) \} = E \left\{ R_L V_0^2(f) \int_0^L j\omega Q_{M_1 M_2}(x) e^{-2\gamma(f)x} dx \int_0^L -j\omega Q_{M_1 M_2}^*(y) e^{-2\gamma^*(f)y} dy \right\} \quad (361)$$

$$= R_L \omega^2 V_0^2(f) E \left\{ \int_0^L \int_0^L Q_{M_1 M_2}(x) Q_{M_1 M_2}^*(y) e^{-2\gamma(f)x} e^{-2\gamma^*(f)y} dx dy \right\} \quad (362)$$

$$= R_L \omega^2 V_0^2(f) \int_0^L \int_0^L E \{ Q_{M_1 M_2}(x) Q_{M_1 M_2}^*(y) \} e^{-2\gamma(f)x} e^{-2\gamma^*(f)y} dx dy \quad (362)$$

## Hypothèse

Une hypothèse réaliste consiste à considérer que  $Q_{M_1 M_2}(x)$  et  $Q_{M_1 M_2}^*(y)$  sont deux variables non corrélées, ce qui implique

$$E \{ Q_{M_1 M_2}(x) Q_{M_1 M_2}^*(y) \} = k \delta(x - y) \quad (363)$$

Grâce à cette hypothèse,

$$\begin{aligned} E \{ P_2(f) \} &= R_L \omega^2 V_0^2(f) \int_0^L \int_0^L k \delta(x - y) e^{-2\gamma(f)x} e^{-2\gamma^*(f)y} dx dy \\ &= R_L \omega^2 V_0^2(f) k \int_0^L e^{-2\gamma(f)x} e^{-2\gamma^*(f)x} dx \end{aligned} \quad (364)$$

$$= R_L \omega^2 V_0^2(f) k \int_0^L e^{-4\alpha(f)x} dx \quad (365)$$

$$= R_L \omega^2 V_0^2(f) k \left[ \frac{e^{-4\alpha(f)x}}{-4\alpha(f)} \right]_0^L \quad (366)$$

$$= \frac{R_L \omega^2 V_0^2(f) k}{-4\alpha(f)} \left( e^{-4\alpha(f)L} - 1 \right) \quad (367)$$

Pour des lignes suffisamment longues,

$$E \{P_2(f)\} = \frac{R_L \omega^2 V_0^2(f) k}{4\alpha(f)} \quad (368)$$

À haute fréquence (ce qui est le cas pour l'ADSL),  $\alpha$  est proportionnel à  $\sqrt{f}$ . D'où

$$H_{NEXT}(f) = \frac{R_L \omega^2 k}{4\alpha(f)} = \frac{k' f^2}{\alpha_0 \sqrt{f}} = K_{NEXT} f^{\frac{3}{2}} \quad (369)$$

Cette expression représente la fonction de transfert en puissance de la paradiaphonie (NEXT)

# Calcul du FEXT

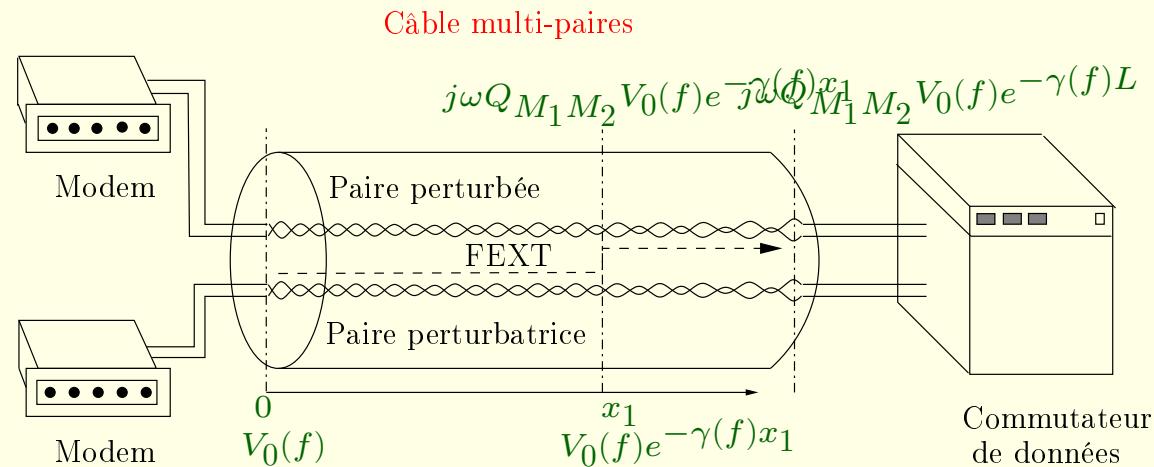


FIGURE 79: Télédiaphonie au droit de  $x_1$ .

# Calcul du FEXT

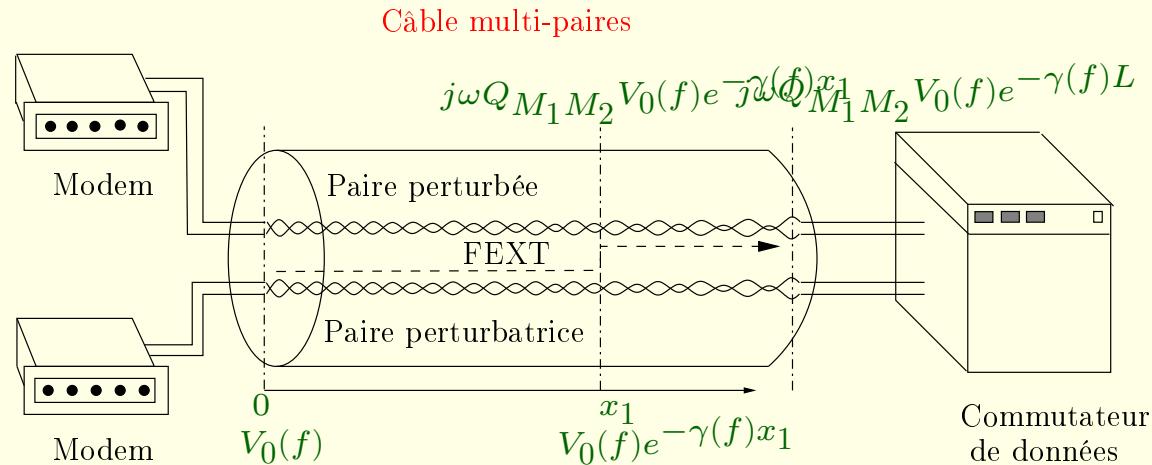


FIGURE 79: Télédiaphonie au droit de  $x_1$ .

Les calculs mènent à une fonction de transfert en puissance d'expression

$$H_{FEXT}(f) = k_{FEXT} f^2 e^{-2\alpha(f)L} L \quad (370)$$

où  $L$  est la longueur du tronçon sur lequel agit le FEXT.

Contrairement au NEXT, le FEXT est sensible à la longueur de la zone d'interférence ; il augmente également avec la fréquence.

# Rapport signal sur bruit

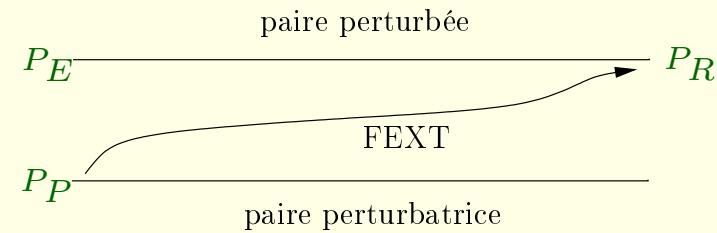


FIGURE 80: Calcul de la densité spectrale de puissance en sortie de la paire en présence de FEXT.

## Rapport signal sur bruit

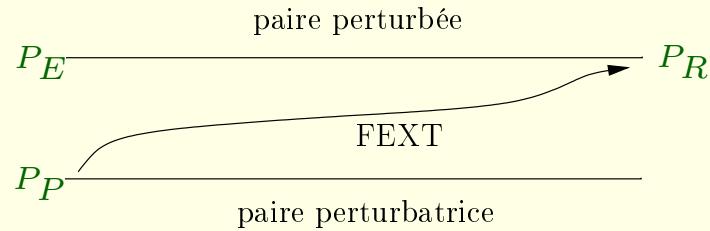


FIGURE 80: Calcul de la densité spectrale de puissance en sortie de la paire en présence de FEXT.

Dans le cas du FEXT et par application du théorème de WIENER-KINTCHINE, on obtient

$$\gamma_R(f) = \gamma_E(f) \|\mathcal{H}_c(f)\|^2 + \gamma_P(f) H_{FEXT}(f) \quad (371)$$

On en déduit l'expression du rapport signal sur bruit

$$\frac{S(f)}{N(f)} = \frac{\gamma_E(f) \|\mathcal{H}_c(f)\|^2}{\gamma_P(f) H_{FEXT}(f)} \quad (372)$$

$$= \frac{\gamma_E(f) \|\mathcal{H}_c(f)\|^2}{\gamma_P(f) L f^2 k_{FEXT} \|\mathcal{H}_c(f)\|^2} \quad (373)$$

$$= \frac{1}{L f^2 k_{FEXT}} \quad (374)$$

$$= \frac{k'}{L f^2} \quad (375)$$

Une formule identique peut être dérivée dans le cas du NEXT, ce qui donne deux expressions du rapport signal sur bruit.

L'expression du canal n'intervient pas dans ces formules.

## Influence du nombre de perturbateurs

Supposons le câble constitué de  $N$  lignes perturbatrices. Une idée simple consiste à sommer l'effet individuel des  $N$  lignes.

$$\gamma_{out}(f) = \sum_{i=1}^N \gamma_{in_i}(f) H_{FEXT/NEXT}(f) \quad (376)$$

Si tous les signaux perturbateurs ont la même densité spectrale de puissance,

$$\gamma_{out}(f) = N \gamma_{in}(f) H_{FEXT/NEXT}(f) \quad (377)$$

Cette formule surévalue la puissance perturbatrice car les paires très éloignées de la paire perturbée influencent peu cette dernière.

**Proposition 5.** *Formule d'UNGER (formule empirique) :*

$$\gamma_{out}(f) = N^{0,6} \gamma_{in}(f) H_{FEXT/NEXT}(f) \quad (378)$$

# Estimation de la capacité de canal

Démarche :

- Définition de la notion d'information
- Modélisation d'un canal
- Établissement de la capacité

# Estimation de la capacité de canal

Démarche :

- Définition de la notion d'information
- Modélisation d'un canal
- Établissement de la capacité

**Notion d'information**

**Définition 21.** *[Information d'un symbole]* *Le gain en information apporté par l'observation de l'événement  $S = s_k$ , de probabilité  $p_k$  est donné par l'information de symbole telle que définie par*

$$i(s_k) = \log_2 \left( \frac{1}{p_k} \right) = -\log_2 p_k \quad (379)$$

Cette grandeur s'exprime en bit d'information. Il y a une différence entre bit (mesure du débit) et bit d'information (mesure du débit d'information).

## Notion d'entropie

Soit une source  $S$  comprenant  $K$  symboles.

**Définition 22.** *L'information moyenne d'une source est appelée entropie de la source et notée  $H(S)$ .*

$$H(S) = \sum_{k=0}^{K-1} p_k \log_2 \left( \frac{1}{p_k} \right) \quad (380)$$

## Canal discret sans mémoire

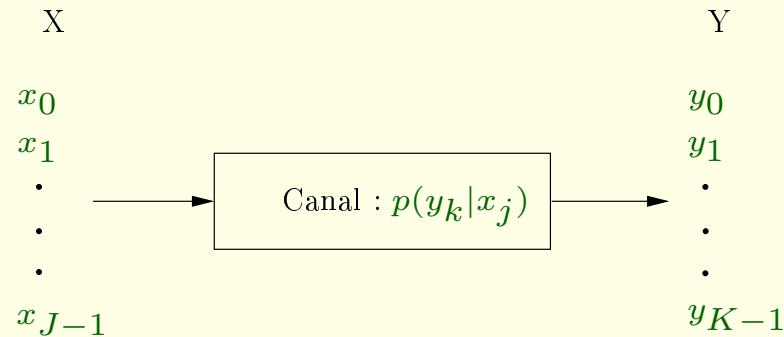


FIGURE 81: Modèle du canal discret sans mémoire.

Idéalement,  $p(y_k|x_j) = 0$  si  $k \neq j$  en l'absence de bruit ou de tout pré-codage.

En pratique, on doit toujours tenir compte des probabilités croisées.

## Entropie conditionnelle

Pour un canal bruité, la question posée est de savoir quelle incertitude subsiste sur l'entrée  $X$  après avoir observé la sortie  $Y = y_k$ .

**Définition 23.** *Entropie de  $X$  conditionnellement à  $Y$ , sachant que  $Y = y_k$  :*

$$H(X|Y = y_k) = \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j|y_k) \log_2 \left( \frac{1}{p(x_j|y_k)} \right) \quad (381)$$

## Entropie conditionnelle

Pour un canal bruité, la question posée est de savoir quelle incertitude subsiste sur l'entrée  $X$  après avoir observé la sortie  $Y = y_k$ .

**Définition 23.** *Entropie de  $X$  conditionnellement à  $Y$ , sachant que  $Y = y_k$  :*

$$H(X|Y = y_k) = \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j|y_k) \log_2 \left( \frac{1}{p(x_j|y_k)} \right) \quad (381)$$

**Définition 24.** *Valeur moyenne de cette information : entropie conditionnelle  $H(X|Y)$*

$$\begin{aligned} H(X|Y) &= \sum_{k=0}^{K-1} H(X|Y = y_k) p(y_k) \\ &= \sum_{k=0}^{K-1} \sum_{j=0}^{J-1} p(x_j|y_k) p(y_k) \log_2 \left( \frac{1}{p(x_j|y_k)} \right) \end{aligned}$$

## Information mutuelle

On définit alors l'information mutuelle moyenne  $I(X; Y)$  comme la quantité d'information que l'on retrouve en sortie du canal (et donc qui n'a pas été affecté par le bruit). Dès lors,

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (382)$$

**Proposition 6.** *L'information mutuelle est symétrique  $I(X; Y) = I(Y; X)$*

On en déduit que

$$I(X; Y) = H(X) - H(X|Y) \quad (383)$$

$$I(Y; X) = H(Y) - H(Y|X) \quad (384)$$

## Capacité de canal

**Définition 25.** *On définit la capacité maximale d'un canal comme le maximum de l'information mutuelle moyenne où la maximisation se fait sur la distribution de probabilité des symboles d'entrée*

$$C_s = \max_{\{p(x_j)\}} I(X; Y) \quad (385)$$

Cette définition représente donc la meilleure utilisation que l'on peut faire du canal.

## Capacité de canal

**Définition 25.** *On définit la capacité maximale d'un canal comme le maximum de l'information mutuelle moyenne où la maximisation se fait sur la distribution de probabilité des symboles d'entrée*

$$C_s = \max_{\{p(x_j)\}} I(X; Y) \quad (385)$$

Cette définition représente donc la meilleure utilisation que l'on peut faire du canal.

Cette relation définit une capacité de canal par symbole ! Si le canal est capable de traiter  $s$  symboles par seconde, la capacité par seconde est donnée par

$$C = s C_s \quad (386)$$

# Estimation de la capacité d'un canal binaire symétrique

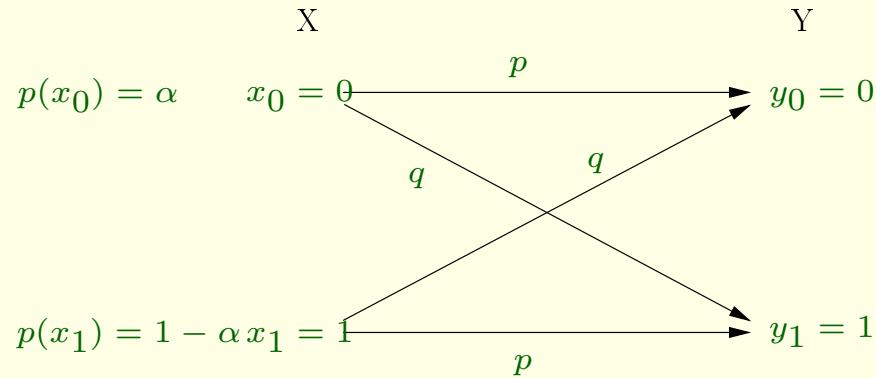


FIGURE 82: Calcul de la capacité de canal d'un canal binaire symétrique.

La capacité du canal s'exprime par

$$C_s = \max_{\{p(x_j)\}} I(X; Y) \quad (387)$$

$$= \max_{\{p(x_j)\}} [H(X) - H(X|Y)] \quad (388)$$

$$= \max_{\{p(x_j)\}} [H(Y) - H(Y|X)] \quad (389)$$

# Estimation de la capacité d'un canal binaire symétrique

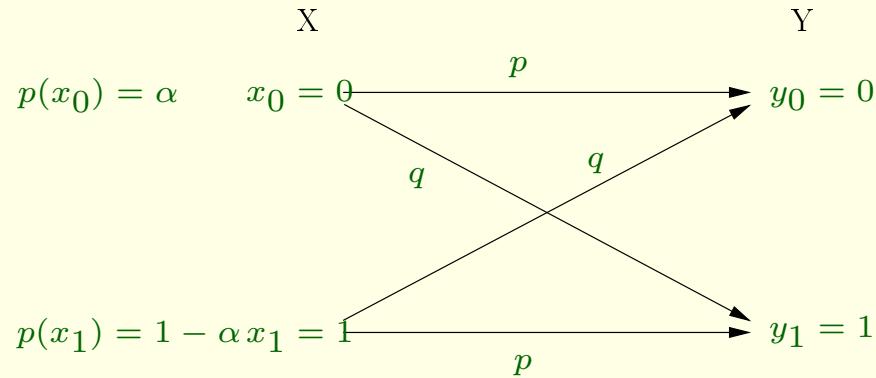


FIGURE 82: Calcul de la capacité de canal d'un canal binaire symétrique.

La capacité du canal s'exprime par

$$C_s = \max_{\{p(x_j)\}} I(X; Y) \quad (387)$$

$$= \max_{\{p(x_j)\}} [H(X) - H(X|Y)] \quad (388)$$

$$= \max_{\{p(x_j)\}} [H(Y) - H(Y|X)] \quad (389)$$

L'entropie conditionnelle pour la paire entrée-sortie  $(x_0, y_0)$  vaut

$$H(Y|X)_{(x_0, y_0)} = -p(x_0)p(y_0|x_0) \log_2 (p(y_0|x_0)) \quad (390)$$

Sachant que la probabilité d'émission du symbole  $x_0$  est de  $\alpha$  et que la probabilité conditionnelle  $p(y_0|x_0)$  vaut  $p$ ,

$$H(Y|X)_{(x_0, y_0)} = -\alpha p \log_2 p \quad (391)$$

En sommant les différentes contributions,

$$H(Y|X) = \sum_{i=0}^1 \sum_{j=0}^1 H(Y|X)_{(x_i, y_j)} \quad (392)$$

$$= -p \log_2 p - q \log_2 q \quad (393)$$

$H(Y|X)$  ne dépend que des caractéristiques du canal, on parle d'entropie de canal. Dès lors,

$$I(X; Y) = H(Y) + p \log_2 p + q \log_2 q \quad (394)$$

Comme le maximum que l'on peut obtenir avec un canal binaire est une valeur unitaire pour  $H(Y)$ , la capacité maximale de canal est

$$C_S = 1 + p \log_2 p + q \log_2 q \quad (395)$$

Comme le maximum que l'on peut obtenir avec un canal binaire est une valeur unitaire pour  $H(Y)$ , la capacité maximale de canal est

$$C_S = 1 + p \log_2 p + q \log_2 q \quad (395)$$

Dans le cas d'une modulation à deux états, la probabilité d'erreur est liée au rapport signal à bruit par la relation

$$q = p_e = \frac{1}{2} \operatorname{erfc} \left( \sqrt{\frac{E_b}{N_0}} \right) \quad (396)$$

# Influence du type de modulation

Pour une modulation à 4 états, la capacité de canal reste de la forme

$$C_s = H(Y) + H_c \quad (397)$$

où la valeur maximale de  $H(Y)$  est de deux.

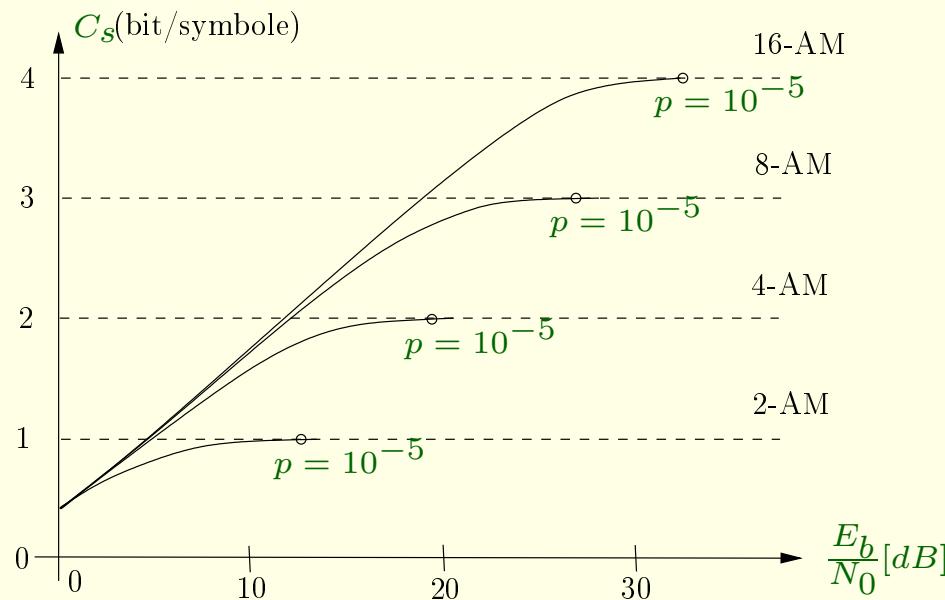


FIGURE 83: Capacité de canal pour différents types de modulation.

## Généralisation au cas continu et second théorème de Shannon

Dans le cas où l'on considère des alphabets d'entrée et de sortie continus, le calcul de la capacité de canal s'en trouve très fortement compliqué.

Dans le cas d'un canal blanc additif gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_N^2$ , la sortie vaut

$$Y = X + N(0, \sigma_N^2) \quad (398)$$

**Théorème 6.** *[Second théorème de SHANNON] La capacité d'un canal blanc additif gaussien de moyenne nulle et de variance  $\sigma_N^2$  s'exprime par*

$$C_s = \frac{1}{2} \log_2 \left( 1 + \frac{\sigma_X^2}{\sigma_N^2} \right) \quad (399)$$

où  $\frac{\sigma_X^2}{\sigma_N^2}$  représente le rapport signal sur bruit.

## Illustration du second théorème de Shannon

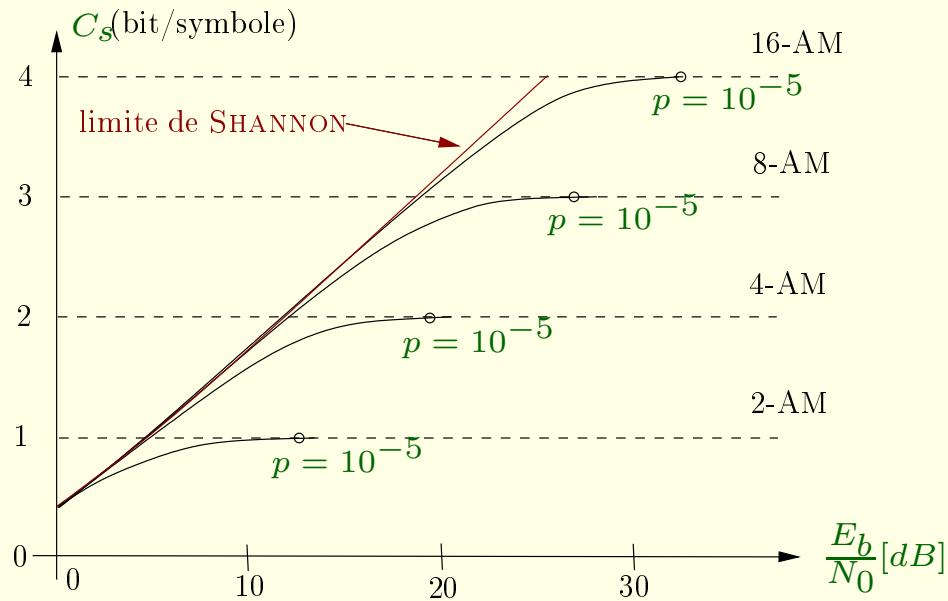


FIGURE 84: Second théorème de SHANNON.

# Performance de la boucle locale pour différents types de diaphonie

D'après Rauschmayer (page 144) :

	Channel capacity	
Disturbers	Upstream (kb/s)	Downstream (Mb/s)
AWGN only	2601	16.8
24 ISDN NEXT	1485	14.4
2 HDSL NEXT	1089	12.2
24 T1 NEXT	2338	7.29
24 ADSL NEXT	1126	14.8
24 ADSL FEXT	2072	14.1
Dowstream ADSL NEXT	1109	2.45

## Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic
- Étude des supports de transmission
  - Transmission dans le réseau téléphonique
  - Ingénierie des radiocommunications mobiles terrestres
- Fonctionnement du système de positionnement GPS

# Ingénierie des radiocommunications mobiles terrestres

- Introduction
  - Sensibilité du mobile
- Modèle général de propagation
  - Modèle de base
  - Affaiblissement de parcours
  - Masquage
    - Loi log-normale
  - Évanouissement
    - Densité de Rayleigh
    - Densité de Rice
    - Autres lois d'affaiblissement
  - Effet DOPPLER
- Modèles empiriques
  - Types d'environnement
  - Types de cellule
  - Influence de la hauteur des antennes
  - Modèles macro-cellulaires
  - Propagation à l'intérieur des bâtiments

# Introduction

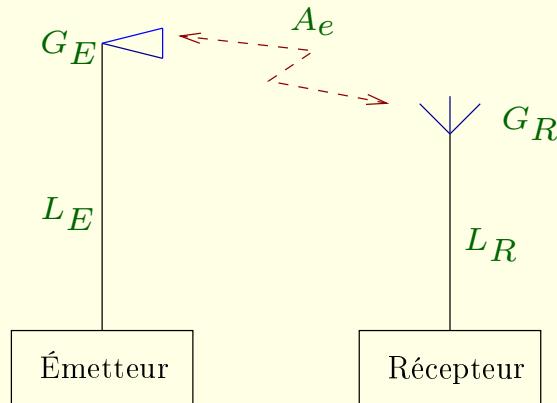


FIGURE 85: Éléments intervenant dans le calcul du budget de puissance d'une liaison sans fil.

Dès lors, la puissance de réception  $P_R$ , exprimée en [ $dB$ ], vaut

$$P_R = P_E - L_E + G_E - A_e + G_R - L_R \quad (400)$$

## Sensibilité du mobile et qualité de service

Pour qu'une radiocommunication s'effectue avec un niveau de qualité suffisant, il faut impérativement satisfaire à deux conditions :

1. Le niveau de puissance reçu par le mobile doit être supérieur à la sensibilité du mobile, c'est-à-dire au niveau de puissance minimal que le mobile est susceptible de détecter pour un bruit d'entrée donné.
2. Le canal ne présente pas une distorsion et un bruit trop élevés.

Calcul : relier le rapport  $\frac{E_b}{N_0}$  à la sensibilité du mobile

$$\frac{C}{N} = \frac{E_b W}{N_0 W} = \frac{E_b}{N_0} \quad (401)$$

Il en résulte

$$C = \left. \frac{E_b}{N_0} \right|_{\text{seuil}} + N \quad (402)$$

Type de récepteur	Sensibilité en [dBm]
Station de base	-104
Portable 8 [W]	-104
Portable 2 [W] (GSM 900)	-102
GSM bi-bande	-102

TABLE 10: Valeurs typiques de sensibilité.

# Modèle général de propagation

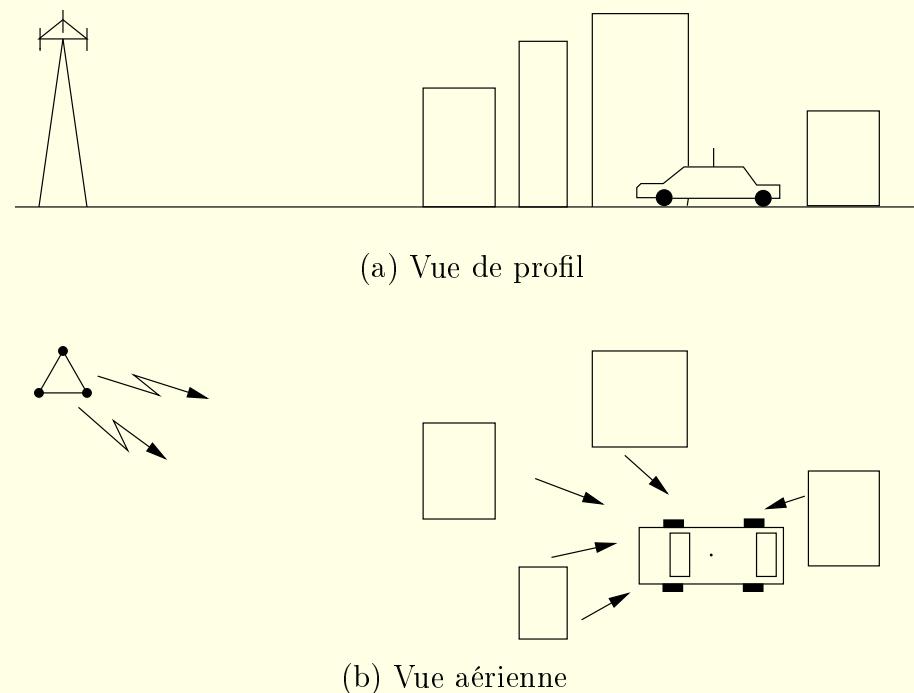


FIGURE 86: Vue latérale et vue aérienne d'une liaison entre une antenne d'émission et un mobile.

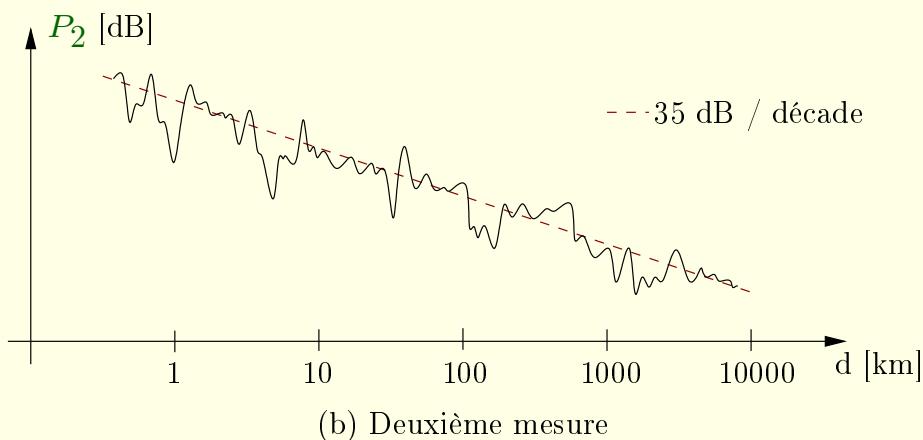
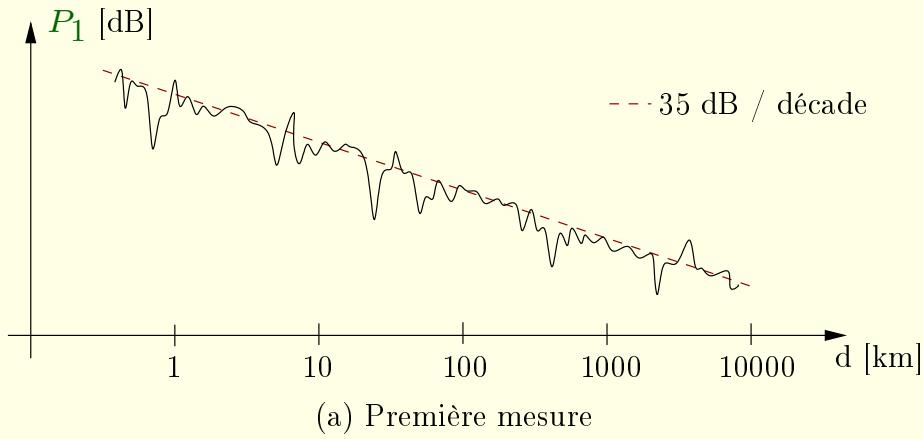


FIGURE 87: Évolutions de la puissance en fonction de la distance pour une même configuration apparente.

On approxime fréquemment l'affaiblissement du canal par un modèle à 3 étages comprenant :

1. une atténuation médiane due à la distance,
2. un terme aléatoire prenant en compte les effets de masque, dus à la présence d'obstacles, et
3. un autre terme aléatoire décrivant les évanouissements.

## Masquage : base physique

Le masquage (shadowing en anglais, aussi appelé évanouissement lent) provient de la présence d'obstacles.

Pour modéliser les effets de masquage, nous partons de l'hypothèse suivante.

$$A = A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N \quad (403)$$

Dès lors qu'il y a masquage, la puissance reçue  $P_R$  vaut

$$P_R = (P_E \times A_{PL}) \times A_1 \times A_2 \times \dots \times A_N \quad (404)$$

où  $A_{PL}$  est l'affaiblissement de parcours.

En décibels, l'atténuation totale vaut

$$L_{\text{totale}} = L_{PL} + L = L_{PL} + L_1 + L_2 + \dots + L_N \quad (405)$$

Plus spécifiquement, l'atténuation de masquage  $L$  est la somme des  $N$  contributions

$$L = L_1 + L_2 + \dots + L_N \quad (406)$$

Si toutes les contributions sont des variables aléatoires de mêmes espérance et variance,  $L$  est une variable aléatoire normale par application du théorème de la limite centrale :

$$L [dB] = L_{50\%} [dB] + \sigma_s [dB] \times N(0, 1) = N(L_{50\%}, \sigma_s^2) [dB] \quad (407)$$

tel que  $L_{50\%}$  est la valeur médiane de l'atténuation et  $\sigma_s [dB]$  sa variance.

En unités naturelles et en écrivant  $N(0, 1) = X$ , l'affaiblissement vaut

$$L = 10^{L[dB]/10} = 10^{(L_{50\%} [dB] + \sigma_s [dB] \times X)/10} \quad (408)$$

$$= 10^{L_{50\%} [dB]/10} 10^{\sigma_s [dB] \times X/10} = L_o V \quad (409)$$

où  $L_o = 10^{L_{50\%} [dB]/10}$  et

$$V = 10^{\sigma_s [dB] \times X/10} \quad (410)$$

est une loi log-normale.

## Densité de probabilité d'une loi log-normale

Soit  $X$  une variable aléatoire gaussienne centrée, de variance unitaire.

Sa densité de probabilité vaut, pour  $x \in [-\infty, +\infty]$ ,

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad (411)$$

On définit ensuite la variable aléatoire log-normale  $V$  de la manière suivante

$$V = 10^{\frac{\sigma_s X}{10}} = e^{\beta \sigma_s X} \quad (412)$$

où

$$\beta = \frac{\ln(10)}{10} = 0,23 \quad (413)$$

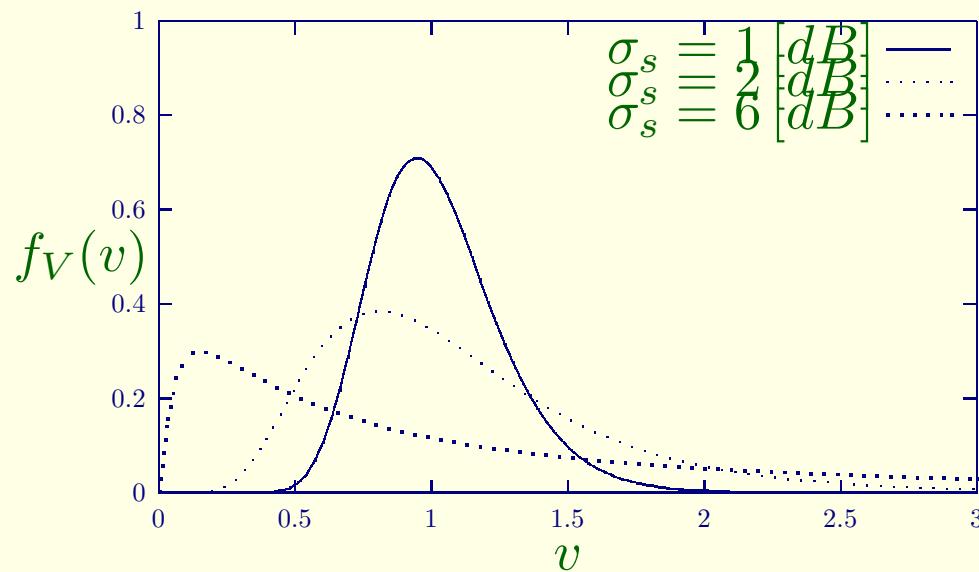


FIGURE 88: Densité de probabilité d'une loi log-normale.

$$f_V(v) = \frac{f_X(x)}{|\partial v / \partial x|} \Bigg|_{x=\frac{\ln v}{\beta \sigma_s}} = \frac{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}}{\beta \sigma_s e^{\beta \sigma_s x}} \Bigg|_{x=\frac{\ln v}{\beta \sigma_s}} = \begin{cases} \frac{1}{\beta \sigma_s v} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(\ln v)^2}{2\beta^2 \sigma_s^2}} & \text{si } v \geq 0 \\ 0 & \text{si } v < 0 \end{cases}$$

## Impact sur la zone de couverture en bordure d'une cellule

En présence d'un effet de masquage, l'affaiblissement  $L$  est une variable aléatoire normale  $N(L_{50\%}, \sigma_s^2)$  :

$$L [dB] = N(L_{50\%}, \sigma_s^2) [dB] \quad (414)$$

On peut en déduire une variable aléatoire normale centrée  $L_s$  au moyen de l'expression

$$L [dB] = L_{50\%} [dB] + L_s [dB] \quad (415)$$

où

- $L_{50\%}$  est la valeur médiane de l'affaiblissement de parcours tel que fournie par les modèles empiriques résultant de mesures.
- $L_s$ , la variable aléatoire de masquage ; c'est-à-dire une variable aléatoire gaussienne de moyenne nulle et d'écart-type  $\sigma_s$ .

La densité de probabilité de  $L_s$  est donc

$$f(l_s) = \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-l_s^2}{2\sigma_s^2}} \quad (416)$$

**Ajout d'une marge (log-normale) de  $m_s$  [dB]** correspond une probabilité de couverture supérieure à celle de la puissance médiane pour une même sensibilité de récepteur. Cette

probabilité se calcule par

$$p(l_s < m_s) = \int_{-\infty}^{m_s} \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-l_s^2}{2\sigma_s^2}} dl_s \quad (417)$$

$$= \frac{1}{2} + \int_0^{m_s} \frac{1}{\sigma_s \sqrt{2\pi}} e^{\frac{-l_s^2}{2\sigma_s^2}} dl_s \quad (418)$$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \operatorname{erf} \left( \frac{m_s}{\sqrt{2}\sigma_s} \right) \quad (419)$$

$\operatorname{erf}(x)$  est la fonction d'erreur

$$\operatorname{erf}(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-t^2} dt \quad (420)$$

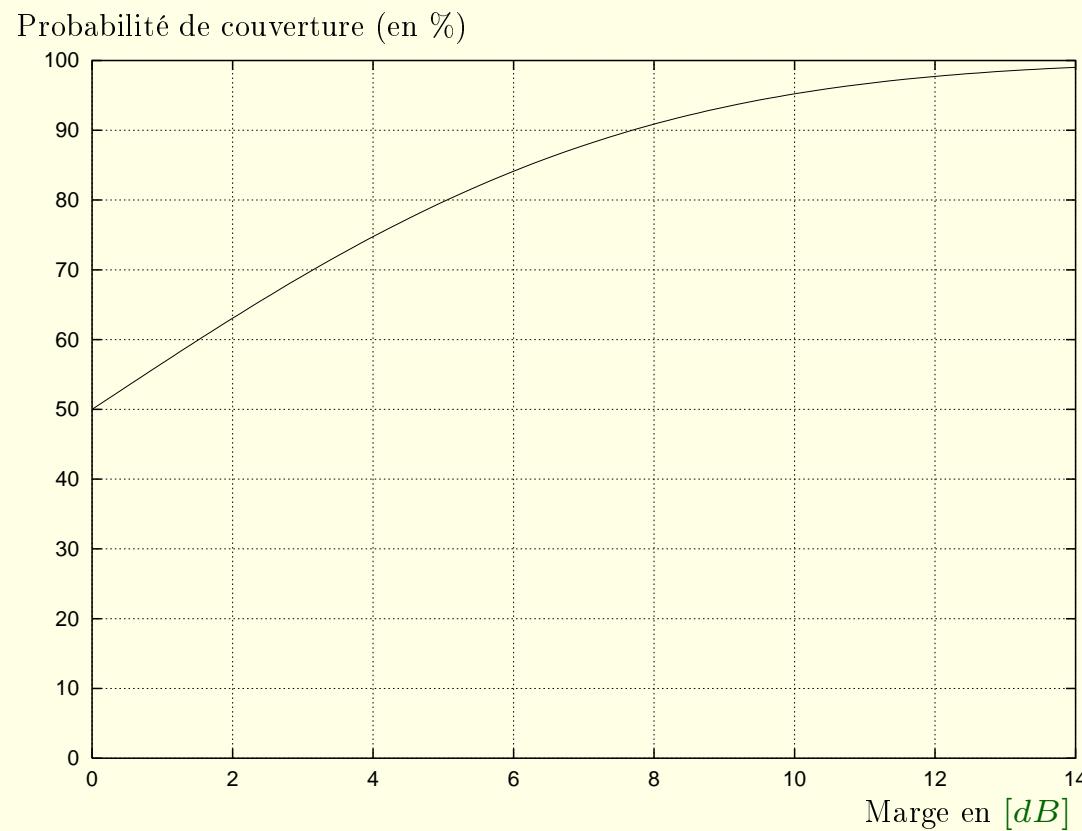


FIGURE 89: Pourcentage de couverture tel que défini par un seuil de puissance.

# Évanouissement

## Évanouissement en l'absence d'un trajet direct

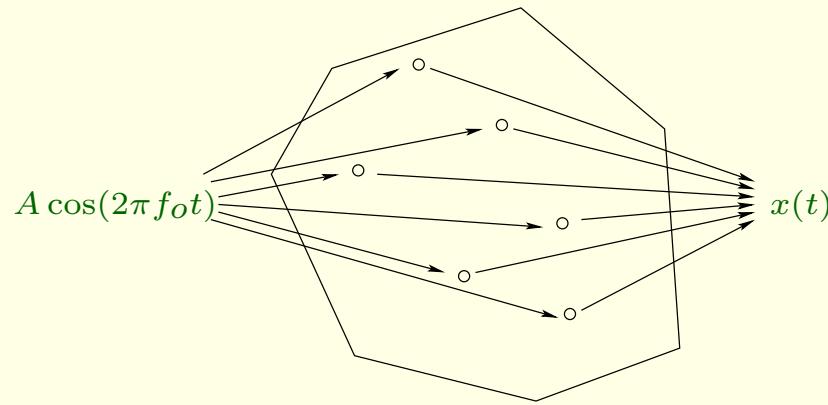


FIGURE 90: Effet de multitrajet par diffraction et réflexion.

L'émetteur envoie un signal cosinusoïdal  $A \cos(2\pi f_o t)$ .

Au récepteur,

$$X(t) = \sum_i C_i \cos(2\pi f_o t + \theta_i) \quad (421)$$

Cette expression peut s'écrire sous la forme de termes en phase et en quadrature

$$X(t) = \sum_i [C_i \cos(2\pi f_o t) \cos \theta_i - C_i \sin(2\pi f_o t) \sin \theta_i] \quad (422)$$

$$= \sum_i [A_i \cos(2\pi f_o t) - B_i \sin(2\pi f_o t)] \quad (423)$$

$$= X_I(t) \cos(2\pi f_o t) - X_Q(t) \sin(2\pi f_o t) \quad (424)$$

où l'on a défini

$$X_I(t) = \sum_i A_i = \sum_i C_i \cos \theta_i \quad \text{et} \quad X_Q(t) = \sum_i B_i = \sum_i C_i \sin \theta_i \quad (425)$$

Pour déterminer l'intensité de champ électrique, il faut analyser l'évolution de l'amplitude du signal. Cette amplitude est définie par

$$R(t) = \sqrt{X_I^2(t) + X_Q^2(t)}, \quad R(t) \geq 0 \quad (426)$$

quant à la phase, elle vaut

$$\Phi(t) = \tan^{-1} \frac{X_Q(t)}{X_I(t)}, \quad \Phi(t) \in [0, 2\pi[ \quad (427)$$

## Densité de probabilité

La densité de probabilité conjointe est égale à

$$f_{X_I X_Q}(x_I, x_Q) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{x_I^2+x_Q^2}{2\sigma_X^2}} \quad (428)$$

Après, le changement de variables  $x_I = r \cos \phi, x_Q = r \sin \phi$

$$f_{R,\Phi}(r, \phi) = \begin{vmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -r \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} f_{X_I X_Q}(r \cos \phi, r \sin \phi) \quad (429)$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{r^2 \cos^2 \phi + r^2 \sin^2 \phi}{2\sigma_X^2}} \quad (430)$$

$$= \begin{cases} \frac{r}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_X^2}}, & r \geq 0, \phi \in [0, 2\pi[ \\ 0 & r < 0 \end{cases} \quad (431)$$

## Densité de probabilité marginale de l'enveloppe

La densité de probabilité marginale des amplitudes s'obtient en intégrant la densité conjointe sur  $\Phi$  :

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma_X^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_X^2}}, & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \quad (432)$$

C'est la densité de probabilité de RAYLEIGH.

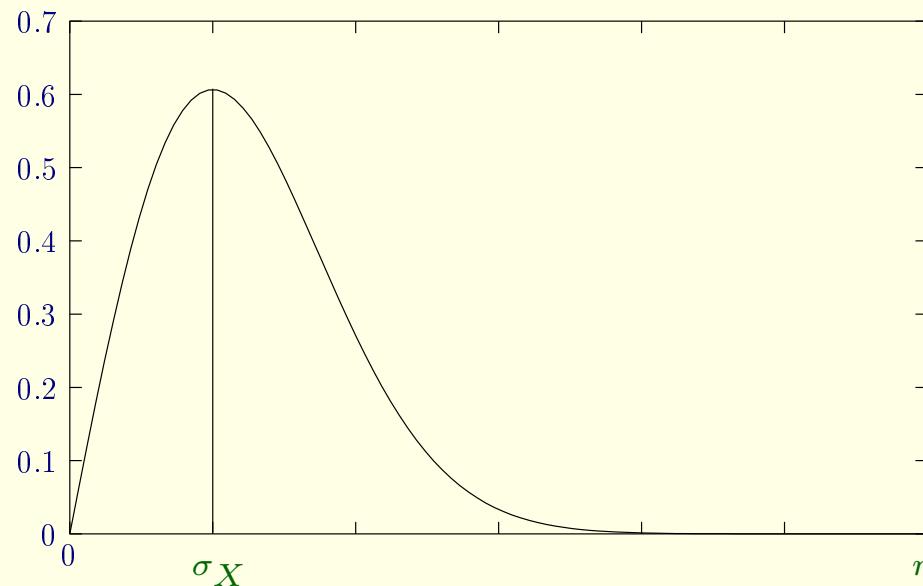


FIGURE 91: Densité de probabilité de RAYLEIGH.

## Densité de probabilité marginale de la phase

Pour obtenir la densité marginale  $f_\Phi(\phi)$ , on intègre sur  $r$  de 0 à  $+\infty$  :

$$f_\Phi(\phi) = \frac{1}{2\pi}, \quad \phi \in [0, 2\pi[ \quad (433)$$

ce qui signifie que  $\Phi$  est une variable aléatoire uniforme et indépendante de  $R$ , d'où

$$f_{R,\Phi}(r, \phi) = f_R(r) f_\Phi(\phi) \quad (434)$$

# Données expérimentales

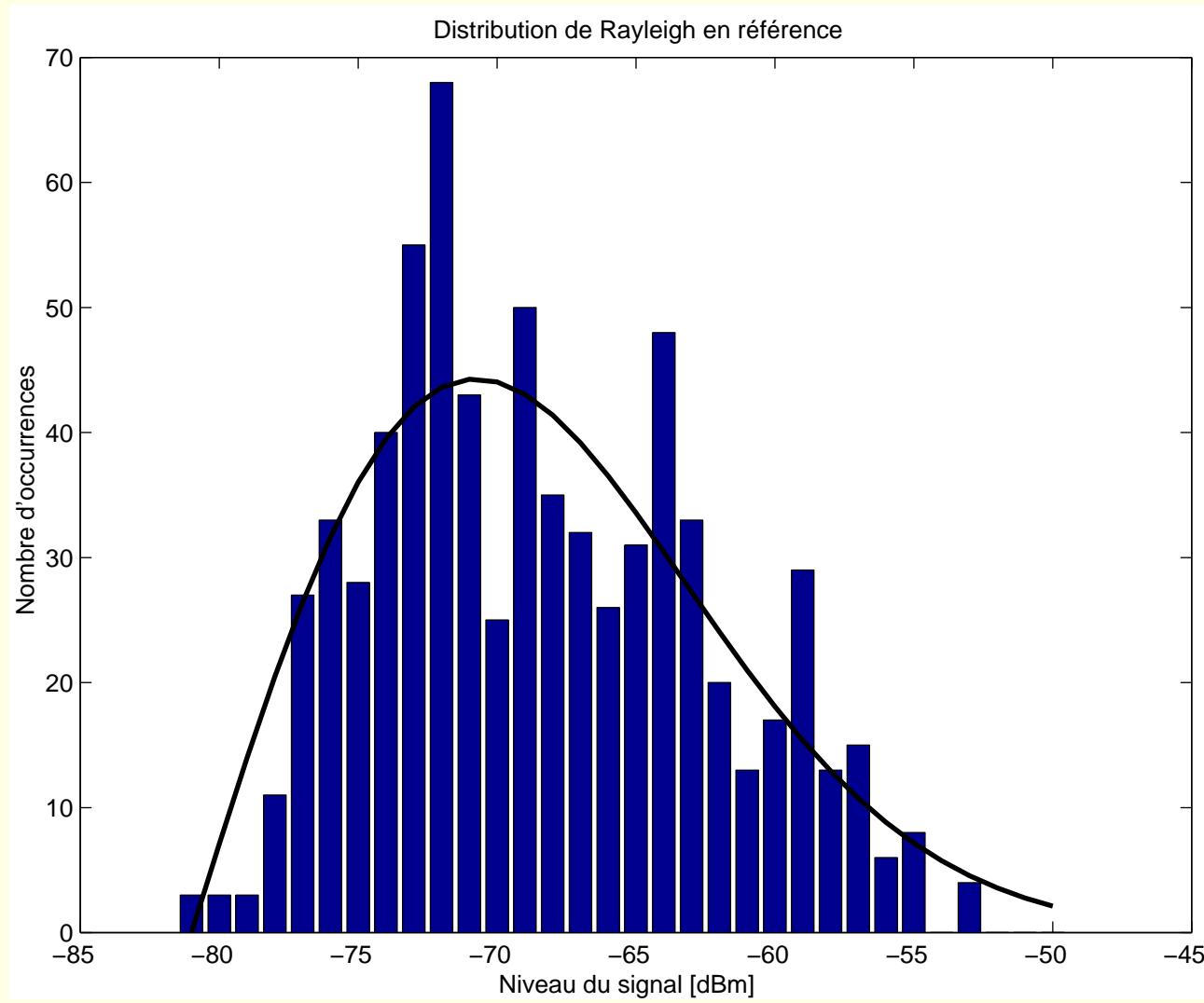


FIGURE 92: Histogramme de niveaux de puissance relevés expérimentalement.

## Évanouissement en présence d'un trajet direct

En présence d'un trajet direct, le signal reçu vaut

$$Z(t) = A \cos(2\pi f_o t + \theta) + X(t) \quad (435)$$

Pour un signal  $Z(t)$  à bande étroite, il est possible de recourir à la décomposition de RICE

$$Z(t) = Z_I(t) \cos(2\pi f_o t) - Z_Q(t) \sin(2\pi f_o t) \quad (436)$$

où

$$Z_I(t) = A \cos \theta + X_I(t) \quad (437)$$

$$Z_Q(t) = A \sin \theta + X_Q(t) \quad (438)$$

En faisant apparaître l'amplitude et la phase,

$$Z(t) = R(t) \cos(2\pi f_o t + \Phi(t)) \quad (439)$$

où

$$R(t) = \sqrt{Z_I^2(t) + Z_Q^2(t)}, \quad R(t) \geq 0 \quad (440)$$

et

$$\Phi(t) = \tan^{-1} \frac{X_Q(t)}{X_I(t)}, \quad \Phi(t) \in [0, 2\pi[ \quad (441)$$

Dès lors,

$$Z_I(t) = R(t) \cos \Phi(t) \quad (442)$$

$$Z_Q(t) = R(t) \sin \Phi(t) \quad (443)$$

Pour une valeur donnée de  $\theta$ , les variables aléatoires gaussiennes  $X_I(t)$  et  $X_Q(t)$  étant indépendantes, elles conservent ce caractère. Il en résulte que

$$Z_I(t) = N(A \cos \theta, \sigma_X^2) \quad (444)$$

$$Z_Q(t) = N(A \sin \theta, \sigma_X^2) \quad (445)$$

La probabilité conjointe, conditionnellement à  $\theta$ , est donc

$$f_{Z_I Z_Q}(z_I, z_Q | \theta = \theta_o) = \frac{1}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{(z_I - A \cos \theta_o)^2 + (z_Q - A \sin \theta_o)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (446)$$

## Densité de probabilité

$$f_{R,\Phi}(r, \phi | \theta_o) = \begin{vmatrix} \cos \phi & \sin \phi \\ -r \sin \phi & r \cos \phi \end{vmatrix} f_{Z_I Z_Q}(r \cos \phi, r \sin \phi | \theta_o) \quad (447)$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{(r \cos \phi - A \cos \theta_o)^2 + (r \sin \phi - A \sin \theta_o)^2}{2\sigma_X^2}} \quad (448)$$

$$= \frac{r}{2\pi\sigma_X^2} e^{-\frac{r^2 + A^2 - 2rA \cos(\theta_o - \phi)}{2\sigma_X^2}} \quad (449)$$

## Densité de probabilité marginale de l'enveloppe.

L'intégration sur la phase donne la loi de RICE

$$f_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma_X^2} e^{-\frac{r^2+A^2}{2\sigma_X^2}} I_0\left(\frac{Ar}{\sigma_X^2}\right), & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \quad (450)$$

où  $I_0(x)$  est la fonction de BESSEL modifiée d'ordre 0.

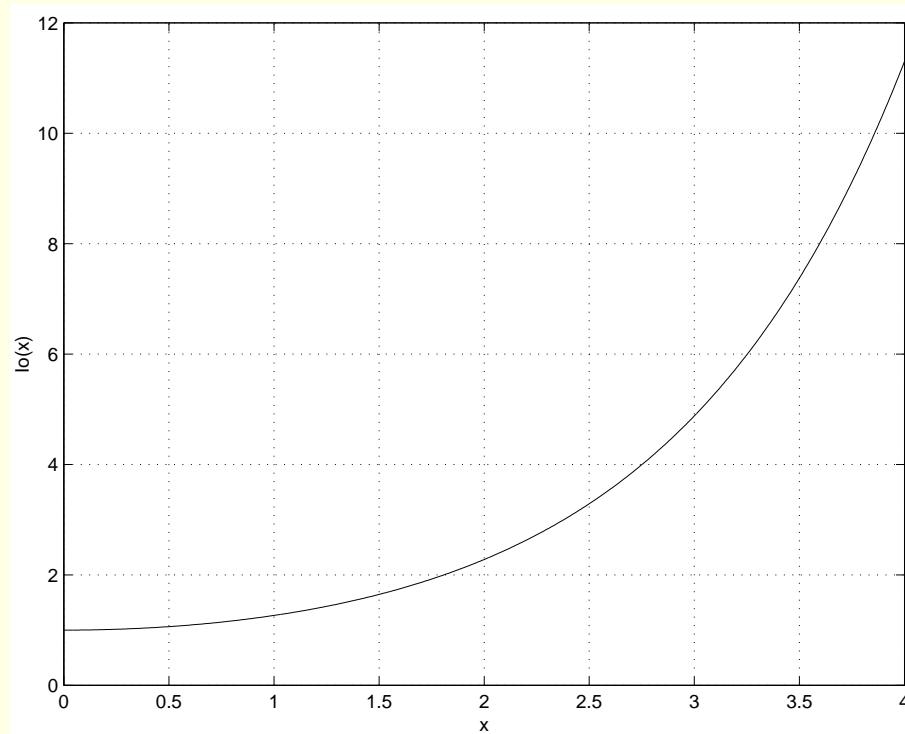


FIGURE 93: Fonction de BESSEL modifiée de première espèce d'ordre 0.

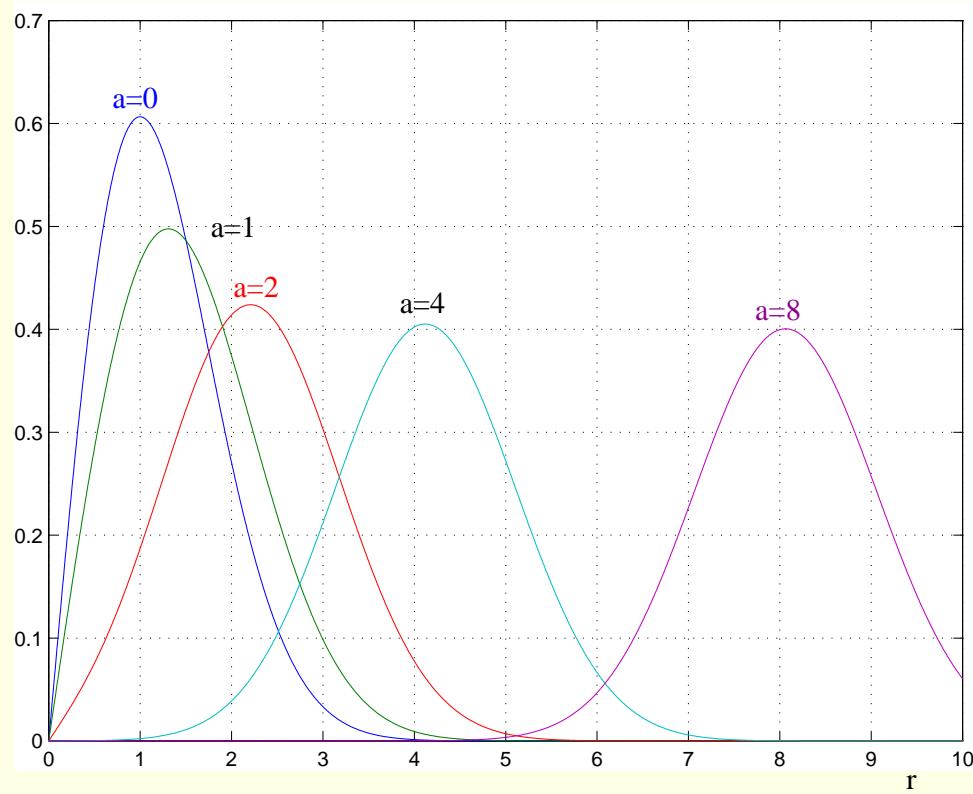


FIGURE 94: Densité de probabilité de RICE (pour différentes valeurs de  $a = \frac{A}{\sigma_X}$ ).

## Effet Doppler

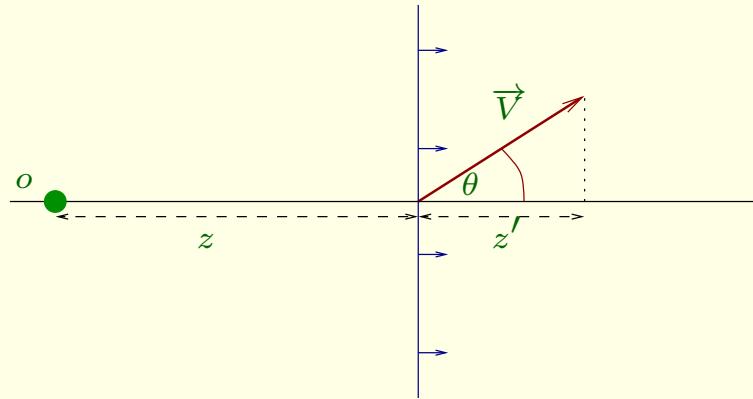


FIGURE 95: Effet DOPPLER.

Prenons le cas d'une source qui émet un champ électrique sinusoïdal de fréquence  $f_c$ . En l'absence de mouvement, le champ reçu au droit du mobile vaut

$$E(t) = E_0 e^{j(\omega_c t - \beta z)} \quad (451)$$

avec  $\omega_c = 2\pi f_c$  et le nombre d'onde  $\beta = \frac{2\pi}{\lambda_c}$ .

Si le mobile est animé d'un mouvement à vitesse  $\vec{V}$  dans la direction  $\theta$ . Le champ reçu devient

$$E(t) = E_0 e^{j(\omega_c t - \beta z - \beta z')} \quad (452)$$

$$= E_0 e^{j(\omega_c t - \beta z - \beta V t \cos \theta)} \quad (453)$$

$$= E_0 e^{j2\pi(f_c - \frac{V}{\lambda_c} \cos \theta)t - j\beta z} \quad (454)$$

Le déplacement du mobile entraîne donc une distorsion de fréquence d'amplitude

$$f_D = \frac{V}{\lambda_c} \cos \theta = f_m \cos \theta \quad (455)$$

appelée fréquence DOPPLER.

# Spectres à l'émission et à la réception résultant de l'effet Doppler.

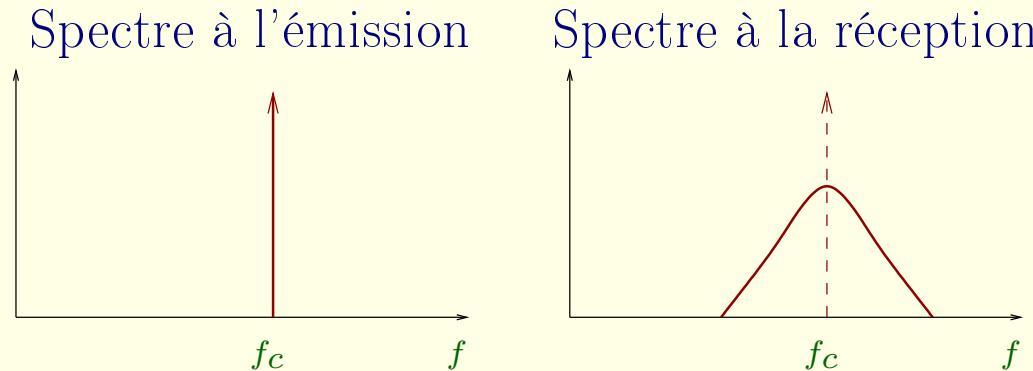


FIGURE 96: Étalement DOPPLER.

## Spectre Doppler classique

En prenant une antenne de gain symétrique, le spectre vaut

$$|\gamma_D(f)| = \frac{\frac{G(\theta)}{2\pi} + \frac{G(-\theta)}{2\pi}}{f_m \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}} = \frac{G(\theta)}{\pi f_m \sqrt{1 - \left(\frac{f}{f_m}\right)^2}} \quad \text{pour } |f| \leq f_m \quad (456)$$

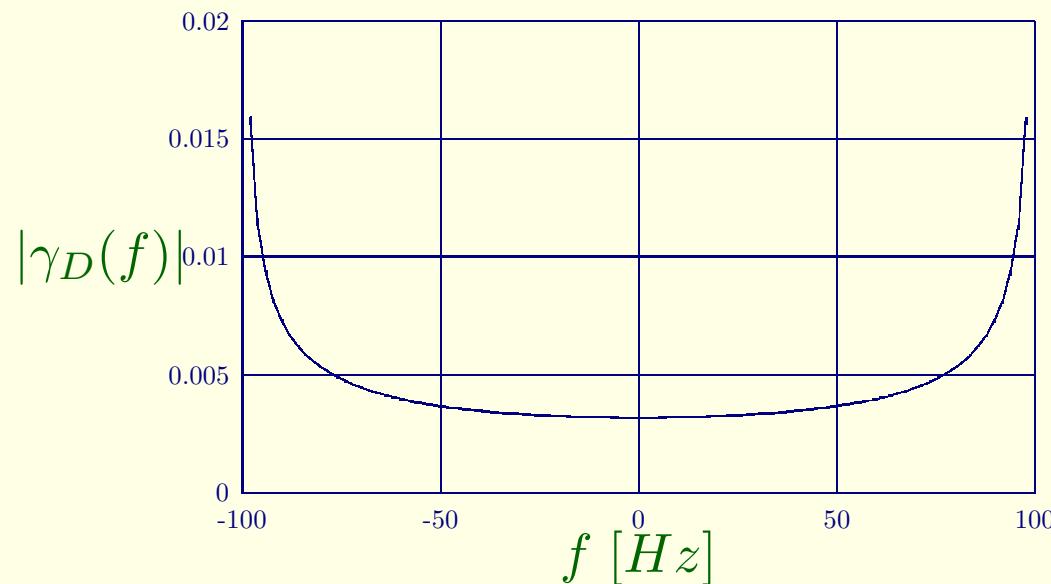


FIGURE 97: Spectre DOPPLER classique ( $f_c = 900$  [MHz],  $V = 100$  [km/h] et  $G = 1$ ).

# Modèles empiriques

## Types d'environnement

Il existe différents types de modèles empiriques. Pour la plupart, on distingue plusieurs types d'environnements, parmi lesquels :

- l'environnement rural pour lequel l'horizon est principalement dégagé. La propagation est alors majoritairement influencée par le relief plutôt que par les bâtiments ;
- l'environnement urbain désignant de petites villes ;
- l'environnement urbain dense englobant la majorité des grandes villes.

Environnement	exposant
rural	3,2
urbain	3,5
urbain dense	3,8

TABLE 11: Valeurs de l'exposant de l'affaiblissement de parcours en fonction de la distance pour différents environnements.

## Types de cellule

On distingue aussi, généralement, quatre types de cellules :

1. la macro-cellule. Il s'agit d'une cellule de quelques dizaines de kilomètres de rayon.
2. la petite cellule de quelques kilomètres de rayon. En milieu urbain dense, la portée des petites cellules est plutôt de l'ordre de 800 [m].
3. la micro-cellule de quelques centaines de mètres de rayon. Elle est adaptée à l'environnement urbain dense.
4. la pico-cellule. Elle convient pour la propagation à l'intérieur des bâtiments.

# Influence de la hauteur des antennes

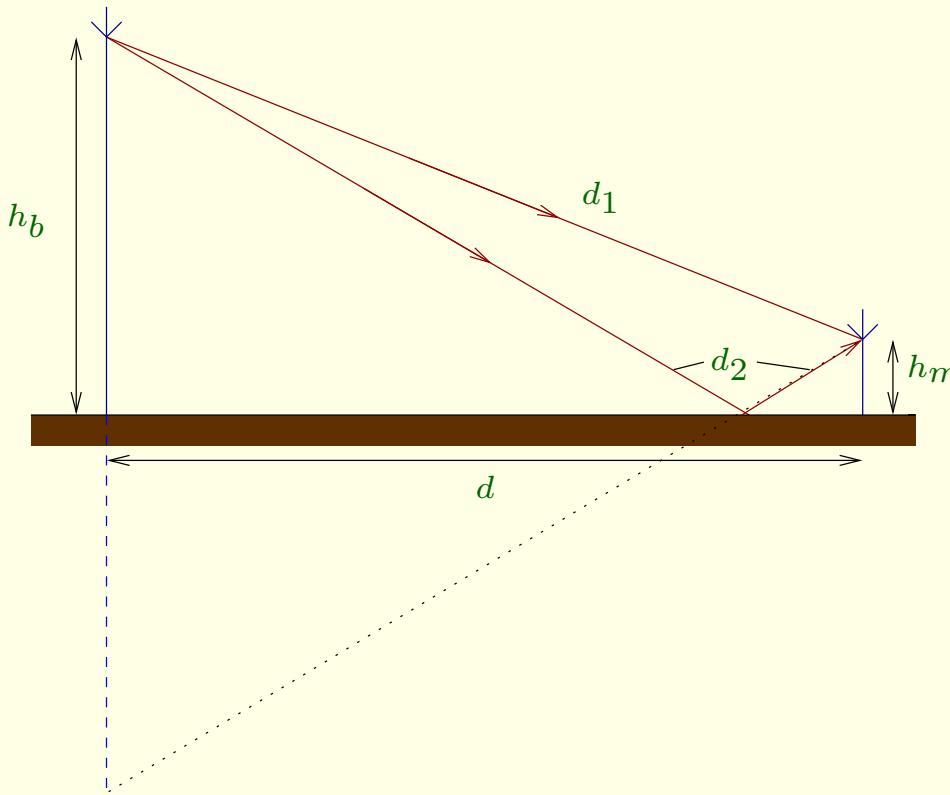


FIGURE 98: Calcul de l'influence de la réflexion.

La réflexion affecte le champ d'un coefficient

$$\Gamma = 1 - e^{j\beta(d_2 - d_1)} \quad (457)$$

Comme

$$d_1 = \sqrt{d^2 + (h_b - h_m)^2} \quad (458)$$

$$d_2 = \sqrt{d^2 + (h_b + h_m)^2} \quad (459)$$

D'où

$$d_2 - d_1 = d \left( \sqrt{1 + \left( \frac{h_b + h_m}{d} \right)^2} - \sqrt{1 + \left( \frac{h_b - h_m}{d} \right)^2} \right) \quad (460)$$

$$\simeq d \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{h_b + h_m}{d} \right)^2 \right) - d \left( 1 + \frac{1}{2} \left( \frac{h_b - h_m}{d} \right)^2 \right) \quad (461)$$

$$\simeq \frac{1}{d} \left( \frac{1}{2} (h_b + h_m)^2 - \frac{1}{2} (h_b - h_m)^2 \right) \quad (462)$$

$$\simeq \frac{2h_b h_m}{d} \quad (463)$$

## Facteur affectant la puissance

$$\Gamma^2 = \left| 1 - e^{-j\beta(d_2-d_1)} \right|^2 \quad (464)$$

$$= \left| e^{-j\beta(d_2-d_1)/2} \right|^2 \left| e^{j\beta(d_2-d_1)/2} - e^{-j\beta(d_2-d_1)/2} \right|^2 \quad (465)$$

$$= \left| e^{-j\beta(d_2-d_1)/2} \right|^2 \left( 2 \sin \left( \beta \frac{h_b h_m}{d} \right) \right)^2 \quad (466)$$

$$= 4 \sin^2 \left( \beta \frac{h_b h_m}{d} \right) \quad (467)$$

$$\simeq 4 \left( \beta \frac{h_b h_m}{d} \right)^2 = 4 \left( \frac{2\pi}{\lambda} \frac{h_b h_m}{d} \right)^2 = \left( \frac{4\pi}{\lambda} \frac{h_b h_m}{d} \right)^2 \quad (468)$$

## Puissance de réception $P_R$

Dès lors, la puissance reçue  $P_R$  vaut

$$P_R \simeq P_E G_E G_R \left( \frac{\lambda}{4\pi d} \right)^2 \left( \frac{4\pi h_b h_m}{\lambda} \frac{h_b^2 h_m^2}{d^4} \right)^2 \quad (469)$$

$$\simeq P_E G_E G_R \frac{h_b^2 h_m^2}{d^4} \quad (470)$$

Ou encore, en décibels,

$$P_R [dB] = 10 \log_{10}(P_E G_E G_R) + 20 \log_{10} h_b + 20 \log_{10} h_m - 40 \log_{10} d \quad (471)$$

# Modèles macrocellulaires

## Modèle COST 231-Hata

En milieu urbain, l'affaiblissement  $L_u$  vaut, en [dB],

$$L_u = 46,33 + 33,9 \log(f) - 13,82 \log(h_b) - a(h_m) + [44,9 - 6,55 \log(h_b)] \log d + C_m \quad (472)$$

avec

- $f$  la fréquence,  $d$  la distance,  $h_b$ ,  $h_m$ , des hauteurs ; ces grandeurs sont exprimées respectivement en [MHz], [km] et [m].
- $a(h_m) = (1,1 \log(f) - 0,7)h_m - (1,56 \log(f) - 0,8)$  pour une ville de taille moyenne ; ce facteur de correction dépend de la hauteur de l'antenne du mobile mais également du type d'environnement.
- $C_m = 0$  [dB] pour les villes de taille moyenne et les banlieues, et  $C_m = 3$  [dB] pour les grands centres métropolitains.

# Propagation à l'intérieur des bâtiments

À l'intérieur des bâtiments, on parle de propagation indoor.

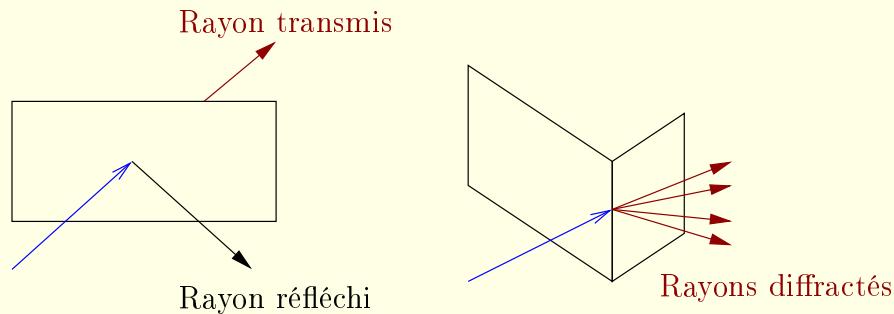


FIGURE 99: Transmission, réflexion et diffraction.

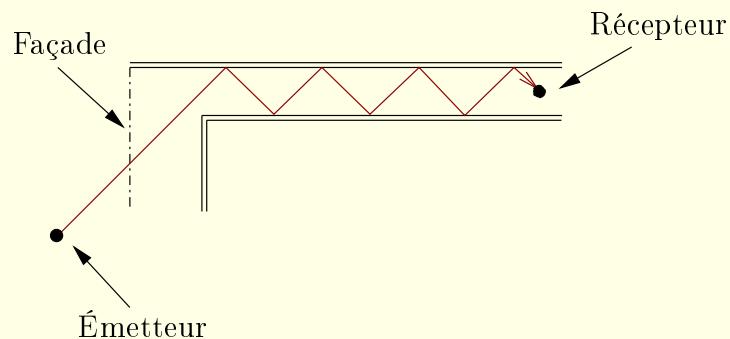


FIGURE 100: Effet guide d'ondes.

## Propagation “extérieur-intérieur”

- On définit deux types de valeurs :
  1. le soft indoor, représentant l’atténuation en façade, et
  2. le deep indoor, représentant l’atténuation dans des endroits reculés du bâtiment.
- Des valeurs typiques sont de  $10 [dB]$  pour le soft indoor et de  $20 [dB]$  pour le deep indoor à  $900 [MHz]$ .

## Propagation “intérieur-intérieur”

## Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic

# Axes du cours

- Modélisation d'un système de télécommunications et traitement numérique des signaux
  - Estimation
  - Représentation des signaux et des systèmes passe-bande
  - Calcul du bruit dans les systèmes de télécommunications
- Aspects de type système des techniques de télécommunications
  - Modulations numériques
  - Modélisation du canal pour transmissions numériques et interférence inter-symbolique
  - Étalement de spectre
  - Multiplexage et accès au multiplex
  - Étude du trafic
- Étude des supports de transmission
  - Transmission dans le réseau téléphonique
  - Ingénierie des radiocommunications mobiles terrestres
- Fonctionnement du système de positionnement GPS

# Fonctionnement du système de positionnement GPS

- Introduction
- Principes de la localisation
- Signaux
- Amélioration

# Définition et objectifs

## GPS = Global Positioning System

**Définition 26.** *Réseau de satellites qui émet des signaux en permanence et permet la localisation à la surface de la terre par mesure de distance et triangulation.*

- Réseau créé à l'initiative du Ministère américain de la défense
- Premier satellite opérationnel en 1978
- Constellation complète depuis 1994
- Précision de 6 à 12 [m] depuis le “débridage” survenu en mai 2000

Contrainte : pouvoir recevoir les signaux émis.

Ne fonctionne donc pas en milieu confiné.

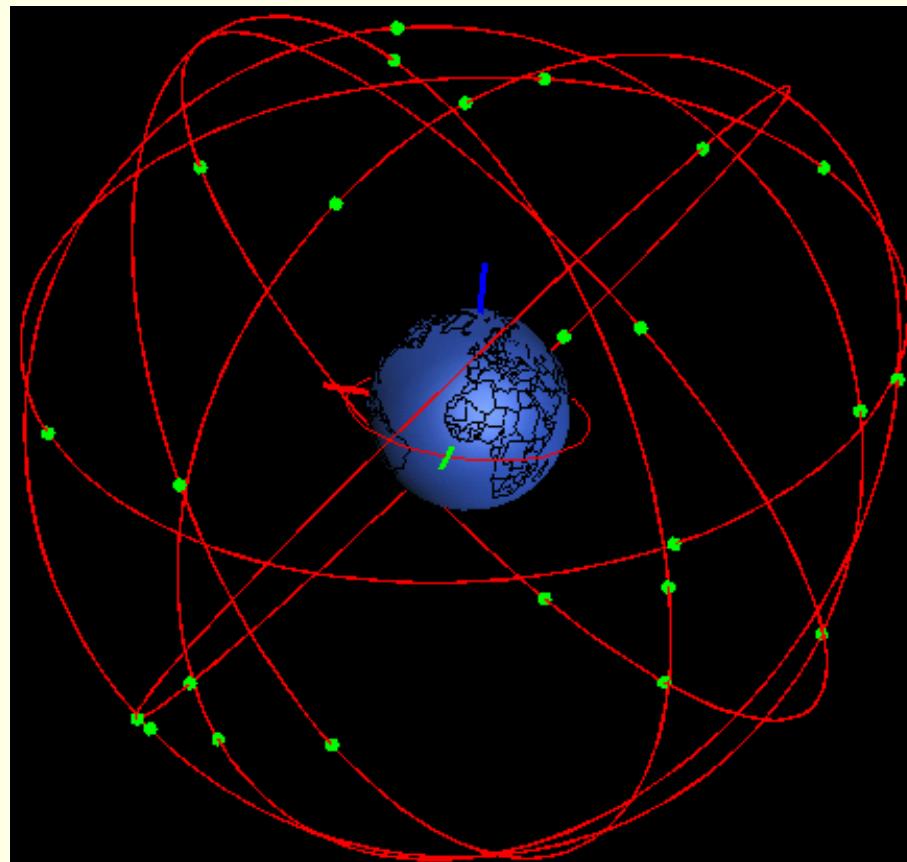
# Architecture du réseau GPS

## 3 segments :

- “Space segment”
  - composé d'une constellation de 24 satellites (dont 21 sont opérationnels)
- “Control segment”
  - composé de stations au sol
  - destiné à corriger les positions des satellites
- “User segment”

## Trajectoires des satellites

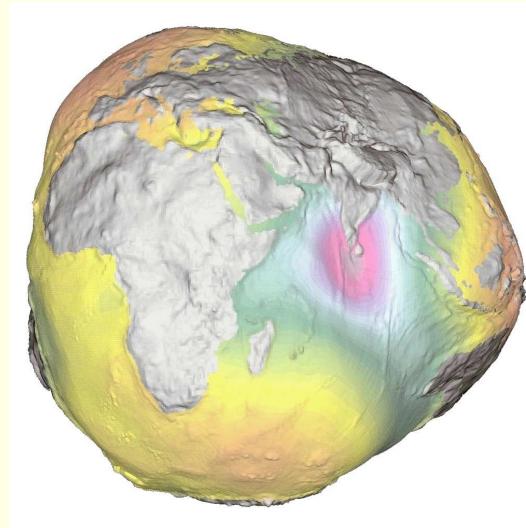
- Situé en orbite haute (mais sub-géostationnaire)
- Période de révolution de 12 heures
- Puissance d'émission des signaux typiquement de l'ordre de **20 à 50 [W]**
- 6 plans orientés à **55°**, espacés entre eux de **60°** et contenant chacun 4 satellites



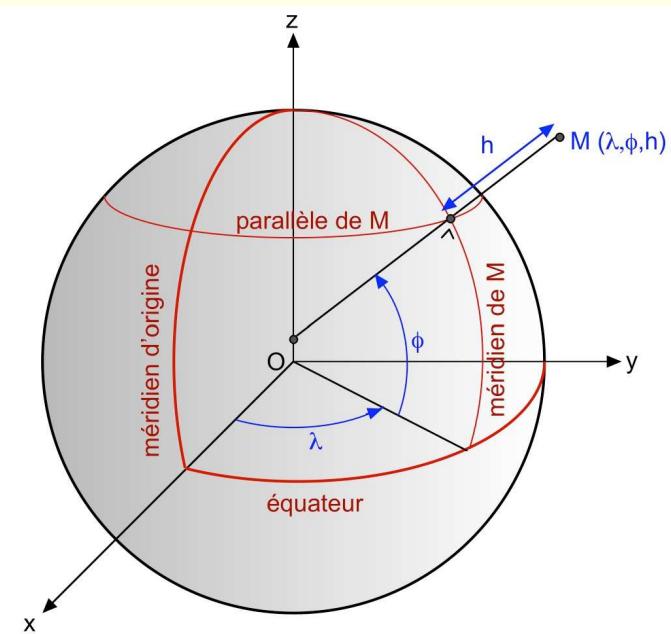
# Géoïde et coordonnées géographiques

**Définition 27.** *[Géoïde] Surface de niveau qui coïncide avec la surface moyenne du niveau des mers, et qui se prolonge sous les continents.*

- À cause de la répartition non uniforme des masses, la terre n'est pas une sphère.
- Le géoïde se rapproche d'une ellipsoïde de révolution dont le demi grand axe vaut 6400 [km].



# Coordonnées géographiques



- Latitude  $\phi$  = angle que fait la verticale physique locale (définie par la pesanteur) et la direction du plan équatorial.
- Plan méridien et longitude.
  - Plan méridien = plan parallèle à l'axe des pôles contenant la verticale physique locale
  - Longitude d'un point  $\lambda$  = angle de son plan méridien par rapport au plan méridien de référence (GREENWICH)
- Altitude  $h$  = distance entre un point et sa projection sur le géoïde le long de la verticale de pesanteur.

# Principes de la localisation

1. La distance  $d$  est liée au temps de propagation  $t$

$$d = c \times t \quad (473)$$

où  $c = 3 \times 10^8 [m/s]$  est la vitesse de propagation des ondes électromagnétiques.

2. Triangulation

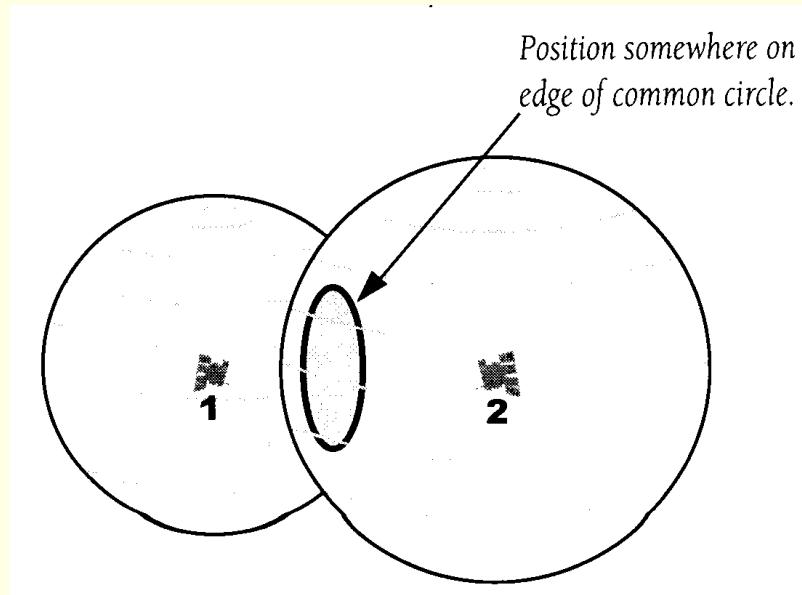


FIGURE 101: Localisation à partir de 2 ou 3 satellites.

## Équations de base pour le calcul d'une position

$$\rho_1 = \sqrt{(x_1 - x_u)^2 + (y_1 - y_u)^2 + (z_1 - z_u)^2} \quad (474)$$

$$\rho_2 = \sqrt{(x_2 - x_u)^2 + (y_2 - y_u)^2 + (z_2 - z_u)^2} \quad (475)$$

$$\rho_3 = \sqrt{(x_3 - x_u)^2 + (y_3 - y_u)^2 + (z_3 - z_u)^2} \quad (476)$$

- Équations du second ordre → difficultés
- Résolution par linéarisation des équations
- En principe, 3 distances  $\rho_i$  suffisent. Mais, pour limiter les erreurs dues aux imprécisions, on considère qu'il faut 4 distances (et donc 4 satellites en visibilité).

## Mesure à partir des pseudo-distances

Soit un satellite  $i$ . La mesure de distance exacte vaut

$$\rho_{iT} = c \times (t_u - t_{si}) \quad (477)$$

où  $t_u$  et  $t_{si}$  représentent les temps exacts de réception et d'émission du signal.

En pratique, biais pour  $t_u$

$$t'_u = t_u + b_{ut} \quad (478)$$

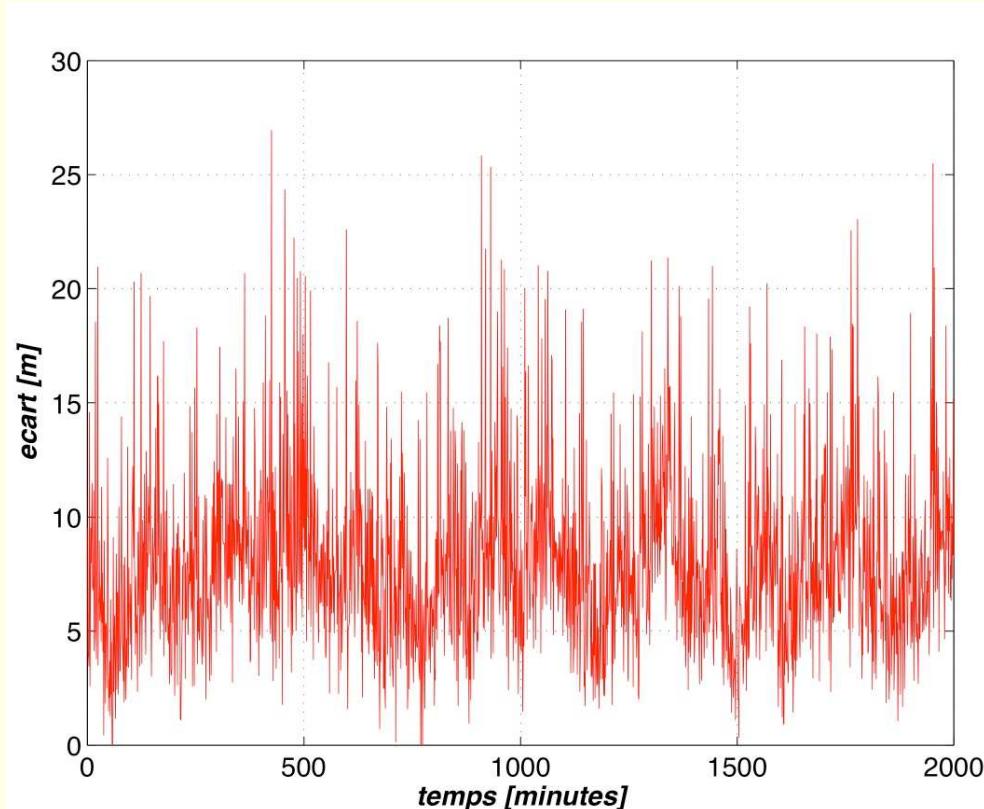
et erreur d'horloge pour  $t_{si}$

$$t'_{si} = t_{si} + \Delta b_i \quad (479)$$

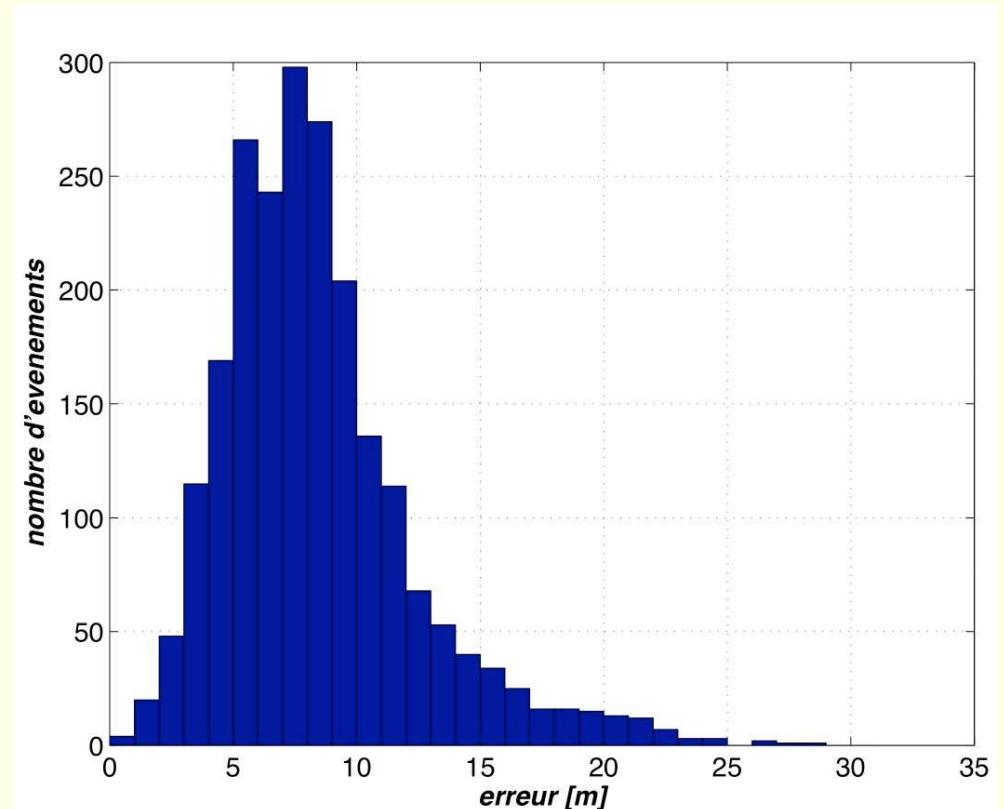
D'autres sources d'erreurs ( $\Delta D_i$  = erreur sur la position du satellite,  $\Delta T_i$  = erreur de délai dû au changement de vitesse au passage de la troposphère,  $v_i$  = erreur de mesure du récepteur,  $\Delta v_i$  = correction relativiste) conduisent à

$$\rho_i = \rho_{iT} + \Delta D_i - c \times (\Delta b_i - b_{ut}) + c \times (\Delta T_i + \Delta I_i + v_i + \Delta v_i) \quad (480)$$

# Erreur et précision



Erreur au cours du temps



Histogramme des erreurs

FIGURE 102: Statistiques de l'erreur sur la position.

## Signaux et fréquences

Un signal GPS contient 2 composantes fréquentielles :  $L1$  (Link 1),  $L2$

- $L1 = 1575,42 [MHz] = 154 \times 10,23 [MHz]$  est utilisée pour les récepteurs grand public.
- $L2 = 1227,6 [MHz] = 120 \times 10,23 [MHz]$  pour des applications militaires.

Horloge atomique à bord des satellites

	P	C/A
L1	$-133 [dBm]$	$-130 [dBm]$
L2	$-136 [dBm]$	$-136 [dBm]$

TABLE 12: Niveaux de puissance minimale requis au droit du récepteur.

## Signal et trame

Chaque satellite émet trois types d'informations :

1. un almanach
  - (a) type de satellite
  - (b) état de fonctionnement
  - (c) calcul précis de l'orbite (précision  $< 1$  m), etc
2. un code P (précis) : pour un calcul précis du retard
3. un code C/A (code approximatif) : pour un calcul approximatif du retard

## Signal émis par un satellite

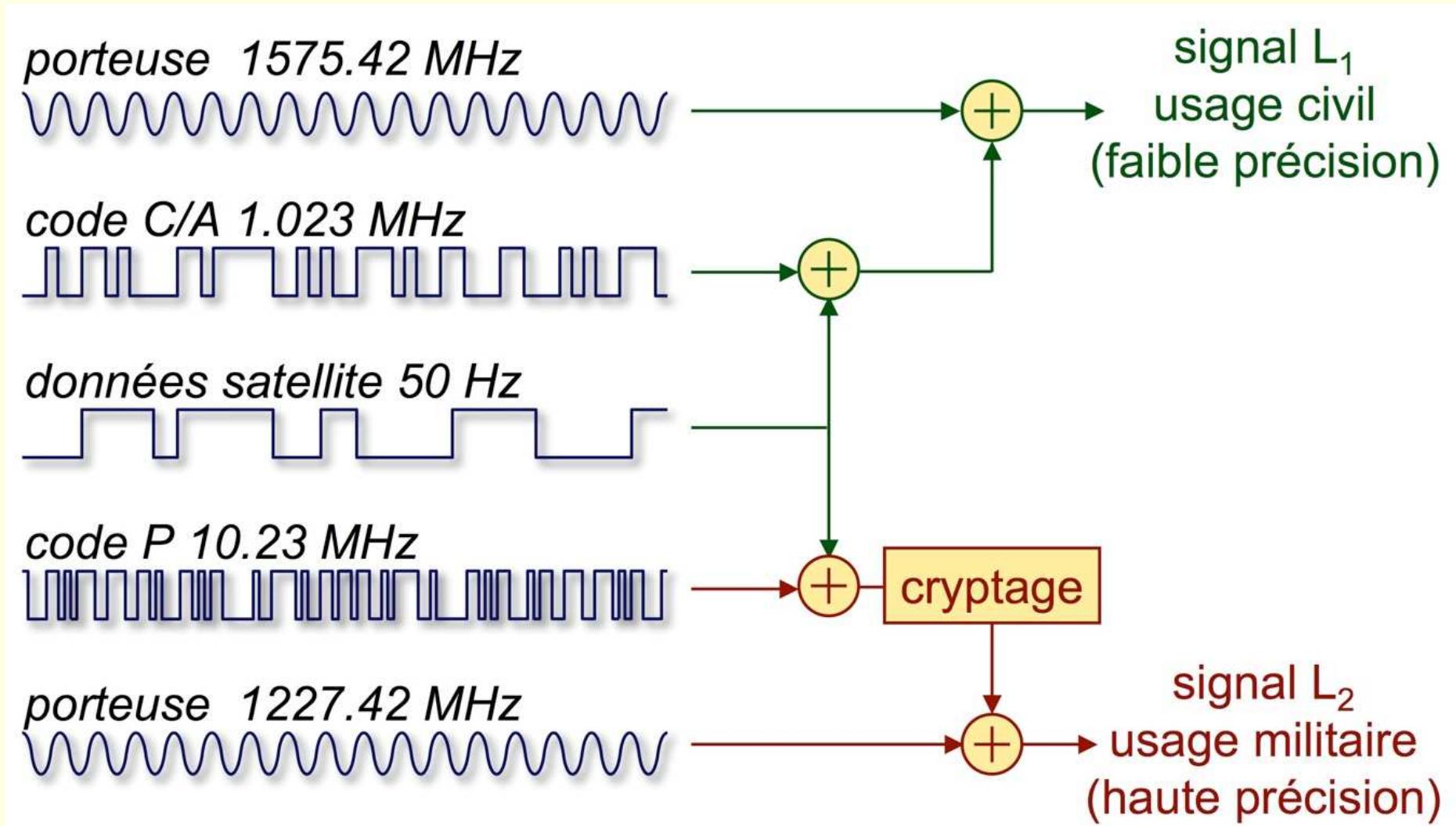


FIGURE 103: Préparation des signaux comprenant porteuses, codes d'étalement et signal utile.

## Signal $L1$

$L1$  contient 2 séquences pseudo-aléatoires :

- le “Protected Code” (P)
- le “Coarse (or Clear) /Acquisition” (C/A)

Ces 2 deux codes sont transmis par modulation BPSK

$$S_{L1} = A_p P(t) D(t) \cos(2\pi f_1 t + \phi) + A_c C(t) D(t) \sin(2\pi f_1 t + \phi) \quad (481)$$

## Code P

- Code NRZ bipolaire → modulation BPSK (appelée parfois code “bi-phasé”)
- Cadence binaire  $10,23 [Mb/s]$  → taille du lobe principal :  $20,46 [MHz]$ .
- $T_c = 97,8 [ns]$
- Généré au moyen de **2** séquences pseudo-aléatoires
  - Séquence 1 :  $15.345.000$  chips, période de  $1,5 [s]$
  - Séquence 2 :  $15.345.037$  chips
- Comme ces nombres n'ont aucun diviseur commun, la périodicité de la combinaison des codes est

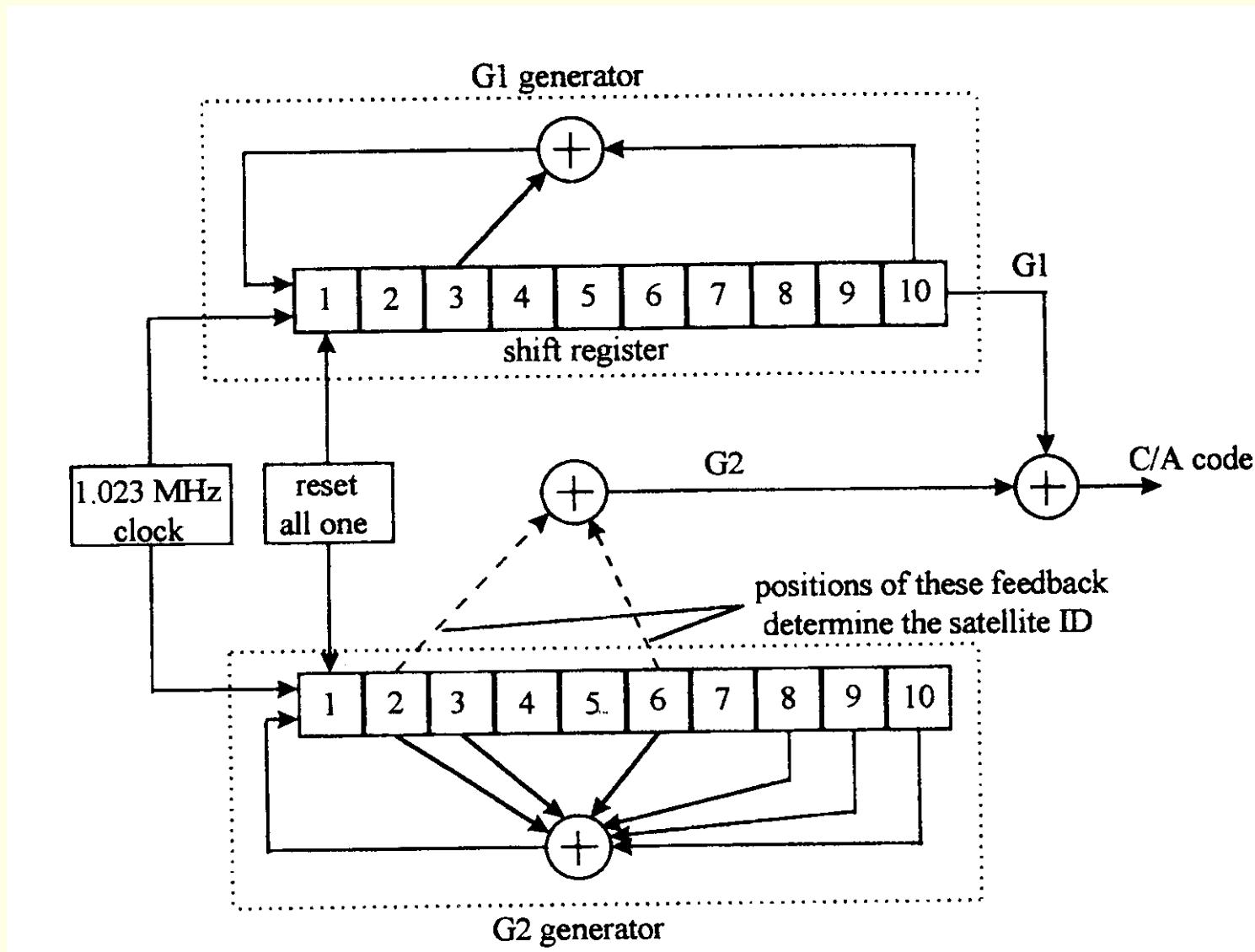
$$1,5 \times 15.345.037 = 23.017.555,5 [s] \quad (482)$$

soit **38** semaines.

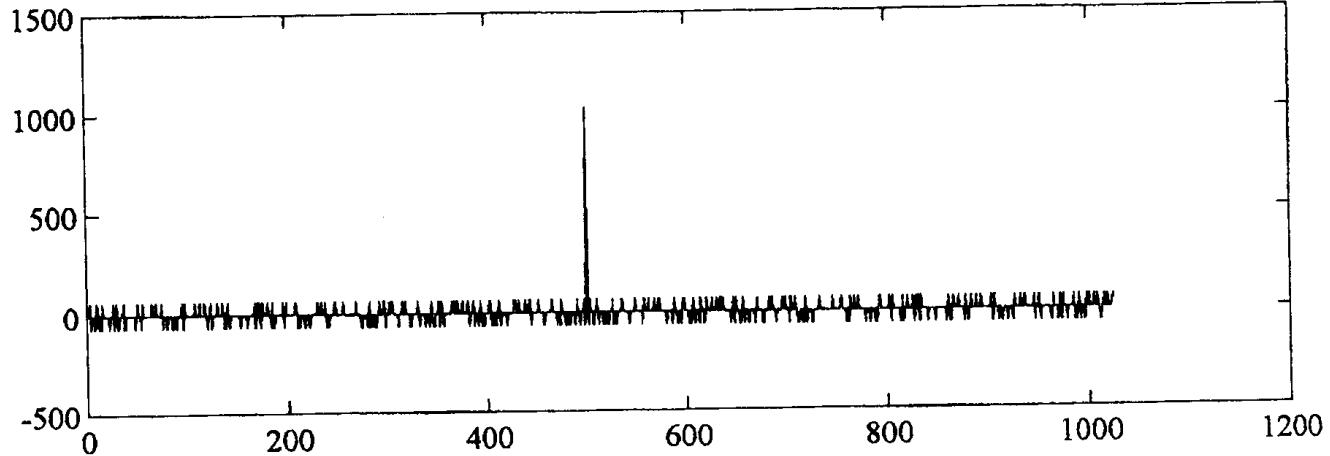
En pratique, on ré-initialise le code chaque semaine. D'où l'on a **37** codes possibles.

Dès lors, chaque satellite émet un identifiant unique, permettant de l'identifier.

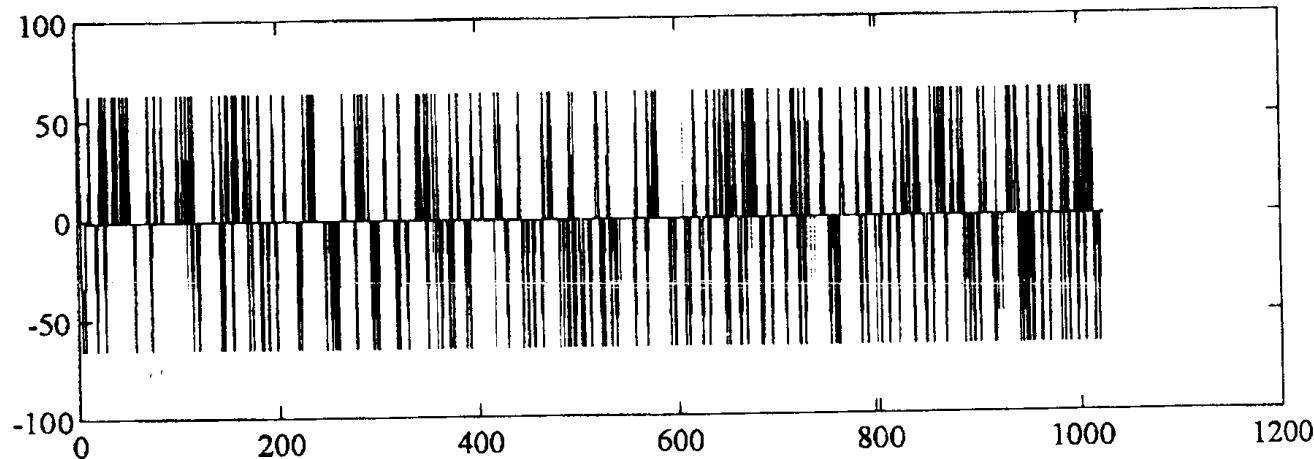
# Génération des codes



# Autocorrélation et inter-corrélation des codes des satellites

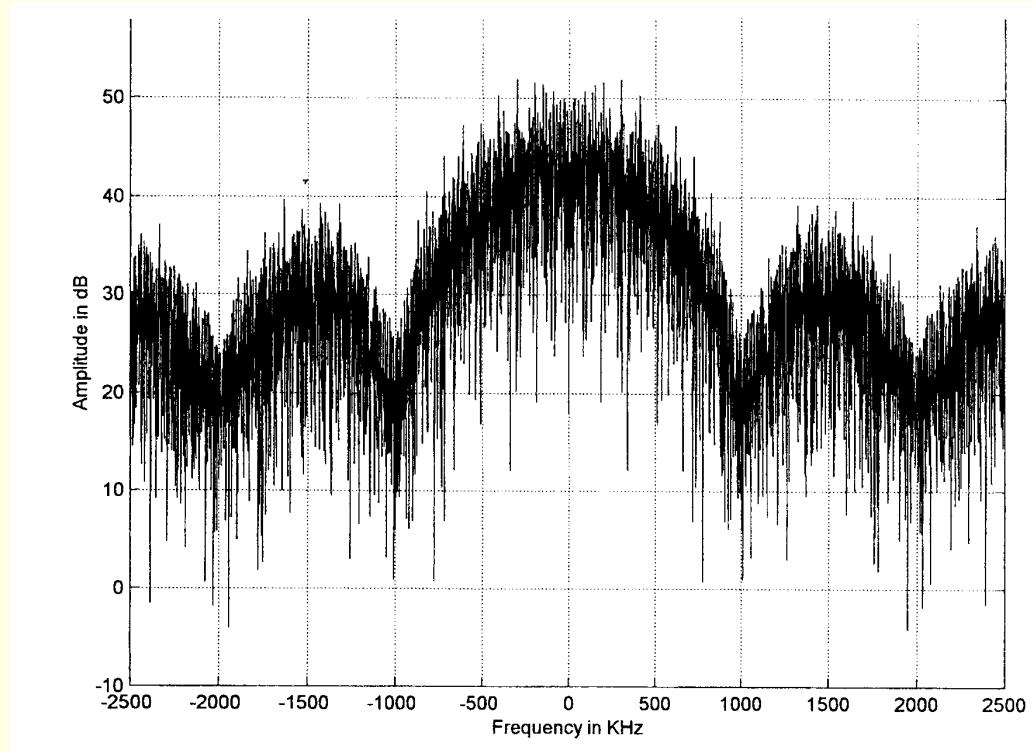


(a) Autocorrelation of satellite 19.



(b) Cross correlation of satellites 19 and 31.

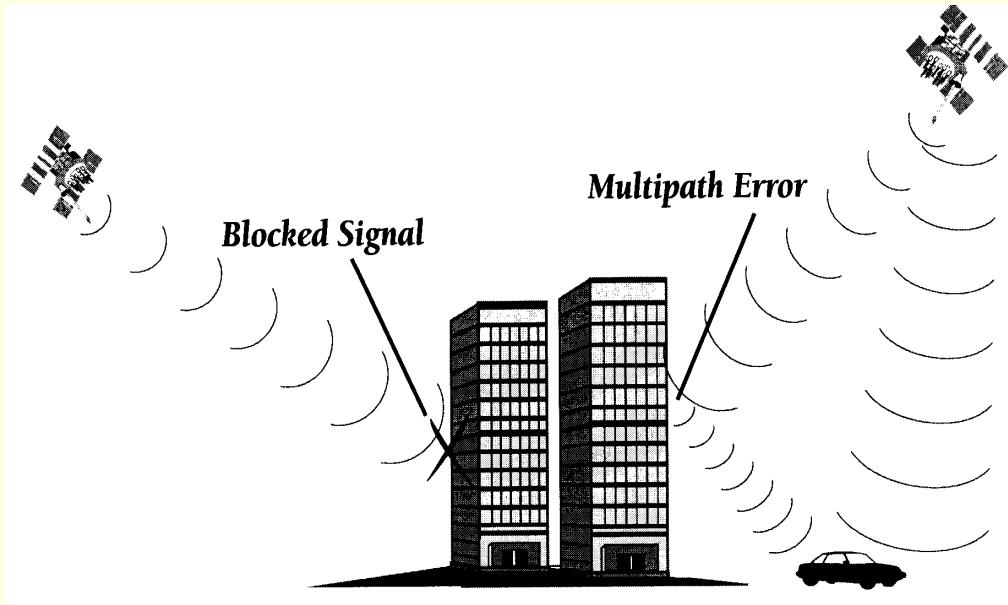
# Code C/A



- Code NRZ bipolaire → modulation BPSK
- Cadence binaire  $1,023 [Mb/s]$  → lobe large de  $2,046 [MHz]$ .
  - → la largeur de bande globale est définie par le code P.
- $T_c = 977,5 [ns]$
- Généré au moyen d'une séquence pseudo-aléatoire de 1023 chips,
  - → période de  $1 [ms]$

# Source d'erreurs et d'imprécisions

- Délais dus à l'ionosphère et à la stratosphère (vitesse de propagation plus lente au passage de ces couches)
- Multi-trajets provoqués par des réflexions
- Erreur de l'horloge de réception
- Erreurs orbitales, occasionnées par un positionnement imprécis du satellite lui-même
- Faible nombre de satellites “visibles”
- Dégradation intentionnelle du signal, appelé Selective Availability”, inopérante depuis mai 2000



# Amélioration de la précision au moyen du Differential GPS

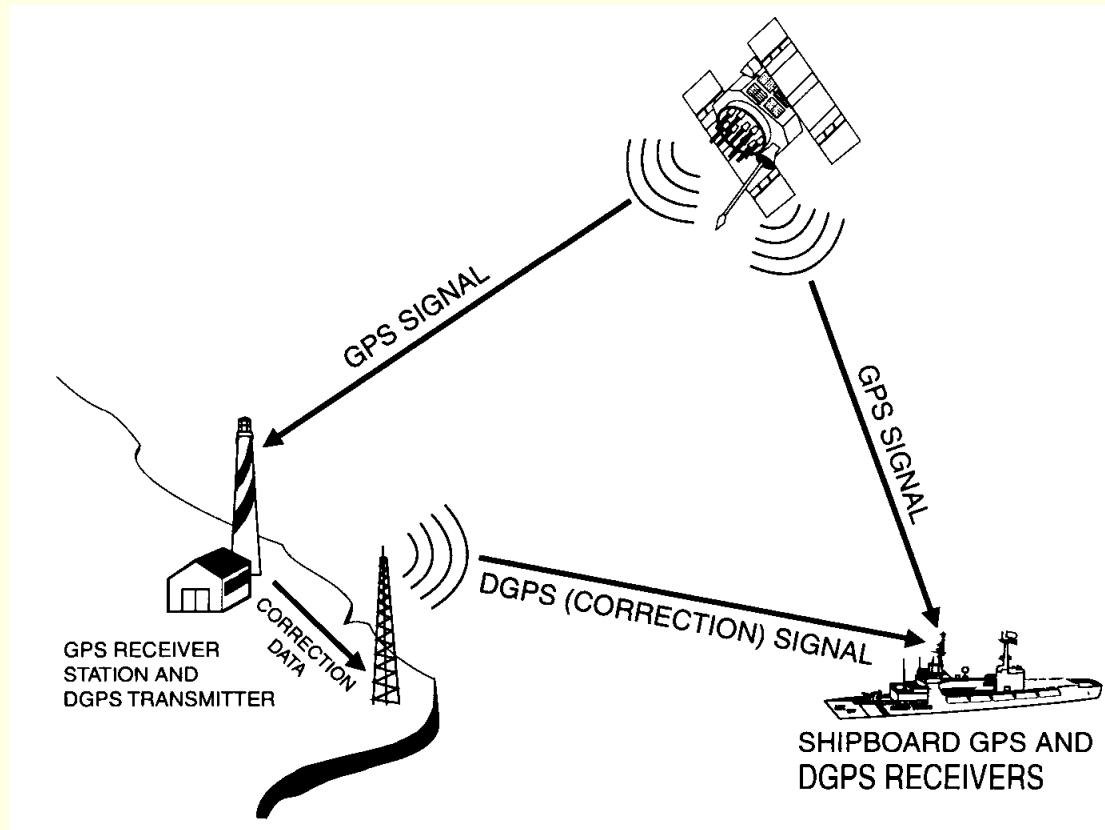


FIGURE 104: Schéma de fonctionnement du DGPS.

- Bande FM
- Précision de 1 à 5 [m]