Principes des télécommunications analogiques et numériques

Marc Van Droogenbroeck

Institut Montefiore, Université de Liège, Belgique

Année académique 2024-2025

Détails pratiques

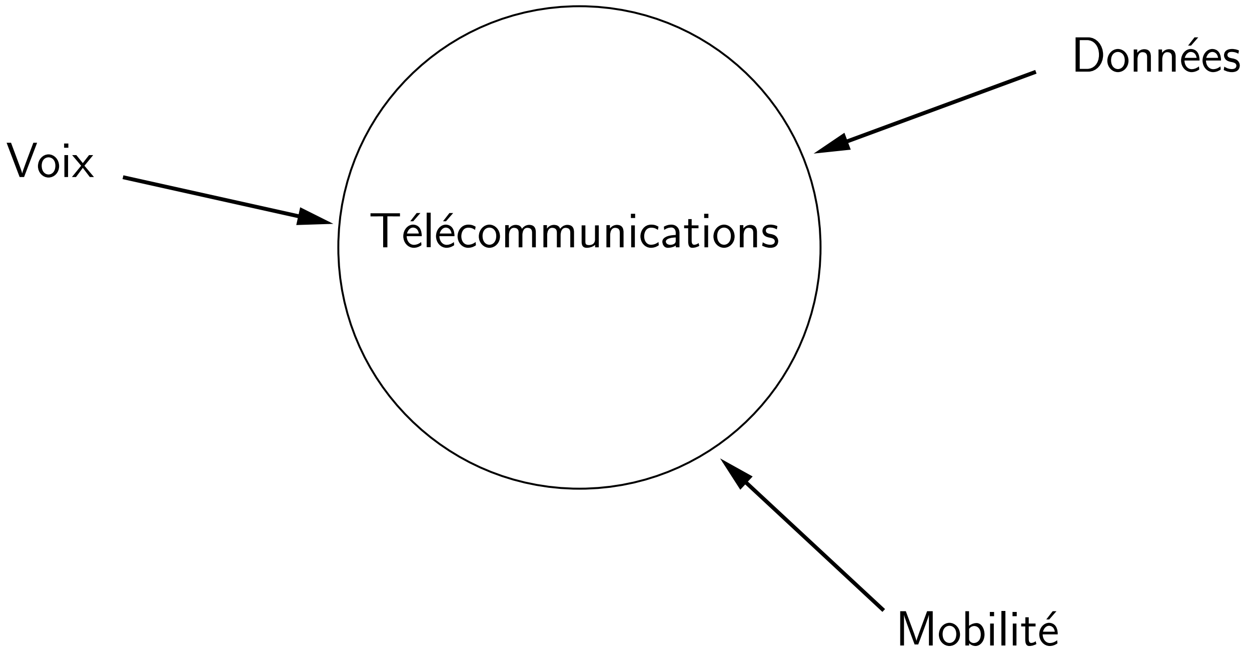
- **Examen**
  - écrit (obligatoire), à livre fermé
  - des questions de théorie et d'exercices (*toujours une question sur le bilan de puissance radio*) !
  - pas de calculatrice !
  - n'oubliez pas les unités physiques !
- **Transparents**
  - version PDF en ligne à l'adresse `https://orbi.uliege.be/handle/2268/1812`
  - **transparents ≡ matière d'examen (**tous les chapitres !**)**
- **Manuel d'exercices**
  - version PDF en ligne à l'adresse `https://orbi.uliege.be/handle/2268/233407`
- Notes de cours (**incomplètes**)
  - version PDF en ligne à l'adresse `https://orbi.uliege.be/handle/2268/1503`
  - ⚠ ces anciennes notes ne couvrent pas certains chapitres vus au cours

Table des matières

Table des matières

1. Introduction
2. Signaux et systèmes de télécommunications
3. Modulation d'onde continue
4. Variables aléatoires, processus stochastiques et bruit
5. Technologies du réseau Internet
6. Introduction à la numérisation
7. Transmission de signaux numériques en bande de base
8. Introduction à la modulation numérique
9. Notions de code
10. Propagation et systèmes radio
11. Principes de fonctionnement du réseau GSM
12. Principes de fonctionnement de la 4G
13. Transmission sur réseau d'alimentation électrique domestique
14. Principes de fonctionnement de la 5G

Principaux pôles de développement en télécommunications



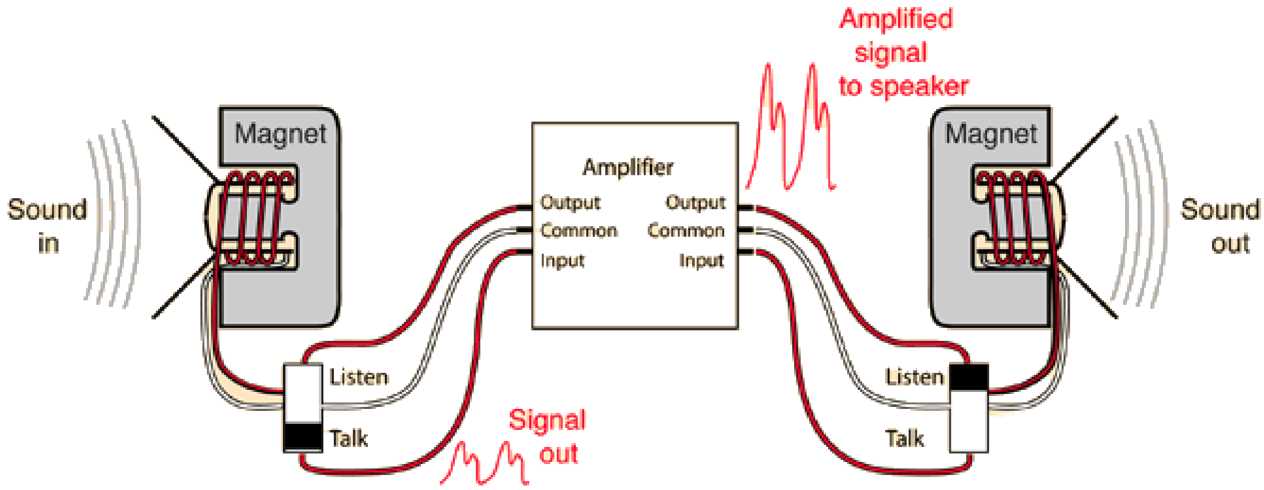
Principaux organismes internationaux de normalisation en télécommunications

- ITU : International Telecommunications Union [*téléphonie, télévision par satellite*]
- ISO : International Organization for Standardization [*JPEG, MPEG*]
- ETSI : European Telecommunications Standards Institute [*GSM*]

Normalisation Internet

- IETF : Internet Engineering Task Force (produit les *RFCs*)
- W3C : World Wide Web Consortium (*protocole http*, *langage XML*)

Exemple d'une chaîne de transmission



Principaux composants :

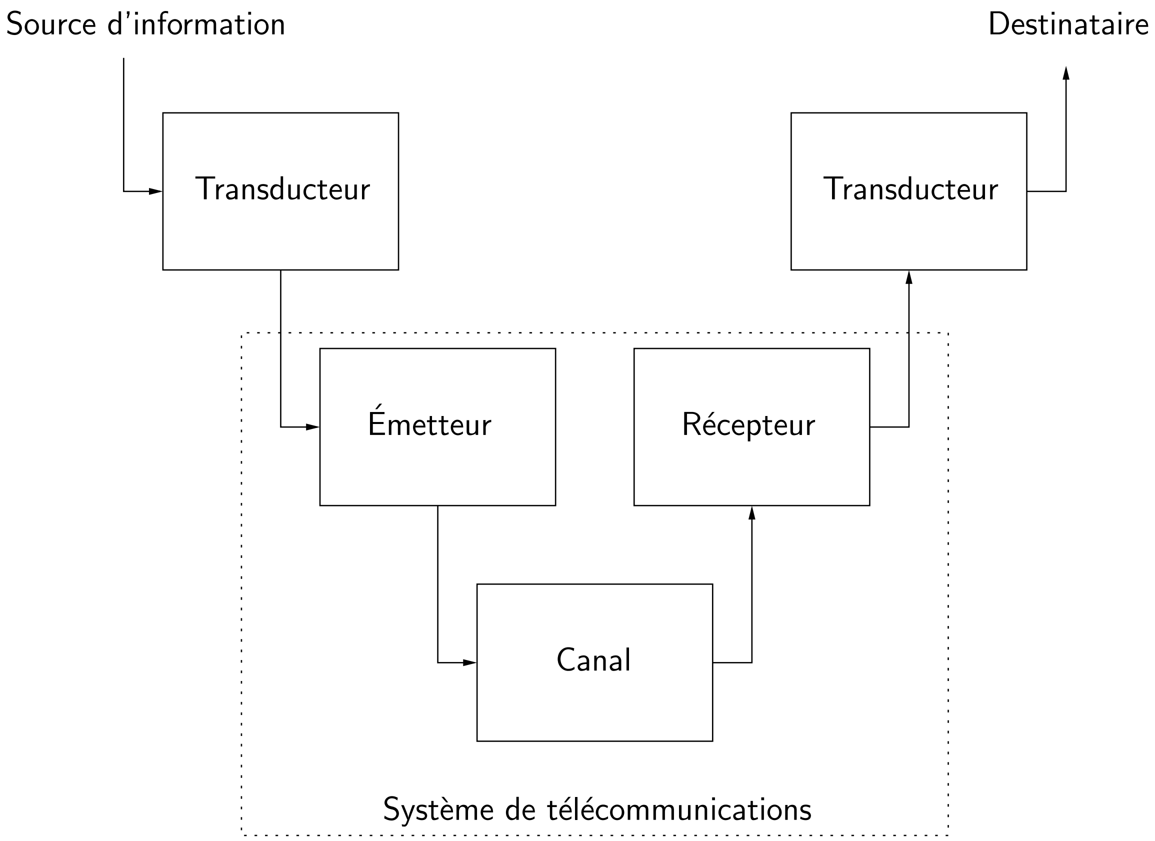
1. signal
2. canal de transmission (câble, *radio*)
3. électronique (amplificateurs, filtres, modems, etc)

et beaucoup d'ingénierie !

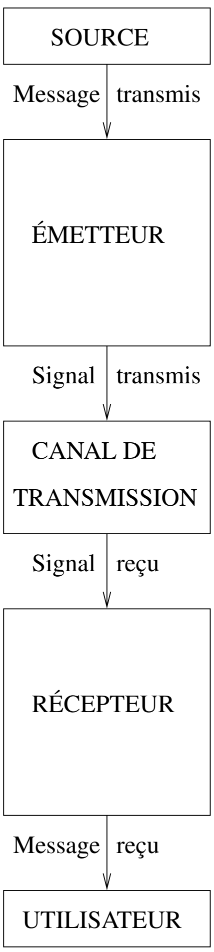
Différents types de signaux en télécommunications

- *Son* / ondes acoustiques (jusqu'au micro et en sortie du haut-parleur)
- *Ondes radio* / ondes électromagnétiques (wifi, GSM, satellite)
- *Signaux optiques* / ondes électromagnétiques (fibres optiques)
- *Ondes électriques* / ondes électromagnétiques (paires de cuivre, câble coaxial, circuit électronique)

Structure d'une chaîne de télécommunications



Structure d'une chaîne de télécommunications *numérique*



- Codage de source
- Modulation
- Filtrage passe-bas
- Calcul du spectre
- Codes correcteurs d'erreurs

- Bande de base
- Porteuse
- Canal idéal
- Canal non-idéal (interférences, non-linéarités, ...)

- Décision
- Récepteur optimal
- Démodulation : cohérente ou non-cohérente
- Filtrage passe-bande
- Synchronisation
- Performances

- Calcul du taux d'erreurs

Ingénierie en télécommunications ?

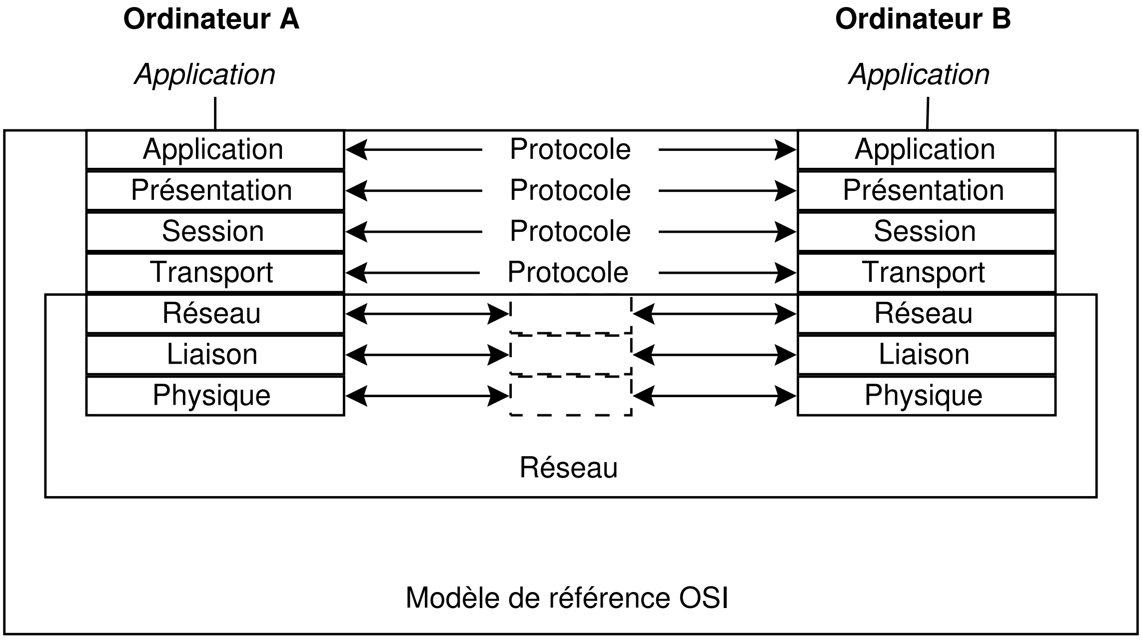
- Conception
  - création de nouveaux systèmes, simulation, vérification, design
- Fabrication
  - production, amélioration des procédés
- Expertise / conseil / formation
- Exploitation
  - installation, mise en œuvre, contrôle opérationnel, gestion des pannes

Ingénierie en télécommunications ?

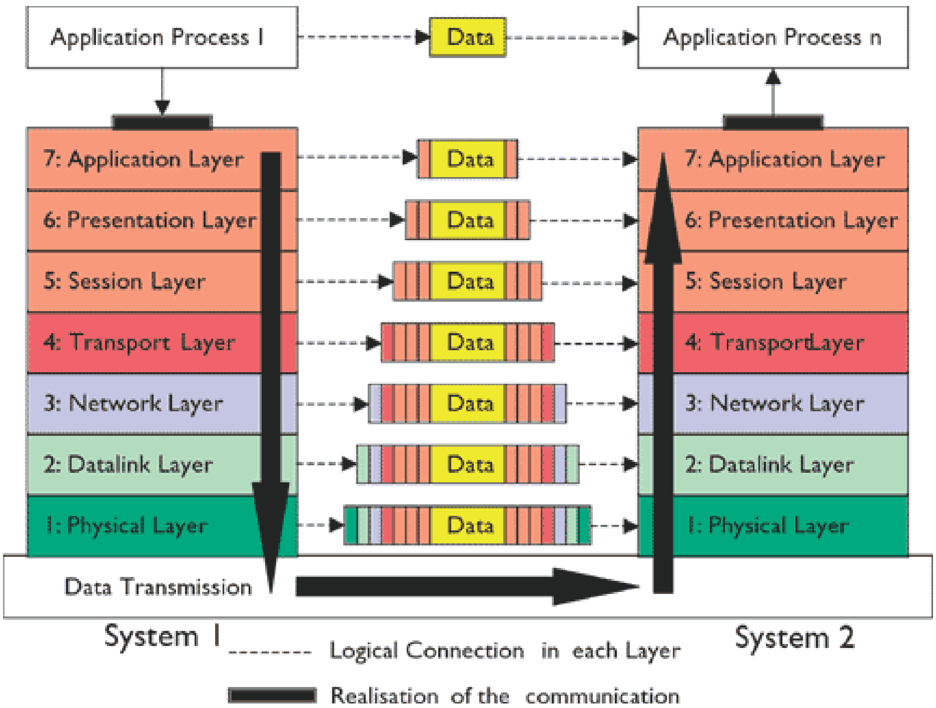
- Conception
  - création de nouveaux systèmes, simulation, vérification, design
- Fabrication
  - production, amélioration des procédés
- Expertise / conseil / formation
- Exploitation
  - installation, mise en œuvre, contrôle opérationnel, gestion des pannes

Modèle de référence I

Modèle OSI (*Open System Interconnection*)



Modèle de référence II



Conséquence : encapsulation ⇒ overhead

Avantage : ré-utilisation des “briques” par différentes applications !

Couches du modèle de référence OSI

Application de l'utilisateur

Service d'échange d'information

Transfert de fichiers, gestion et accès, échange de documents et de messages, transfert de processus	*7. Couche Application*
Service d'échange de messages indépendamment de la syntaxe	
Négociation des syntaxes, présentation des données	*6. Couche Présentation*
Gestion et synchronisation du dialogue	*5. Couche Session*
Service d'échange de messages indépendamment du réseau	
Transfert de messages de bout en bout (gestion de la connexion, fragmentation en paquets, contrôle d'erreur et du flux)	*4. Couche Transport*
Routage dans le réseau, adressage, établissement de liaison	*3. Couche Réseau*
Contrôle du lien physique (mise en trames, contrôle d'erreur)	*2. Couche Liaison*
Définition des interfaces électriques et mécaniques au réseau	*1. Couche Physique*

Connexion physique au réseau

Réseau

Modèle Internet : éléments de l'architecture TCP/IP

Application de l'utilisateur

↕

HyperText Transfer Protocol (HTTP) File Transfer Protocol (FTP) Remote terminal protocol (TELNET) Simple Mail Transfer Protocol (SMTP) Simple Network Management Protocol (SNMP) ...	*7. Couche Application* *6. Couche Présentation* *5. Couche Session*
TCP / UDP	*4. Couche Transport*
IP	*3. Couche Réseau*
IEEE802.X / X.25	*2. Couche Liaison* *1. Couche Physique*

↕

Réseau

TCP = Transmission Control Protocol
UDP = User Datagram Protocol
IP = Internet Protocol

Table des matières

Signaux et systèmes de télécommunications

1. Signal vocal ou musical
2. Vidéo (le signal vidéo est en fait un signal *multiplex* combinant des signaux luminance, des couleurs et du son)

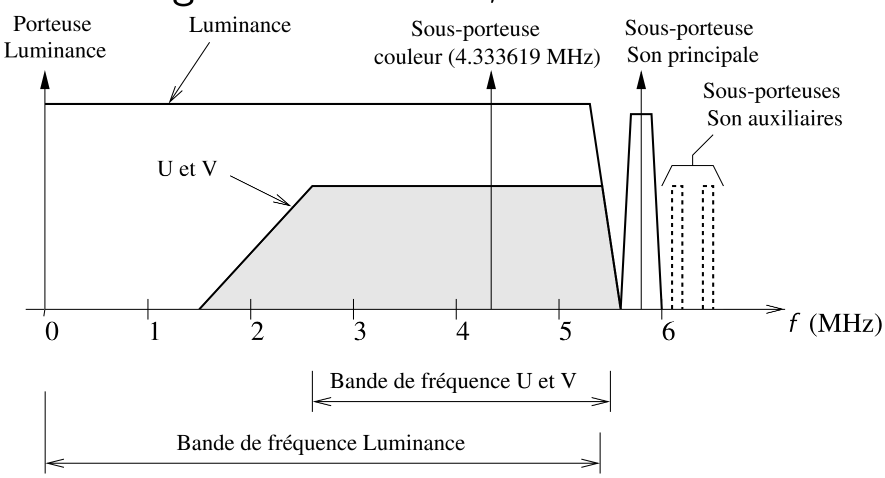


Figure – Spectre d'un signal vidéo *PAL* (signal *composite*).

3. Signaux numériques.
   Le débit d'information est exprimé en *bit/s* (parfois en *byte/s*)
   Le nombre de symboles transmis pendant une seconde est mesuré en *baud* ≡ *symbole/s*.

Outil privilégié pour traiter des systèmes de transmission : la transformée de Fourier

Définition (Transformée de Fourier)

La transformée de Fourier de $x(t)$ est l'intégrale

$$\mathcal{X}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) e^{-2\pi j f t} dt \quad (1)$$

et son inverse est obtenue par

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{X}(f) e^{2\pi j f t} df \quad (2)$$

Remarques

- $x(t)$ et $\mathcal{X}(f)$ sont *parfaitement équivalents !*
- on parle de fréquences et non de pulsations ω ou de valeurs normalisées (à 1), comme F ou Ω.
- peut-on parler de fréquences f *négatives* ?

Bande passante

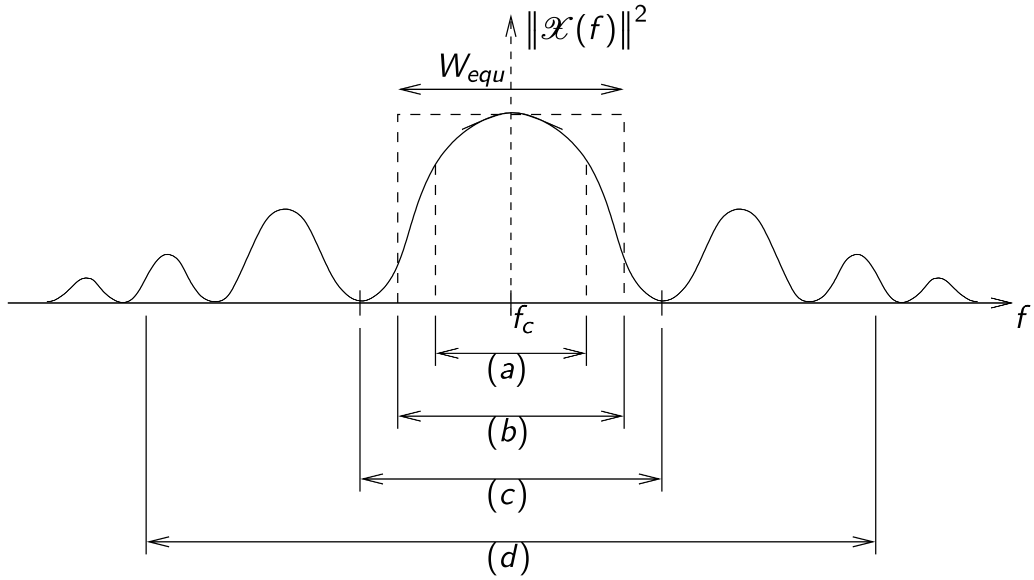


Figure – Comparaison de définitions de bande passante.

(a) Bande passante à 3 [dB].
(b) Bande passante équivalente.
(c) Lobe principal.
(d) Densité spectrale bornée.

Pourquoi utilise-t-on abondamment la transformée de Fourier en télécommunications ?

1. il est facile de caractériser un signal par son contenu fréquentiel.
2. la majorité des systèmes sont linéaires
   - il y a des outils mathématiques fort commodes pour traiter des signaux de fréquence.
3. certaines ressources sont organisées en fréquence : spectre radio, signal ADSL, etc.

Il est donc nécessaire de bien maîtriser cet outil mathématique et d'en comprendre le sens...

Catégories de signaux

- *analogiques* ou *numériques*,
- *périodiques* ou *apériodiques*,
- *déterministes* ou *stochastiques*,
- d'*énergie* ou de *puissance*.

Représentation (≠ information) des signaux

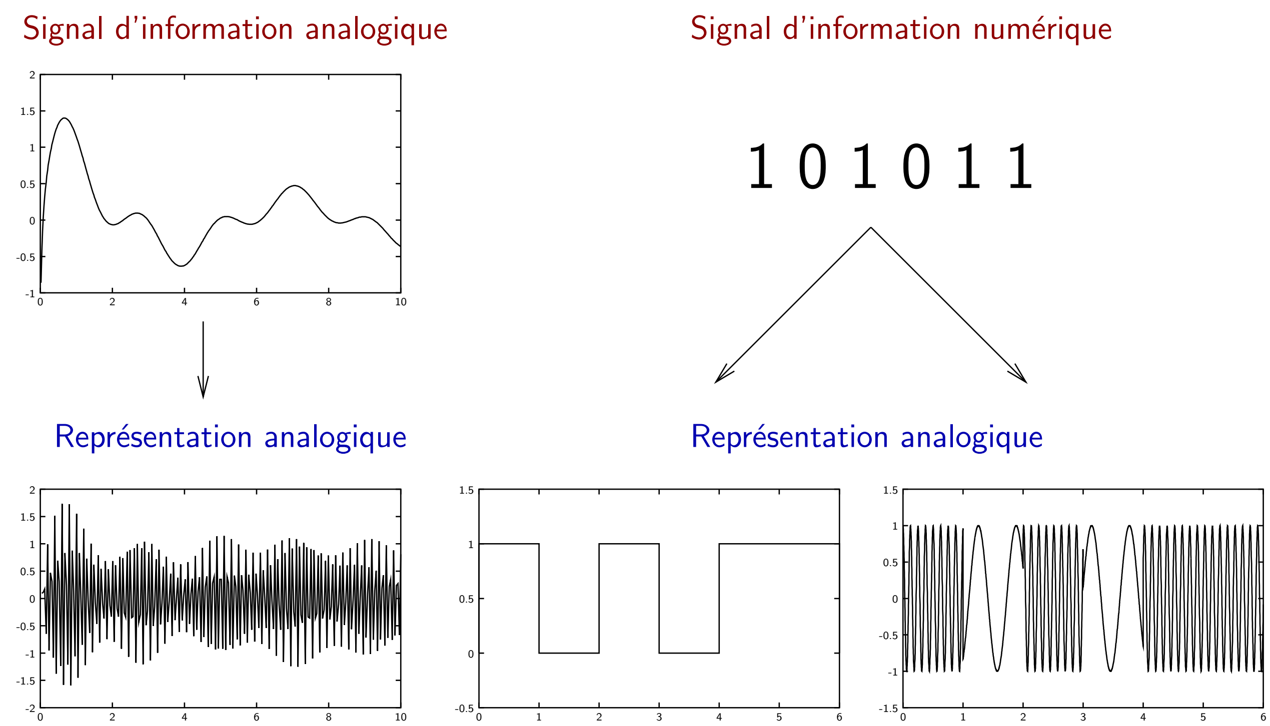


Figure – Représentation d'un signal d'information analogique ou numérique.

Caractérisation d'un canal pour la transmission

Signal analogique	Signal numérique (digital)
largeur de bande [Hz]	débit [b/s]
Signal to Noise Ratio (S/N ou SNR)	Bit Error Rate (BER)
largeur de bande de la représentation utilisée [Hz]	

On passe au numérique parce que :

- possibilité de régénérer un signal numérique
- meilleur usage de la bande de fréquences

Exemple

[meilleur usage des fréquences] : de la TV analogique à la TV numérique

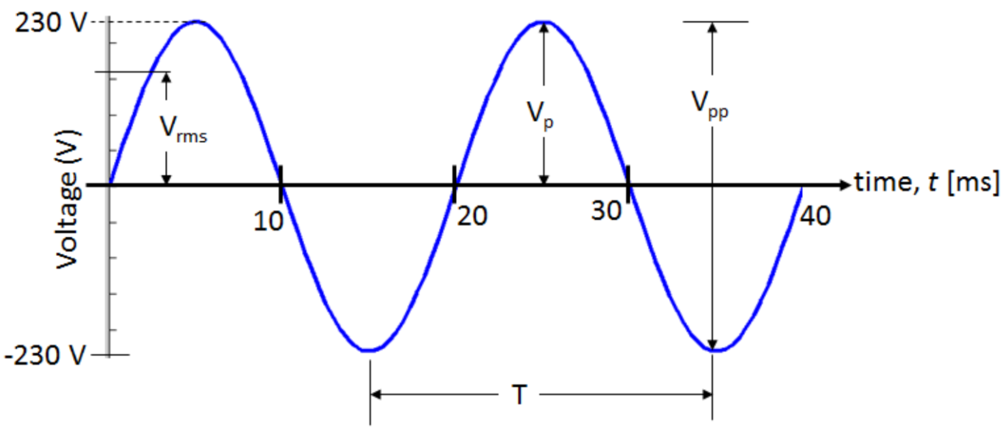
- canal pour signal analogique PAL : largeur de bande de 8 [MHz]
- télévision numérique, qualité PAL ∼ 5 [Mb/s]
  - avec une modulation 64-QAM, dont l'*efficacité spectrale* est de 6 b/s par *Hz*, un canal de 8 [MHz] offre un débit de 48 [Mb/s].
  - Conclusion : grâce à la numérique, il y a place pour 10 signaux de télévision numérique au lieu de 1 chaîne de télévision analogique.

Déterministe ou aléatoire ?

	Émetteur	Récepteur
Signal utile	*déterministe*	*aléatoire*
Bruit et interférences	*aléatoire*	*aléatoire*

Table – Nature des signaux dans une chaîne de télécommunications.

Exemple de signal déterministe périodique : le signal d'alimentation



Principales caractéristiques :

- valeur de crête de la tension, $V_c = 230\,[\text{V}]$
- fréquence $f = 50\,[\text{Hz}]$
- pour une phase $\phi = 0^0$, le signal vaut

$$v(t) = V_c \sin(2\pi f t + \phi) = 230 \sin(2\pi t \times 50) \tag{3}$$

Puissance instantanée

Soit une *tension* $v(t)$ qui, à travers une *résistance* R, produit un *courant* $i(t)$. La **puissance** *instantanée* dissipée dans cette résistance est définie par

$$p(t) = \frac{|v(t)|^2}{R} \tag{4}$$

ou encore

$$p(t) = R\,|i(t)|^2 \tag{5}$$

À travers une charge unitaire de 1 *Ohm*, noté $[\Omega]$, les expressions sont même égales. Pour la facilité, on normalise l'expression pour une résistance$R$ de $1\,[\Omega]$:

Définition (Puissance instantanée normalisée)

$$p(t) = |x(t)|^2 \tag{6}$$

Énergie et puissance

Définition (Énergie)

L'*énergie totale* du signal $g(t)$ est définie par

$$\begin{aligned} E &= \lim_{T\to+\infty} \int_{-T}^{T} |g(t)|^2\, dt & (7)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} |g(t)|^2\, dt & (8) \end{aligned}$$

Définition (Puissance moyenne)

Il en découle une *puissance moyenne* du signal $g(t)$ s'exprimant

$$P = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} |g(t)|^2\, dt \tag{9}$$

Décibel

Définition (Décibel)

$$x \longrightarrow 10\log_{10}(x)\ [\mathrm{dB}] \tag{10}$$

$$P\,[\mathrm{dBm}] = 10\log_{10}\frac{P\,[mW]}{1\,[mW]} \tag{11}$$

$x\,[\mathrm{W}]$	$10\log_{10}(x)\,[\mathrm{dBW}]$
$1\,[\mathrm{W}]$	$0\,[\mathrm{dBW}]$
$2\,[\mathrm{W}]$	$3\,[\mathrm{dBW}]$
$0,5\,[\mathrm{W}]$	$-3\,[\mathrm{dBW}]$
$5\,[\mathrm{W}]$	$7\,[\mathrm{dBW}]$
$10^n\,[\mathrm{W}]$	$10\times n\,[\mathrm{dBW}]$

$$10\log_{10}\left(\frac{U}{[V]}\right)^2 = 20\log_{10}\frac{U}{[V]} \tag{12}$$

$$x \leftrightarrow 20\log_{10}(x) \tag{13}$$

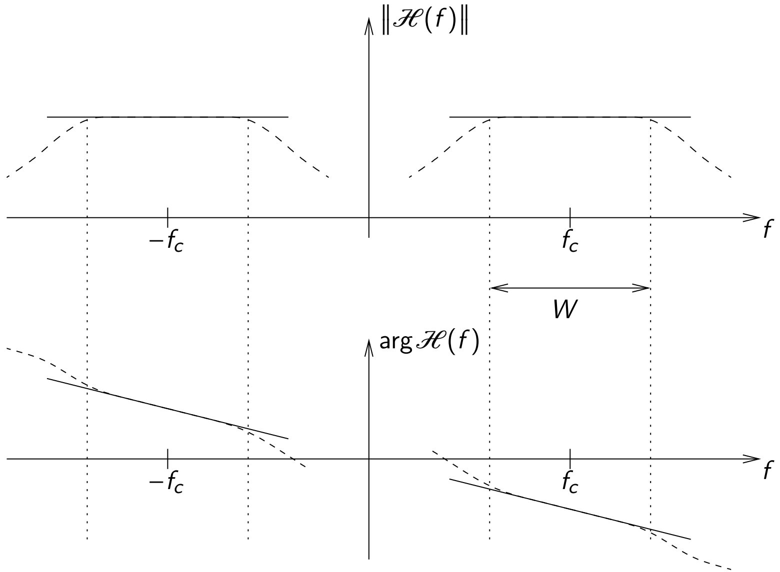
Canal de transmission idéal

Si on injecte $x(t)$ dans un canal, on espère trouver $\alpha\, x(t-\tau)$ en sortie.

Canal idéal

La transmittance d'un canal "idéal" est donc

$$\mathscr{H}(f) = \alpha\, e^{-2\pi j f \tau} \tag{14}$$



Distorsions et bruit

- Distorsions non linéaires.
  Par exemple :
$$y(t) = ax(t) + bx^2(t) \tag{15}$$
- Bruit
  - additif
  - multiplicatif

Table des matières

Modulation d'onde continue

- Introduction
  - Signaux en jeu et hypothèses :
    - *signal modulant* ≡ *information*
    - signal de porteuse : *signal sinusoïdal*
  - Techniques de modulation
- Modulation d'amplitude
  - Modulation d'amplitude classique
    - Répartition de la puissance, réalisation, discussion
  - Modulations d'amplitude dérivées
- Modulation angulaire
  - Bande passante requise
- Partage du plan de fréquence
  - Multiplexage en fréquence
  - Récepteur super-hétérodyne

Signal à transmettre : signal modulant ≡ information

Définition (*Signal modulant*)

Signal modulant normalisé $m(t)$

$$m(t) = \frac{x(t)}{x_{\max}} \tag{16}$$

Hypothèse : le signal modulant $m(t)$ est à *spectre limité*, c'est-à-dire que

$$\mathcal{M}(f) = 0 \;\; si \;\; |f| > W \tag{17}$$

Définition (Bande de base)

Dès lors que l'intervalle de fréquences est borné par la fréquence W, on appelle *bande de base* l'intervalle de fréquences $[0, W]$.

Définition (Bande de fréquences)

Si le contenu fréquentiel/spectral est confiné dans un intervalle $[f_c, f_c + B]$ ou $[f_c - \frac{B}{2}, f_c + \frac{B}{2}]$, alors on parle de *bande de fréquences* de largeur B.

Modulation d'une porteuse sinusoïdale

Définition (Porteuse)

Une (fréquence) *porteuse*, *carrier* en anglais, est un cosinus d'amplitude et de fréquence fixes (phase arbitrairement mise à 0) :

$$A_c \cos(2\pi f_c t) \tag{18}$$

Pourquoi moduler et utiliser une porteuse ?

1. une porteuse est un "*véhicule*" permettant de transmettre un signal en le transposant sur l'axe des fréquences.
   La modulation sert donc pour la transmission dans un canal !
2. un cosinus est un signal *facile à générer*, tant à l'émetteur qu'au récepteur.
3. un cosinus est *compatible avec des systèmes linéaires* (la plupart des canaux de transmission sont linéaires).
4. au récepteur, on peut facilement retrouver le signal à transmettre en se débarrassant de la porteuse (procédé de *démodulation*).

Modulation d'une porteuse sinusoïdale

Définition (Porteuse)

Une (fréquence) *porteuse*, *carrier* en anglais, est un cosinus d'amplitude et de fréquence fixes (phase arbitrairement mise à 0) :

$$A_c \cos(2\pi f_c t) \tag{18}$$

Pourquoi moduler et utiliser une porteuse ?

1. une porteuse est un "*véhicule*" permettant de transmettre un signal en le transposant sur l'axe des fréquences.
   La modulation sert donc pour la transmission dans un canal !
2. un cosinus est un signal *facile à générer*, tant à l'émetteur qu'au récepteur.
3. un cosinus est *compatible avec des systèmes linéaires* (la plupart des canaux de transmission sont linéaires).
4. au récepteur, on peut facilement retrouver le signal à transmettre en se débarrassant de la porteuse (procédé de *démodulation*).

La modulation dans la pratique

- Modulation analogique (= modulation d'onde continue, traitée dans ce chapitre) :
  1. signal *d'information analogique*
  2. technique de modulation qui utilise une porteuse continue
  3. exemples : *radio FM*, télévision “hertzienne”

  De nos jours, on préfère transmettre des informations numérisées (après conversion de l'analogique au numérique).
- Modulation numérique :
  1. signal *d'information numérique*
  2. technique de modulation qui utilise une porteuse continue
  3. exemples : *GSM*, WiFi, télévision par câble, Internet, Digital Audio Broadcasting (DAB)

Paramètres de modulation d'une porteuse

Objectif : on veut transmettre un signal modulant de type $m(t)$.

Modulation de fréquence

$$s(t) = A(t)\cos(2\pi f(t)t + \varphi(t))$$

Amplitude Phase

Modulation d'amplitude Modulation de phase

Quelle technique préférer ? Pourquoi ?

Modulation d'amplitude (modulation *AM*)

Définition (Modulation d'amplitude [AM])

La modulation d'amplitude, dite modulation AM pour Amplitude Modulation, est le processus par lequel l'amplitude de la porteuse $c(t)$ varie linéairement avec le signal modulant $m(t)$.

Après modulation, le *signal modulé* $s(t)$ est décrit par la fonction

$$\begin{aligned} s(t) &= A_c\left(1+k_a m(t)\right)\cos\left(2\pi f_c t\right) &(19)\\ &= A_c\cos\left(2\pi f_c t\right)+k_a A_c m(t)\cos\left(2\pi f_c t\right) &(20)\end{aligned}$$

L'amplitude instantanée est donc rendue proportionnelle au signal modulant et vaut

$$A(t) = A_c\left(1+k_a m(t)\right) \qquad (21)$$

Illustration

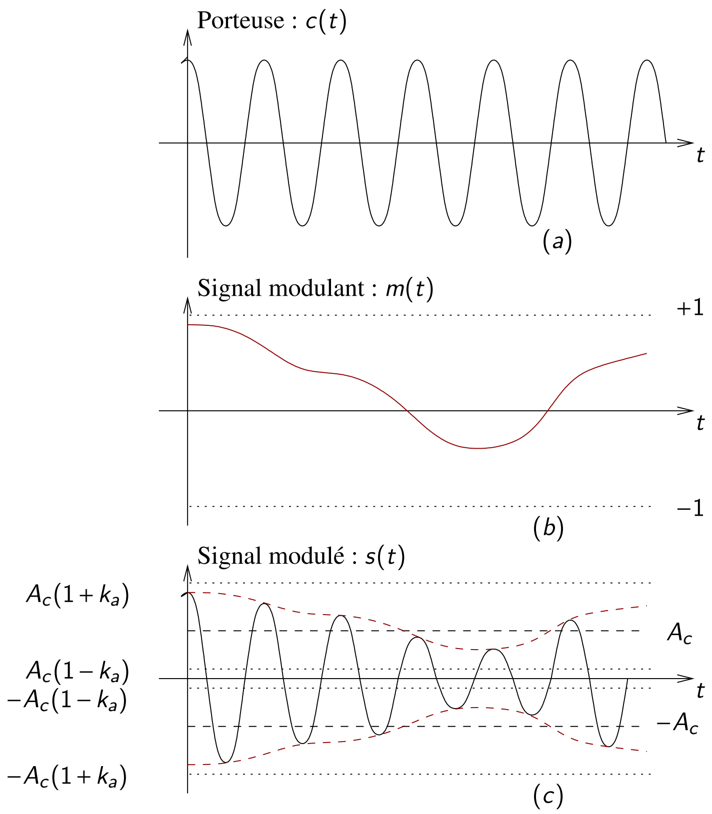


Figure – Illustration de la modulation d'amplitude classique.

Condition : $|k_a m(t)| < 1$, sinon il y a surmodulation

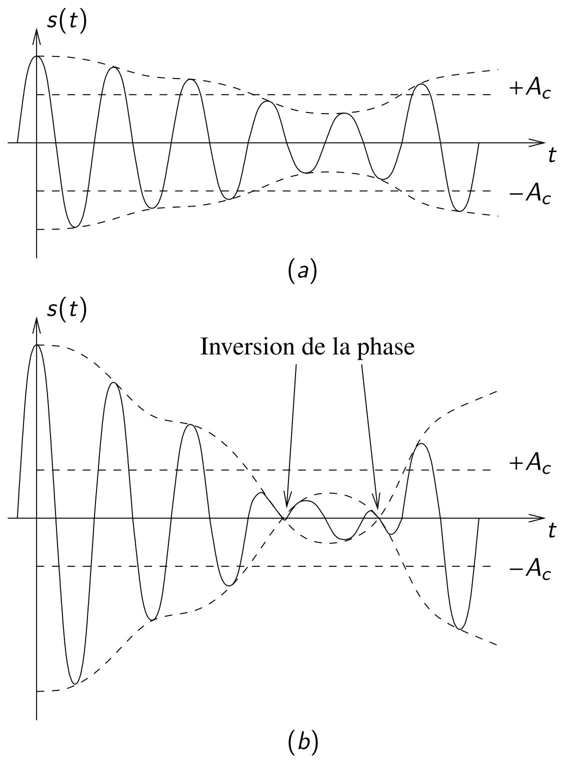


Figure – (a) $|k_a m(t)| < 1$: tout est en ordre. (b) $|k_a m(t)| > 1$: surmodulation car confusion entre deux valeurs de $m(t)$ au démodulateur.

Analyse spectrale I

Quel est le contenu spectral du signal modulé $s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) + k_a A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$?

La transformée de Fourier vaut

$$\mathscr{S}(f) = \frac{A_c}{2}[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)] + \frac{k_a A_c}{2}[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)] \otimes \mathscr{M}(f) \quad (22)$$

Comme, $\delta(f-f_c) \otimes \mathscr{M}(f) = \mathscr{M}(f-f_c)$ et $\delta(f+f_c) \otimes \mathscr{M}(f) = \mathscr{M}(f+f_c)$,

$$\mathscr{S}(f) = \frac{A_c}{2}[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)] + \frac{k_a A_c}{2}[\mathscr{M}(f-f_c)+\mathscr{M}(f+f_c)] \quad (23)$$

Contenu spectral :

- $\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)$: la porteuse
- $\mathscr{M}(f-f_c)$: le signal modulant décalé de f_c vers la droite
- $\mathscr{M}(f+f_c)$: le signal modulant décalé de f_c vers la gauche (pour des raisons de symétrie “mathématique”)

Analyse spectrale II

$$\mathscr{S}(f) = \frac{A_c}{2}\left[\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)\right] + \frac{k_a A_c}{2}\left[\mathscr{M}(f-f_c)+\mathscr{M}(f+f_c)\right] \qquad (24)$$

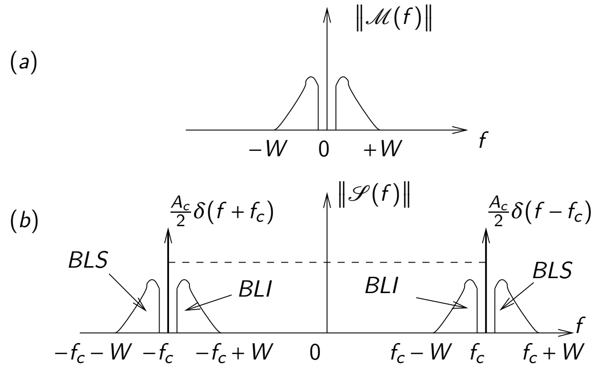


Figure – Spectres de fréquence : (a) signal en bande de base. (b) signal modulé. [BLI/BLS ≡ Bande Latérale Inférieure/Supérieure]

Que vaut donc la largeur de bande d'une modulation d'amplitude ?

Réalisation de la modulation

Modulation linéaire

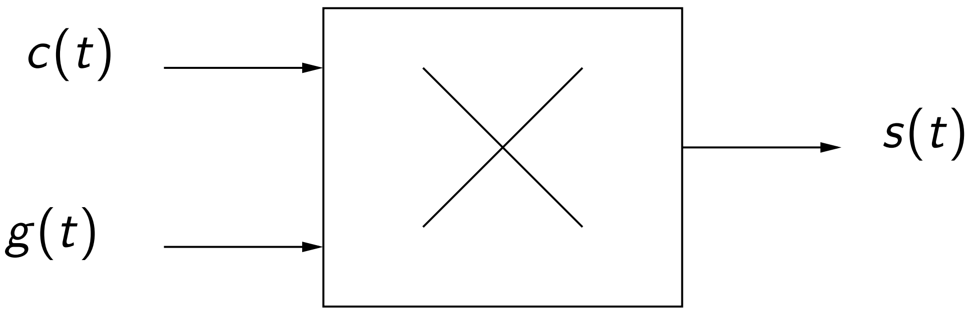


Figure – Principe de la modulation linéaire.

Modulation quadratique : principe

$(A\cos(2\pi f_c t) + m(t))^2 = \ldots + 2A\cos(2\pi f_c t)m(t) + \ldots$

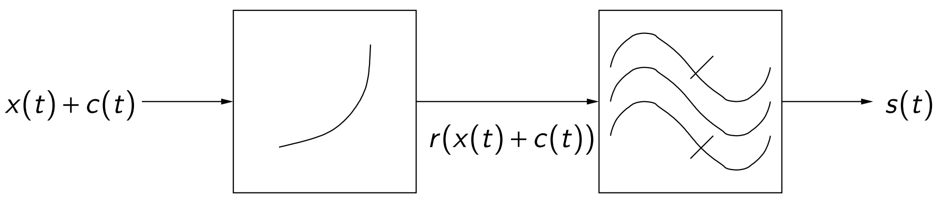


Figure – Principe de la modulation quadratique.

Contrôle de la modulation

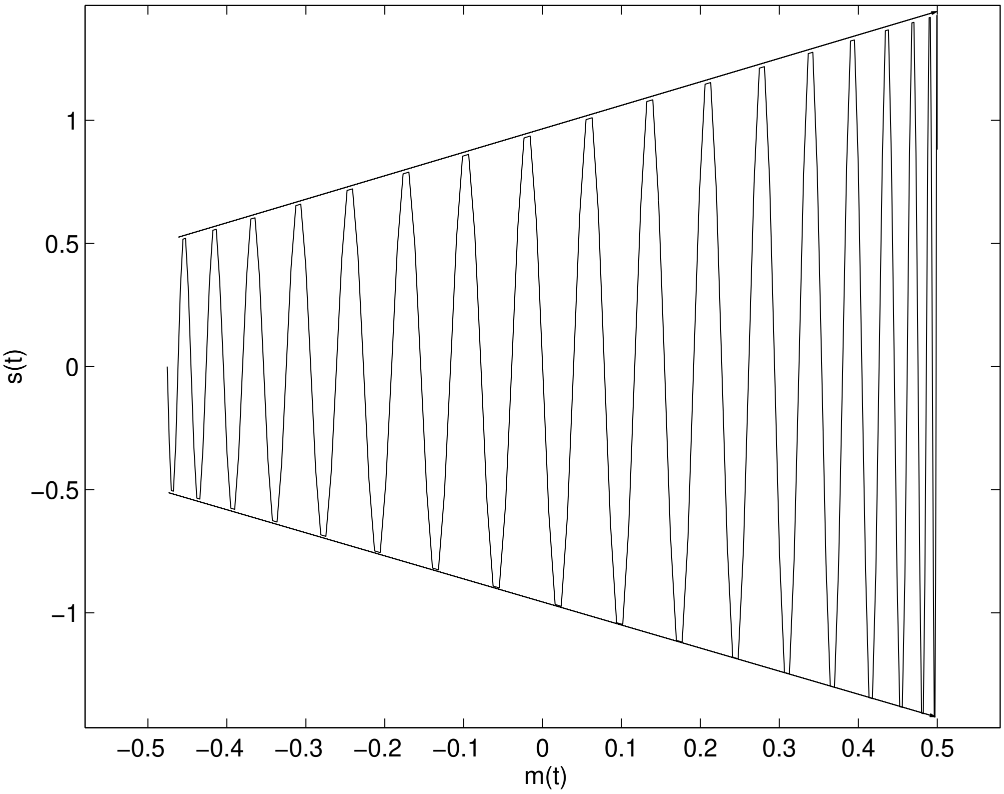


Figure – Trapèze de modulation (à l'oscilloscope).

Démodulation I

Détection d'enveloppe : un schéma électronique simple pour la démodulation d'amplitude (avec porteuse)

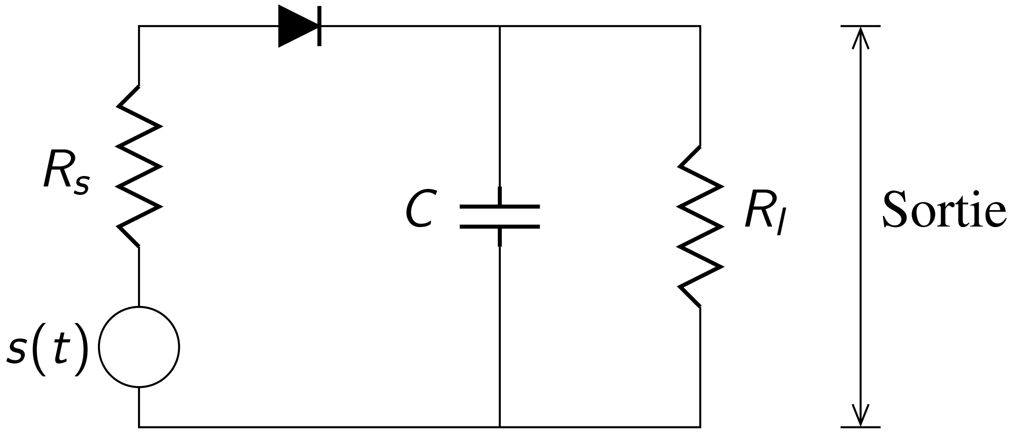


Figure – Détecteur d'enveloppe.

Démodulation II

Démodulation AM synchrone ou cohérente : un autre schéma pour la démodulation

$$
\begin{aligned}
s(t)\cos(2\pi f_c t) &= A_c(1+k_a m(t))\cos^2(2\pi f_c t) && (25)\\
&= A_c(1+k_a m(t))\,\frac{1}{2}(1+\cos(4\pi f_c t)) && (26)\\
&= \frac{A_c}{2}(1+k_a m(t))\\
&+ \frac{A_c}{2}(\cos(4\pi f_c t)+k_a m(t)\cos(4\pi f_c t)) && (27)
\end{aligned}
$$

On doit supprimer $\frac{A_c}{2}(\cos(4\pi f_c t)+k_a m(t)\cos(4\pi f_c t))$ qui est localisé autour de $2f_c \longrightarrow$ filtrage.

ps : quid de la composante continue $\frac{A_c}{2}$?

Démodulation III

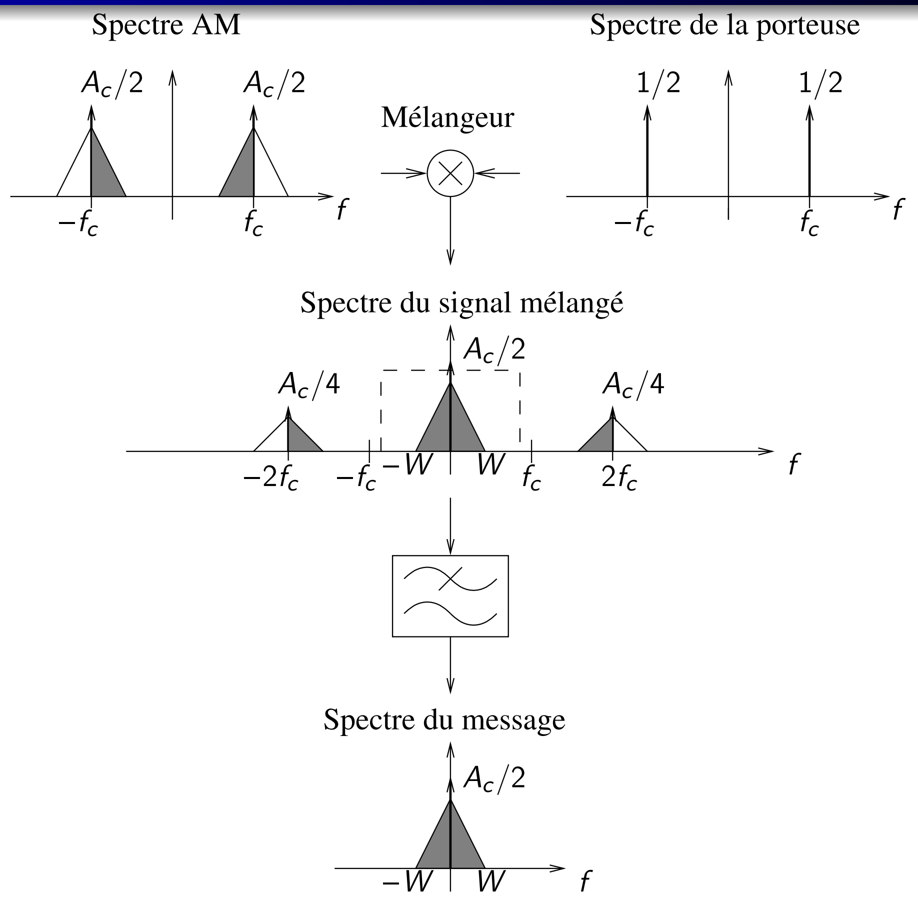


Figure – Schéma spectral d'un démodulateur AM synchrone.

Quel est l'impact d'un déphasage ou écart de fréquences (en démodulation cohérente) ?

Supposons qu'un oscillateur imparfait produise un signal erroné (*erreur de fréquence* car $f_l \neq f_c$ et *erreur de phase* car $\phi \neq 0$) :

$$A' \cos(2\pi f_l t + \phi) \tag{28}$$

Le produit de ce signal par le signal réceptionné, à porteuse supprimé (prenons $s(t) = A_c m(t) \cos(2\pi f_c t)$ par simplicité), vaut

$$s(t)A'\cos(2\pi f_l t+\phi) = \frac{A_c A'}{2} m(t)(\cos(2\pi(f_l - f_c)t+\phi) + \cos(2\pi(f_c+f_l)t+\phi))$$

Même si f_l et f_c concordent parfaitement (c.-à-d. $f_l = f_c$), l'écart de phase joue l'effet d'un atténuateur car, après filtrage,

$$s(t)A'\cos(2\pi f_l t + \phi) \rightarrow \frac{A_c A'}{2} m(t) \cos\phi \tag{29}$$

C'est problématique, surtout si ϕ varie au cours du temps ($\phi \rightarrow \phi(t)$), car alors il y a une confusion temporelle pour $m(t)\cos\phi(t)$.

Modulations d'amplitude dérivées

1. *Modulation à double bande latérale et porteuse supprimée* (appelée en anglais "*Double sideband-suppressed carrier*" ou *DSB-SC*).
2. *Modulation en quadrature de phase* (appelée "*Quadrature Amplitude Modulation*" ou *QAM*).
3. *Modulation à bande unique* (appelée en anglais "*Single sideband modulation*" ou *SSB*).
4. *Modulation à bande latérale résiduelle* (appelée en anglais "*Vestigial sideband modulation*" ou *VSB*).

Signal modulé en amplitude par modulation à porteuse supprimée

$$s(t) = m(t)c(t) \quad (30)$$
$$= A_c m(t)\cos(2\pi f_c t) \quad (31)$$

Spectre :

$$\mathscr{S}(f) = \frac{A_c}{2}(\mathscr{M}(f-f_c) + \mathscr{M}(f+f_c)) \quad (32)$$

Avantage :

- économie de puissance (puisqu'il n'y a pas de porteuse)

Inconvénient :

- pas de résidu de porteuse. Cela peut compliquer la démodulation cohérente (qui a besoin de la porteuse), pour un récepteur simplifié.

Démodulation d'un signal modulé en amplitude à porteuse supprimée au moyen d'une boucle de Costas

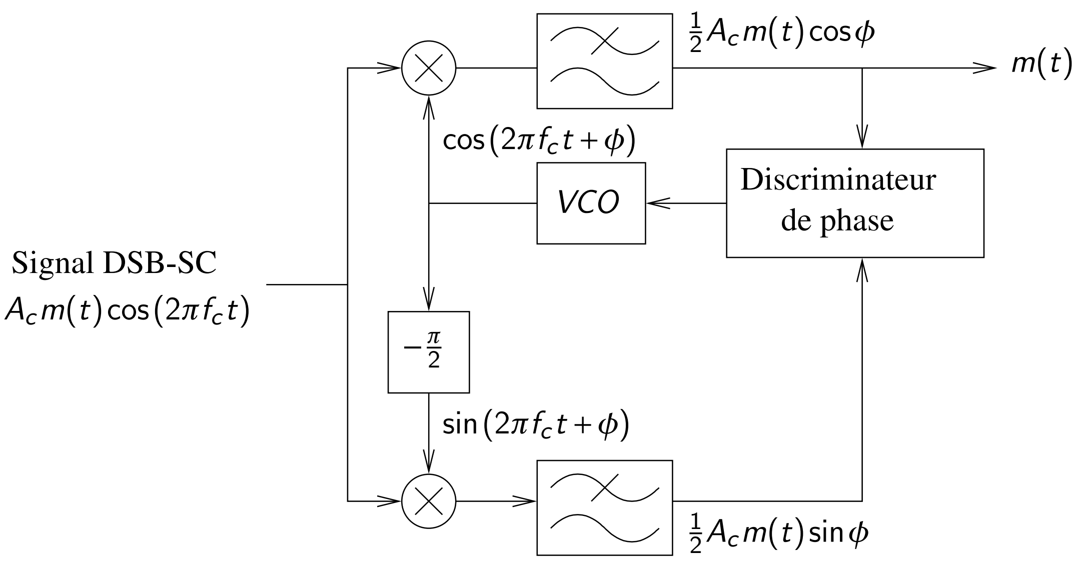


Figure – Démodulateur de Costas ($VCO \equiv$ Voltage controlled oscillator).

Modulation en quadrature I

Principe : transmission de deux signaux $m_1(t)$ et $m_2(t)$ simultanément. Le signal modulé produit est

$$s(t) = A_c m_1(t) \cos(2\pi f_c t) + A_c m_2(t) \sin(2\pi f_c t) \qquad (33)$$

Propriétés :

- $A_c m_1(t) \cos(2\pi f_c t)$ et $A_c m_2(t) \sin(2\pi f_c t)$ occupent rigoureusement la même bande de fréquences
  - deux signaux occupent la même bande de fréquences → économie relative de bande de fréquences d'un facteur 2
- il est possible de récupérer $m_1(t)$ et $m_2(t)$ au moyen d'un démodulateur synchrone au moyen de, respectivement, cos() et sin(), et de deux filtres passe-bas.

Modulation en quadrature II

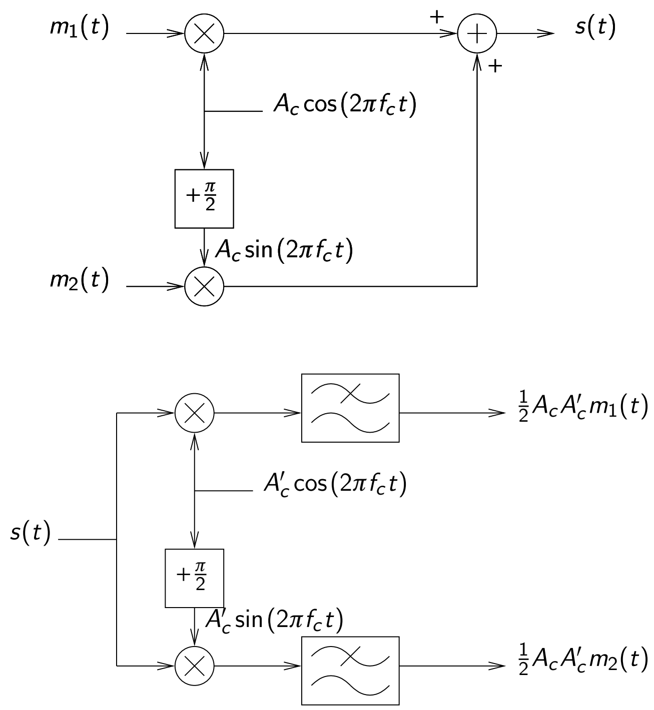


Figure – Schéma de modulation et de démodulation d'une modulation d'amplitude en quadrature.

Modulation à bande latérale unique I

Filtrage d'une bande

Soit à filtrer le signal $u(t) = A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)$ dont on ne désire *garder qu'une seule bande latérale*. On fait passer le signal à travers un filtre de transmittance $\mathscr{H}(f)$. En sortie, le signal vaut

$$\begin{aligned}\mathscr{S}(f) &= \mathscr{U}(f)\mathscr{H}(f) && (34)\\ &= \frac{A_c}{2}[\mathscr{M}(f-f_c)+\mathscr{M}(f+f_c)]\mathscr{H}(f) && (35)\end{aligned}$$

Considérons la démodulation cohérente

$$v(t) = A_c' \cos(2\pi f_c t)s(t) \qquad (36)$$

soit, dans le domaine de Fourier,

$$\mathscr{V}(f) = \frac{A_c'}{2}[\mathscr{S}(f-f_c)+\mathscr{S}(f+f_c)] \qquad (37)$$

Modulation à bande latérale unique II

Après substitution,

$$\begin{aligned}\mathscr{V}(f) &= \frac{A_cA_c'}{4}\mathscr{M}(f)[\mathscr{H}(f-f_c)+\mathscr{H}(f+f_c)]\\ &+ \frac{A_cA_c'}{4}[\mathscr{M}(f-2f_c)\mathscr{H}(f-f_c)+\mathscr{M}(f+2f_c)\mathscr{H}(f+f_c)]\end{aligned}$$

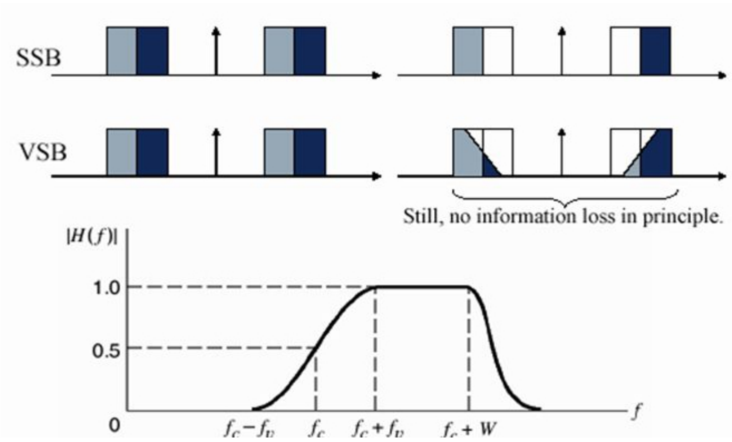
Le second terme est éliminé à la réception par simple filtrage (car autour de $2f_c$).

Théorème

À la réception, le signal en bande de base n'a subi aucune distorsion à la condition que, $\forall f$,

$$\mathscr{H}(f-f_c)+\mathscr{H}(f+f_c) = 1 \qquad (38)$$

Modulation à bande latérale unique III



Deux possibilités, en fonction du filtre $\mathscr{H}(f)$:

1. une des deux bandes est entièrement supprimée $\longrightarrow$ on a une modulation à bande latérale unique (Single Side Band, SSB)
2. on garde un résidu d'une bande + l'intégralité de l'autre bande $\longrightarrow$ il s'agit d'une modulation à bande latérale résiduelle (Vestigial Side Band, VSB)

Démodulation à bande latérale unique (Single Side Band)

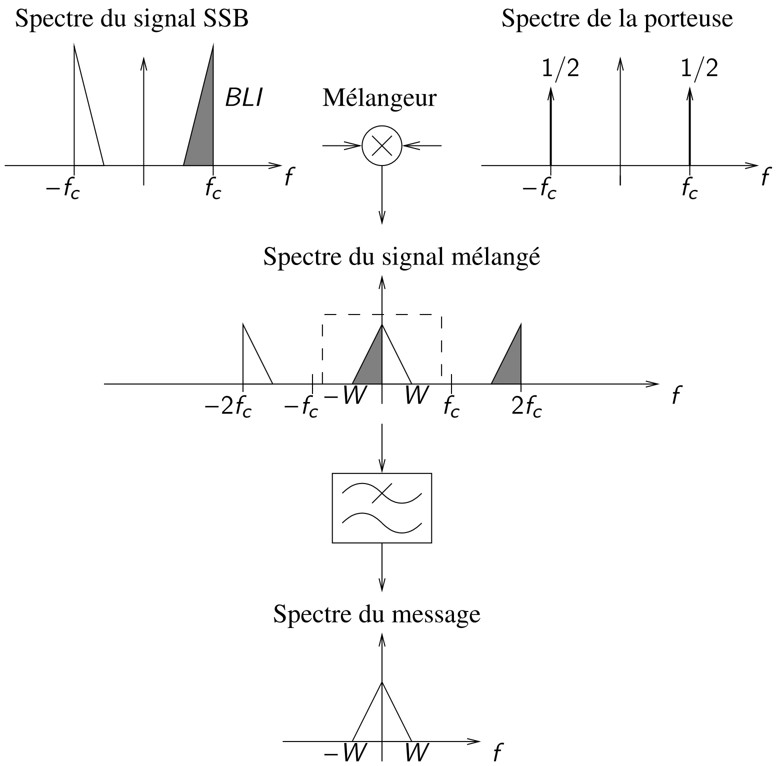
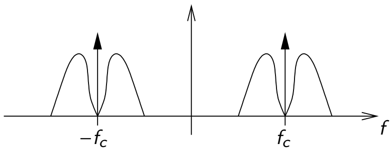
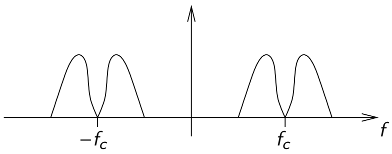
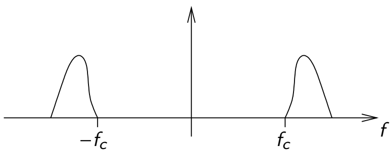
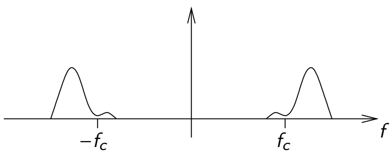


Figure – Schéma de démodulation SSB.

Tableau récapitulatif des modulations d'onde continue

	$s(t)$	$\|\|\mathscr{S}(f)\|\|$	BP
AM classique	$A_c(1+k_a m(t))\cos(2\pi f_c t)$		$2W$
DSB-SC	$A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)$		$2W$
QAM	$A_c m_1(t)\cos(2\pi f_c t)$ $+A_c m_2(t)\sin(2\pi f_c t)$		$2W$
SSB			W
VSB			$(1+\alpha)$ W
FM	$A_c\cos(2\pi f_c t+$ $2\pi k_f \int_0^t m(\tau)d\tau)$		$2(\Delta f$ $+W)$

Modulation angulaire : $A_c \cos\phi(t)$

- Principes et définitions
- Analyse de la modulation de fréquence analogique
- Modulation par une cosinusoïde
  - Analyse spectrale
    - Bande passante requise

Principes

Modulation de fréquence

$$s(t) = A(t)\cos(2\pi f(t)t + \varphi(t))$$

Amplitude — Phase

Modulation d'amplitude — Modulation de phase

Figure – Paramètres d'un signal modulé.

Modification de l'angle du cosinus :

1. modification de la phase en fonction du signal modulant → *modulation de phase "pure"* (Phase Modulation)
2. modification de la fréquence en fonction du signal modulant → *modulation de fréquence "pure"* (Frequency Modulation)
3. modification de la phase ou de la fréquence, après application d'un filtre sur le signal modulant → *modulation angulaire*

Tableau comparatif entre une modulation de phase et une modulation de fréquence I

$$A_c \cos\phi(t)$$

Modulation PM	Modulation FM
$\phi(t)$	
$\phi(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t)$	

Paramètres d'une PM	
$\triangle\phi(t) = \phi(t) - (2\pi f_c t + \phi_c)$	
$\beta = \max\lvert\triangle\phi(t)\rvert$	

Lien entre modulations	

Tableau comparatif entre une modulation de phase et une modulation de fréquence II

$$A_c \cos(2\pi f(t) t)$$

Modulation PM	Modulation FM
	$f(t)$
	$f(t) = f_c + k_f m(t)$

Paramètres d'une PM	Paramètres d'une FM
	$\Delta f(t) = f(t) - f_c$
	$\Delta f = \max \lvert \Delta f(t) \rvert$

Lien entre modulations	

Tableau comparatif entre une modulation de phase et une modulation de fréquence III

Modulation PM	Modulation FM
$\phi(t)$	$f(t)$
$\phi(t) = 2\pi f_c t + k_p m(t)$	$f(t) = f_c + k_f m(t)$

Paramètres d'une PM	Paramètres d'une FM
$\Delta\phi(t) = \phi(t) - (2\pi f_c t + \phi_c)$	$\Delta f(t) = f(t) - f_c$
$\beta = \max \lvert \Delta\phi(t) \rvert$	$\Delta f = \max \lvert \Delta f(t) \rvert$

Lien entre modulations	
$f(t) = \frac{1}{2\pi}\frac{d\phi(t)}{dt} \longleftrightarrow \phi(t) = 2\pi \int_0^t f(u) du$	
$f(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi}\frac{dm(t)}{dt}$	$\phi(t) = 2\pi f_c t + 2\pi k_f \int_0^t m(u) du$

Lien entre modulations de phase et de fréquence I

Pour illustrer le lien entre la modulation PM et la modulation PM, considérons le scénario suivant :

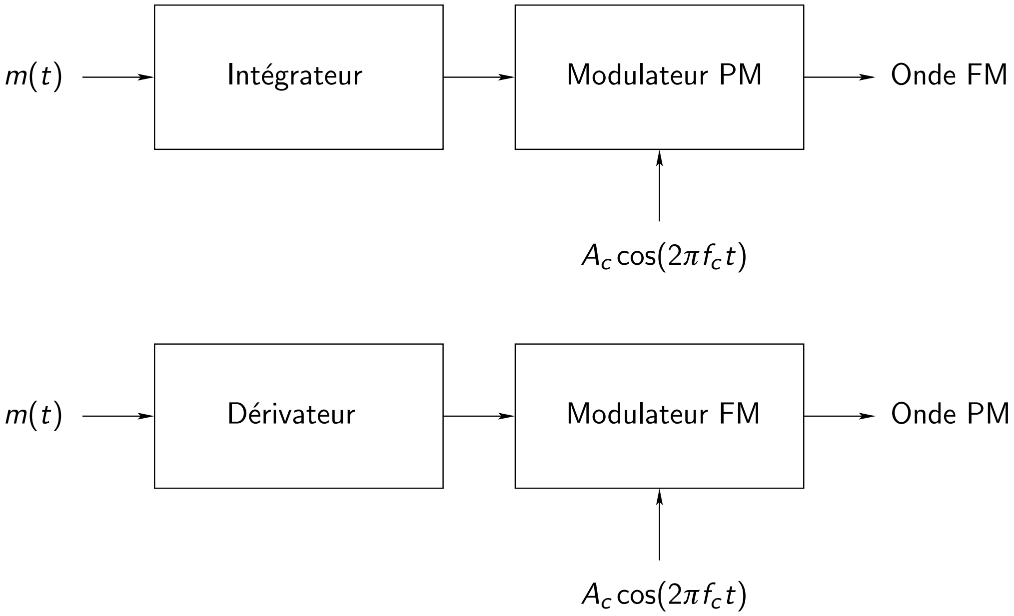
1. On veut réaliser une modulation FM au départ du signal modulant $m(t)$. On veut donc
$$f(t) = f_c + k_f m(t) \tag{39}$$
2. On dispose d'un modulateur PM (et non pas d'un modulateur FM). Un modulateur PM fournit donc, au départ de $m'(t)$, la phase suivante
$$\phi(t) = 2\pi f_c t + k_p m'(t) \tag{40}$$
ce qui correspond à une fréquence instantanée
$$f(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm'(t)}{dt} \tag{41}$$

Lien entre modulations de phase et de fréquence II

Solution

Puisque l'on souhaite
$$f(t) = f_c + k_f m(t) = f_c + \frac{k_p}{2\pi} \frac{dm'(t)}{dt} \tag{42}$$
il suffit de prendre
$$m'(t) = 2\pi \frac{k_f}{k_p} \int_0^t m(u) du \tag{43}$$
En d'autres termes, il faut intégrer le signal modulant préalablement à l'utilisation du modulateur PM !

Lien entre modulations de phase et de fréquence III



L'intégration ou la dérivation sont des opérations linéaires.
Donc, si on applique un filtre linéaire sur le signal modulant puis une PM ou FM, on a une modulation angulaire.

Illustrations pour un signal modulant sinusoïdal

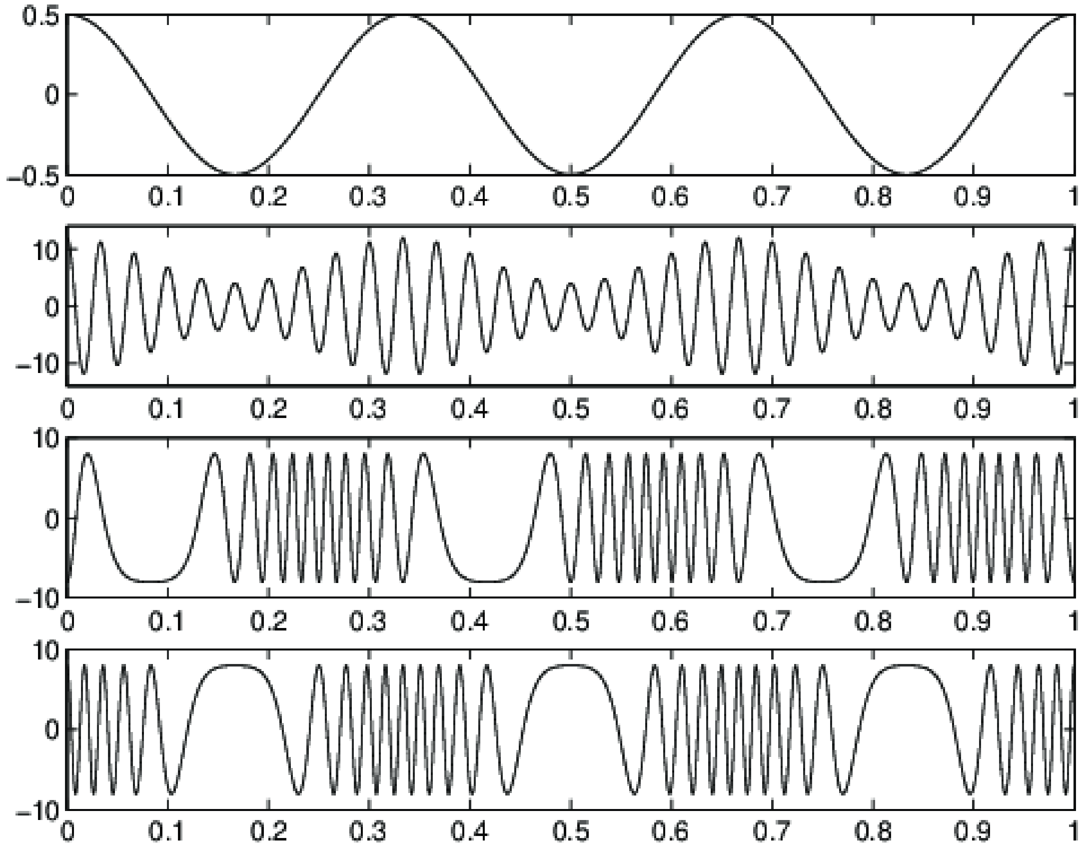


Figure – Signal modulant et signaux modulés en AM, PM et FM.

Analyse de l'occupation spectrale I

PM et FM *ne sont pas linéaires !* → difficulté pour l'analyse en fréquences.

Hypothèse : prenons le signal modulant mono-fréquence suivant :

$$m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t) \tag{44}$$

Démarche :

- on prend un signal simple. Pourquoi ?
  - il n'y a *pas d'expression analytique pour un signal modulant quelconque*
  - on arrive à une conclusion + interprétations
  - il en découle une règle empirique (**Carson**), satisfaisante
- aide à comprendre que
  - l'occupation spectrale est conditionnée par la plus haute fréquence du signal modulant
  - la largeur de bande est supérieure à celle d'une AM

Analyse de l'occupation spectrale II

Considérons le cas de :

1. une modulation FM
2. avec le signal modulant $m(t) = A_m \cos(2\pi f_m t)$:

$$\begin{aligned} f(t) &= f_c + k_f A_m \cos(2\pi f_m t) && (45)\\ &= f_c + \triangle f \cos(2\pi f_m t) && (46) \end{aligned}$$

où $\triangle f = k_f A_m$.

La phase instantanée vaut

$$\begin{aligned} \phi(t) &= 2\pi \int_0^t f(u)\,du && (47)\\ &= 2\pi f_c t + 2\pi \triangle f \int_0^t \cos(2\pi f_m u)\,du && (48)\\ &= 2\pi f_c t + \frac{\triangle f}{f_m} \sin(2\pi f_m t) && (49) \end{aligned}$$

Analyse de l'occupation spectrale III

La phase instantanée vaut donc

$$\phi(t) = 2\pi f_c t + \frac{\triangle f}{f_m} \sin(2\pi f_m t) \qquad (50)$$

L'excursion maximale de phase définit l'indice de modulation :

$$\beta = \max|\triangle\phi(t)| \qquad (51)$$

$$= \frac{\triangle f}{f_m} \qquad (52)$$

Dès lors,

$$\phi(t) = 2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t) \qquad (53)$$

Expression à comparer à une modulation de phase avec un signal modulant mono-fréquence.

Analyse de l'occupation spectrale IV

Signal modulé ($\beta = \frac{\triangle f}{f_m}$) :

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \beta \sin(2\pi f_m t)) \qquad (54)$$

Comme $\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$:

$$s(t) = A_c \cos(2\pi f_c t) \cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) - A_c \sin(2\pi f_c t) \sin(\beta \sin(2\pi f_m t))$$

Remarque connexe : au passage, cela illustre le principe général de la **décomposition de Rice**, à savoir que **tout signal modulé à bande étroite peut être décomposé comme deux signaux modulés en amplitude** :

$$s(t) = s_I(t) \cos(2\pi f_c t) - s_Q(t) \sin(2\pi f_c t) \qquad (55)$$

Il faut, à présent, un moyen d'exprimer :

- $\cos(\beta \sin(2\pi f_m t))$
- $\sin(\beta \sin(2\pi f_m t))$

Analyse de l'occupation spectrale V

Pour calculer le spectre du signal $s(t)$, en particulier $\cos(\beta \sin(2\pi f_m t))$ et $\sin(\beta \sin(2\pi f_m t))$, on recourt à la formule suivante

$$e^{j\beta \sin\psi} = J_0(\beta) + 2\sum_{k=1}^{+\infty} j^k J_k(\beta) \cos\left(k\left(\psi - \frac{\pi}{2}\right)\right) \quad (56)$$

où les $J_k(\beta)$ sont les fonctions de Bessel de première espèce, d'ordre k.
Ceci peut encore s'écrire

$$\begin{aligned} \cos(\beta \sin\psi) &= J_0(\beta) + 2J_2(\beta)\cos(2\psi) + 2J_4(\beta)\cos(4\psi) + \ldots \\ \sin(\beta \sin\psi) &= 2J_1(\beta)\sin\psi + 2J_3(\beta)\sin(3\psi) + \ldots \end{aligned} \quad (57)$$

Dès lors ($\psi = 2\pi f_m t$),

$$\begin{aligned} \cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) &= J_0(\beta) + 2J_2(\beta)\cos(2\pi(2f_m)t) + \ldots \quad (58) \\ \sin(\beta \sin(2\pi f_m t)) &= 2J_1(\beta)\sin(2\pi f_m t) + 2J_3(\beta)\sin(2\pi(3f_m)t) + \ldots \end{aligned}$$

Analyse de l'occupation spectrale VI

Comme

$$\begin{aligned} \cos(\beta \sin(2\pi f_m t)) &= J_0(\beta) + 2J_2(\beta)\cos(2\pi(2f_m)t) + \ldots \quad (59) \\ \sin(\beta \sin(2\pi f_m t)) &= 2J_1(\beta)\sin(2\pi f_m t) + 2J_3(\beta)\sin(2\pi(3f_m)t) + \ldots \end{aligned}$$

On a que $A_c \cos(2\pi f_c t) \cos(\beta \sin(2\pi f_m t))$ devient $(\cos a \cos b = \frac{1}{2}\cos(a+b) + \frac{1}{2}\cos(a-b))$:

$$\begin{aligned} & A_c J_0(\beta)\cos(2\pi f_c t) + A_c J_2(\beta)\cos(2\pi(f_c + 2f_m)t) \quad (60) \\ & + A_c J_2(\beta)\cos(2\pi(f_c - 2f_m)t) + \ldots \quad (61) \end{aligned}$$

De même, $-A_c \sin(2\pi f_c t)\sin(\beta \sin(2\pi f_m t))$ devient $(\sin a \sin b = \frac{1}{2}\cos(a-b) - \frac{1}{2}\cos(a+b))$:

$$-A_c J_1(\beta)\cos(2\pi(f_c - f_m)t) + A_c J_1(\beta)\cos(2\pi(f_c + f_m)t) + \ldots \quad (62)$$

Comme $J_{2i}(\beta) = J_{-2i}(\beta)$ et $J_{2i+1}(\beta) = -J_{-(2i+1)}(\beta)$,

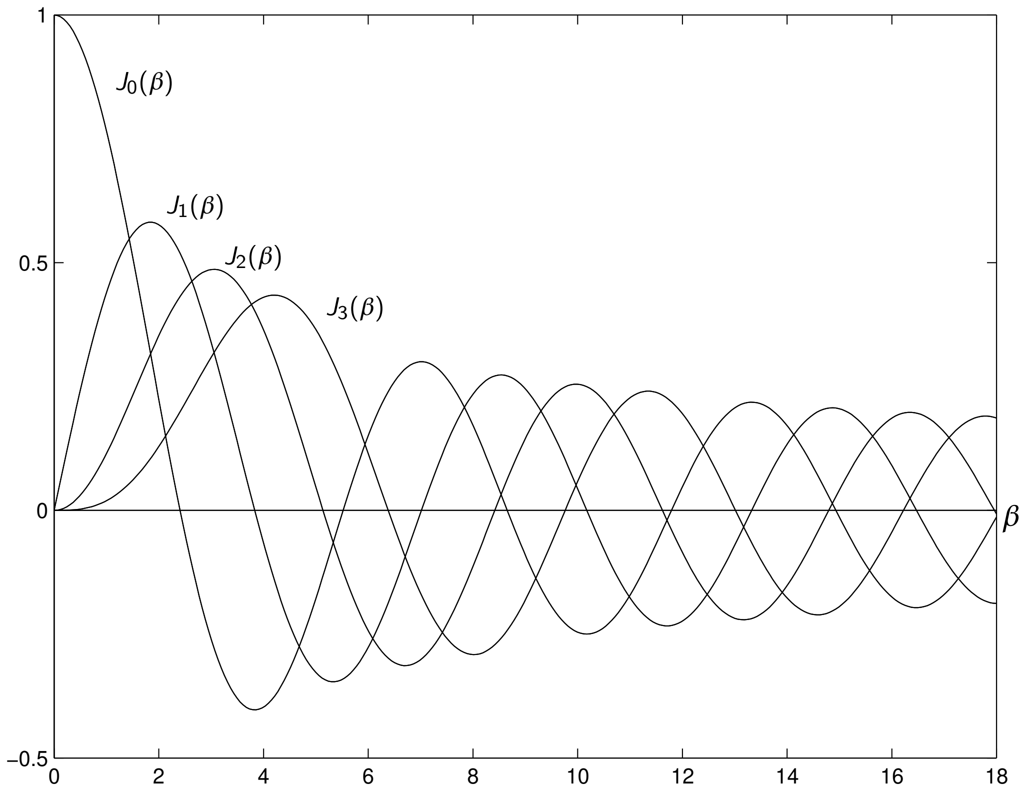
$$\boxed{s(t) = A_c \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) \cos(2\pi(f_c + nf_m)t) \qquad (63)}$$

Spectre

$$\boxed{\mathscr{S}(f) = \frac{A_c}{2} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} J_n(\beta) [\delta(f - f_c - nf_m) + \delta(f + f_c + nf_m)] \qquad (64)}$$

Il s'agit d'un spectre :

- centré sur la fréquence de la porteuse f_c
- infini
- composé de raies équi-espacées de f_m
- avec une composante "continue" d'amplitude $A_c J_0(\beta)$ (*résidu de porteuse*).



Spectre FM

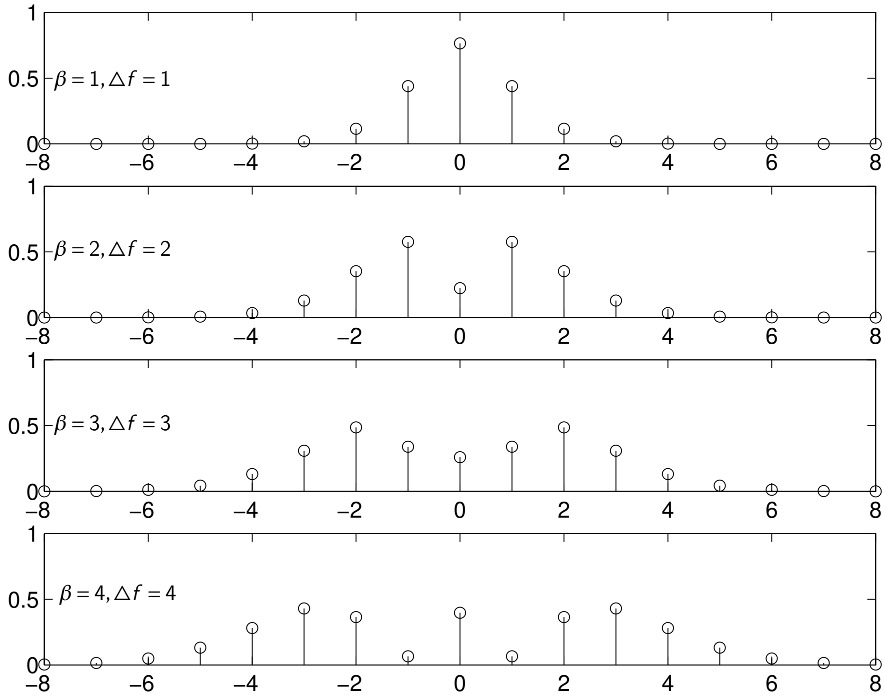


Figure – Spectre d'un signal FM ($f_m = 1$, β variable), centré sur $f_c \equiv$ indice 0.

Bande passante requise

Estimation empirique

[Règle de Carson] La bande passante requise est

$$\boxed{B \simeq 2\left(\triangle f + f_m\right) = 2\left(1+\beta\right) f_m} \quad (65)$$

où f_m correspond à la plus haute composante fréquentielle non nulle du signal modulant.

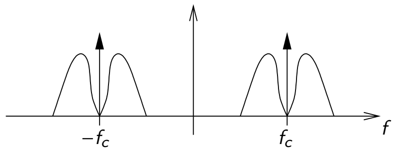
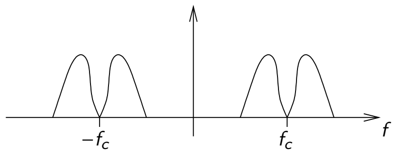
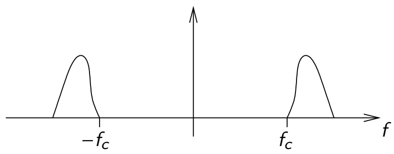
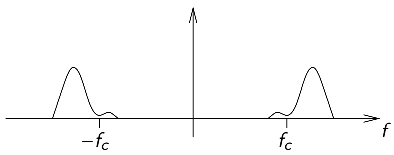
Exception :

- Pour une modulation à faible indice (par exemple $\beta < 0,5$), $J_1(\beta) \approx \beta$ et $J_{i>1}(\beta) \approx 0$, d'où

$$B \simeq 2f_m \quad (66)$$

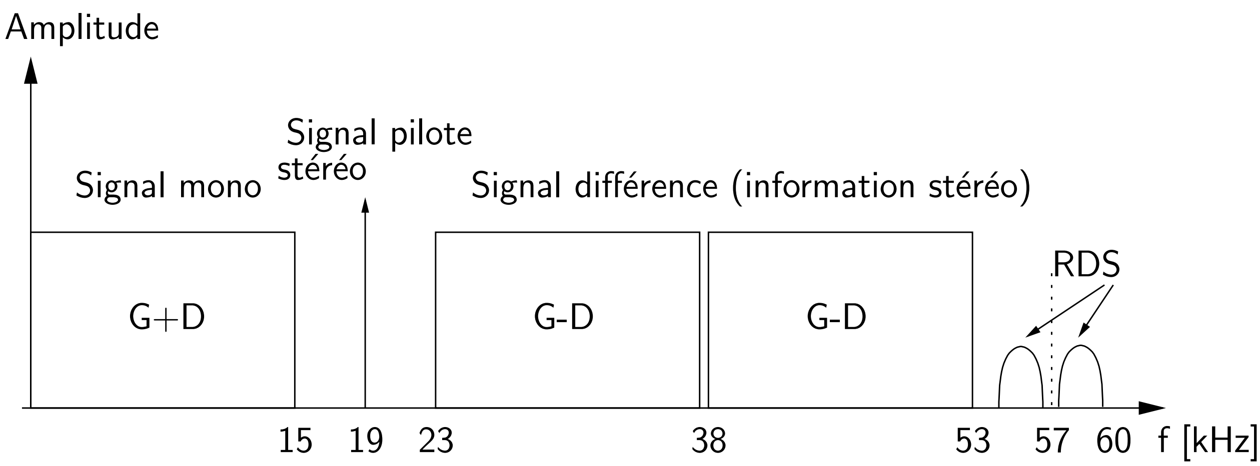
Estimation numérique

Tableau récapitulatif des modulations d'onde continue

	$s(t)$	$\lVert\mathscr{S}(f)\rVert$	BP
AM classique	$A_c(1+k_a m(t))\cos(2\pi f_c t)$		$2W$
DSB-SC	$A_c m(t)\cos(2\pi f_c t)$		$2W$
QAM	$A_c m_1(t)\cos(2\pi f_c t)$ $+A_c m_2(t)\sin(2\pi f_c t)$		$2W$
SSB			W
VSB			$(1+\alpha)$ W
FM	$A_c\cos(2\pi f_c t+$ $2\pi k_f\int_0^t m(\tau)d\tau)$		$2(\Delta f$ $+W)$

Exemple de modulation FM : radiodiffusion FM

- bande de fréquences dédiée : $80-108\,[MHz]$.
- excursion de fréquences maximale : $\triangle f = 75\,[kHz]$ (fixée par une loi)
- Signal composite $(B \approx 2(\triangle f + f_m))$:



Multiplexage en fréquence

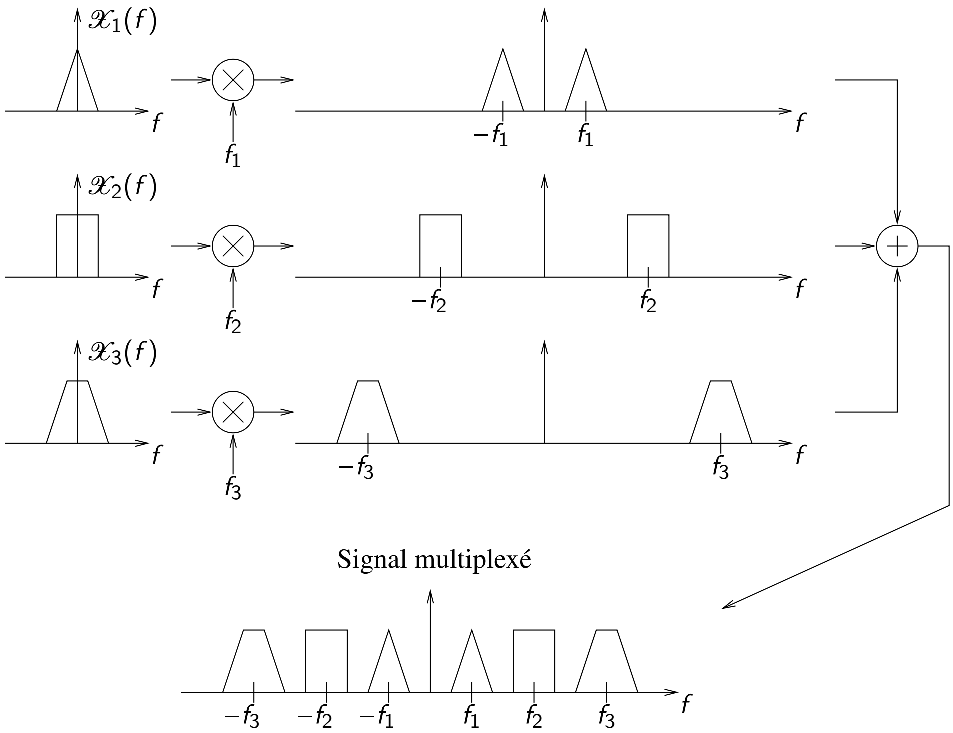


Figure – Principe du multiplexage en fréquence.

Démultiplexage en fréquence

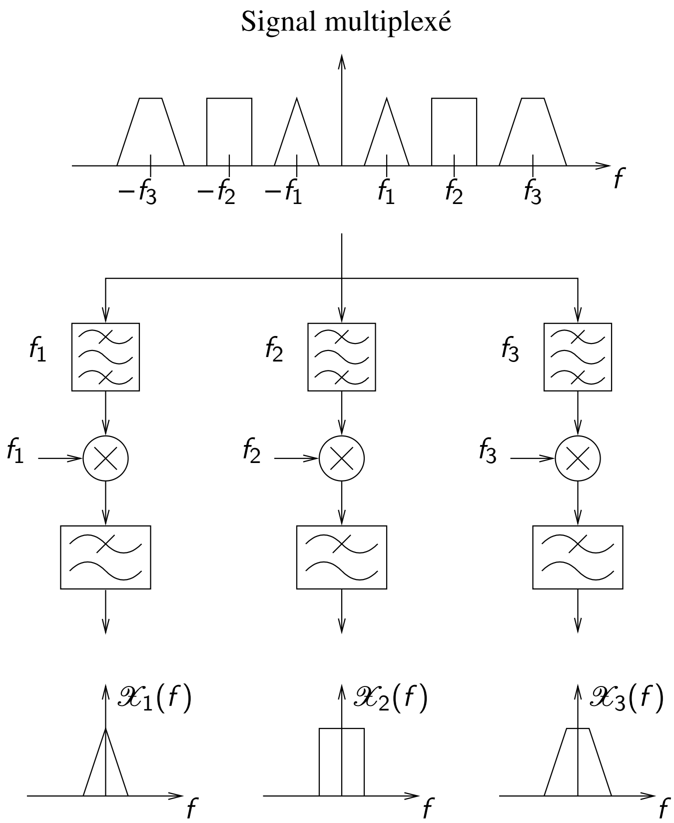
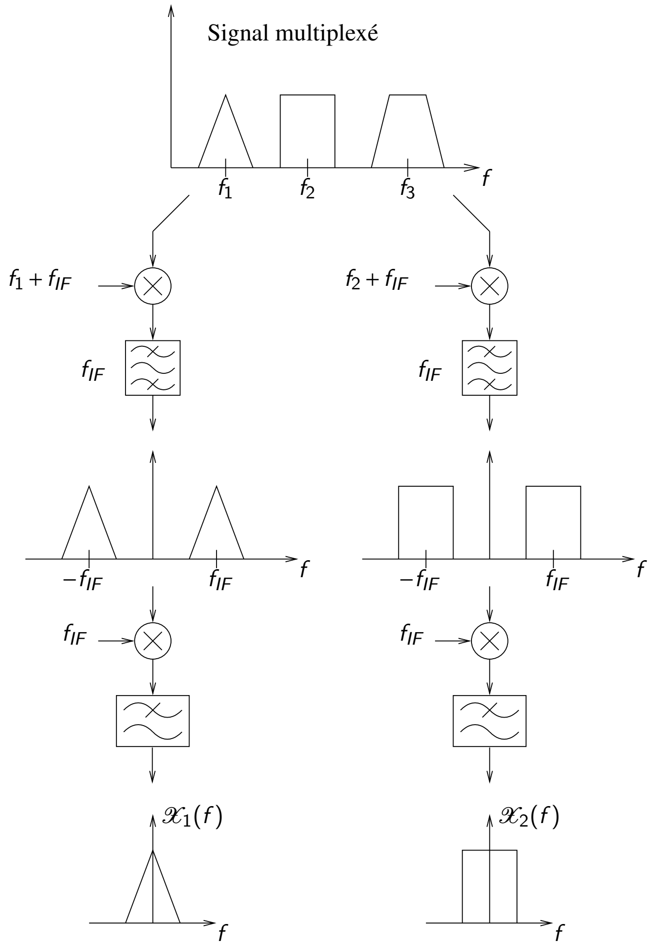


Figure – Principe du démultiplexage en fréquence.

Récepteur super-hétérodyne



Introduction à la modulation numérique

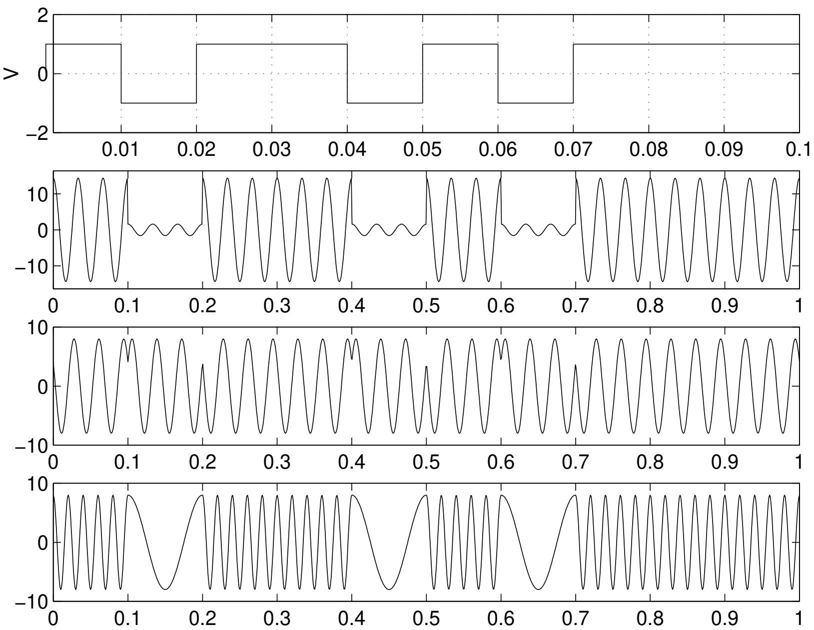


Figure – Signal modulant numérique et signaux modulés respectivement en AM, PM et FM.

Rappel : il existe *plusieurs représentations* analogiques pour un *même signal* d'information.

Table des matières

Variables aléatoires, processus stochastiques et bruit

- Théorie des probabilités
  - Théorème de Bayes
- Variables aléatoires
  - Fonction de distribution et densité de probabilité
  - Exemples de densité de probabilité
  - Moments d'une variable aléatoire
  - Plusieurs variables aléatoires
- Processus stochastiques
  - Moments
  - Stationnarité
  - Ergodicité
  - Densité spectrale de puissance
- Processus stochastiques et systèmes
- Modélisation du bruit

Des probabilités et processus stochastiques : pour faire quoi ? I

- décrire un canal (canal gaussien, loi de Rayleigh pour les effets de multi-trajet, information mutuelle)
- décrire un signal numérique à l'émission ou à la réception (densité spectrale de puissance)
- décrire l'information apportée par une source : notion d'entropie (basée sur les probabilités)
- caractériser des aspects système. Par exemple, la loi Erlang B pour caractériser le trafic.

Des probabilités et processus stochastiques : pour faire quoi ? II

Problèmes typiques à résoudre :

- Caractériser des événements
- Somme : 3 cas de figure
  - 2 signaux déterministes : $m(t) + n(t)$
  - 1 signal déterministe et 1 processus stochastique : $m(t) + N(t)$
  - 2 processus stochastiques : $M(t) + N(t)$
- Mélangeur/modulateur : $X(t)\cos(2\pi f_c t)$
- Passage d'un signal $X(t)$ au travers d'un filtre linéaire de réponse impulsionnelle $h(t)$
- Modélisation du bruit $N(t)$
- Mesures

Rappel

	Émetteur	Récepteur
Signal utile	déterministe	*aléatoire*
Bruit et interférences	*aléatoire*	*aléatoire*

Table – Nature des signaux dans une chaîne de télécommunications.

On peut aisément "qualifier" un signal déterministe $s(t)$. Par exemple, au moyen de la *puissance instantanée*, $p(t) = s^2(t)$ ou l'*énergie* $\int_0^t p(t)dt$.

Mais que faire pour un signal non connu (aléatoire) ?

Un cadre pour pouvoir parler de probabilités : espace probabilisé

Un *espace probabilisé* consiste en :

1. Un espace témoin Ω d'événements élémentaires.
2. Une classe $\mathscr{L}$ d'événements qui sont des sous-ensembles de Ω.
3. Une *mesure de la probabilité $p(.)$* associée à chaque événement A_i de la classe $\mathscr{L}$ et qui a les propriétés suivantes :
    1. $p(\Omega) = 1$
    2. $0 \leq p(A_i) \leq 1$
    3. Si la suite $A_{n\in\mathbb{N}} \in \mathscr{F}$ avec $A_i \cap A_j = \emptyset$ pour $i \neq j$ alors

$$p(\bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n) = \sum_{n\in\mathbb{N}} p(A_n) \tag{67}$$

Il est crucial de bien définir de quoi on parle, c'est-à-dire d'expliquer ce que les A_i représentent

Probabilité conditionnelle I

On veut pouvoir traiter plusieurs événements de nature différente. Par exemple, on injecte un symbole dans un canal (0 ou 1) et, à la sortie, on récupère un symbole (0, 1 ou autre chose).

Une manière d'établir un lien consiste à utiliser la notion suivante :

Définition (Probabilité conditionnelle)

$p(B|A)$ est appelée *probabilité conditionnelle*. Elle représente la probabilité de l'événement B, étant donné que l'événement A s'est réalisé. En supposant que $p(A) \neq 0$, la probabilité conditionnelle $p(B|A)$ est définie par

$$p(B|A) = \frac{p(A \cap B)}{p(A)} \tag{68}$$

où $p(A \cap B)$ est la probabilité conjointe de A et B.

Probabilité conditionnelle II

Propriétés :

$$p(A \cap B) = p(B|A)p(A) \tag{69}$$

$$p(B|A)p(A) = p(A|B)p(B) \tag{70}$$

Théorie de Bayes I

Si A_j sont des événements disjoints, tels que $\bigcup_j A_j = A$ et $\sum_{j=1}^{N} p(A_j) = 1$, alors

$$p(B) = \sum_{j=1}^{N} p(B|A_j)p(A_j) \tag{71}$$

Théorème (Formule de Bayes)

$$p(A_i|B) = \frac{p(B|A_i)p(A_i)}{\sum_{j=1}^{N} p(B|A_j)p(A_j)} \tag{72}$$

Théorème

Forme simplifiée du théorème de Bayes

$$p(A|B) = \frac{p(B|A)p(A)}{p(B)} \tag{73}$$

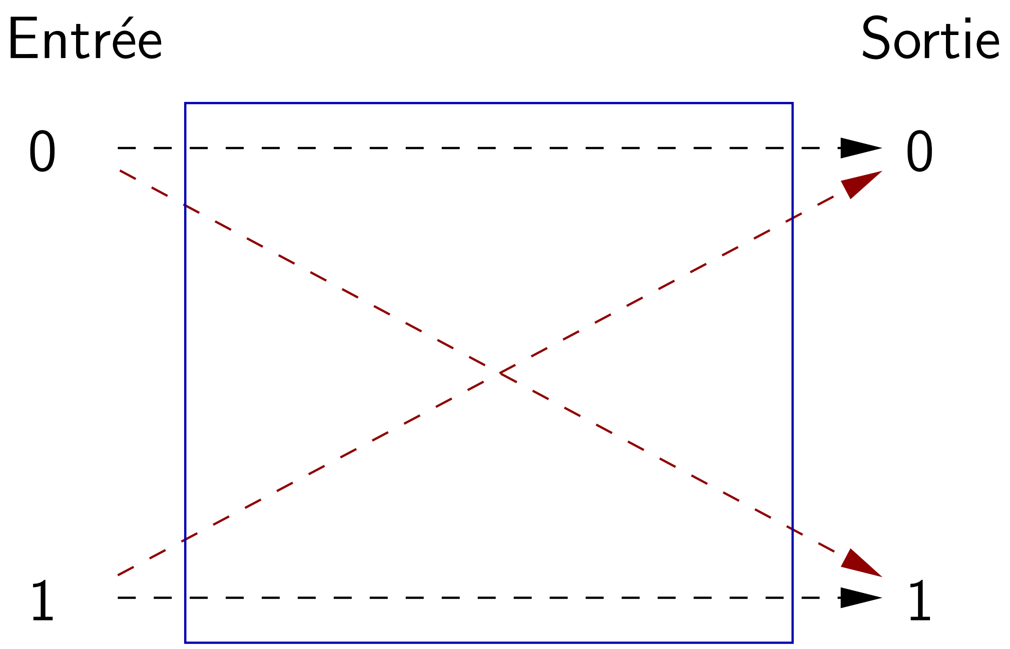
Théorie de Bayes II

Interprétation :

- B représente une observation.
- $p(A)$ est la probabilité *a priori* ("*prior*").
- $p(A|B)$ est la probabilité *a posteriori*.

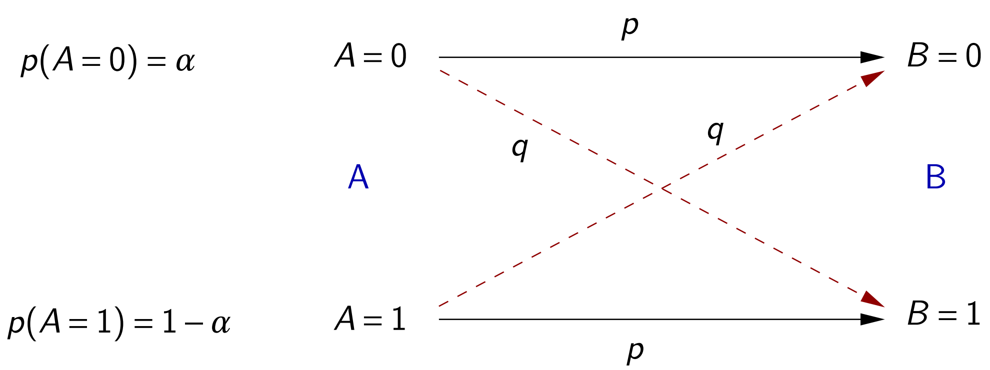
Le théorème permet donc le calcul des probabilités *a posteriori* $p(A|B)$ en terme de probabilités *a priori* $p(A)$ et de probabilités conditionnelles de transition $p(B|A)$.

Illustration du théorème de Bayes : canal symétrique I



Canal de transmission

Illustration du théorème de Bayes : canal symétrique II



- A est le signal *envoyé*, B est le signal *reçu* (observé).
- si on reçoit $B = 0$, on utilise la règle suivante pour "deviner" (estimer) quel signal A a été envoyé :
  - règle : $A \leftarrow 0$ si $p(A = 0|B = 0) > p(A = 1|B = 0)$, sinon on déduit que c'est $A \leftarrow 1$ qui a été envoyé.
  - ce "classificateur" qui choisit l'événement qui correspond à $\max_{i \in I} p(A = i|B)$ est le classificateur de Bayes.
- on calculera la probabilité d'erreur q, notée P_e, plus loin dans le cours.

Variables aléatoires I

Si on fait

- un espace témoin, composé d'événements
- + des probabilités associées aux événements
- + des valeurs associées (nombres réels) aux événements

on obtient une variable aléatoire X.

Définition (Variable aléatoire)

Une *variable aléatoire* est une fonction dont le domaine est l'espace témoin d'une expérience aléatoire et dont la valeur est un nombre réel.

Variables aléatoires II

Remarques :

Il n'est pas toujours possible (voire utile) d'associer une variable aléatoire à un espace probabilisé.
Exemple : espace probabilisé {être un homme, être une femme}.

Une variable aléatoire peut être :

1. **discrète**.
   Exemple : la tension émise sur un câble Ethernet vaut 0 [V] ou 5 [V].
2. **continue**.
   Exemple : la tension mesurée à la sortie d'un canal de transmission bruité.

Comment caractériser une variable aléatoire ?

Définition (Fonction de répartition)

La *fonction de distribution cumulative*, encore appelée *fonction de distribution* ou *fonction de répartition*, d'une variable aléatoire X est définie par

$$F_X(x) = p(X \leq x) \tag{74}$$

Définition (Densité de probabilité (*pdf*))

La fonction de *densité de probabilité* (*probability density function, pdf*) d'une variable aléatoire X est définie par

$$pdf_X(x) = \frac{dF_X(x)}{dx} \tag{75}$$

Remarque : pour des variables aléatoires discrètes, il faut affiner ces définitions (au moyen de la théorie des distributions par exemple).

Comme on n'a pas toujours accès à la densité de probabilité, on calcule souvent les *moments*.

Définition

Le n-ième moment de la variable aléatoire X est défini par

$$\mu_{X^n} = E\{X^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, \mathrm{pdf}_X(x)\, dx \tag{76}$$

où E désigne l'opérateur d'espérance mathématique.

Définition (Espérance)

$$\mu_X = E\{X\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \, \mathrm{pdf}_X(x)\, dx \tag{77}$$

μ_X est appelée *espérance* ou *moyenne* de la variable aléatoire X.

Moments d'une variable aléatoire II

Remarque : l'espérance d'une variable aléatoire discrète correspond rarement à une valeur de la valeur aléatoire.
Exemple : la moyenne pour la tension sur le câble Ethernet est comprise dans l'intervalle $]0,5[$ [V].

Définition

Le n-ième moment *centré* de la variable aléatoire X est défini par

$$E\{(X-\mu_X)^n\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^n \,\mathrm{pdf}_X(x)\, dx \tag{78}$$

Variance

Définition (Variance)

$$\sigma_X^2 = E\left\{(X-\mu_X)^2\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} (x-\mu_X)^2 \,\mathrm{pdf}_X(x)\, dx \tag{79}$$

La variance est liée à la puissance du signal.
Par ailleurs,

$$\sigma_X^2 = E\left\{(X-\mu_X)^2\right\} = E\left\{X^2\right\} - 2E\{X\}\mu_X + \mu_X^2 = E\left\{X^2\right\} - \mu_X^2 \tag{80}$$

Théorème (Chebyshev)

Si Y est une variable aléatoire positive, alors

$$\forall \varepsilon > 0 \quad p(|X-\mu_X| \geq \varepsilon) \leq \frac{\sigma_X^2}{\varepsilon^2} \tag{81}$$

La valeur des moments est très souvent calculable et mesurable.

Variable aléatoire *uniformément distribuée*

Une variable aléatoire uniforme (ou uniformément distribuée), $\mathscr{U}$, est une variable aléatoire dont la densité de probabilité (pdf) est

$$\mathrm{pdf}_{\mathscr{U}}(u) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{si } \; u \in [a,b] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{82}$$

où a et b sont des réels.

Propriétés

- Moyenne

$$\mu_X = \frac{a+b}{2} \tag{83}$$

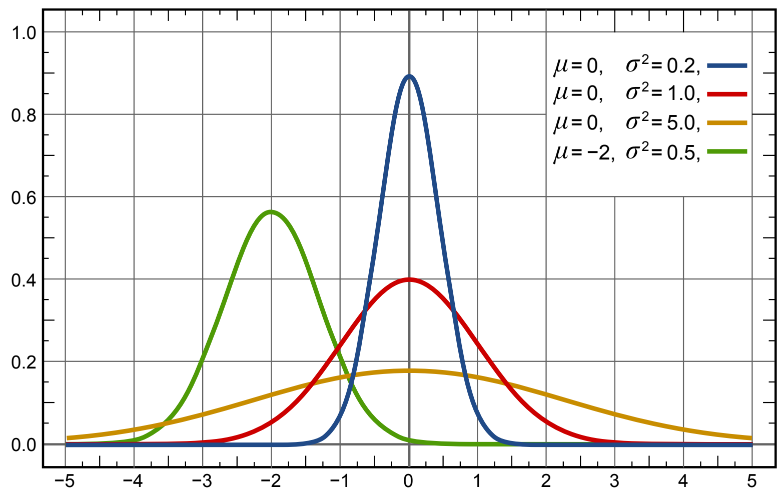
- Variance

$$\sigma_X^2 = \frac{(b-a)^2}{12} \tag{84}$$

Variable aléatoire *gaussienne* ou *normale* I

Soit X une variable aléatoire de moyenne μ_X et de variance σ_X^2. Cette variable présente une densité de probabilité gaussienne ou normale si, pour $-\infty < x < +\infty$, elle a la forme

$$\mathrm{pdf}_X(x) = \frac{1}{\sigma_X\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu_X)^2}{2\sigma_X^2}} \tag{85}$$



Variable aléatoire *gaussienne* ou *normale* II

Théorème (central limite)

Soit $X_1, X_2, \ldots$ une suite de variables aléatoires réelles définies sur le même espace de probabilité, indépendantes et identiquement distribuées (suivant la même loi D). Supposons que l'espérance μ et l'écart-type σ de D existent et soient finis avec $\sigma \neq 0$.
Considérons la somme

$$S_n = X_1 + X_2 + \ldots + X_n \tag{86}$$

Alors l'espérance de S_n est $n\mu$ et son écart-type vaut $\sigma\sqrt{n}$.
De plus, quand n est assez grand, la loi normale $\mathcal{N}(n\mu, n\sigma^2)$ est une bonne approximation de la loi de S_n.

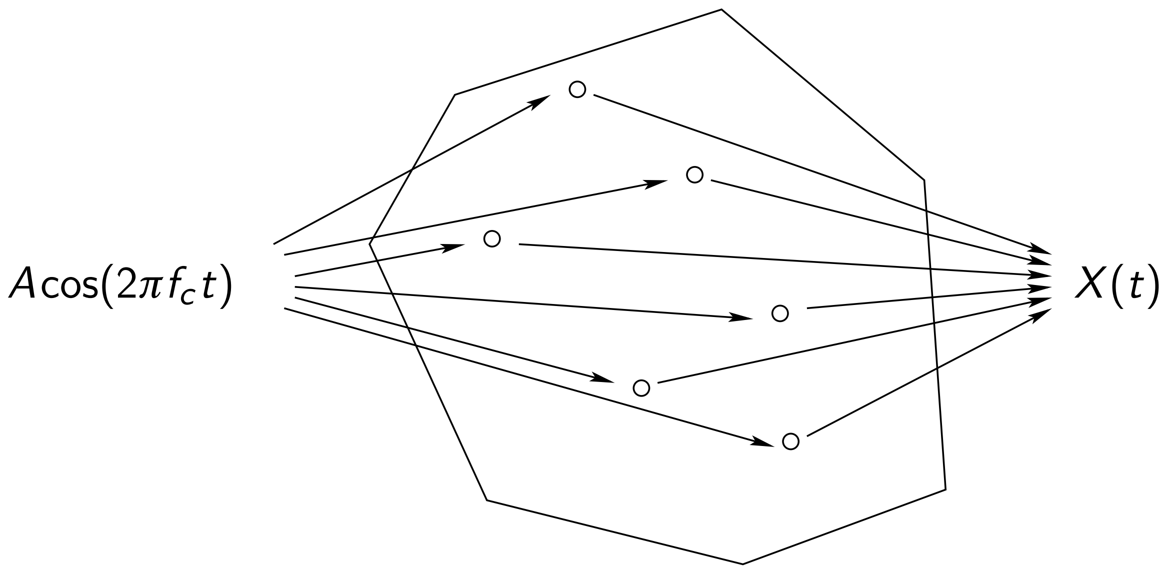
Variable aléatoire *gaussienne* ou *normale* III

Quelques propriétés :

- **Stabilité par additivité**
  La somme de deux variables aléatoires indépendantes de lois normales est elle-même une variable aléatoire de loi normale.
  Plus explicitement : si $X_1 \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$, $X_2 \sim \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ et X_1, X_2 sont indépendantes, alors la variable aléatoire $X_1 + X_2$ suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu_1 + \mu_2, \sigma_1^2 + \sigma_2^2)$.
- **Stabilité par linéarité**
  Si $\alpha \geq 0$ et β sont deux réels et $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$, alors la variable aléatoire $\alpha X + \beta$ suit la loi normale $X \sim \mathcal{N}(\alpha\mu + \beta, \alpha^2\sigma^2)$.
- **Stabilité par moyenne**
  Si $X_1, X_2, \ldots, X_n$ sont des variables aléatoires indépendantes suivant respectivement les lois normales
  $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2), \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2), \ldots, \mathcal{N}(\mu_n, \sigma_n^2)$, alors la moyenne
  $\frac{1}{n}(X_1 + X_2 + \ldots + X_n)$ suit la loi $\mathcal{N}\left(\frac{\mu_1+\mu_2+\ldots+\mu_n}{n}, \frac{\sigma_1^2+\sigma_2^2+\ldots.+\sigma_n^2}{n^2}\right)$.

Loi de Rayleigh I

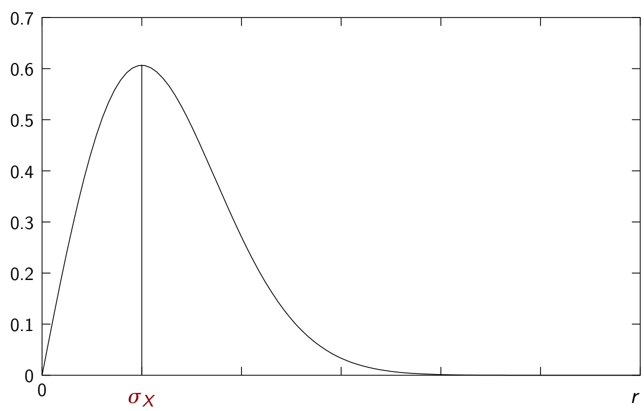
En présence de trajets multiples, plusieurs composantes arrivent au droit du récepteur.



Loi de Rayleigh II

La loi de Rayleigh, qui caractérise l'amplitude R du signal reçu $X(t)$ en l'absence de trajet direct, a une pdf de la forme suivante :

$$\text{pdf}_R(r) = \begin{cases} \frac{r}{\sigma_X^2} e^{-\frac{r^2}{2\sigma_X^2}}, & r \geq 0 \\ 0 & r < 0 \end{cases} \tag{87}$$



Cas de plusieurs variables aléatoires

Définition

La *fonction de répartition conjointe* $F_{X,Y}(x,y)$ est définie par

$$F_{X,Y}(x,y) = p(X \leq x,\, Y \leq y) \tag{88}$$

c'est-à-dire que la fonction de répartition conjointe de X et Y est égale à la probabilité que la variable X *et* la variable Y soient respectivement inférieures aux valeurs x et y.

Définition

La *fonction de densité de probabilité conjointe* $\text{pdf}_{X,Y}(x,y)$ est définie par

$$\text{pdf}_{X,Y}(x,y) = \frac{\partial^2 F_{X,Y}(x,y)}{\partial x \partial y} \tag{89}$$

Moments de plusieurs variables aléatoires

Définition (Corrélation)

La corrélation de deux variables aléatoires X et Y est définie par

$$\rho = E\{XY\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} x\, y\, \text{pdf}_{X,Y}(x,y)\, dxdy \tag{90}$$

Définition (Covariance)

La *covariance* de deux variables aléatoires X et Y est définie par

$$C_{XY}(x,y) = E\{(X - \mu_X)(Y - \mu_Y)\} \tag{91}$$

$$= E\{XY\} - \mu_X \mu_Y \tag{92}$$

Probabilité conditionnelle et indépendance I

Définition

La fonction de *densité de probabilité conditionnelle* de la variable Y, étant donné que $X = x$, est définie par

$$\mathrm{pdf}_Y(y|x) = \frac{\mathrm{pdf}_{X,Y}(x,y)}{\mathrm{pdf}_X(x)} \tag{93}$$

où nous avons supposé que X et Y sont deux variables aléatoires continues et $\mathrm{pdf}_X(x)$ est la *densité marginale* de X.

Probabilité conditionnelle et indépendance II

Théorème (Indépendance)

Si X et Y sont indépendantes, la connaissance du résultat de X n'affecte pas la densité de probabilité de Y et nous pouvons écrire

$$pdf_Y(y|x) = pdf_Y(y) \tag{94}$$

Et dès lors,

$$pdf_{X,Y}(x,y) = pdf_X(x)\, pdf_Y(y) \tag{95}$$

Exemple

Si X est un signal et N représente le bruit, il est usuel que ces deux signaux soient indépendants : $\mathrm{pdf}_{X,N}(x,n) = \mathrm{pdf}_X(x)\,\mathrm{pdf}_N(n)$. Dès lors,

$$\begin{aligned} C_{XN}(x,n) &= E\{(X-\mu_X)(N-\mu_N)\} && (96) \\ &= E\{XN\} - E\{X\}\mu_N - \mu_X E\{N\} + \mu_X\mu_N && (97) \\ &= E\{X\}E\{N\} - \mu_X\mu_N = 0 && (98) \end{aligned}$$

Probabilité conditionnelle et indépendance III

Définition

Par définition, les variables aléatoires X et Y sont dites

$$\text{non-corrélées} \iff C_{XY}(x,y) = 0 \tag{99}$$

$$\text{orthogonales} \iff E\{XY\} = 0 \tag{100}$$

Attention, *l'indépendance entraîne la non-corrélation*. L'inverse n'est pas vrai.

Somme de variables aléatoires

Théorème (Somme de deux variables aléatoires indépendantes)

$$pdf_{X+Y}(z) = pdf_X \otimes pdf_Y(z) \tag{101}$$

Solutions plus "pragmatiques :

Théorème (Espérance d'une somme)

$$\mu_{X+Y} = E\{X+Y\} = E\{X\} + E\{Y\} \tag{102}$$

Théorème (Variance d'une somme)

$$\sigma^2_{X+Y} = E\left\{(X+Y-\mu_{X+Y})^2\right\} = \sigma^2_X + \sigma^2_Y + 2C_{XY}(x,y) \tag{103}$$

Processus stochastiques I

Si on fait

- un espace témoin, composé d'événements
- + des probabilités associées aux événements
- + des valeurs associées (nombres réels) aux événements
- + le paramètre "temps" t

on obtient un processus stochastique (ou aléatoire) : $X(t)$

Comment caractériser un processus stochastique ?

Processus stochastiques II

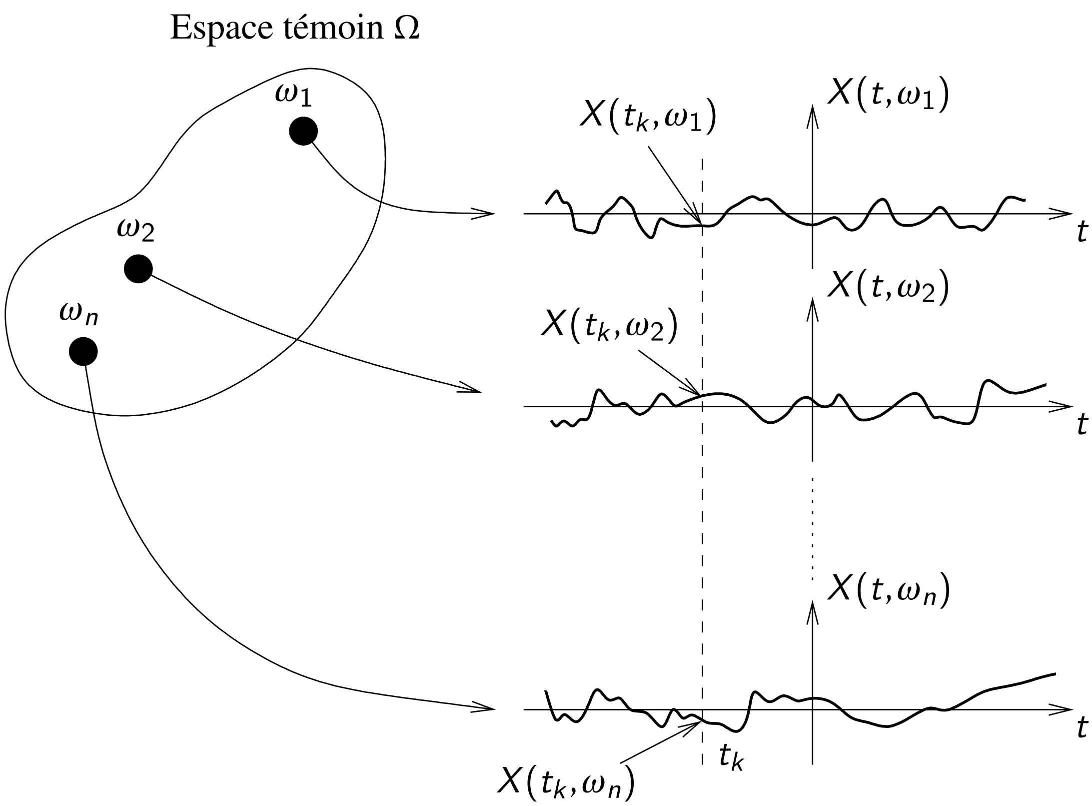


Figure – Un ensemble de réalisations du processus aléatoire $X(t)$.

En fait, on a 2 axes d'analyse :

- (1) si le temps est figé, par exemple on choisit $t = t_1$, alors $X(t_1)$ est une variable aléatoire. Cette variable aléatoire et toutes ses caractéristiques sont fonction du moment choisi.
- (2) on se concentre sur une observation ($\equiv$ réalisation du processus stochastique sous-jacent) $x(t)$. Il n'y a pas de notion de variable aléatoire dans ce cas. L'avantage ici est que $x(t)$ est mesurable directement.

Il serait souhaitable d'établir un pont entre (1) la ou les variables aléatoires pour des instants figés et (2) les observations.
Cela se fait en parlant de *stationnarité* et *d'ergodisme* (aussi appelé *ergodicité*).

Définition

La *moyenne temporelle* d'un processus aléatoire $X(t)$ est définie par

$$\mu_X(T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t)dt \tag{104}$$

où $x(t)$ est une réalisation du processus aléatoire.

Définition

La *fonction d'autocorrélation temporelle* d'un processus aléatoire $X(t)$ est définie par

$$\Gamma_{XX}(\tau, T) = \frac{1}{2T}\int_{-T}^{T} x(t+\tau)x(t)dt \tag{105}$$

où $x(t)$ est une réalisation du processus aléatoire.

Moments statistiques I

Définition

La *moyenne* d'un processus aléatoire $X(t)$ observé au temps t est définie par

$$\mu_X(t) = E\{X(t)\} = \int_{-\infty}^{+\infty} x \mathrm{pdf}_{X(t)}(x)\,dx \qquad (106)$$

où $f_{X(t)}(x)$ est la fonction de densité de probabilité du premier ordre du processus aléatoire $X(t)$.

Pour t fixé, $X(t)$ est une *variable aléatoire*.

Moments statistiques II

Définition

La *fonction d'autocorrélation* d'un processus aléatoire $X(t)$ est définie par

$$\begin{aligned}\Gamma_{XX}(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)X(t_2)\} \qquad (107)\\ &= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x_1 x_2 \,\mathrm{pdf}_{X(t_1),X(t_2)}(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2\end{aligned}$$

Stationnarité

Deux formes :

- stationnarité au sens *strict*
- stationnarité au sens *large* (dite du second ordre)

Stationnarité au sens strict
Le processus aléatoire $X(t)$ sera dit *stationnaire au sens strict* si

$$\mathrm{pdf}_{X(t_1),X(t_2),\dots,X(t_k)}(x_1, x_2, \dots, x_k) = \tag{108}$$
$$\mathrm{pdf}_{X(t_1+\tau),X(t_2+\tau),\dots,X(t_k+\tau)}(x_1, x_2, \dots, x_k) \tag{109}$$

pour tout τ, tout k et tous les choix possibles de temps d'observation $t_1, t_2, \dots, t_k$.

Définition (Stationnarité au sens strict)

Un processus aléatoire est *stationnaire au sens strict* si ses caractéristiques probabilistes sont invariantes pour tout changement de l'origine des temps.

Stationnarité au sens large (dite du second ordre)

On a rarement accès à une description probabiliste complète d'un processus stochastique ⇒ il faut une alternative, plus simple mais suffisante, à la notion de stationnarité au sens strict.

Définition (Stationnarité au sens large)

Un processus aléatoire est *stationnaire au sens large* s'il vérifie les deux conditions (nécessaires !) suivantes

1. Sa moyenne est indépendante du temps.

$$\mu_X(t) = \mu_X \quad \forall t \tag{110}$$

2. Sa fonction d'autocorrélation ne dépend que de la différence entre les temps d'observation.

$$\Gamma_{XX}(t_1, t_2) = \Gamma_{XX}(t_2 - t_1) \quad \forall t_1, t_2 \tag{111}$$

Fonction d'autocorrélation d'un processus aléatoire stationnaire au sens large

Fonction d'autocorrélation d'un processus **stationnaire** $X(t)$:

$$\Gamma_{XX}(\tau) = E\{X(t+\tau)X(t)\} \quad \forall t \tag{112}$$

Propriétés importantes :

1. La moyenne du carré du processus aléatoire peut être obtenue simplement en posant $\tau = 0$:
$$\Gamma_{XX}(\tau = 0) = E\left\{X^2(t)\right\} \tag{113}$$
2. La fonction d'autocorrélation $\Gamma_{XX}(\tau)$ est une fonction paire de τ :
$$\Gamma_{XX}(\tau) = \Gamma_{XX}(-\tau) \tag{114}$$
3. La fonction d'autocorrélation $\Gamma_{XX}(\tau)$ présente son amplitude maximum en $\tau = 0$:
$$\left|\Gamma_{XX}(\tau)\right| \leq \Gamma_{XX}(0) \tag{115}$$

Ergodisme

Un processus est *ergodique à l'ordre n* si les moyennes temporelles jusqu'à l'ordre n sont indépendantes du choix de la réalisation. Si le processus est ergodique à tout ordre, on dit qu'il est ergodique au sens strict.

Définition

Un processus aléatoire stationnaire $X(t)$ est dit *ergodique dans la moyenne* si :
(1) la moyenne temporelle $\mu_X(T)$ tend vers la moyenne statistique μ_X lorsque l'intervalle d'observation $2T$ tend vers l'infini, c'est-à-dire

$$\lim_{T\to\infty} \mu_X(T) = \mu_X \tag{116}$$

(2) la variance de la variable aléatoire $\mu_X(T)$ tend vers zéro lorsque l'intervalle d'observation $2T$ tend vers l'infini, c'est-à-dire

$$\lim_{T\to\infty} var\{\mu_X(T)\} = 0 \tag{117}$$

Densité spectrale de puissance I

Définition (Densité spectrale de puissance, *power spectral density*)

La *densité spectrale de puissance* $\gamma_X(f)$ d'un processus aléatoire stationnaire $X(t)$ est la transformée de Fourier de sa fonction d'autocorrélation $\Gamma_{XX}(\tau)$:

$$\gamma_X(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{XX}(\tau) e^{-2\pi j f \tau} d\tau \qquad (118)$$

Connue, elle permet de calculer la fonction d'autocorrélation :

$$\Gamma_{XX}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_X(f) e^{2\pi j f \tau} df \qquad (119)$$

Propriété

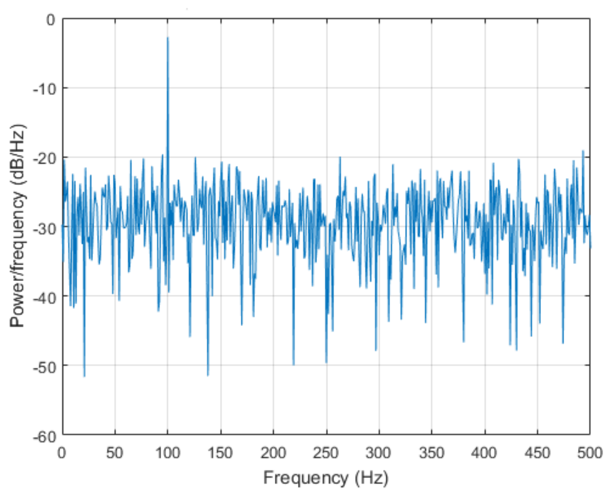
$$\gamma_X(0) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Gamma_{XX}(\tau) d\tau \qquad (120)$$

Densité spectrale de puissance II

Propriété : la densité spectrale de puissance représente la répartition fréquentielle de la moyenne de la puissance instantanée

$$P = E\left\{X^2(t)\right\} = \Gamma_{XX}(\tau = \mathbf{0}) = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_X(f) e^{2\pi j f \mathbf{0}} df = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_X(f) df \qquad (121)$$

Une densité spectrale $\gamma_X(f)$ s'exprime donc en $\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{Hz}}$!



Exemple : onde sinusoïdale avec phase aléatoire I

Considérons un signal sinusoïdal avec une phase aléatoire Θ uniformément distribuée sur $[0, 2\pi]$: $\text{pdf}_{\Theta}(\theta) = \frac{1}{2\pi}$ pour $\theta \in [0, 2\pi]$

$$X(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \Theta) \tag{122}$$

1. *Moyenne* statistique du processus aléatoire $X(t)$?

$$\mu_X(t) = E\{X(t)\} = \int_0^{2\pi} A_c \cos(2\pi f_c t + \theta) \frac{1}{2\pi} d\theta = 0 \tag{123}$$

La première condition pour obtenir un processus stationnaire au sens large est remplie.

Exemple : onde sinusoïdale avec phase aléatoire II

2. *Fonction d'autocorrélation* et *densité spectrale* ?

$$\begin{aligned}
\Gamma_{XX}(t_1, t_2) &= E\{X(t_1)X(t_2)\} && (124)\\
&= E\{A_c \cos(2\pi f_c t_1 + \Theta) A_c \cos(2\pi f_c t_2 + \Theta)\} && (125)\\
&= \frac{A_c^2}{2} E\{\cos(2\pi f_c (t_2 - t_1))\} \\
&\quad + \frac{A_c^2}{2} E\{\cos(2\pi f_c (t_2 + t_1) + 2\Theta)\} && (126)\\
&= \frac{A_c^2}{2} \cos[2\pi f_c (t_2 - t_1)] && (127)
\end{aligned}$$

Donc, on a bien une expression du type $(\tau = t_2 - t_1)$

$$\Gamma_{XX}(\tau) = \frac{A_c^2}{2} \cos[2\pi f_c \tau] \tag{128}$$

$\Rightarrow$ $X(t) = A_c \cos(2\pi f_c t + \Theta)$ est bien stationnaire au sens large. D'où

$$\gamma_X(f) = \frac{A_c^2}{4} [\delta(f - f_c) + \delta(f + f_c)] \tag{129}$$

Filtrage d'un processus stationnaire au sens large I

Soient

- $X(t)$ un processus stochastique stationnaire au sens large,
- $\mathscr{H}(f)$ la *transmittance* (aussi appelée *fonction de transfert*) d'un filtre linéaire, et
- $Y(t)$ le processus à la sortie du système linéaire (filtre).

On veut répondre à trois questions :

1. $Y(t)$ est-il stationnaire au sens large ?
2. Que vaut μ_Y ?
3. Peut-on calculer $\gamma_Y(f)$?

Filtrage d'un processus stationnaire au sens large II

Moyenne

Soit $h(t)$, la réponse impulsionnelle du filtre $\mathscr{H}(f)$; $\otimes$ désigne le produit de convolution.

On a

$$Y(t) = h(t) \otimes X(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(u) X(t-u)\, du \qquad (130)$$

Dès lors,

$$\begin{aligned}
\mu_Y &= E\{Y(t)\} && (131)\\
&= E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(u) X(t-u)\, du\right\} && (132)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, E\{X(t-u)\}\, du && (133)\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, \mu_X\, du && (134)
\end{aligned}$$

Filtrage d'un processus stationnaire au sens large III

Donc,

$$\mu_Y = \mu_X \int_{-\infty}^{+\infty} h(u)\, du \tag{135}$$

Comme $\mathscr{H}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} h(t) e^{-2\pi f t \tau}\, dt$

En conclusion

$$\mu_Y = \mu_X \mathscr{H}(f = 0) \tag{136}$$

De plus, la première condition de stationnarité au sens large est respectée (car μ_X et $\mathscr{H}(f = 0)$ sont des constantes).

Filtrage d'un processus stationnaire au sens large IV

Que vaut la fonction d'autocorrélation ?

$$\begin{aligned}
\Gamma_{YY}(t_1, t_2) &= E\{Y(t_1)Y(t_2)\} && (137)\\
&= E\left\{\int_{-\infty}^{+\infty} h(u_1)X(t_1 - u_1)\, du_1 \int_{-\infty}^{+\infty} h(u_2)X(t_2 - u_2)\, du_2\right\}\\
&= \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u_1)h(u_2)E\{X(t_1 - u_1)X(t_2 - u_2)\}\, du_1\, du_2
\end{aligned}$$

On pose $\tau = t_1 - t_2 \Rightarrow t_1 = \tau + t_2$. Dès lors, on

$$\Gamma_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} h(u_1)h(u_2)E\{X(\tau + t_2 - u_1)X(t_2 - u_2)\}\, du_1\, du_2 \tag{138}$$

Comme $X(t)$ est un processus stationnaire au sens large

$$\begin{aligned}
E\{X(\tau + t_2 - u_1)X(t_2 - u_2)\} &= E\{X(\tau - u_1)X(-u_2)\} && (139)\\
&= \Gamma_{XX}(\tau - u_1 + u_2) && (140)
\end{aligned}$$

Filtrage d'un processus stationnaire au sens large V

En conséquence, on a

$$\Gamma_{YY}(t_1, t_2) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} h(u_1)h(u_2)\Gamma_{XX}(\tau - u_1 + u_2)\, du_1\, du_2 \tag{141}$$

Comme $\tau = t_1 - t_2$, la fonction d'autocorrélation $\Gamma_{YY}(t_1, t_2)$ ne fait intervenir que la différence ⇒ la seconde condition pour la stationnarité au sens large est remplie.

$Y(t)$ est bien un processus stationnaire au sens large.
On peut donc calculer une densité spectrale de puissance : $\gamma_Y(f)$

Filtrage d'un processus stationnaire au sens large VI

Calcul de $\gamma_Y(f)$

$$\begin{aligned}
\gamma_Y(f) &= \int_{\tau=-\infty}^{+\infty} \Gamma_{YY}(\tau)\, e^{-2\pi j f \tau}\, d\tau && (142)\\
&= \int_{\tau}\int_{u_1}\int_{u_2} h(u_1)h(u_2)\Gamma_{XX}(\tau - u_1 + u_2)\, du_1\, du_2 e^{-2\pi j f \tau}\, d\tau
\end{aligned}$$

On fait un autre changement de variables : $u_0 = \tau - u_1 + u_2$.
D'où $\tau = u_0 + u_1 - u_2$ et

$$\begin{aligned}
\gamma_Y(f) &= \int_{\tau}\int_{u_1}\int_{u_2} h(u_1)h(u_2)\Gamma_{XX}(\tau - u_1 + u_2)\, du_1\, du_2 e^{-2\pi j f \tau}\, d\tau \\
&= \int_{u_0}\int_{u_1}\int_{u_2} h(u_1)h(u_2)\Gamma_{xx}(u_0)\, du_1\, du_2 e^{-2\pi j f (u_0 + u_1 - u_2)}\, d u_0 && (143)\\
&= \int_{u_1} h(u_1) e^{-2\pi j f u_1} \int_{u_2} h(u_2) e^{2\pi j f u_2} \int_{u_0} \Gamma_{XX}(u_0)\, e^{-2\pi j f u_0}\, du_0\, du_2\, du_1 \\
&= \mathcal{H}(f)\mathcal{H}^*(f)\gamma_X(f) = \left\|\mathcal{H}(f)\right\|^2 \gamma_X(f) && (144)
\end{aligned}$$

Filtrage d'un processus stationnaire au sens large VII

Résumé
Soient $X(t)$ un processus stochastique stationnaire au sens large, $\mathscr{H}(f)$ la transmittance d'un filtre linéaire et $Y(t)$ le processus à la sortie du système linéaire (filtre)

Théorème

Moyenne en sortie

$$\mu_Y = \mu_X \mathscr{H}(f=0) \tag{145}$$

Théorème (Wiener-Kintchine)

Densité spectrale en sortie

$$\gamma_Y(f) = \left\|\mathscr{H}(f)\right\|^2 \gamma_X(f) \tag{146}$$

Somme de processus stochastiques

$$Y(t) = K(t) + N(t) \tag{147}$$

Pour des processus stationnaires au sens large,

$$\gamma_{YY}(f) = \gamma_{KK}(f) + \gamma_{KN}(f) + \gamma_{NK}(f) + \gamma_{NN}(f) \tag{148}$$

Si les processus sont non corrélés,

$$C_{K(t)N(t)} = E\{K(t)N(t)\} - \mu_K \mu_N = 0$$

d'où $E\{K(t)N(t)\} = E\{N(t)K(t)\} = \mu_K \mu_N$.
Dès lors, $\gamma_{KN}(f)$ et $\gamma_{NK}(f)$ sont des deltas de Dirac à l'origine et (pour $f \neq 0$),

$$\boxed{\gamma_{YY}(f) = \gamma_{KK}(f) + \gamma_{NN}(f)} \tag{149}$$

A fortiori, **si les processus sont indépendants**

$$\boxed{\gamma_{YY}(f) = \gamma_{KK}(f) + \gamma_{NN}(f)} \tag{150}$$

Analyse de la modulation pour processus stochastique : principe et analyse du mélangeur "stochastique" I

Signal stochastique modulé

$$S(t) = M(t)\cos(2\pi f_c t) \tag{151}$$

et $M(t)$ est stationnaire au sens large.

Calculons l'espérance $E\{S(t)\}$:

$$\begin{aligned} E\{S(t)\} &= E\{M(t)\cos(2\pi f_c t)\} = E\{M(t)\}\cos(2\pi f_c t) \\ &= \mu_M \cos(2\pi f_c t) \end{aligned} \tag{152}$$

Sauf pour $\mu_M = 0$, l'espérance n'est pas constante (elle dépend du temps) $\Rightarrow$ le processus n'est pas stationnaire en la moyenne !

Solution $\equiv$ *stationnarisation par injection* d'une phase aléatoire Φ et indépendante de $M(t)$:

$$S(t) = M(t)\cos(2\pi f_c t + \Phi) \tag{153}$$

Analyse de la modulation pour processus stochastique : principe et analyse du mélangeur "stochastique" II

Vérifications :

1. Espérance de $S(t)$:

$$E\{S(t)\} = E\{M(t)\cos(2\pi f_c t + \Phi)\} \tag{154}$$
$$= E\{M(t)\}\,E\{\cos(2\pi f_c t + \Phi)\} \tag{155}$$
$$= \mu_M \times 0 = 0 \tag{156}$$

   La moyenne est bien nulle, et donc constante !

2. Fonction d'autocorrélation de $S(t)$:

$$\Gamma_{SS}(t_1, t_2) = E\{S(t_1)S(t_2)\} \tag{157}$$
$$= E\{M(t_1)\cos(2\pi f_c t_1 + \Phi)M(t_2)\cos(2\pi f_c t_2 + \Phi)\} \tag{158}$$
$$= E\{M(t_1)M(t_2)\}\,E\{\cos(2\pi f_c t_1 + \Phi)\cos(2\pi f_c t_2 + \Phi)\}$$
$$= \frac{1}{2}\Gamma_{MM}(t_2 - t_1)\,E\{\cos(2\pi f_c (t_2 - t_1))\} \tag{159}$$
$$+ \frac{1}{2}\Gamma_{MM}(t_2 - t_1)\,E\{\cos(2\pi f_c (t_1 + t_2) + 2\Phi)\} \tag{160}$$

Analyse de la modulation pour processus stochastique : principe et analyse du mélangeur “stochastique” III

Le deuxième terme comporte $E\left\{\cos(2\pi f_c(t_1+t_2)+2\Phi)\right\}$ qui est nul. Dès lors,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{SS}(t_1,t_2) &= \frac{1}{2}\Gamma_{MM}(t_2-t_1)\,E\left\{\cos(2\pi f_c(t_2-t_1))\right\} && (161)\\
&= \frac{1}{2}\Gamma_{MM}(t_2-t_1)\cos(2\pi f_c(t_2-t_1)) && (162)\\
&= \frac{1}{2}\Gamma_{MM}(\tau)\cos(2\pi f_c\tau) && (163)\\
&= \Gamma_{SS}(\tau) && (164)
\end{aligned}$$

$S(t)$ est donc stationnaire au sens large !

$\Rightarrow$ $S(t)$ a donc une densité spectrale de puissance.

Analyse de la modulation pour processus stochastique : principe et analyse du mélangeur “stochastique” IV

Calcul de $\gamma_S(f)$

$$\begin{aligned}
\gamma_S(f) &= \int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{SS}(\tau)\,e^{-2\pi jf\tau}\,d\tau && (165)\\
&= \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{+\infty}\Gamma_{MM}(\tau)\cos(2\pi f_c\tau)e^{-2\pi jf\tau}\,d\tau && (166)\\
&= \frac{1}{2}\gamma_M(f)\otimes\frac{\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)}{2} && (167)
\end{aligned}$$

Théorème

Après stationnarisation, la densité de spectrale du signal modulé en amplitude $S(t)=M(t)\cos(2\pi f_c t)$*, où* $M(t)$ *est stationnaire au sens large, vaut*

$$\gamma_S(f)=\frac{\gamma_M(f-f_c)+\gamma_M(f+f_c)}{4} \qquad (168)$$

Bruit blanc I

Définition

Le *bruit blanc* est un processus aléatoire stationnaire du second ordre *centré* et dont la densité spectrale de puissance est constante sur tout l'axe des fréquences :

$$\gamma_W(f) = \frac{N_0}{2} \tag{169}$$

N_0 s'exprime en *Watt* par *Hertz*. La fonction d'autocorrélation s'écrit donc

$$\boxed{\Gamma_{WW}(\tau) = \frac{N_0}{2}\,\delta(\tau)} \tag{170}$$

Bruit blanc gaussien I

Un signal très courant en télécommunications est le *bruit blanc gaussien, de moyenne nulle, stationnaire au sens large*. Il se caractérise par :

1. la densité de probabilité de sa "tension" mesurée est une gaussienne.
2. la tension moyenne mesurée est nulle.
3. une densité spectrale constante (pour la bande de fréquences considérée).

Théorème

Puissance d'un bruit blanc (pour une largeur de bande B)

$$P_N = N = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_N(f)\,df = 2\int_{f_c-\frac{B}{2}}^{f_c+\frac{B}{2}} \frac{N_0}{2}\,df = 2 \times B \times \frac{N_0}{2} = B\,N_0 \tag{171}$$

Bruit blanc gaussien II

Propriété

Si les variables aléatoires $X_1, X_2, \dots, X_n$, obtenues par échantillonnage d'un processus gaussien aux temps $t_1, t_2, \dots, t_n$, sont *non corrélées*, c'est-à-dire que

$$E\{(X_k - \mu_{X_k})(X_i - \mu_{X_i})\} = 0, \ i \neq k \tag{172}$$

alors ces variables sont *indépendantes*.

Concrètement, cela signifie que pour le calcul de l'intégrale finie d'un bruit blanc gaussien

$$\int_a^b N(t)\, dt \tag{173}$$

on a l'équivalent d'une somme de gaussiennes indépendantes, ce qui implique que le caractère gaussien est conservé !

Table des matières

Technologies du réseau Internet

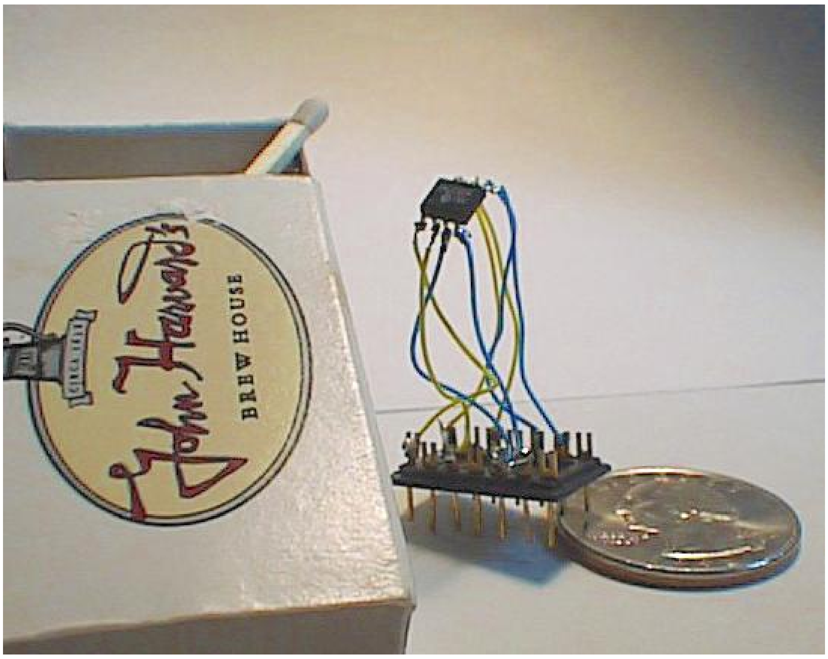
- Historique
- Normalisation
- Piles de protocoles
- Détails de certains protocoles
- Performances

Historique

- fin des années 60 : ARPANET
- Interconnection of networks ⇒ Internet
- Difficultés majeures :
  - premier réseau sécurisé physiquement ⇒ donc initialement pas de mécanisme de sécurité au sein des "vieux" protocoles
  - pas de garantie sur la qualité de la transmission. On parle de réseau "best effort"
  - plan d'adressage relativement peu structuré
  - beaucoup de produits/solutions "sous optimaux"

Applications

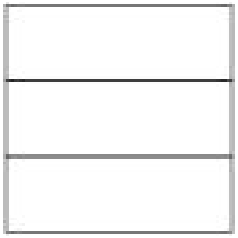
- Au début, système de transmission embarqué : “Web inside” [début 2000]



- Aujourd’hui, on parle de Internet of Things (IoT)

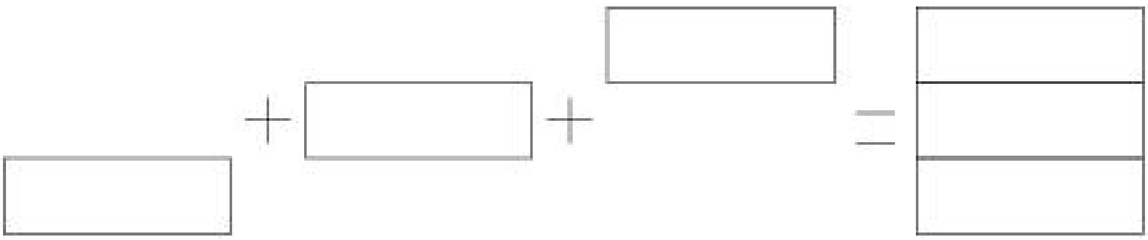
Normalisation

Traditionnellement (ISO, ITU, IEEE, etc)



+ possibilités de **certification**

Pour la technologie Internet



+ obligation d’**implémentations**

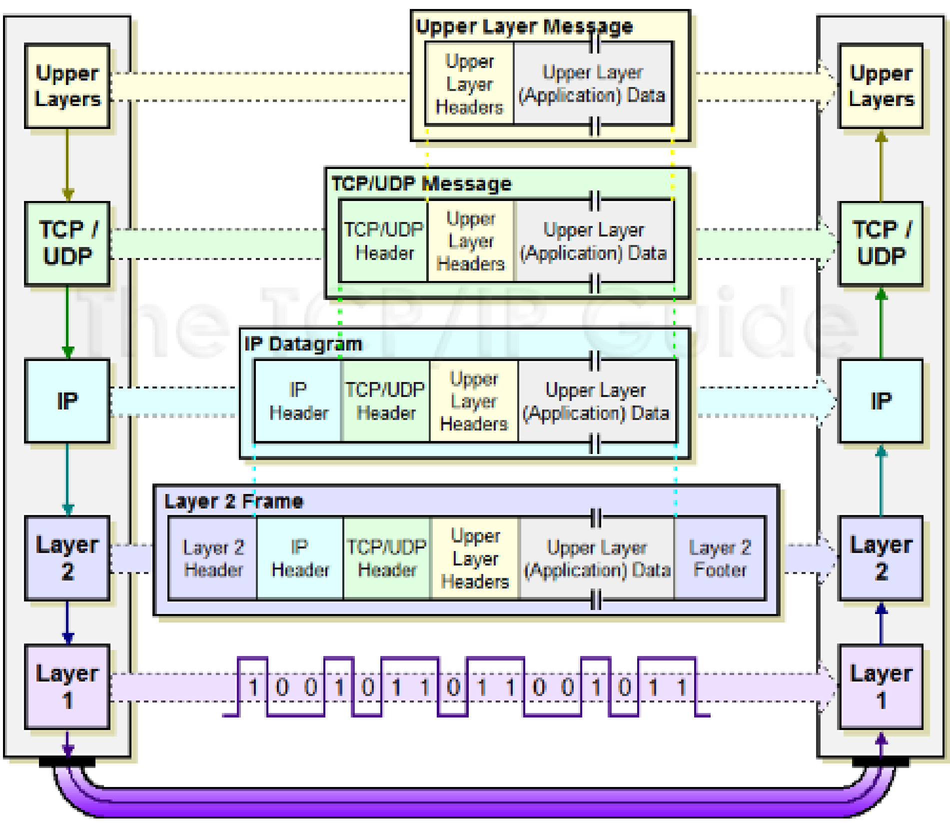
Groupes de normalisation Internet

- IETF (Internet Engineering Task Force)
  - évolutions technologiques
  - produits les RFCs (Requests For Comments)
- IAB (Internet Activities Board)
  - gestion et organisation des groupes
- ISOC (Internet Society)
  - rôle de promotion de l'Internet
- W3C (World Wide Web Consortium)

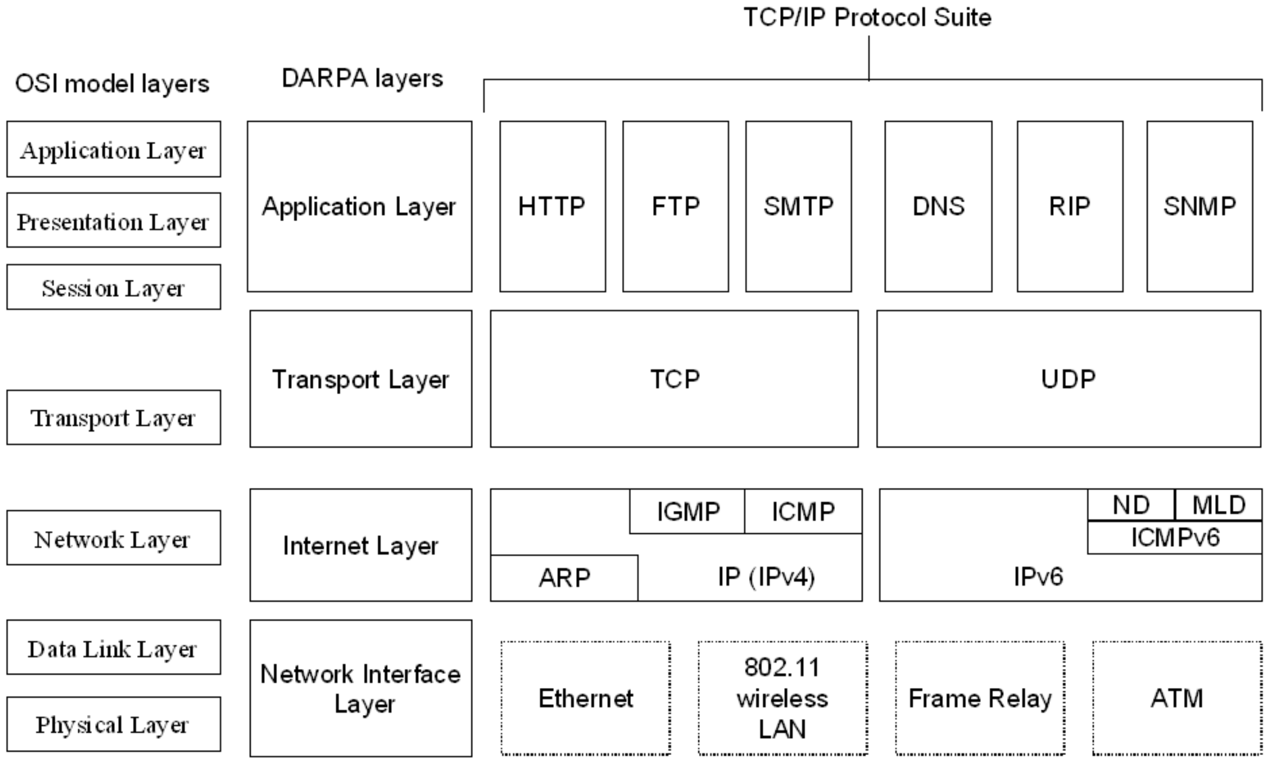
Organisation “commerciale”

- Internet Corporation for Assigned Names and Numbers (ICANN)
  - attribution des adresses IP
  - sélection des paramètres des protocoles
  - gestion du Domain Name Server (DNS)

Base de l'utilisation d'une pile de protocole : encapsulation des données lors du passage entre couches

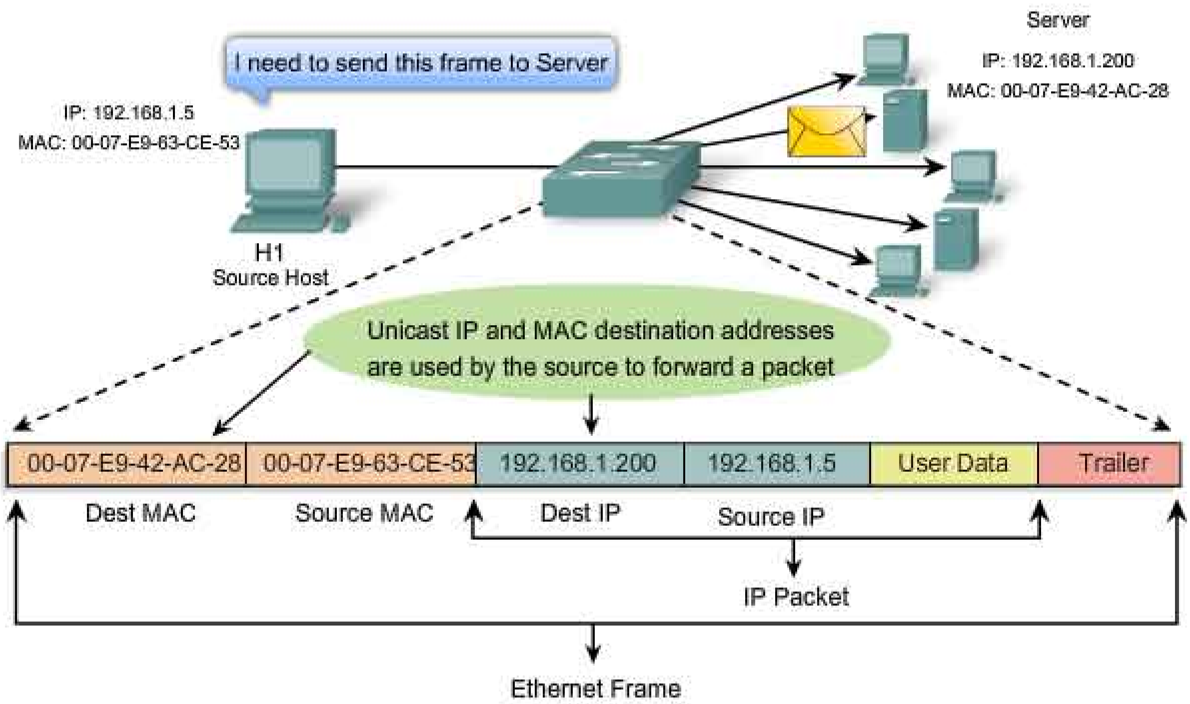


Piles de protocoles

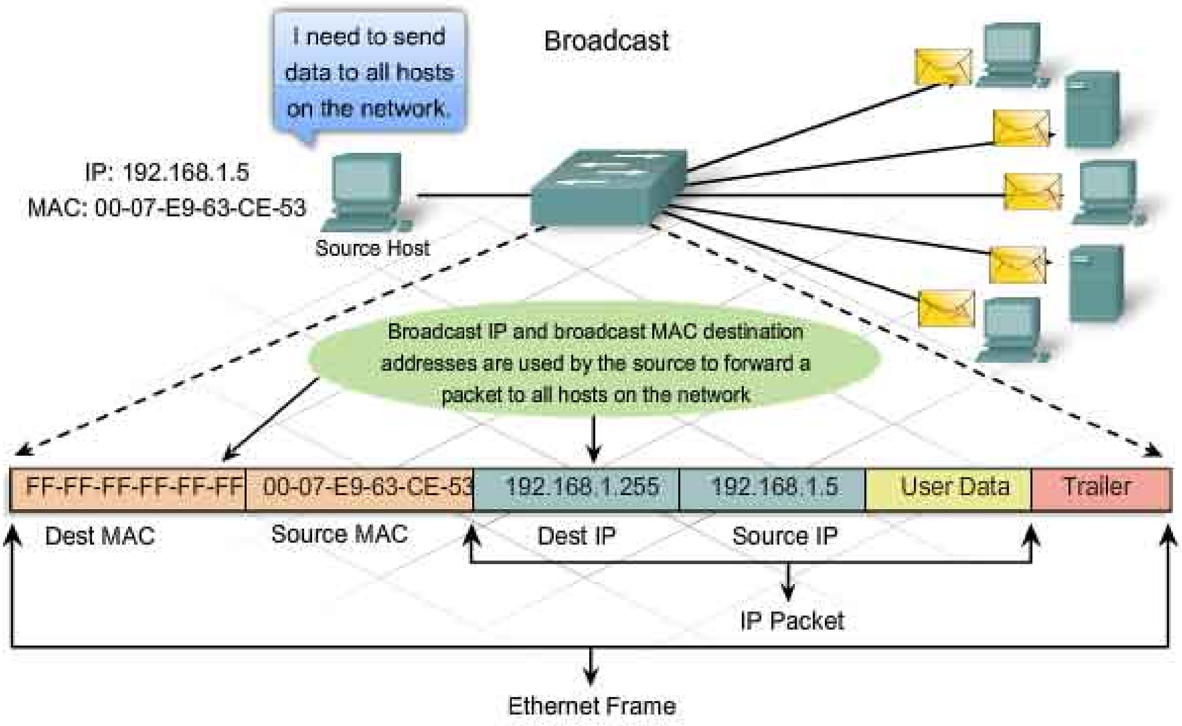


Protocoles Ethernet

- Réseau à portée locale (Local Area Network)
- chaque carte réseau a une adresse Ethernet fixe et unique
- Protocole ARP (Address Resolution Protocol) : traduction entre le monde IP (mondial) et Ethernet (local)

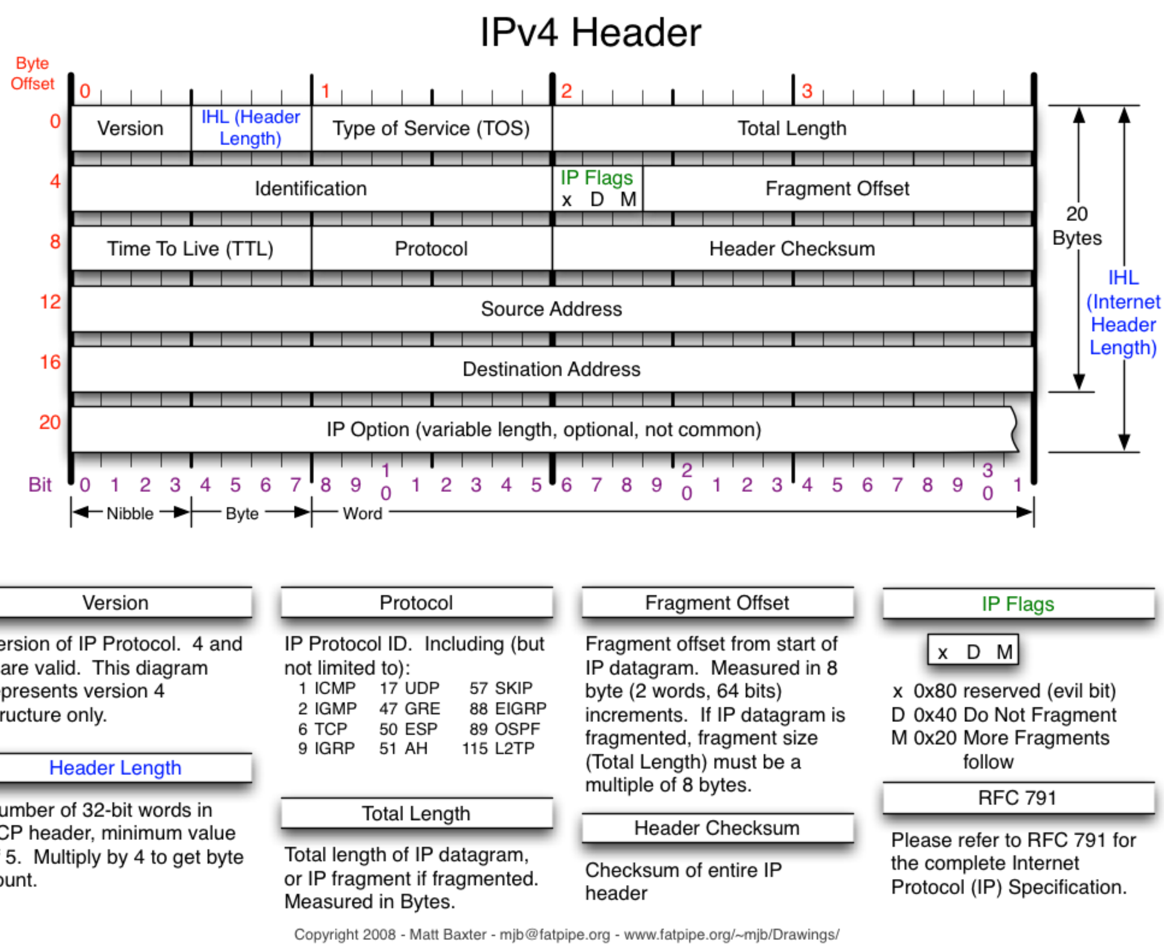


Broadcast (diffusion) Ethernet



Une machine joue un rôle particulier sur le réseau local : *switch (commutateur)* ou *hub*, qui sert de relais vers le monde extérieur.

En-tête IP



Adresses IP

CLass	First Octet Range	Default Subnet Mask	Max Hosts	Format
A	1-126	255.0.0.0	16M	NETID: Network (1 Octet) . HOSTID: Host . Host . Host (3 Octet)
B	128-191	255.255.0.0	64K	NETID: Network . Network (2 Octet) . HOSTID: Host . Host (2 Octet)
C	192-223	255.255.255.0	254	NETID: Network . Network . Network (3 Octet) . HOSTID: Host (1 Octet)
D	224-239	N/A	N/A	Multicast Address
E	240-255	N/A	N/A	Experimental

Protocole ICMP

- Internet Control Message Protocol
- Besoin de pouvoir vérifier, élément par élément, le bon fonctionnement de la pile de protocoles
- Utilitaire : ping

```
ping www.ulg.ac.be
PING serv327.segi.ulg.ac.be (139.165.51.81) 56(84) bytes of data.
64 bytes from serv327.segi.ulg.ac.be (139.165.51.81): icmp_req=1 ttl=55 time=13
64 bytes from verdir.net (139.165.51.81): icmp_req=2 ttl=55 time=13.2 ms
64 bytes from verdir.org (139.165.51.81): icmp_req=3 ttl=55 time=13.4 ms
64 bytes from serv327.segi.ulg.ac.be (139.165.51.81): icmp_req=4 ttl=55 time=13
64 bytes from serv327.segi.ulg.ac.be (139.165.51.81): icmp_req=5 ttl=55 time=13
64 bytes from serv327.segi.ulg.ac.be (139.165.51.81): icmp_req=6 ttl=55 time=13
```

Trouver les routeurs “relais” dans un réseau

- Utilitaire : `traceroute`
- Basé sur la notion de *Time-To-Live* du l'en-tête IP
- Exemple :

```
traceroute to www.microsoft.com (134.170.184.133), 30 hops max, 60 byte packets
 1  discus.home (192.168.1.1)  0.562 ms  0.584 ms  0.600 ms
 2  37-68-138-74.alpha.be (97.138.68.37)  9.793 ms  11.971 ms  14.648 ms
 3  149.6.134.126 (149.6.134.126)  17.240 ms  19.306 ms  22.254 ms
 4  gi7-1-mas1.ZRH.router.colt.net (212.74.70.2)  27.608 ms  28.333 ms  42.611 :
 5  te0-1-0-0-pr2.AMS.router.colt.net (212.74.75.109)  37.668 ms  38.676 ms  41
 6  ams-ix-1.microsoft.com (195.69.145.20)  44.286 ms  13.938 ms  13.568 ms
 7  xe-0-0-0-0.ams-96c-1b.ntwk.msn.net (207.46.42.109)  16.580 ms 19.961 ms 21.
 8  xe-7-0-1-0.amb-96cbe-1b.ntwk.msn.net (207.46.42.100)  24.450 ms  26.527 ms
 9  xe-7-3-1-0.ch1-96c-1a.ntwk.msn.net (207.46.38.71)  124.663 ms 34.778 ms 129
10  204.152.141.129 (204.152.141.129)  45.584 ms * *
11  * * xe-2-0-0-0.lts-96cbe-1b.ntwk.msn.net (207.46.42.229)  27.132 ms
12  xe-4-1-1-0.nyc-96cbe-1b.ntwk.msn.net (207.46.43.46)  85.221 ms 174.010 ms
13  ae0-0.nyc-96cbe-1a.ntwk.msn.net (207.46.38.112)  95.848 ms 181.804 ms  184.
14  xe-7-3-1-0.ch1-96c-1a.ntwk.msn.net (207.46.38.71)  123.686 ms  122.507 ms *
15  xe-4-2-1-0.co2-96c-1b.ntwk.msn.net (207.46.45.43)  191.818 ms  194.285 ms
16  * * *
17 ...
```


Protocole Domain Name Server

- *Traduction* entre un nom de domaine et une adresse IP Internet
- Il faut configurer l'adresse d'un “résolveur” de noms (problème de l'œuf et de la poule)
- Utilitaire : `host`

```
host www.ulg.ac.be
www.ulg.ac.be is an alias for serv327.segi.ulg.ac.be.
serv327.segi.ulg.ac.be has address 139.165.51.81
serv327.segi.ulg.ac.be has IPv6 address 2001:6a8:2d80:100::11
```

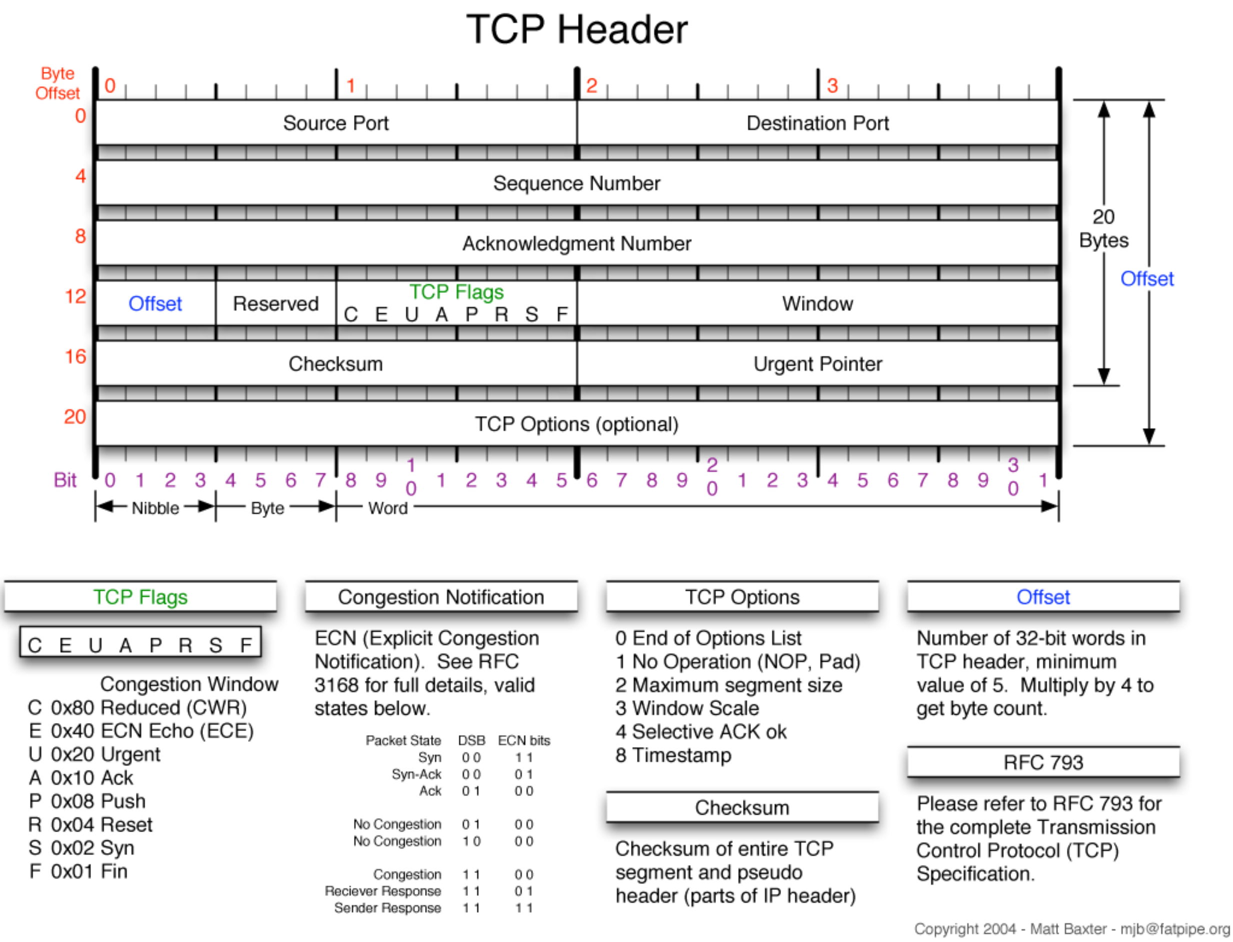
Couche transport

Le rôle de la couche transport consiste, en partie, à découper le message "applicatif" en plusieurs paquets qui seront rassemblés au droit de la destination.

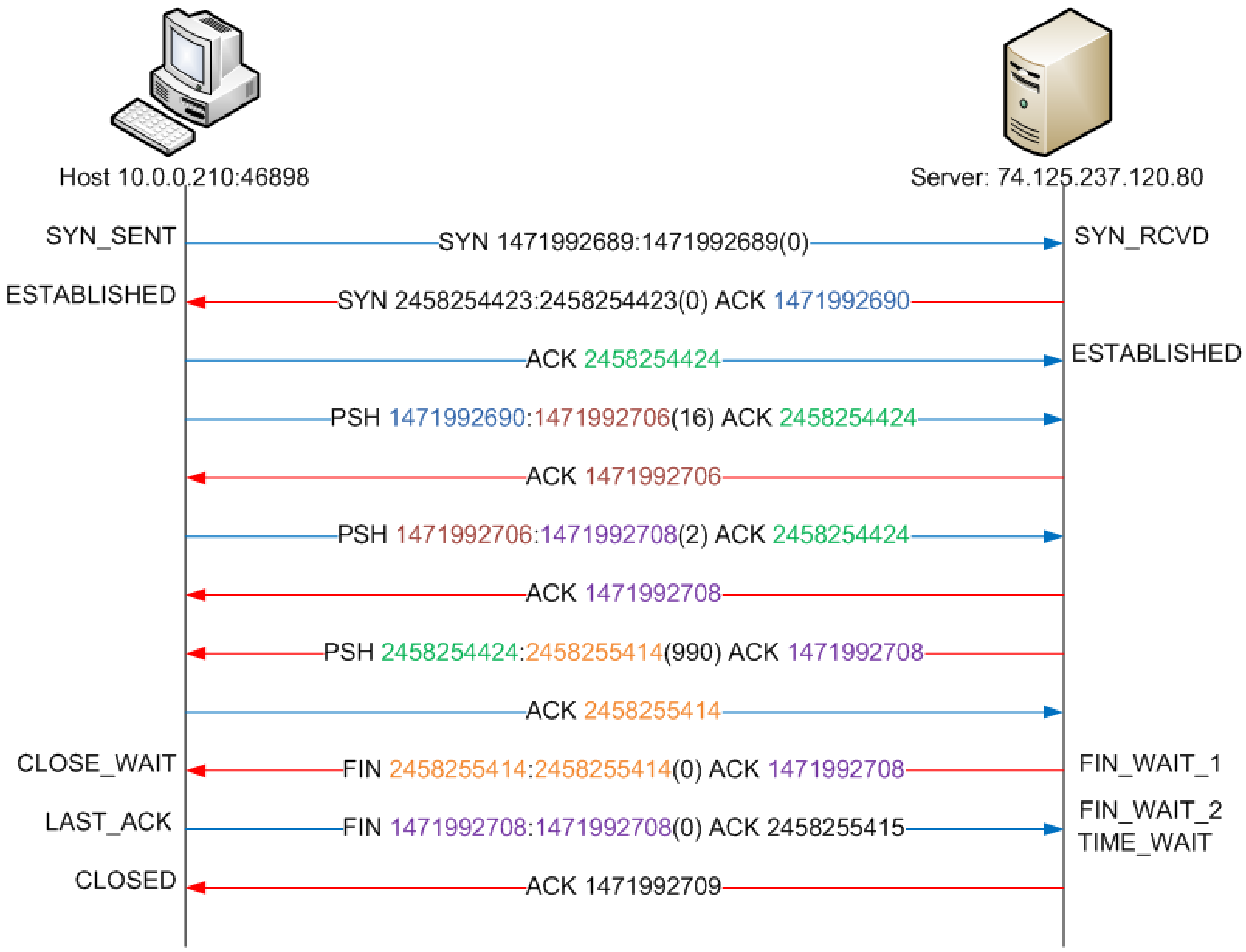
Deux protocoles principaux :

1. TCP (Transmission Control Protocol)
    - envoi avec accusé de réception
    - mécanismes de régulation de la vitesse d'envoi
2. UDP (User Datagram Protocol)
    - envoi sans accusé de réception
    - réduit les délais, mais ne garantit pas la réception d'un paquet
    - notion de "best effort"

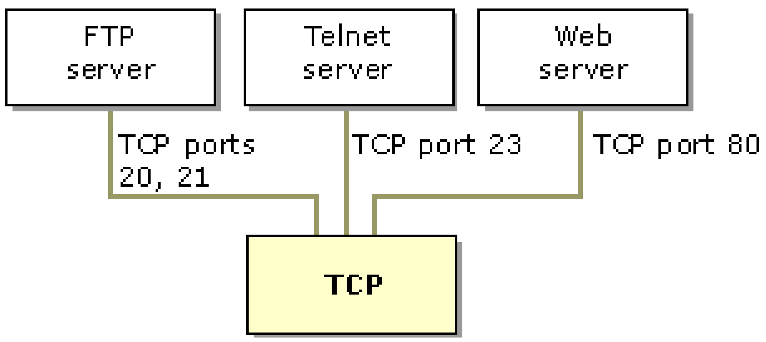
En-tête TCP



Flux TCP

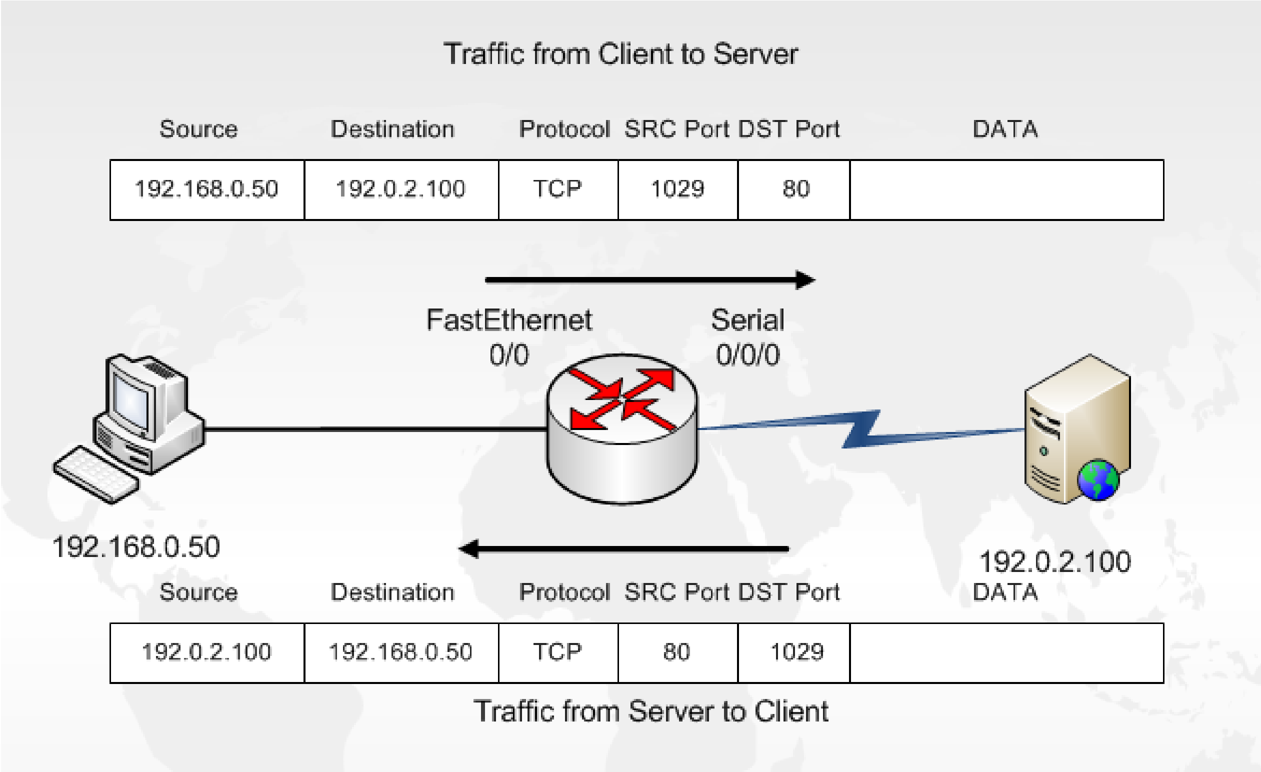


Notion de port TCP

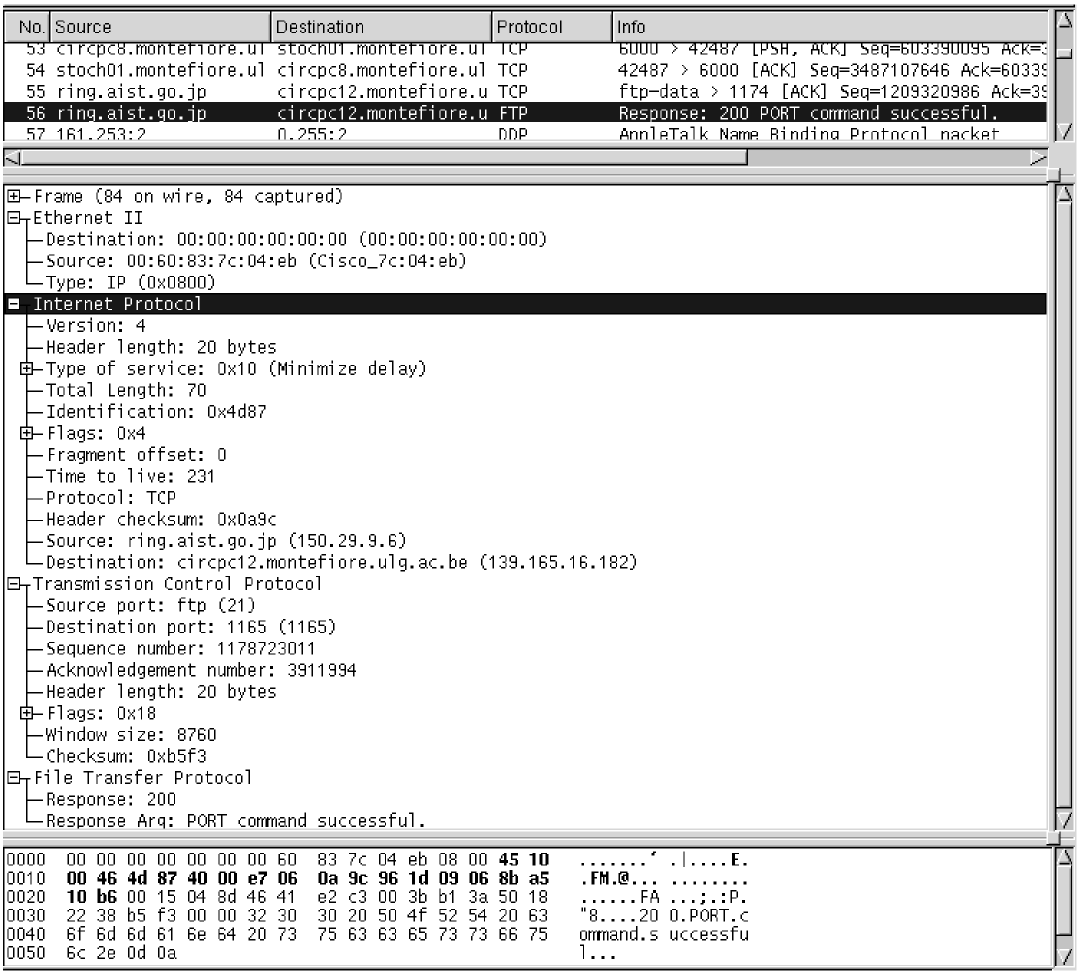


Port number	Process name	Protocol used	Description
20	FTP-DATA	TCP	File transfer—data
21	FTP	TCP	File transfer—control
22	SSH	TCP	Secure Shell
23	TELNET	TCP	Telnet
25	SMTP	TCP	Simple Mail Transfer Protocol
53	DNS	TCP and UDP	Domain Name System
69	TFTP	UDP	Trivial File Transfer Protocol
80	HTTP	TCP and UDP	Hypertext Transfer Protocol
110	POP3	TCP	Post Office Protocol 3
123	NTP	TCP	Network Time Protocol
143	IMAP	TCP	Internet Message Access Protocol
443	HTTPS	TCP	Secure implementation of HTTP

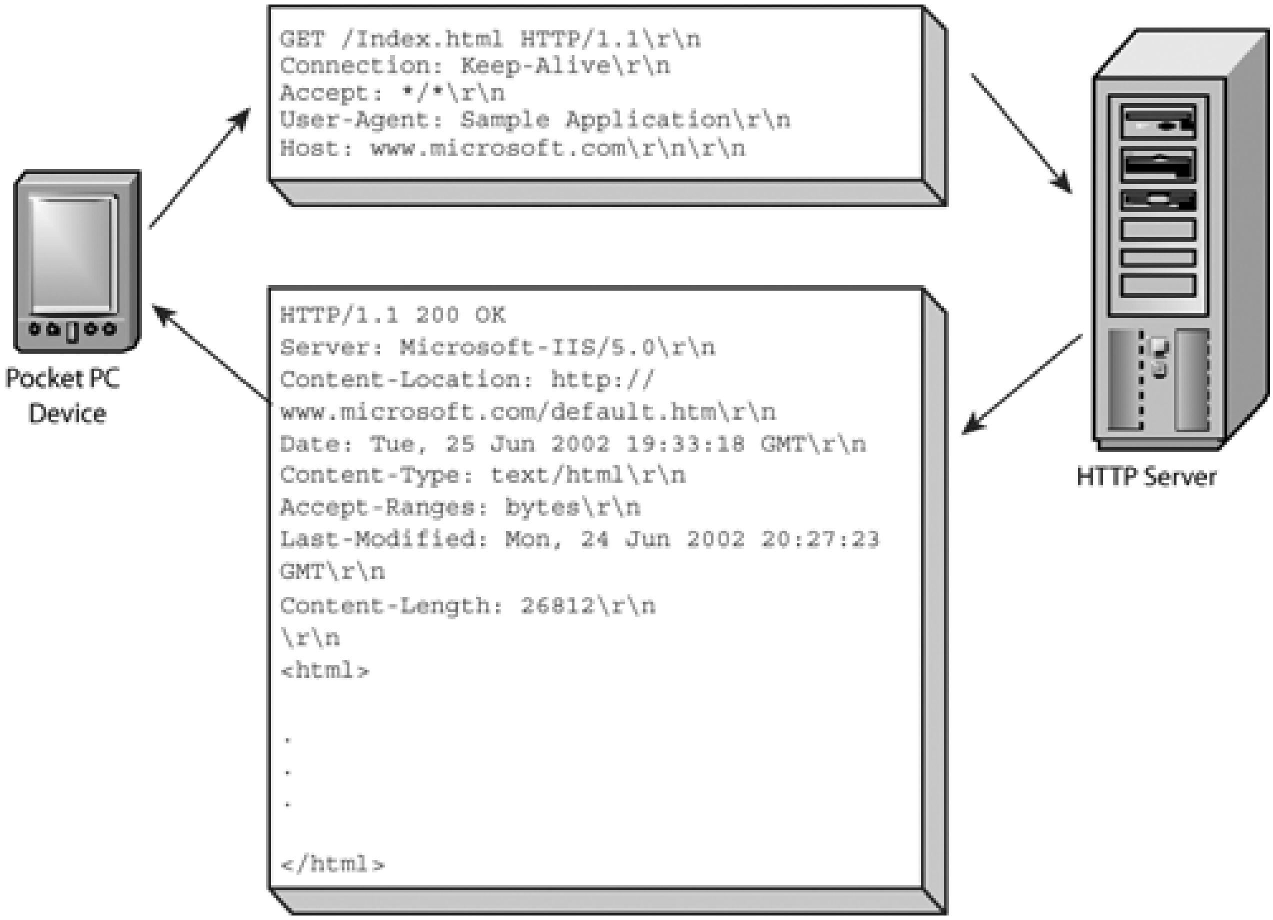
Port source et port destination



Paquet TCP/IP



Protocole Hypertext Transfer Protocol (HTTP)



Performances

- Throughput et goodput
- Délai
- Bit error rate ⇒ paquets invalides, retransmission, etc

Exemple

```
PING www.next.com (17.254.3.217)
64 bytes from 17.254.3.217: ttl=234 time=189.6 ms
64 bytes from 17.254.3.217: ttl=234 time=197.6 ms
64 bytes from 17.254.3.217: ttl=234 time=270.3 ms

--- www.next.com ping statistics ---
3 packets transmitted,
3 packets received,
0% packet loss
round-trip min/avg/max = 189.6/219.1/270.3 ms
```

Table des matières

Introduction à la numérisation

- Introduction
- Conversion des signaux
  - Échantillonnage
  - Interpolation
  - Réalisation de l'échantillonnage
- Anciennes techniques de "Modulations"
  - PAM
  - "Modulation" de la position des impulsions
- *"Modulation" d'impulsions codées PCM*
  - Quantification
  - Bruit de quantification
- Compression de données

Types d'information

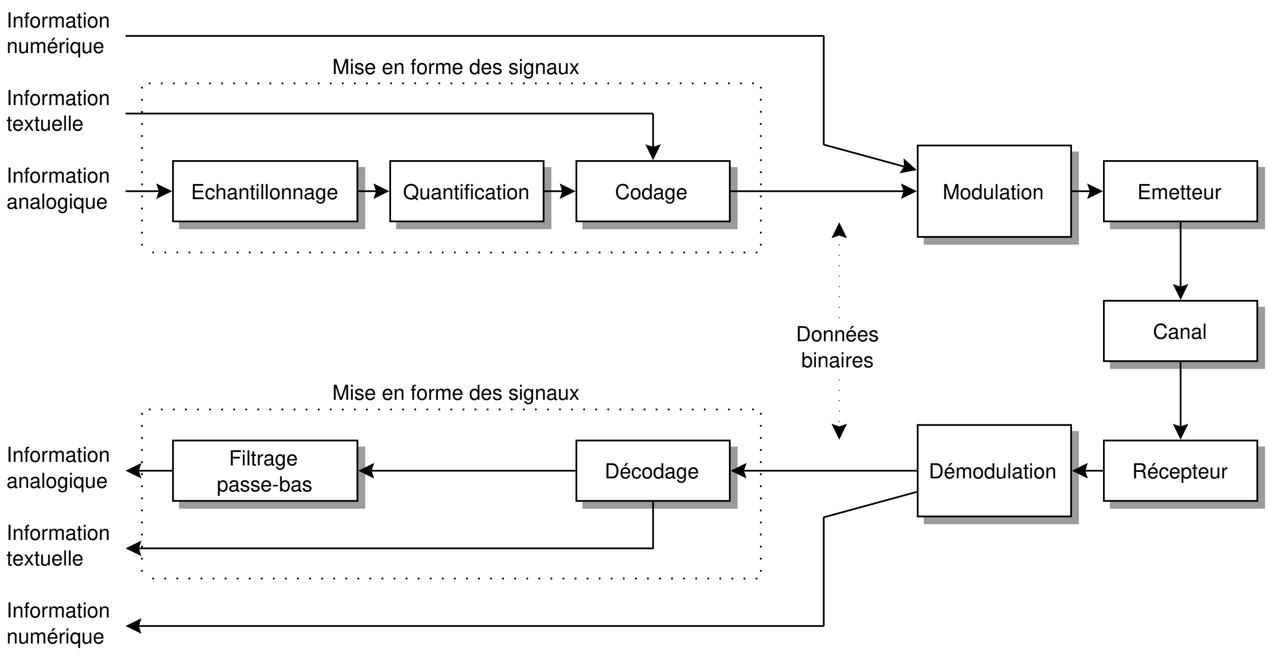
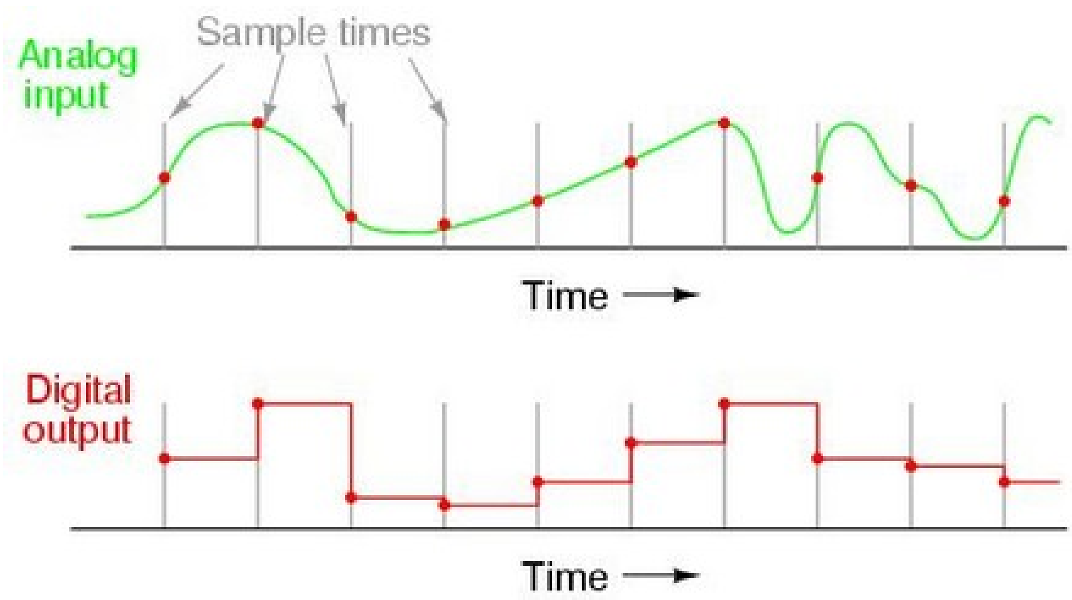


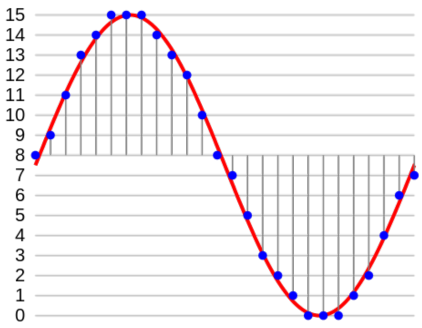
Figure – Mise en forme et transmission.

Caractérisation de la qualité de la transmission au moyen du *taux d'erreur par bit* (*bit error rate*) P_e

Principe de la conversion de l'analogique au numérique (≡ digital) I



Principe de la conversion de l'analogique au numérique (≡ digital) II



Numérisation = analogique⇒numérique

analogique	numérique
$g(t)$	$g[iT]$, avec $i = 0, 1, 2, \ldots$ et T, un intervalle de temps
signal temporel	*échantillonnage*
	ensemble d'échantillons
	chaque échantillon est codé sur n bits (*quantification*)
	à la fin, on a un flot binaire : 01110...

De l'analogique au numérique : étapes

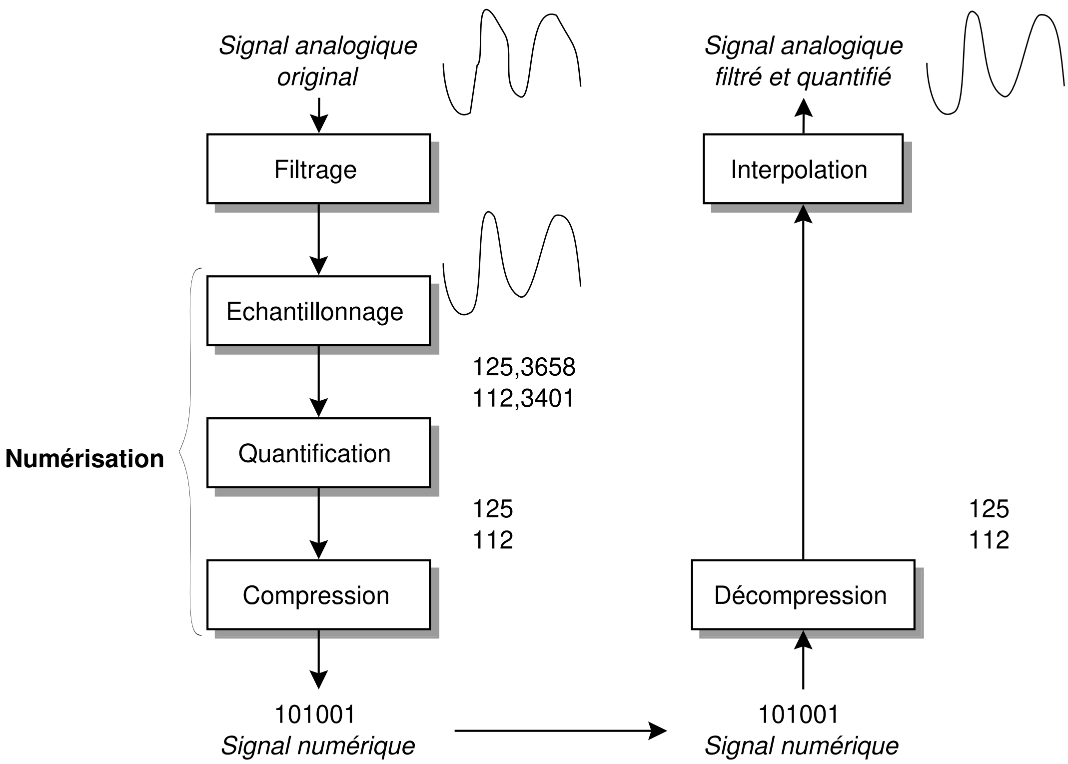


Figure – Passage de l'analogique au numérique et conversion inverse.

Théorème de Shannon I

Théorème (Shannon)

Une fonction $g(t)$ à énergie finie et à spectre limité, c'est-à-dire dont la transformée de Fourier $\mathscr{G}(f)$ *est nulle pour* $|f| > W$, *est entièrement déterminée par ses échantillons* $g[nT_s]$, $n \in \{-\infty, +\infty\}$ *pour autant que la fréquence d'échantillonnage* f_s *soit strictement supérieure au double de la borne supérieure du spectre*

$$f_s > 2W \tag{174}$$

Démonstration. La fonction échantillonnée $g_s(t)$ est définie par

$$g_s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[nT_s]\delta(t - nT_s) \tag{175}$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t)\delta(t - nT_s) = g(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \tag{176}$$

Théorème de Shannon II

On montre que la transformée de Fourier d'un train d'impulsions est un autre train d'impulsions

$$\sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \rightleftharpoons \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right) \tag{177}$$

Il s'ensuit que

$$g_s(t) \rightleftharpoons \mathscr{G}(f) \otimes \frac{1}{T_s} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \delta\left(f - \frac{k}{T_s}\right) \tag{178}$$

$$g_s(t) \rightleftharpoons \mathrm{f}_s \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mathscr{G}(f - k\mathrm{f}_s) \tag{179}$$

avec $\mathrm{f}_s = \frac{1}{T_s}$.

Théorème de Shannon III

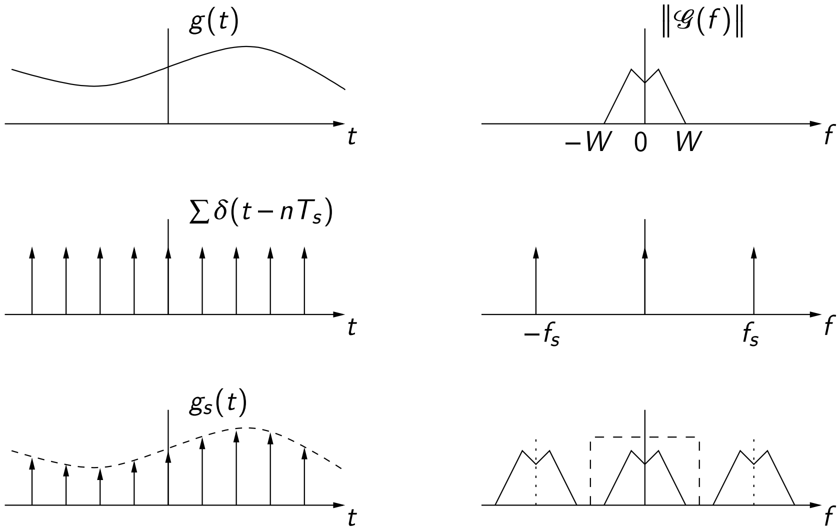


Figure – Échantillonnage instantané.

Il faut éviter que les répliques $\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\mathscr{G}(f-kf_s)$ ne se recouvrent, d'où la condition

$$\mathrm{f}_s > 2W \tag{180}$$

Formule d'interpolation de Whittaker

Théorème

Soit $g(t)$ un signal analogique intégrable de spectre borné $[-W,W]$. Soit $\{g[nT_s]\}$ les échantillons de pas $T_s = 1/f_s$. La fonction $g(t)$ s'écrit comme la série de fonctions

$$g(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g[nT_s]sinc\left(\frac{t-nT_s}{T_s}\right) \tag{181}$$

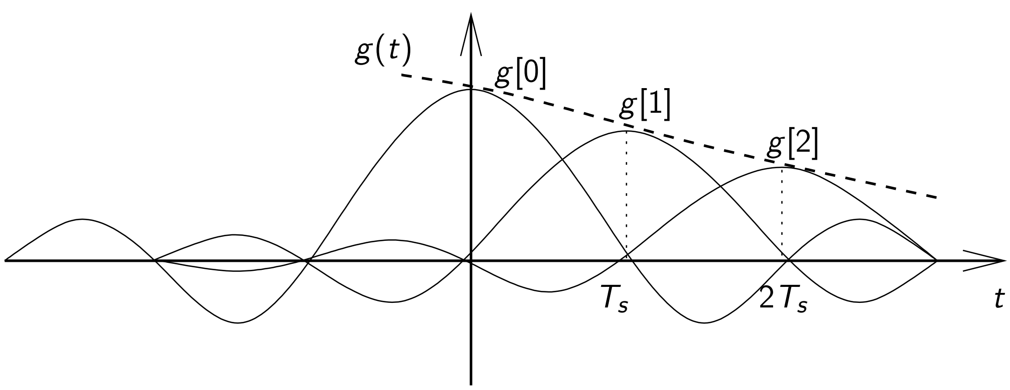


Figure – Interprétation des termes de la formule d'interpolation de Whittaker.

Considérations pratiques

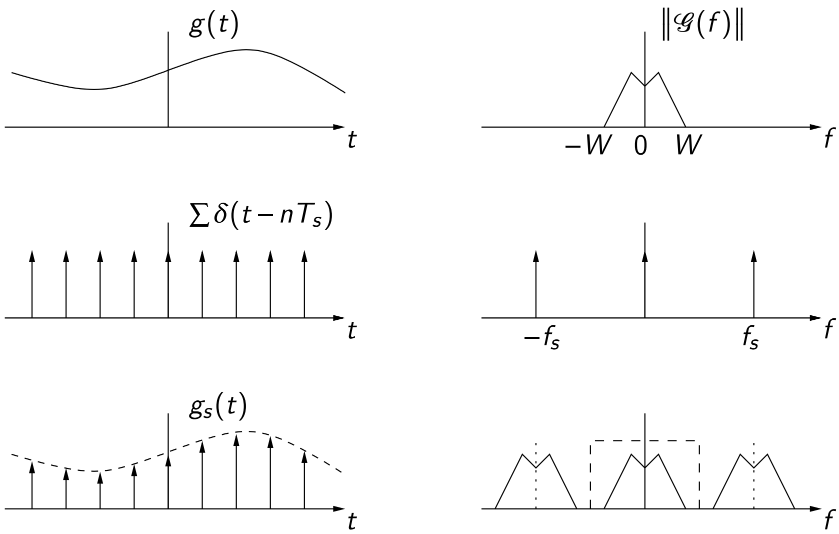
Signal	Bande	Fréquence d'échantillonnage minimale
Audio (téléphone)	[300 Hz, 3400 Hz]	? [échantillons / s]
Audio (qualité CD)	[0 Hz, 20 kHz]	? [échantillons / s]
Audio (GSM)	?	? [échantillons / s]

Critère (pratique) **de Nyquist** : $\mathrm{f}_s = 2,2 \times W$

Réalisation de l'échantillonnage I

Échantillonnage **idéal :**

$$g_s(t) = g(t) \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) \tag{182}$$



Réalisation de l'échantillonnage II

Échantillonnage **réel :**

Le signal échantillonné $g_\tau(t)$ est le produit de $g(t)$ par un train $p_s(t)$ de rectangles de largeur τ

$$p_s(t) = p(t) \otimes \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT_s) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t - nT_s)$$

avec

$$p(t) = \begin{cases} 1 & \text{si} \quad 0 < t < \tau \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{183}$$

La transformée de Fourier de $p(t)$ étant

$$\mathscr{P}_s(f) = \frac{e^{-\pi j f \tau}}{T_s} \frac{\sin(\pi f \tau)}{\pi f} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - n\mathrm{f}_s) \tag{184}$$

Réalisation de l'échantillonnage III

Celle de $g_\tau(t)$, parfois appelé *signal échantillonné naturel*, vaut

$$\begin{aligned} \mathscr{G}_\tau(f) &= \mathscr{G}(f) \otimes \mathscr{P}_s(f) \qquad (185) \\ &= \frac{\tau}{T_s} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-n\pi j \mathrm{f}_s \tau} \frac{\sin(n\pi \mathrm{f}_s \tau)}{n\pi \mathrm{f}_s \tau} \mathscr{G}(f - n\mathrm{f}_s) \end{aligned}$$

Réalisation de l'échantillonnage IV

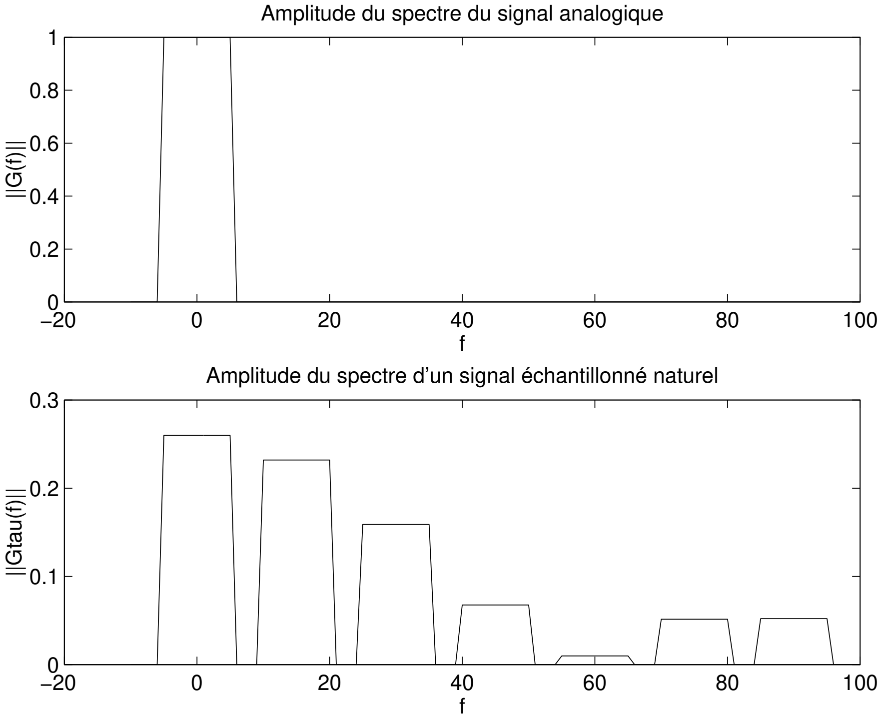


Figure – Spectre d'un signal analogique et du signal échantillonné naturel.

"Modulations"

- Analogiques (solutions qui ne sont plus guère utilisées)
  - Pulse Amplitude "Modulation" (PAM)
  - Pulse Duration "Modulation" (PDM)
  - Pulse Position "Modulation" (PPM)
- **Numériques**
  - Pulse Code "Modulation" (PCM)
  - Delta

Modulation *Pulse Amplitude Modulation PAM* I

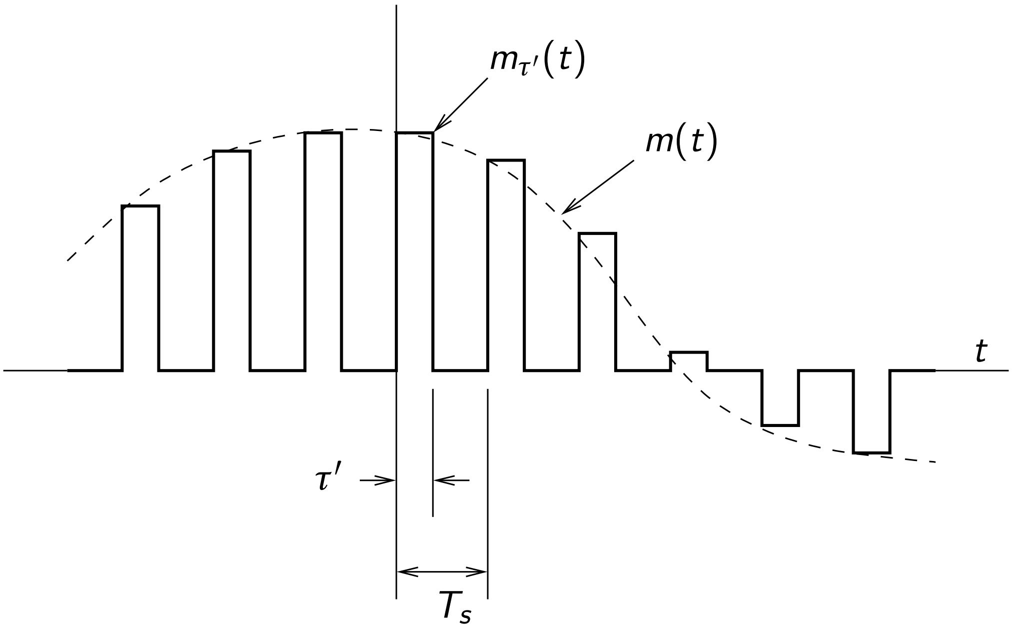


Figure – Modulation PAM au moyen d'impulsions rectangulaires.

Modulation *Pulse Amplitude Modulation PAM* II

$$\mathscr{M}_{\tau'}(f) = \mathscr{P}(f)\left[\mathscr{G}(f) \otimes \left(\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f - n\mathrm{f}_s)\right)\right] \quad (186)$$

$$= \mathscr{P}(f)\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathscr{G}(f - n\mathrm{f}_s) \quad (187)$$

$$= \frac{e^{-\pi j f \tau'}}{T_s}\frac{\sin(\pi f \tau')}{\pi f}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathscr{G}(f - n\mathrm{f}_s) \quad (188)$$

Modulation *Pulse Amplitude Modulation PAM* III

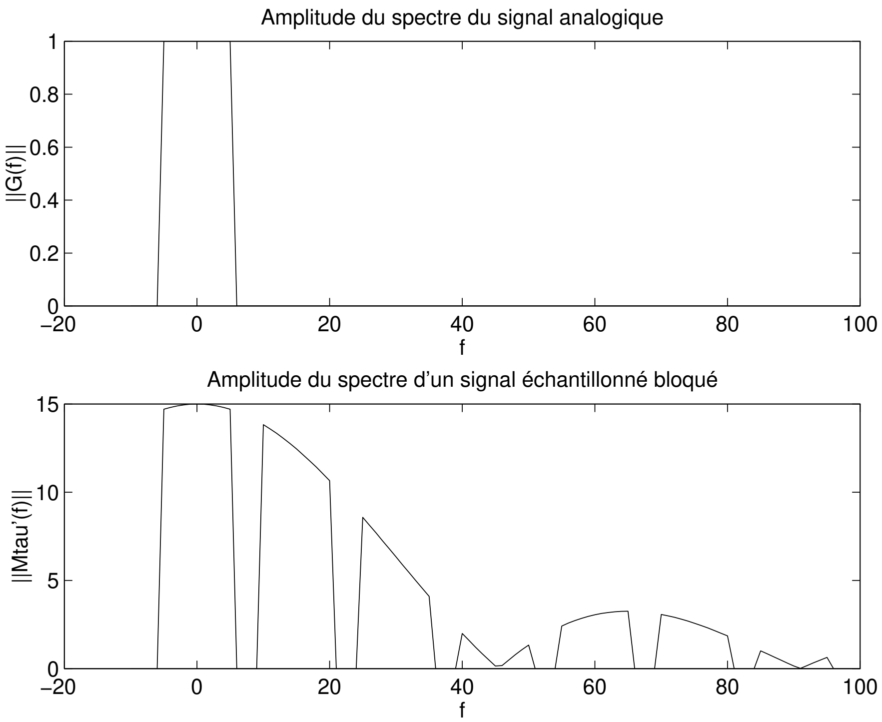


Figure – Spectre d'un signal analogique et du signal échantillonné bloqué.

Pulse Duration Modulation (PDM)

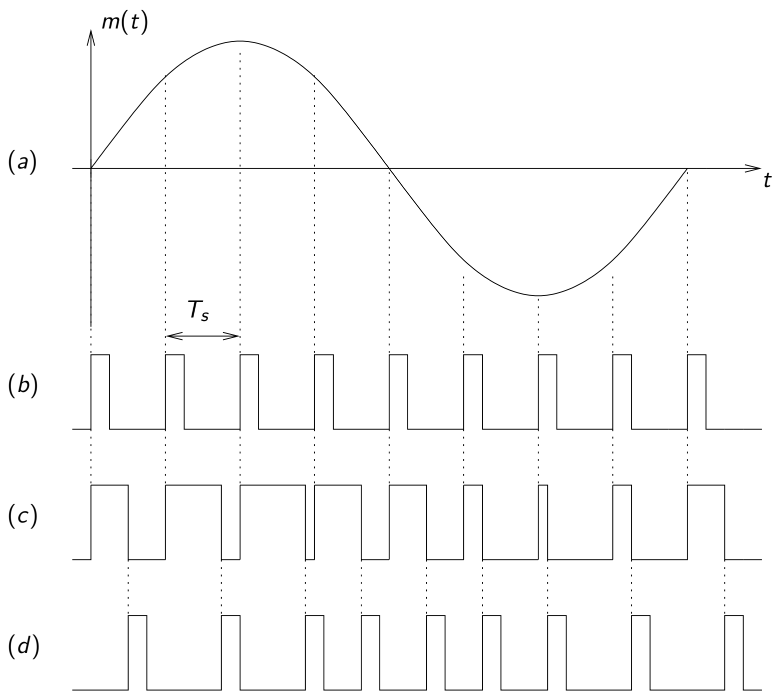


Figure – (a) un signal modulant, (c) modulation PDM et (d) modulation PPM.

$$p(t) = 0, \ \tau = k_p \left| m(t) \right|_{\max} < \frac{T_s}{2} \tag{189}$$

Pulse Position Modulation (PPM)

Un signal PPM s'écrit

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} p(t - nT_s - k_p m[nT_s]) \tag{190}$$

où $p(t)$ est une impulsion centrée

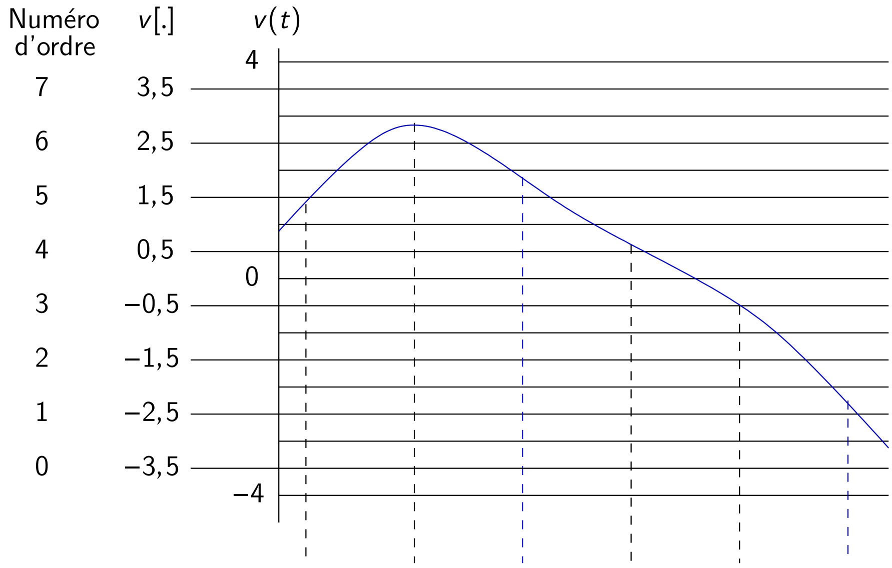
$$\begin{aligned}
\mathscr{M}_{\tau'}(f) &= \mathscr{P}(f)\left[\mathscr{G}(f) \otimes \left(\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(f-nf_s)\right)\right] && (191)\\
&= \mathscr{P}(f)\frac{1}{T_s}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathscr{G}(f-nf_s) && (192)\\
&= \frac{e^{-\pi j f\tau'}}{T_s}\frac{\sin(\pi f\tau')}{\pi f}\sum_{n=-\infty}^{+\infty}\mathscr{G}(f-nf_s) && (193)
\end{aligned}$$

de largeur fixe τ. Pour éviter l'interférence entre symboles successifs, il faut respecter la condition suivante qui fait intervenir la largeur de l'impulsions

$$p(t) = 0,\ \ k_p\,|m(t)|_{\max} < \frac{T_s}{2} - \frac{\tau}{2} \tag{194}$$

Pulse Code Modulation (PCM)

Principe



$m(t)$	1,3	2,8	1,8	0,6	−0,5	−2,3
$m[nT_s]$	1,5	2,5	1,5	0,5	−0,5	−2,5
Numéro d'ordre	5	6	5	4	3	1
Code PCM	101	110	101	100	011	001

Figure – Échantillons instantanés, quantifiés et codes PCM.

Quantification

Définition (Quantification)

Le processus consistant à transformer un échantillon d'amplitude $m[nT_s]$ d'un message $m(t)$ pris au temps $t = nT_s$ en une amplitude $v[nT_s]$, choisie dans un ensemble fini de valeurs possibles, est appelé *quantification* (*quantization* en anglais).

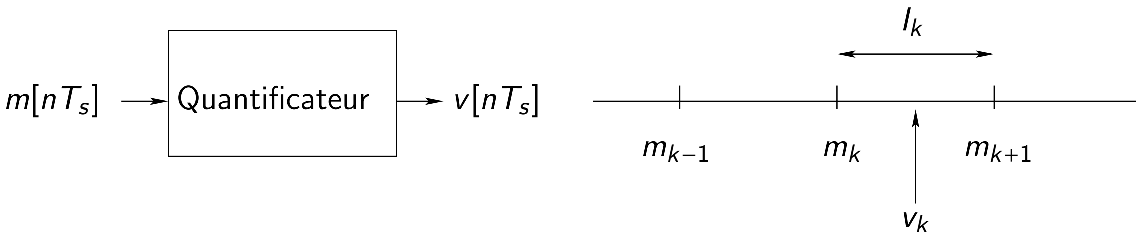


Figure – Schéma de principe d'un quantificateur sans mémoire.

Fonctions "escalier de quantification"

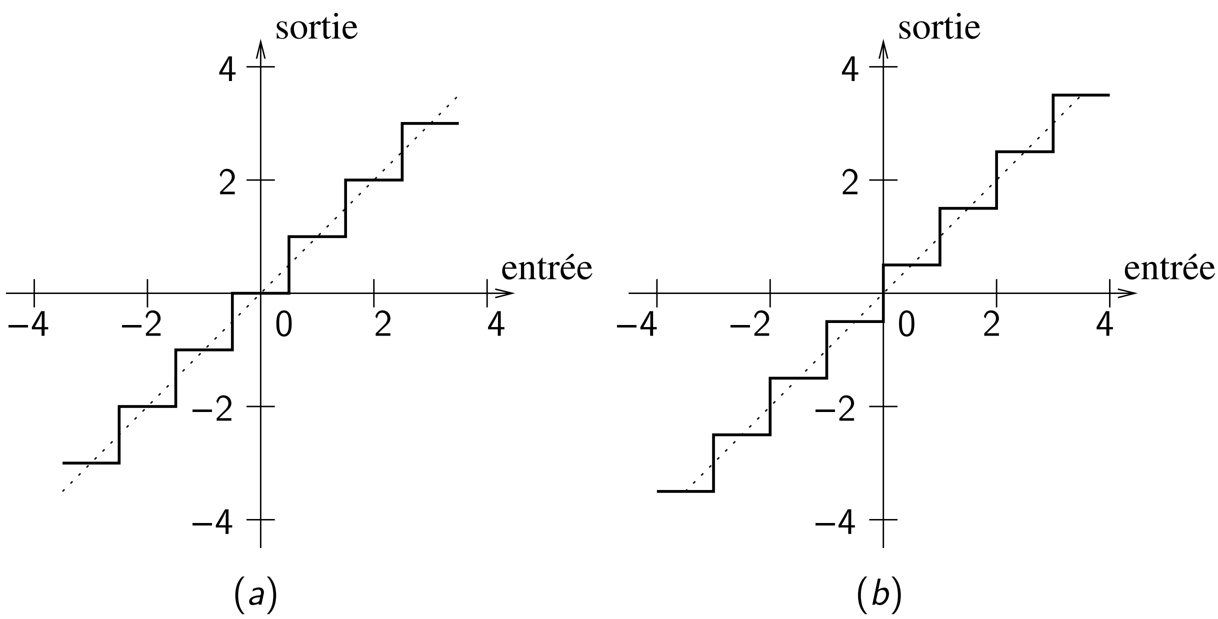


Figure – Formes alternatives pour la fonction de quantification (quantification uniforme).

Calcul du bruit de quantification I

Modèle.
Un quantificateur $\phi(.)$ est une application qui envoie la variable aléatoire M d'amplitude continue sur une variable aléatoire discrète V :

$$\phi : M \rightarrow V \tag{195}$$

On définit alors une variable aléatoire Q représentant l'**erreur de quantification** de valeur q comme :

$$q = v - m \tag{196}$$

On a donc le modèle entre variables aléatoires suivant :

$$Q = V - M \tag{197}$$

Calcul du bruit de quantification II

Moyenne et variance ?
Si le système est construit correctement, on a $\mu_M = \mu_Q = 0$.
En conséquence,

$$\sigma_M^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} m^2 f_M(m) dm \tag{198}$$

$$\sigma_Q^2 = \int_{-\infty}^{+\infty} q^2 f_Q(q) dq \tag{199}$$

On voudrait trouver l'expression de σ_Q^2 pour caractériser le "bruit de quantification", c'est-à-dire la puissance du bruit introduit par le processus de quantification.

Calcul du bruit de quantification III

Calcul de σ_Q^2

Soit M définie sur la plage de valeurs $[-m_{\text{max}}, m_{\text{max}}]$. Le *pas de quantification*, noté $\triangle$, vaut

$$\triangle = \frac{2m_{\text{max}}}{L} \tag{200}$$

s'il y a L niveaux possibles.

Hypothèse

La variable M est uniformément distribuée sur la plage complète $[-m_{\text{max}}, m_{\text{max}}]$.

(1) On regarde un *intervalle unique* de quantification.

Si la valeur q de l'erreur de quantification est exprimée par rapport au milieu d'un intervalle de largeur $\triangle$, les bornes de l'erreur sont

$$-\triangle/2 \leq q \leq \triangle/2 \tag{201}$$

Calcul du bruit de quantification IV

Comme, la variable M est uniformément distribuée sur $[-m_{\text{max}}, m_{\text{max}}]$, elle l'est aussi sur chaque intervalle $[-\frac{\triangle}{2}, \frac{\triangle}{2}]$.

Dès lors, l'erreur de quantification Q a une densité de probabilité également uniforme :

$$f_Q(q) = \begin{cases} \frac{1}{\triangle}, & -\frac{\triangle}{2} < q \leq \frac{\triangle}{2} \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \tag{202}$$

Pour cet intervalle, on calcule alors la valeur de l'erreur quadratique moyenne

$$\sigma_Q^2 = E\left\{(Q-\mu_Q)^2\right\} = E\left\{Q^2\right\} = \int_{-\frac{\triangle}{2}}^{\frac{\triangle}{2}} q^2 f_Q(q)\, dq \tag{203}$$

$$= \frac{1}{\triangle}\int_{-\frac{\triangle}{2}}^{\frac{\triangle}{2}} q^2 dq = \frac{\triangle^2}{12} \tag{204}$$

Calcul du bruit de quantification V

(2) Généralisation à tous les intervalles.

Jusqu'à présent, on a examiné la situation d'un *intervalle unique* de quantification, à savoir un intervalle de largeur $\triangle$.

Si la variable M est uniformément distribuée sur la plage dynamique $[-m_{\text{max}}, m_{\text{max}}]$, alors l'erreur de quantification globale est identique à celle d'un intervalle.

Calcul du bruit de quantification VI

Expression alternative pour

$$\boxed{\sigma_Q^2 = \frac{\triangle^2}{12} \qquad (205)}$$

Soit R le nombre de *bits utilisés par échantillon*. Le nombre de niveaux s'exprime comme

$$L = 2^R \iff R = \log_2 L \qquad (206)$$

d'où

$$\triangle = \frac{2m_{\text{max}}}{L} = \frac{2m_{\text{max}}}{2^R} \qquad (207)$$

et

$$\sigma_Q^2 = \frac{\triangle^2}{12} = \frac{\left(\frac{2m_{\text{max}}}{2^R}\right)^2}{12} \qquad (208)$$

En conclusion,

$$\boxed{\sigma_Q^2 = \frac{1}{3} m_{max}^2 2^{-2R} \qquad (209)}$$

Calcul du bruit de quantification VII

Définition (Rapport signal à bruit de quantification)

Soit σ_M^2 la puissance moyenne du message $m(t)$.
Le *rapport signal à bruit de quantification* σ_M^2/σ_Q^2 est égal à

$$\left(\frac{S}{N}\right)_q = \frac{\sigma_M^2}{\sigma_Q^2} \quad (210)$$

$$= \left(\frac{3\sigma_M^2}{m_{\max}^2}\right)2^{2R} \quad (211)$$

Règle pratique (pour une quantification uniforme)

En décibels, on a

$$10\log_{10}\left(\frac{S}{N}\right)_q = 10\log_{10}\left[\left(\frac{3\sigma_M^2}{m_{\max}^2}\right)2^{2R}\right] \quad (212)$$

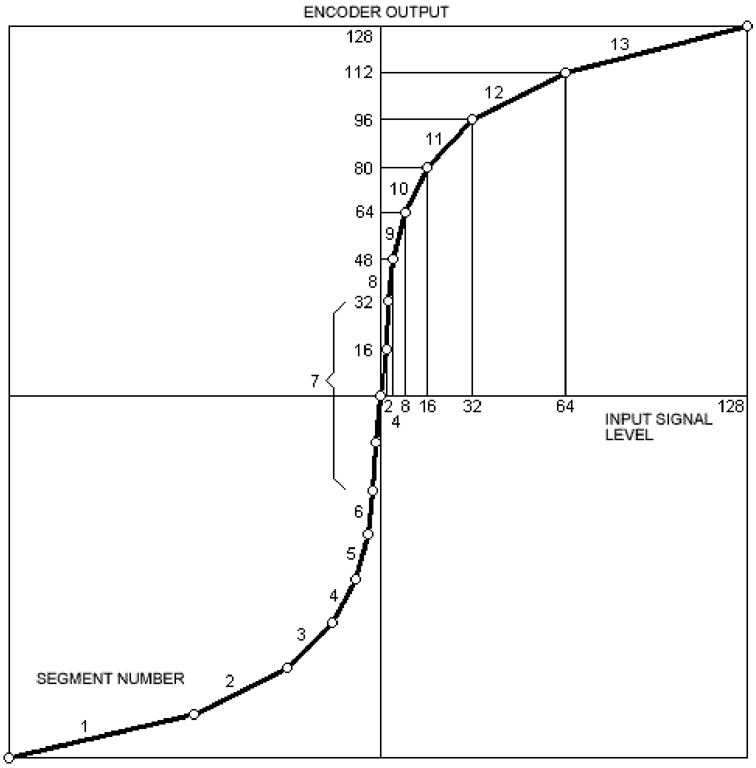
$$= 10\log_{10}3 + 20\log_{10}\left(\frac{\sigma_M}{m_{\max}}\right) + 2R\,10\log_{10}2$$

$$= 4,77 + 20\log_{10}\left(\frac{\sigma_M}{m_{\max}}\right) + 6R \quad (213)$$

L'ajout d'un bit supplémentaire (passage de R bits à $R+1$ bits) **augmente** *le rapport signal à bruit de* **6 [dB]**.

Quantification non uniforme

En Europe, on utilise la loi A.



"Modulation" delta

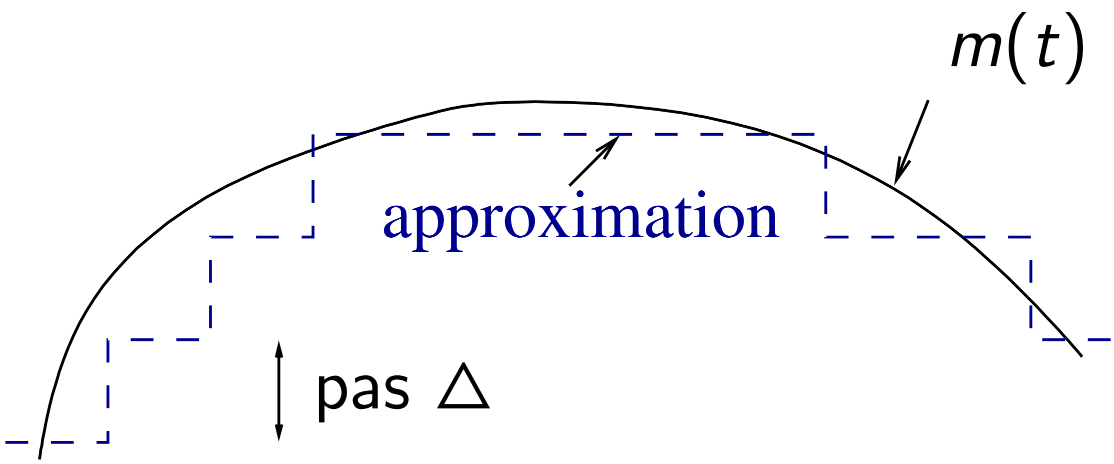


Figure – L'erreur de quantification dans une modulation delta.

Numérisation : les principes en chiffres

Éléments importants :

1. bande de fréquences utilisée pour le signal
2. W : plus haute fréquence du signal en bande de base
3. f_s : fréquence d'échantillonnage
   - règle théorique : $f_s > 2\,W$
   - règle pratique (critère de Nyquist) : $f_s > 2{,}2\,W$
4. n : nombre de bits utilisés par échantillon (quantification)
5. débit $= f_s \times n$

Signal unités	Bande Hz	W Hz	f_s éch/s	n b/éch	Débit b/s
Audio (téléphone)	[300 Hz, 3400 Hz]	3400 Hz	8000 éch/s	8	64 kb/s
Audio (qualité CD)	[0 Hz, 20 kHz]	20 kHz	44,1 kéch/s	16	705,6 kb/s

A propos de la compression

Objectif de la compression de données ≡ réduire le débit binaire.

Définition

$$\text{Taux de compression} = \frac{\text{débit avant compression}}{\text{débit après compression}}$$

Différents types de compression :

- compression sans perte
  - fichiers texte
  - données médicales
- compression avec perte
  - image (JPEG) : taux de compression typique ≈ 10
  - son (mp3) : taux de compression typique ≈ 10
  - video (MPEG, divX, H264) : taux de compression typique ≈ 50-100

Table des matières

Transmission de signaux numériques en bande de base

Table des matières

Nécessité du codage I

Théorème (Shannon-Hartely)

Capacité d'un canal C *(conditions pour avoir un taux d'erreur par bit $P_e \to 0$)*

$$C\,[b/s] = B \times \log_2\left(1 + \frac{S}{N}\right) \tag{214}$$

où

- B *est la largeur du canal en Hz*
- $\frac{S}{N}$ *est le rapport signal à bruit (en Watt/Watt, pas en dB).*

Question : peut-on transmettre à un débit supérieur à la capacité de canal ?

Nécessité du codage II

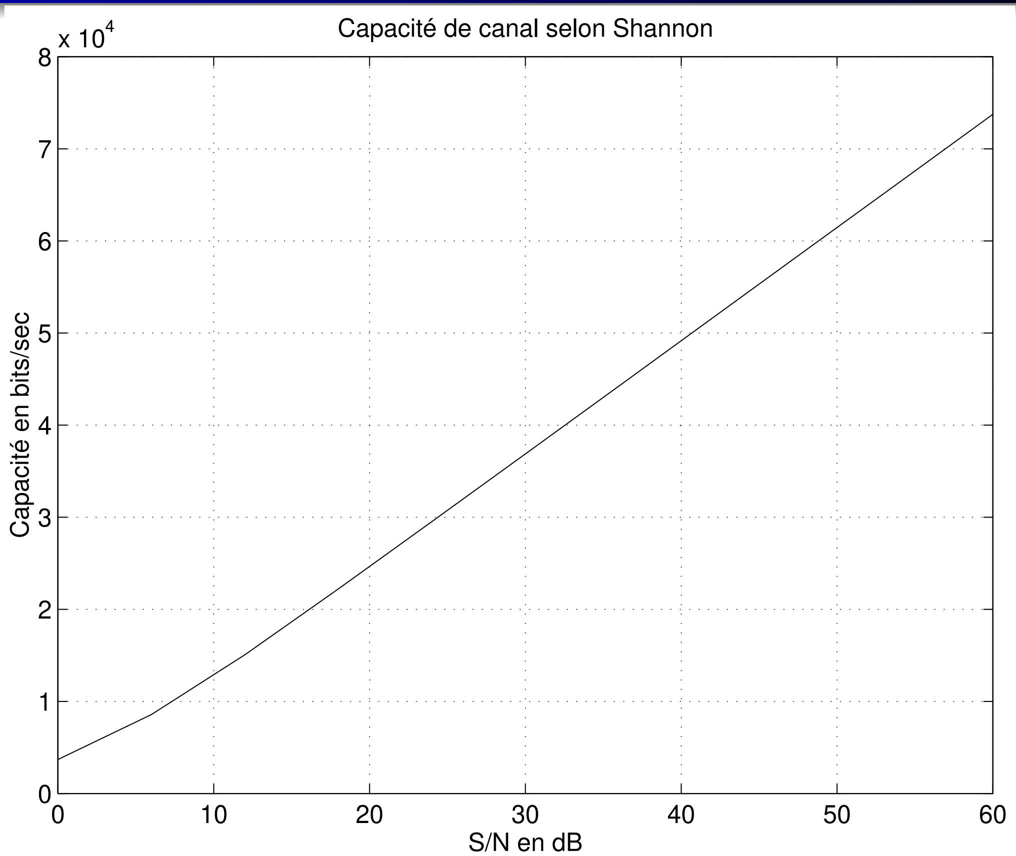


Figure – Capacité d'un canal téléphonique ($W = 3{,}7\,[kHz]$).

Transmission des données binaires

Considérations générales
Deux méthodes :

- la *transmission en bande de base* (W) : méthode correspondant à l'émission directe sur le canal de transmission.
- la *transmission par modulation d'une porteuse* : méthode utilisant un cosinus pour la transmission.

Caractéristiques importantes :

- Emetteur :
  - le *débit*, exprimé en $[b/s]$.
  - les *niveaux physiques associés à chaque bit* (0 ou 1) ou groupes de bits.
  - l'*encombrement spectral*.
- Récepteur
  - la probabilité d'erreur par bit transmis (*bit error rate*) $\Rightarrow P_e$

Mesure de l'encombrement spectral : efficacité spectrale

Lien entre le débit et la bande passante de la représentation analogique du signal : *efficacité spectrale*.

Définition

L'efficacité spectrale η est définie comme le rapport entre le débit binaire et la bande nécessaire à la transmission du signal d'information numérique :

$$\eta = \frac{f_b}{W} \tag{215}$$

Exemple

A titre de comparaison, dans le cas du GSM (transmission numérique par modulation dans un canal radio ; $W \rightarrow B$), l'efficacité spectrale est de l'ordre de 1 :

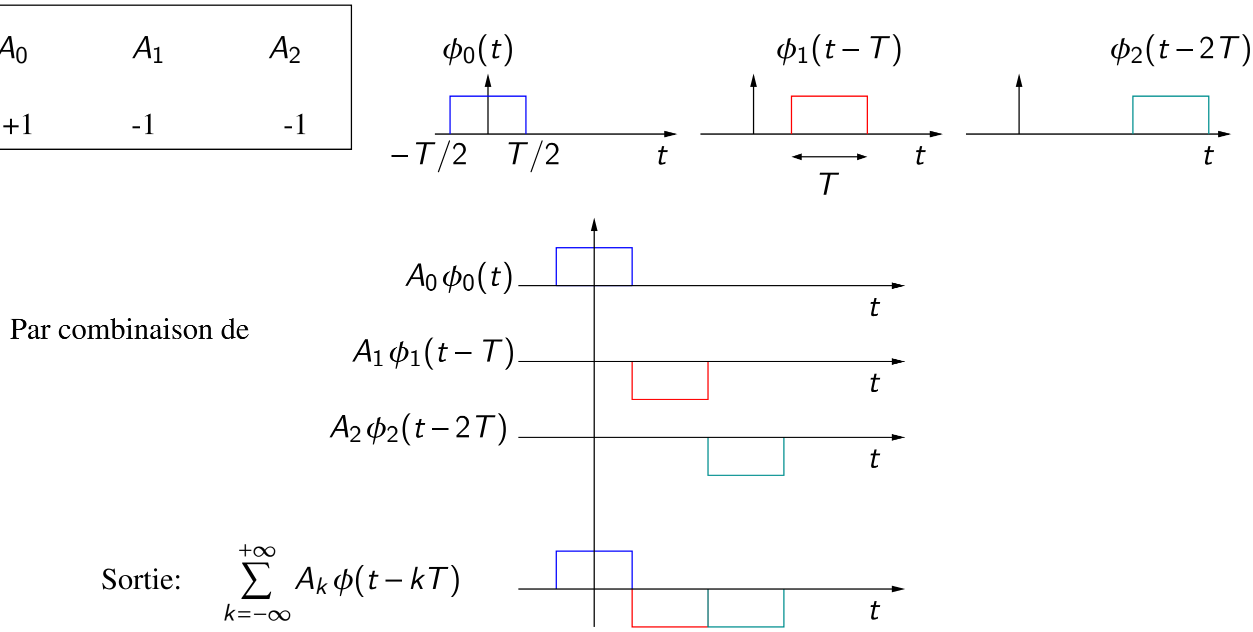
$$\eta_{GSM} = \frac{f_b}{B} \approx 1 \tag{216}$$

Construction d'un signal d'information numérique : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \phi_k(t-kT)$ I

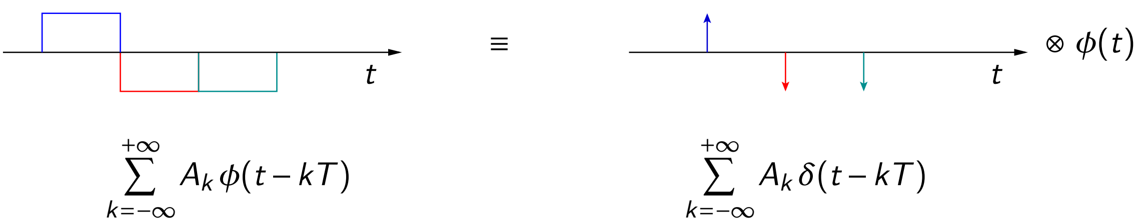
Information: A_k

A_0	A_1	A_2
+1	-1	-1

Onde de mise en forme : $\phi_k(t)$



Construction d'un signal d'information numérique : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \phi_k(t-kT)$ II



On a trois composantes pour produire $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \phi(t-kT)$:

1. une série aléatoire A_k à transmettre, *indexée*, mais sans notion temporelle (!),
2. des deltas $\delta(t-kT)$ équi-espacés de T ; on choisit un rythme d'envoi de $\frac{1}{T}$,
3. une onde de mise en forme $\phi(t)$ que l'on prend unique.

Construction d'un signal d'information numérique : $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \phi_k(t-kT)$ III

Remarques

1. Pour chaque instant t, seule une variable aléatoire A_k intervient.
   Il n'y a donc **aucun recouvrement temporel entre l'information de** A_0 **et** A_1 ; les symboles sont envoyés à tour de rôle.
2. **Comme** $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \phi(t-kT)$ **est un processus stochastique**, pour connaître son occupation spectrale (en puissance), il faut calculer la densité spectrale de ce signal (si elle existe !).

Calcul du spectre : préambule

Signal d'information

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \phi(t-kT) \quad (217)$$

Caractéristiques :

- A_k est une série aléatoire
- $g(t)$ est une fonction continue

$g(t)$ est donc un signal stochastique dont on cherche à déterminer la densité spectrale de puissance : $\gamma_g(f)$

Spectre des signaux numériques ?

Modèle théorique linéaire

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \phi(t - kT) \tag{218}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{G}(f) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \mathcal{F}\{\phi(t - kT)\} && (219) \\ &= \mathcal{F}\{\phi(t)\} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k e^{-2\pi j f k T} && (220) \\ &= \Phi(f) \mathcal{F}\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t - kT) \right\} && (221) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ il faut donc calculer la densité spectrale de $\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t - kT)$ pour avoir $\gamma_g(f)$.

Train d'impulsions de Dirac : analyse du signal I

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t - kT) \tag{222}$$

La moyenne de ce signal vaut

$$\mu_X = E\left\{ \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t - kT) \right\} = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_A \delta(t - kT) \tag{223}$$

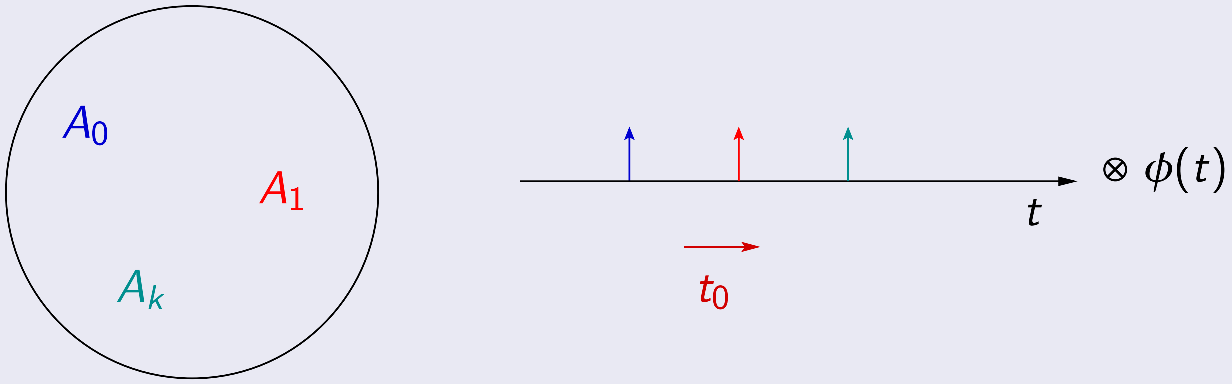
La moyenne n'est pas constante et le signal $X(t)$ n'est pas stationnaire au sens large $\Rightarrow$ problème.

Solution : stationnarisation par ajout d'un temps aléatoire T_0, dont la densité de probabilité est

$$\mathrm{pdf}_{T_0}(t_0) = \begin{cases} \frac{1}{T} & \text{si } t_0 \in [0, T] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \tag{224}$$

Train d'impulsions de Dirac : analyse du signal II

Comprendre la stationnarisation



- A_k est un ensemble de valeurs aléatoires à transmettre. Il n'y a pas de notion temporelle, ni d'indication sur le rythme d'envoi.
- La variable aléatoire T_0 concerne uniquement le glissement de l'ensemble des deltas $\delta(t-kT)$. Cette variable aléatoire est indépendante de chacun des A_k.

ps : la fonction choisie pour la mise en forme $\phi(t)$ a pour but d'étaler le signal, temporellement sur l'intervalle $[0, T]$

Train d'impulsions de Dirac : analyse du signal III

Soit donc à analyser le signal aléatoire $X(t)$

$$X(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \delta(t - kT - T_0) \tag{225}$$

Analyse nécessaire des propriétés suivantes pour établir la stationnarité au sens large de $X(t)$:

(1) Moyenne ?

(2) Fonction d'autocorrélation/densité spectrale de puissance ?

(1) Moyenne d'un train d'impulsions $X(t)$ I

Hypothèses :

- la séquence A_k est stationnaire au sens large,
- la moyenne vaut
$$\mu_A = E\{A_k\} \tag{226}$$
- la fonction d'autocorrélation de A vaut
$$\Gamma_{AA}(k, k-l) = E\{A_k A_{k-l}\} = \Gamma_{AA}(l) \tag{227}$$

Étapes de calcul :

$$\mu_{X|T_0}(t|t_0) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_A \delta(t - kT - t_0) \tag{228}$$

(1) Moyenne d'un train d'impulsions $X(t)$ II

L'espérance de X, non conditionnellement à t_0, vaut

$$\begin{aligned}
\mu_X &= \int_0^T \mu_{X|T_0}(t|t_0) f_{T_0}(t_0) dt_0 && (229)\\
&= \int_0^T \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \mu_A \delta(t - kT - t_0) \frac{1}{T} dt_0 && (230)\\
&= \frac{\mu_A}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_0^T \delta(t - kT - t_0) dt_0 && (231)
\end{aligned}$$

(1) Moyenne d'un train d'impulsions $X(t)$ III

En effectuant le changement de variable $z = t - kT - t_0$, d'où $dz = -dt_0$

$$\begin{aligned}
\mu_X &= \frac{\mu_A}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{t-kT}^{t-(k+1)T} \delta(z)(-dz) && (232)\\
&= \frac{\mu_A}{T} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \int_{t-(k+1)T}^{t-kT} \delta(z)dz && (233)\\
&= \frac{\mu_A}{T} \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(z)dz && (234)\\
&= \frac{\mu_A}{T} && (235)
\end{aligned}$$

La moyenne ne dépend donc pas du temps.

(2) Fonction d'autocorrélation et (éventuelle) densité spectrale de $X(t)$ I

Conditionnellement à $T_0 = t_0$:

$$\begin{aligned}
E\{X(t)X(t-\tau)|t_0\} &= E\left\{\sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k\delta(t-kT-t_0) \sum_{k'=-\infty}^{+\infty} A_{k'}\delta(t-\tau-k'T-t_0)\right\}\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \Gamma_{AA}(k-k')\delta(t-kT-t_0)\delta(t-\tau-k'T-t_0)
\end{aligned}$$

Puis on calcule l'espérance mathématique non conditionnelle (on pose à nouveau $z = t - kT - t_0$)

$$\begin{aligned}
\Gamma_{XX}(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \Gamma_{AA}(k-k') \int_0^T \frac{1}{T}\delta(t-kT-t_0)\delta(t-\tau-k'T-t_0)dt_0\\
&= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{k'=-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma_{AA}(k-k')}{T} \int_{t-(k+1)T}^{t-kT} \delta(z)\delta(z-\tau+(k-k')T)dz
\end{aligned}$$

(2) Fonction d'autocorrélation et (éventuelle) densité spectrale de $X(t)$ II

On remplace ensuite k' par $k-l$ (avec k constant). Dès lors,

$$\begin{aligned}
\Gamma_{XX}(\tau) &= \sum_{k=-\infty}^{+\infty}\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma_{AA}(l)}{T}\int_{t-(k+1)T}^{t-kT}\delta(z)\delta(z-\tau+lT)dz && (236)\\
&= \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma_{AA}(l)}{T}\sum_{k=-\infty}^{+\infty}\int_{t-(k+1)T}^{t-kT}\delta(z)\delta(z-\tau+lT)dz && (237)\\
&= \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma_{AA}(l)}{T}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(z)\delta(z-\tau+lT)dz && (238)\\
&= \sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma_{AA}(l)}{T}\delta(\tau-lT) && (239)
\end{aligned}$$

D'où la densité spectrale vaut :

$$\gamma_X(f)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma_{AA}(l)}{T}e^{-2\pi jflT} \qquad (240)$$

Résumé pour $X(t)=\sum_{k=-\infty}^{+\infty}A_k\delta(t-kT-T_0)$

Moyenne d'un train d'impulsions

$$\mu_X=\frac{\mu_A}{T} \qquad (241)$$

Densité spectrale d'un train d'impulsions

$$\gamma_X(f)=\sum_{l=-\infty}^{+\infty}\frac{\Gamma_{AA}(l)}{T}e^{-2\pi jlfT} \qquad (242)$$

Densité spectrale d'un signal numérique mis en forme

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \phi(t - kT) \tag{243}$$

est le résultat d'un train d'impulsions modulées en amplitude par la séquence A_k au travers d'un filtre de mise en forme.
Par application des résultats relatifs au passage d'un signal aléatoire à travers un filtre linéaire :

$$\mu_g = \frac{\mu_A}{T} \Phi(0) \tag{244}$$

Par Wiener-Kintchine :

$$\gamma_g(f) \quad = \quad \|\Phi(f)\|^2 \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \frac{\Gamma_{AA}(l)}{T} e^{-2\pi j l f T} \tag{245}$$

Cas particulier : signaux non-corrélés I

On veut calculer les $\Gamma_{AA}(l)$ (pour rappel : $\Gamma_{AA}(l) = E\{A_k A_{k-l}\}$).
Hypothèse : A_k est une séquence de variables aléatoires *non-corrélées*, autrement dit $C\{A_k A_{k-l}\} = 0$.

Cas $l \neq 0$

Comme, $C\{A_k A_{k-l}\} = 0$,

$$\begin{aligned} C\{A_k A_{k-l}\} &= E\{(A_k - \mu_A)(A_{k-l} - \mu_A)\} && (246)\\ &= E\{A_k A_{k-l}\} - E\{A_k\}\mu_A - \mu_A E\{A_{k-l}\} + \mu_A^2 && (247)\\ &= \Gamma_{AA}(l) - \mu_A^2 && (248) \end{aligned}$$

Autrement dit, $\Gamma_{AA}(l \neq 0) = \mu_A^2$.

Cas $l = 0$

$\sigma_A^2 = E\{(A_k - \mu_A)(A_k - \mu_A)\} = E\{A_k A_k\} - \mu_A^2$.
D'où, $\Gamma_{AA}(0) = E\{A_k A_k\} = \sigma_A^2 + \mu_A^2$.

Cas particulier : signaux non-corrélés II

En conséquence,

$$\gamma_A(fT) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \Gamma_{AA}(l) e^{-2\pi j l f T} \quad (249)$$

$$= \sigma_A^2 + \sum_{l=-\infty}^{+\infty} \mu_A^2 e^{-2\pi j l f T} \quad (250)$$

$$= \sigma_A^2 + \mu_A^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right) \quad (251)$$

En effet, par la propriété d'échantillonnage appliquée à la fonction 1, $\sum_{l=-\infty}^{+\infty} e^{-2\pi j l T f} = \mathscr{F}\left\{\sum_{l=-\infty}^{+\infty} \delta(t - lT) = \sum_{l=-\infty}^{+\infty} 1 \times \delta(t - lT)\right\} = \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$

Cas particulier : signaux non-corrélés III

La densité spectrale vaut donc finalement

$$\gamma_g(f) = \|\Phi(f)\|^2 \frac{1}{T} \left[\sigma_A^2 + \mu_A^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(f - \frac{m}{T}\right)\right] \quad (252)$$

S'il s'agit de variables à moyenne nulle ($\mu_A = 0$), alors

$$\gamma_g(f) = \|\Phi(f)\|^2 \frac{\sigma_A^2}{T} \quad (253)$$

Cas particulier : signaux non-corrélés IV

Comprendre et interpréter $\gamma_g(f)$

$$\gamma_g(f) = \|\Phi(f)\|^2 \frac{\sigma_A^2}{T} \tag{254}$$

- La puissance du signal à envoyer est déterminée par σ_A^2.
- Le spectre du processus stochastique $g(t)$, correspondant à une façon d'envoyer l'ensemble des symboles $\{A_k\}$, est "mis en forme" par la transformée de Fourier de la fonction $\phi(t)$.

Transmission d'impulsions en bande de base

Codages linéaires

On peut distinguer les principales catégories suivantes pour le codage linéaire de signaux PCM :

1. Nonreturn-to-zero (NRZ)
2. Return-to-zero (RZ)
3. Codage de la phase
4. Codage multi-niveaux

Codages dits "complets"

- Ils se réfèrent à des tables de conversion (par exemple 5B/4T, 4B/3T, 2B1Q).

Variantes de codage I

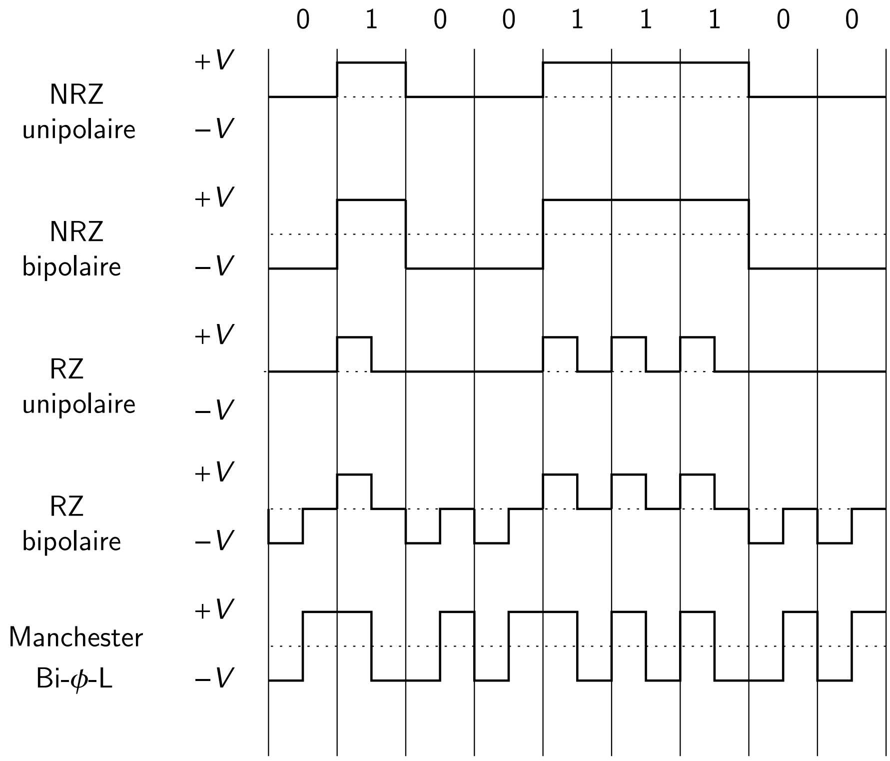


Figure – Variantes de codage en ligne PCM.

Variantes de codage II

Démarche

Pour ces variantes, on doit calculer

$$\gamma_g(f) = \|\Phi(f)\|^2 \frac{1}{T}\left[\sigma_A^2 + \mu_A^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\delta\left(f - \frac{m}{T}\right)\right] \qquad (255)$$

c'est-à-dire :

1. μ_A et σ_A^2, ce qui nécessite de connaître les probabilités et les niveaux de tension associés aux A_k.
   On s'aide d'un tableau qui a la forme de

Symbole	Probabilité	A_k (niveau de tension)	Onde
0	$1-p$	...	...
1	p	...	...

2. la transformée de Fourier de l'onde de mise en forme $\Phi(f)$.
3. et donc finalement, la densité spectrale $\gamma_g(f)$, avec simplifications par rapport aux $\delta\left(f - \frac{m}{T}\right)$ si d'application.

Codage NRZ unipolaire

La modélisation complète du codage NRZ unipolaire est résumée dans le tableau suivant :

Symbole	Probabilité	A_k	Onde
0	$1-p$	0	...
1	p	V	$1, 0 \leq t < T$

Moyenne

$$\mu_A = Vp \tag{256}$$

Variance

$$\sigma_A^2 = E\left\{(A_k - \mu_A)^2\right\} = p(1-p)V^2 \tag{257}$$

Filtre

$$\|\Phi(f)\|^2 = T^2\left(\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right)^2 \tag{258}$$

Densité spectrale de puissance
($\gamma_g(f) = \|\Phi(f)\|^2 \frac{1}{T}\left[\sigma_A^2 + \mu_A^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\delta(f - \frac{m}{T})\right]$)

$$\gamma(f) = p(1-p)V^2 T\left(\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right)^2 + p^2V^2\delta(f) \tag{259}$$

Interprétation et vérification

$$\gamma(f) = p(1-p)V^2 T\left(\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right)^2 + p^2V^2\delta(f) \tag{260}$$

1. Pour $p = 0$, la puissance calculée par $P = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(f)df$ est nulle.
2. Pour $p = 1$, la puissance vaut

$$P = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma(f)df = \int_{-\infty}^{+\infty} V^2\delta(f)df = V^2 \tag{261}$$

3. Pour $p = \frac{1}{2}$, on s'attend à une puissance de $\frac{V^2}{2}$. Vérifions cela

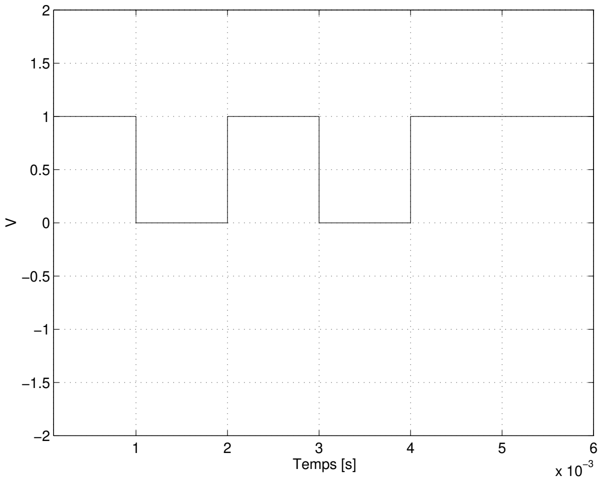
$$P = \frac{V^2T}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(\pi fT)}{\pi fT}\right)^2 df + \frac{V^2}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\delta(f)df \tag{262}$$

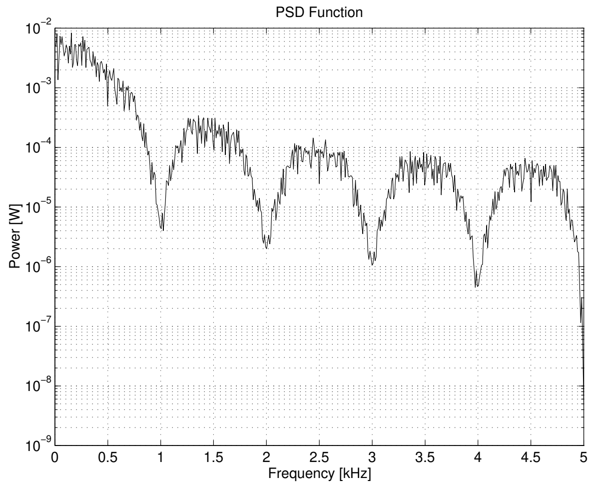
$$= \frac{V^2T}{4}\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 d\left(\frac{x}{\pi T}\right) + \frac{V^2}{4} \tag{263}$$

Comme $\int_{-\infty}^{+\infty}\left(\frac{\sin(x)}{x}\right)^2 dx = \pi$, on a que

$$P = \frac{V^2T}{4}\frac{1}{\pi T}\pi + \frac{V^2}{4} = \frac{V^2}{4} + \frac{V^2}{4} = \frac{V^2}{2} \tag{264}$$

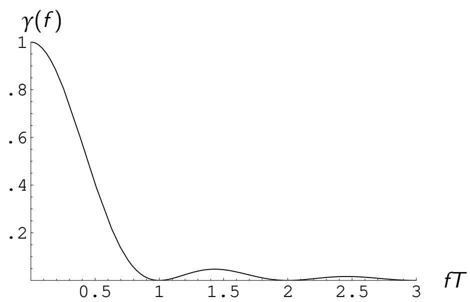
Études temporelles et fréquentielles





Bande passante d'un signal NRZ : choix pratique I

Le spectre du signal mis en forme est infini.



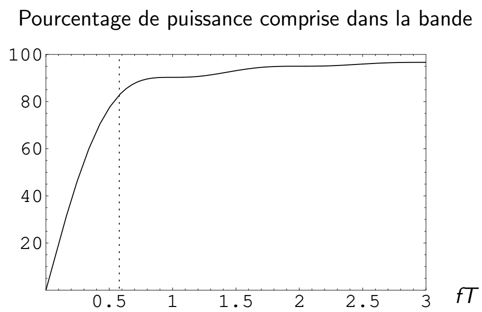


Figure – Analyse de la répartition de puissance.

Bande passante d'un signal NRZ : choix pratique II

Largeur de bande	% de puissance
$0,6/T_b$	84%
$1/T_b$	91,3%
$2/T_b$	95%

Table – Pourcentage de la puissance en fonction de la largeur de bande.

Règle : il faut au minimum que la fréquence "*fondamentale*" soit incluse dans la bande de fréquences, à savoir $1/(2T_b) = f_b/2$.

Choix de la *largeur de bande* (compromis) :

$$\frac{0,6}{T_b} \tag{265}$$

Dès lors, l'*efficacité spectrale* d'un codage NRZ vaut

$$\boxed{\eta_{NRZ} = \frac{f_b}{0,6/T_b} = \frac{f_b}{0,6\,f_b} \approx 1,6} \tag{266}$$

Effet de la limitation de la bande passante

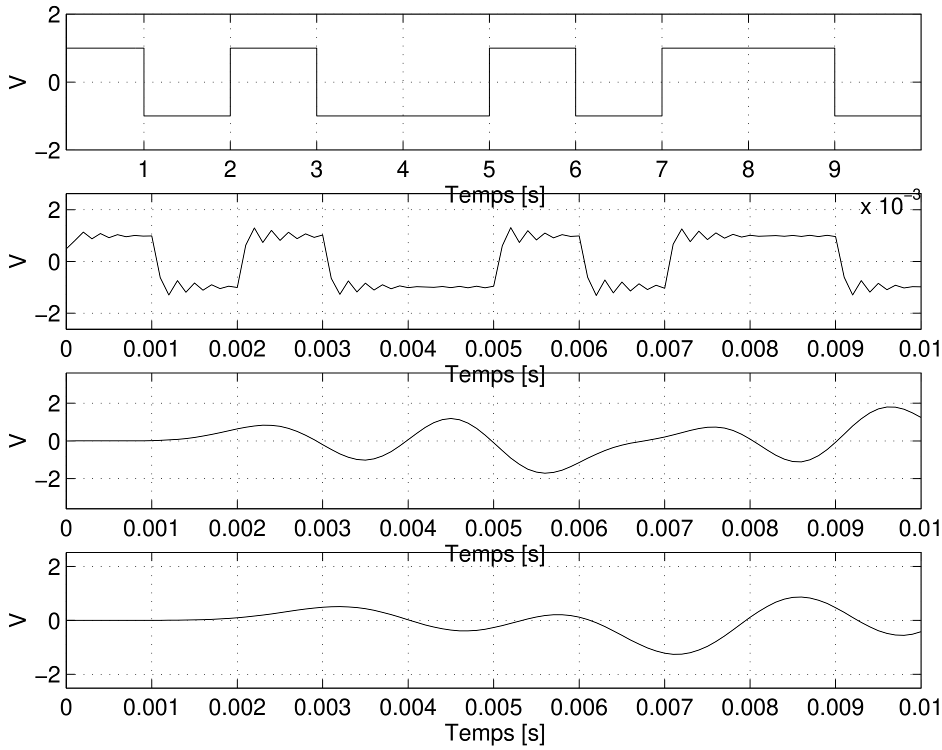


Figure – Effet de la limitation de la bande de fréquence sur un signal NRZ bipolaire : (a) signal original, (b) signal filtré à $5\,f_b$, (c) signal filtré à $0,6\,f_b$ et (d) signal filtré à $0,4\,f_b$.

Codage RZ unipolaire

Symbole	Probabilité	A_k	Onde
0	$1-p$	0	...
1	p	V	$1, 0 \leq t < \alpha T \quad (\alpha \leq 1)$

Variance

$$\sigma_A^2 = E\left\{A_k^2\right\} - \mu_A^2 = pV^2 - (pV)^2 = p(1-p)V^2 \tag{267}$$

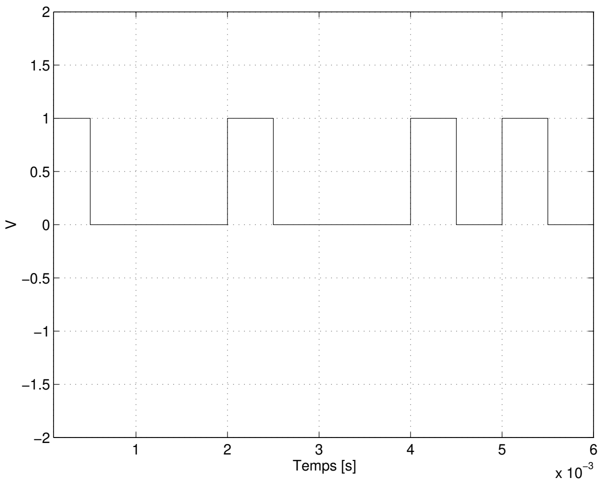
Filtre

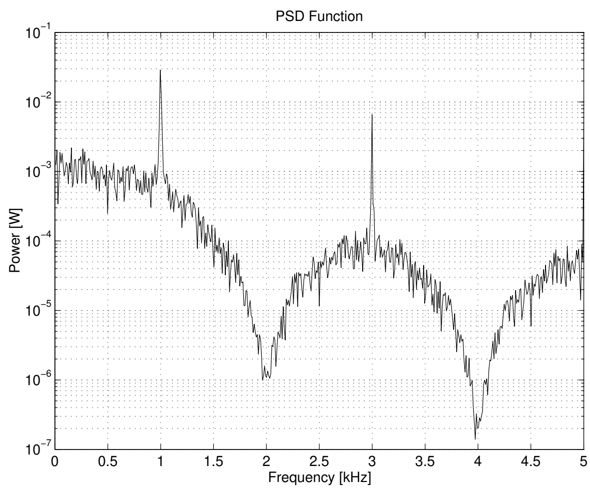
$$\|\Phi(f)\|^2 = \alpha^2 T^2 \left(\frac{\sin(\pi f \alpha T)}{\pi f \alpha T}\right)^2 \tag{268}$$

Densité spectrale de puissance
($\gamma_g(f) = \|\Phi(f)\|^2 \frac{1}{T}\left[\sigma_A^2 + \mu_A^2 \sum_{m=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\delta(f - \frac{m}{T})\right]$)
Si on prend $\alpha = \frac{1}{2}$, ce qui est le choix habituel,

$$\begin{aligned}\gamma(f) \quad &= \quad \frac{p(1-p)}{4} V^2 T \left(\frac{\sin(\pi f T/2)}{\pi f T/2}\right)^2 + \frac{p^2}{4} V^2 \delta(f) \\ &+ p^2 V^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 \pi^2} \delta\left(f - \frac{(2n+1)}{T}\right)\end{aligned} \tag{269}$$

Études temporelle et fréquentielle





Bande passante d'un signal RZ : choix pratique

Règle : il faut au minimum que la période "*fondamentale*" de T, soit la fréquence fondamentale f_b soit incluse dans la bande.

Choix de la *largeur de bande* (compromis) :

$$\frac{1,2}{T_b} \tag{270}$$

Dès lors, l'*efficacité spectrale* d'un codage RZ vaut

$$\boxed{\eta_{RZ} = \frac{f_b}{1,2/T_b} \approx 0,8} \tag{271}$$

Codage Manchester I

Symbole	Probabilité	A_k	Onde
0	$1-p$	$-V$	$-1, \quad 0 \leq t < T/2$ $+1, \quad T/2 \leq t < T$
1	p	V	$-1, \quad 0 \leq t < T/2$ $+1, \quad T/2 \leq t < T$

Variance

$$\sigma_A^2 = 4p(1-p)V^2 \tag{272}$$

Filtre

$$\begin{aligned} \Phi(f) &= \frac{T}{2}\left(\frac{\sin(\pi f T/2)}{\pi f T/2}\right)\left(-e^{-2\pi j f T/4} + e^{+2\pi j f T/4}\right) \\ &= T\left(\frac{\sin(\pi f T/2)}{\pi f T/2}\right) j \sin(\pi f T/2) \end{aligned} \tag{273}$$

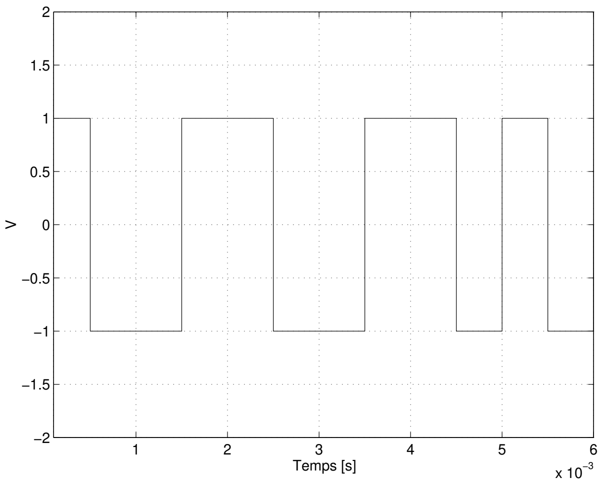
Codage Manchester II

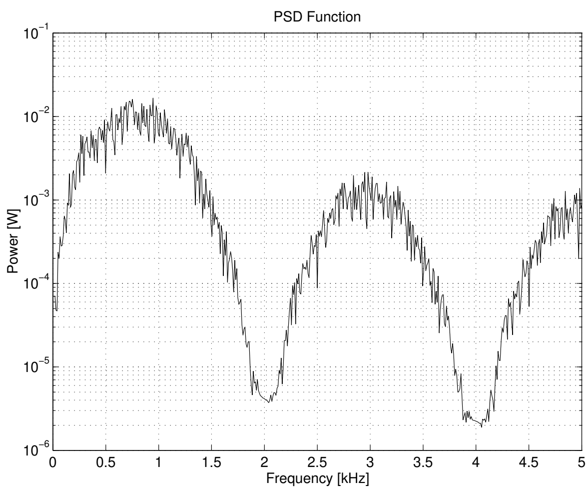
$$\|\Phi(f)\|^2 = T^2 \left(\frac{\sin(\pi f T/2)}{\pi f T/2}\right)^2 \sin^2(\pi f T/2) \qquad (274)$$

Dès lors

$$\begin{aligned}\gamma(f) = & \quad 4p(1-p)V^2 T \left(\frac{\sin^4(\pi f T/2)}{(\pi f T/2)^2}\right) \\ & + \quad 4(2p-1)^2 V^2 \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{(2n+1)^2\pi^2} \delta(f - \tfrac{(2n+1)}{T})\end{aligned} \qquad (275)$$

Études temporelle et fréquentielle I





Études temporelle et fréquentielle II

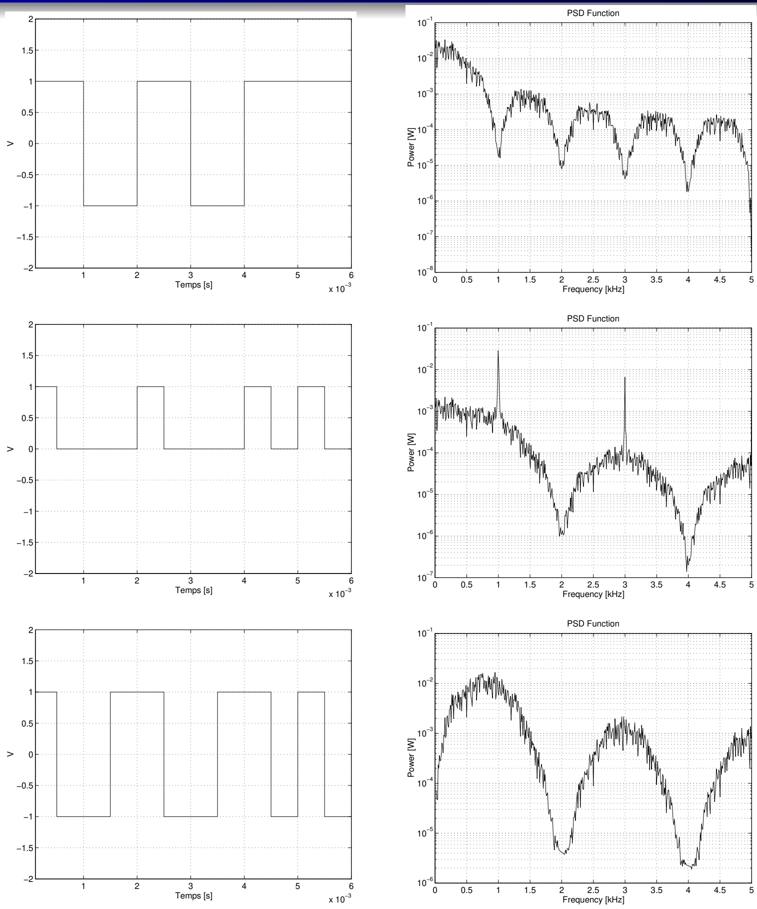


Table – Codage NRZ bipolaire, RZ unipolaire et Manchester.

Codage en blocs ou complets

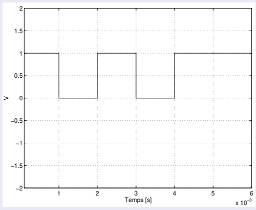
Valeur binaire	Code quaternaire
10	+3
11	+1
01	-1
00	-3

Table – Codage 2B/1Q.

Conception d'un récepteur

Émetteur

- On sait comment "fabriquer" un signal sur base d'une séquence binaire 101011 : $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \phi(t - kT)$



Récepteur

On veut retrouver 101011

- sur base de $g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \phi(t-kT) \Rightarrow \phi(t)$ va jouer un rôle
- en minimisant la probabilité d'erreur par bit P_e

De l'importance du rapport E_b/N_0 pour la détection des signaux numériques

Prenons une bande infinie et un canal gaussien :

$$C = \lim_{B \to \infty} \left\{ B \log_2 \left(1 + \frac{S}{N} \right) \right\} \tag{276}$$

Comme

- $S = E_b R_b$ (E_b est l'énergie d'un bit et $R_b = \frac{1}{T_b}$ est le débit binaire)
- $N = B\,N_0$

on a, sachant que $\log_2(x) = \log_2(e) \ln(x)$,

$$\begin{aligned} C &= \lim_{B \to \infty} \left\{ B \log_2 \left(1 + \frac{E_b R_b}{B\,N_0} \right) \right\} = \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{\log_2 \left(1 + x \frac{E_b R_b}{N_0} \right)}{x} \right\} \\ &\stackrel{H}{=} \log_2(e) \lim_{x \to 0} \left\{ \frac{1}{1 + x \frac{E_b R_b}{N_0}} \frac{E_b R_b}{N_0} \right\} = \frac{1}{\ln 2} \frac{E_b R_b}{N_0} \end{aligned} \tag{277}$$

À capacité maximale : $C = R_b$, ainsi $\frac{E_b}{N_0} = \ln 2 \equiv -1.59\,[dB]$ est le rapport minimum absolu à garantir.

Détection de signaux binaires en présence de bruit gaussien

Signal à considérer :

$$g(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k \phi(t - kT) \qquad (278)$$

Difficulté : erreurs de transmission dues à

- du bruit (additif blanc gaussien)
- présence de filtres (émission ou réception)
- non-linéarité du canal
- ...

Position du problème :

1. on veut *construire un récepteur* (filtre + organe de décision)
2. le récepteur doit avoir une série de *bonnes propriétés* dont minimiser la probabilité d'erreur par bit P_e

Effet d'un bruit additif I

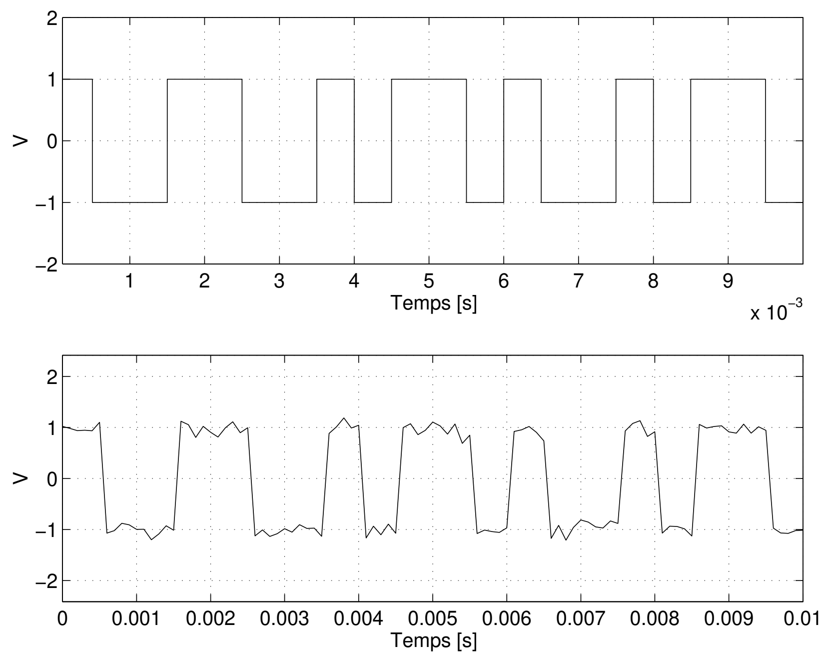


Figure – Effet du bruit sur un signal Manchester.

Effet d'un bruit additif II

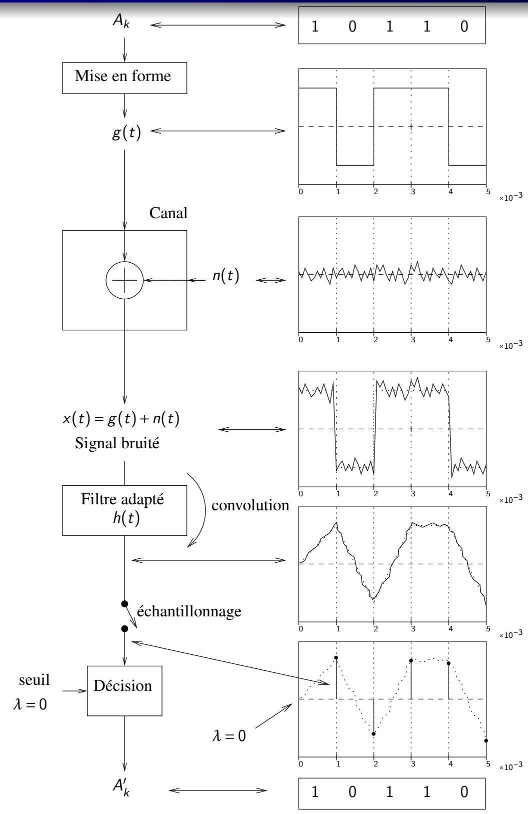


Figure – Structure d'une chaîne de transmission numérique complète.

Effet d'un bruit additif III

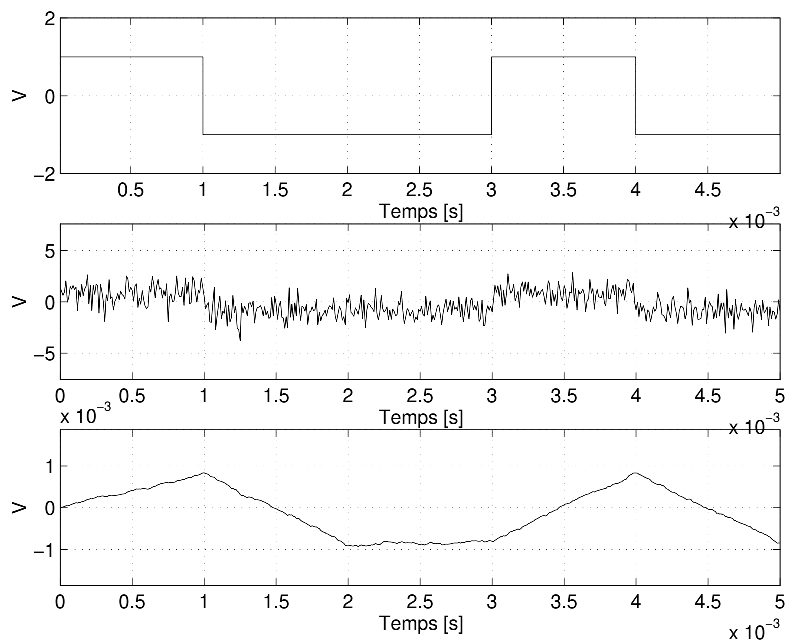


Figure – Signaux typiques dans le cas d'une transmission en bande de base.

Modélisation

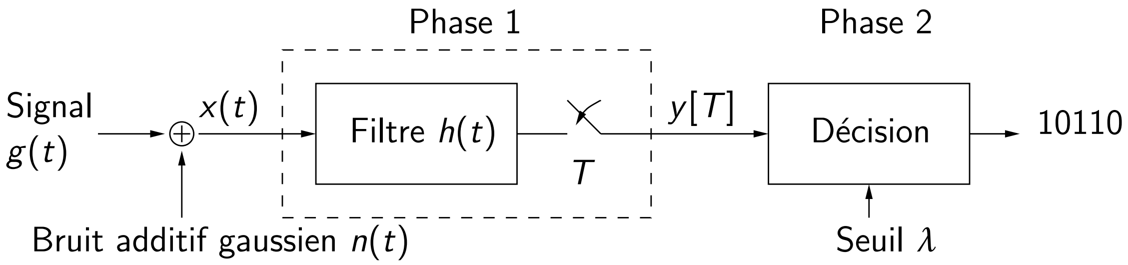


Figure – Structure d'un détecteur linéaire.

Nature des signaux

- $g(t)$ est un *signal stochastique* car il contient l'information sous la forme des A_k
- $n(t)$ est un *signal stochastique*
- $x(t) = g(t) + n(t)$ est un *signal stochastique*, ainsi que *le signal à la sortie du filtre* $h(t)$
- $y[T]$ est une *variable aléatoire* (et non un signal stochastique)

Raisonnement pour concevoir un récepteur I

Point de départ :
À la réception, on dispose de $x(t) = g(t) + n(t)$ dont on sait que

1. l'information est numérique ; c'est-à-dire que l'information est constante par *"tranche temporelle"* de T.
2. les symboles successifs sont non corrélés entre eux.

Schéma naïf pour retrouver l'information :

Par exemple dans le cas d'un signal NRZ $\{-5V, +5V\}$:
on compare $x(t)$ à 0 en fin de chaque intervalle T !

Mais on peut faire mieux. Comment ?

Raisonnement pour concevoir un récepteur II

Deux principes "phares" :

[filtrage] au lieu de la valeur en fin d'intervalle, on peut utiliser toutes les valeurs de l'intervalle $[0, T]$ pour prendre la décision
$\Rightarrow$ on "intègre" l'information sur $[0, T]$, ce qui revient à filtrer l'information sur l'intervalle $[0, T]$.

[décision] la non-corrélation entre symboles successifs fait que l'on peut ré-initialiser le récepteur d'un intervalle à l'autre
$\Rightarrow$ on échantillonne la sortie du filtre en fin d'intervalle $[0, T]$ et on décide séparément pour chaque échantillon sur base d'un critère qui maximise la performance ou minimise le taux d'erreur.

Première phase : filtrage ou corrélation I

Objectif : trouver l'expression d'un filtre adéquat de réception. Ce filtre est caractérisé par sa réponse impulsionnelle.

Démarche :

1. Définition d'un critère numérique (c'est la démarche particulière d'une analyse fonctionnelle : on définit un critère et on en dérive une fonction).
2. Ce critère est exprimé en termes de la réponse impulsionnelle à trouver.
3. On minimise/maximise ce critère.
4. On dérive ainsi la forme "**optimale**" du filtre de réception.

Première phase : filtrage ou corrélation II

Critère [de type rapport *signal à bruit*]

$$\eta = \frac{\left|g_h(T)\right|^2}{E\left\{n_h^2(t)\right\}} \tag{279}$$

- $\left|g_h(T)\right|^2$ est la puissance du signal pour un bit. **Attention, $g(t)$ est limité à 1 bit pour tous les développements ultérieurs.**
- $E\left\{n_h^2(t)\right\}$ est la puissance du bruit après filtrage.

Calcul du numérateur
Comme

$$g_h(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(f)\mathcal{G}(f)e^{2\pi jft}df \tag{280}$$

le numérateur de η vaut donc

$$\left|g_h(T)\right|^2 = \left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(f)\mathcal{G}(f)e^{2\pi jfT}df \right\|^2 \tag{281}$$

Première phase : filtrage ou corrélation III

Calcul du dénominateur
Pour un bruit blanc gaussien de densité spectrale $\frac{N_0}{2}$, après filtrage par $h(t)$:

$$\gamma_{N_h}(f) = \frac{N_0}{2}\left\|\mathcal{H}(f)\right\|^2 \tag{282}$$

par application du théorème de Wiener-Kintchine. Dès lors

$$E\left\{n_h^2(t)\right\} = \int_{-\infty}^{+\infty} \gamma_{N_h}(f)df \tag{283}$$

$$= \frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\mathcal{H}(f)\right\|^2 df \tag{284}$$

Conclusion intermédiaire
Le rapport à maximiser s'exprime donc comme

$$\eta = \frac{\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(f)\mathcal{G}(f)e^{2\pi jfT}\,df \right\|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\mathcal{H}(f)\right\|^2 df} \tag{285}$$

Il reste à réécrire l'expression du numérateur.

L'inégalité de Schwarz établit que si

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\phi_1(x)\right\|^2 dx < +\infty \text{ et } \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\phi_2(x)\right\|^2 dx < +\infty \tag{286}$$

alors

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \phi_1(x)\phi_2(x)dx \right\|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\phi_1(x)\right\|^2 dx \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\phi_2(x)\right\|^2 dx \tag{287}$$

Par ailleurs, l'égalité tient à la condition que

$$\phi_1(x) = k\phi_2^*(x) \tag{288}$$

Dans le cas présent,

$$\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(f)\mathcal{G}(f)e^{2\pi jfT}\,df \right\|^2 \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\mathcal{H}(f)\right\|^2 df \int_{-\infty}^{+\infty} \left\|\mathcal{G}(f)\right\|^2 df \tag{289}$$

Calcul du rapport η II

Le rapport à maximiser

$$\eta = \frac{\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}(f)\mathscr{G}(f)e^{2\pi jfT}\, df \right\|^2}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathscr{H}(f)\|^2\, df} \tag{290}$$

devient donc

$$\eta \leq \frac{\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathscr{H}(f)\|^2\, df \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathscr{G}(f)\|^2\, df}{\frac{N_0}{2}\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathscr{H}(f)\|^2\, df} \tag{291}$$

$$\leq \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathscr{G}(f)\|^2\, df \tag{292}$$

Résultat

$$\eta \leq \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathscr{G}(f)\|^2\, df \tag{293}$$

D'où la valeur maximale

$$\eta_{\max} = \frac{2}{N_0}\int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathscr{G}(f)\|^2\, df = \frac{2E_b}{N_0} \tag{294}$$

Définition (Énergie du signal (pour un bit))

$$E_b = \int_{-\infty}^{+\infty} \|\mathscr{G}(f)\|^2\, df = \int_0^T |g(t)|^2\, dt \tag{295}$$

Expression du filtre optimal dans le domaine temporel

On avait $\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(f)\mathcal{G}(f)e^{2\pi jfT}\,df \right\|^2$ et pour atteindre le maximum, il faut que $\mathcal{H}(f) = k\left(\mathcal{G}(f)e^{2\pi jfT}\right)^*$, d'où

$$\mathcal{H}_{opt}(f) = k\mathcal{G}^*(f)e^{-2\pi jfT} \tag{296}$$

Comme $g(t)$ est un signal réel, $\mathcal{G}^*(f) = \mathcal{G}(-f)$. Donc

$$h_{opt}(t) = k\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}^*(f)e^{-2\pi jf(T-t)}\,df \tag{297}$$

$$= k\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(-f)e^{-2\pi jf(T-t)}\,df \tag{298}$$

Résultat

$$h_{opt}(t) = \begin{cases} kg(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{299}$$

Expression du filtre optimal dans le domaine temporel

On avait $\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{H}(f)\mathcal{G}(f)e^{2\pi jfT}\,df \right\|^2$ et pour atteindre le maximum, il faut que $\mathcal{H}(f) = k\left(\mathcal{G}(f)e^{2\pi jfT}\right)^*$, d'où

$$\mathcal{H}_{opt}(f) = k\mathcal{G}^*(f)e^{-2\pi jfT} \tag{296}$$

Comme $g(t)$ est un signal réel, $\mathcal{G}^*(f) = \mathcal{G}(-f)$. Donc

$$h_{opt}(t) = k\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}^*(f)e^{-2\pi jf(T-t)}\,df \tag{297}$$

$$= k\int_{-\infty}^{+\infty} \mathcal{G}(-f)e^{-2\pi jf(T-t)}\,df \tag{298}$$

Résultat

$$h_{opt}(t) = \begin{cases} kg(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{299}$$

Expression du filtre optimal dans le domaine temporel

On avait $\left\| \int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{H}(f)\mathscr{G}(f)e^{2\pi jfT} df \right\|^2$ et pour atteindre le maximum, il faut que $\mathscr{H}(f) = k\left(\mathscr{G}(f)e^{2\pi jfT}\right)^*$, d'où

$$\mathscr{H}_{opt}(f) = k\mathscr{G}^*(f)e^{-2\pi jfT} \tag{296}$$

Comme $g(t)$ est un signal réel, $\mathscr{G}^*(f) = \mathscr{G}(-f)$. Donc

$$h_{opt}(t) = k\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{G}^*(f)e^{-2\pi jf(T-t)}df \tag{297}$$

$$= k\int_{-\infty}^{+\infty} \mathscr{G}(-f)e^{-2\pi jf(T-t)}df \tag{298}$$

Résultat

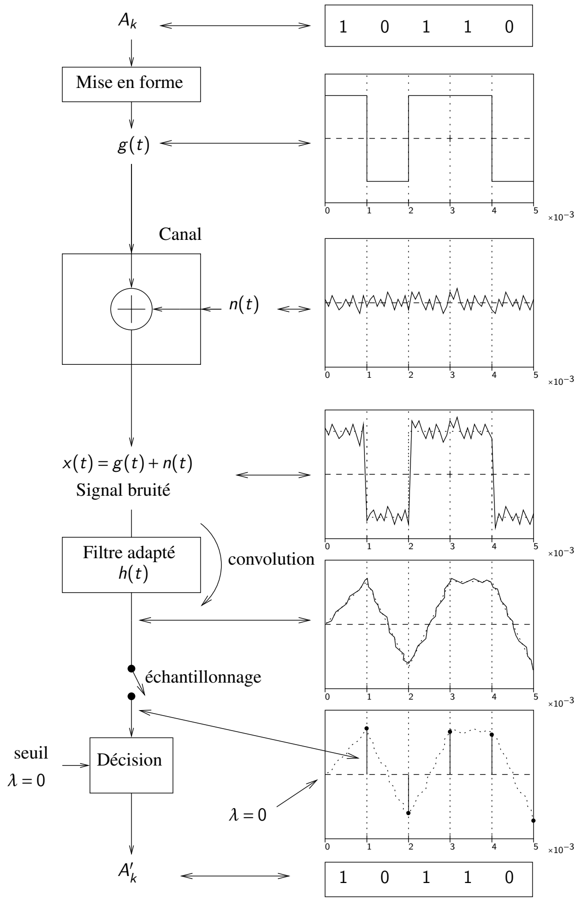
$$\boxed{h_{opt}(t) = \begin{cases} kg(T-t) & 0 \leq t \leq T \\ 0 & \text{ailleurs} \end{cases}} \tag{299}$$

Implémentation du filtre adapté

En pratique, on dispose de plusieurs moyens de réaliser le filtre adapté :

1. Par *convolution*.
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)h(t-\tau)d\tau \tag{300}$$
On échantillonne ce signal à l'instant $t = T$ pour obtenir la valeur $y[T]$.
2. Par *corrélation*. Considérons l'expression de $y(t)$
$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau)g(T-t+\tau)d\tau \tag{301}$$
à partir de quoi
$$y[T] = \int_{0}^{T} x(\tau)g(\tau)d\tau \tag{302}$$
3. Par *intégration*. Dans le cas particulier d'un fonction $g(t) = 1$ sur $[0, T]$, la formule de $z(t)$ se réduit à
$$z(t) = \int_{0}^{t} x(\tau)d\tau \tag{303}$$

Seconde phase : détection par maximum de vraisemblance I



Seconde phase : détection par maximum de vraisemblance II

Le signal reçu durant l'intervalle de temps T est

$$x(t) = \begin{cases} g_0(t) + n(t), & 0 \leq t \leq T \quad \text{pour } 0 \\ g_1(t) + n(t), & 0 \leq t \leq T \quad \text{pour } 1 \end{cases} \tag{304}$$

Par exemple, pour *un signal NRZ*, $g_0(t) = -V$ et $g_1(t) = +V$. Donc,

$$x(t) = \begin{cases} -V + n(t), & 0 \leq t \leq T \quad \text{pour } 0 \\ +V + n(t), & 0 \leq t \leq T \quad \text{pour } 1 \end{cases} \tag{305}$$

Au moment de prendre une décision, on peut faire deux types d'erreur

1. Sélectionner le symbole 1 alors qu'on a transmis le symbole 0 ; *c'est l'erreur de type 1*.
2. Sélectionner le symbole 0 alors qu'on a transmis le symbole 1 ; *c'est l'erreur de type 2*.

Démarche I

La conception du récepteur comporte deux parties :

1. Choix d'un critère pour choisir quel symbole a été envoyé.
2. Détermination de la probabilité d'erreur résultant du choix du critère. Pour cette étape, on détermine
   - probabilité d'erreur lors de l'envoi du signal $g_0(t)$
   - probabilité d'erreur lors de l'envoi du signal $g_1(t)$
   - au final, la probabilité d'erreur moyenne

Probabilité d'erreur pour un signal $g_0(t)$ I

Scénario 1 :

- on a transmis un symbole 0, autrement dit le signal $g_0(t) = -V$.
- on utilise le filtre adapté correspondant, à savoir $h_{opt}(t) = kg_0(T_b - t)$

Le signal reçu au récepteur est alors

$$x(t) = -V + n(t) \quad 0 \leq t \leq T_b \tag{306}$$

Dès lors, la sortie du filtre adapté ou corrélateur est

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) h_{opt}(t-\tau) d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} x(\tau) kg_0(T_b - t + \tau) d\tau \tag{307}$$

$$(308)$$

$$= \int_0^{T_b} (-V) kg_0(T_b - t + \tau) d\tau + \int_0^{T_b} n(\tau) kg_0(T_b - t + \tau) d\tau$$

Probabilité d'erreur pour un signal $g_0(t)$ II

En $t = T_b$, on obtient la variable aléatoire $y[T_b]$

$$\begin{aligned} y[T_b] &= \int_0^{T_b} (-V) k g_0(\tau) d\tau + \int_0^{T_b} n(\tau) k g_0(\tau) d\tau && (309) \\ &= -kV \int_0^{T_b} (-V) d\tau + k \int_0^{T_b} n(\tau)(-V) d\tau && (310) \\ &= kV^2 T_b - kV \int_0^{T_b} n(\tau) d\tau && (311) \end{aligned}$$

Soit, pour un gain arbitrairement pris égal à $k = -1/VT_b$,

$$\boxed{y[T_b] = -V + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(\tau) d\tau \qquad (312)}$$

Probabilité d'erreur pour un signal $g_0(t)$ III

Scénario 2 :

- on a transmis un symbole 1, autrement dit le signal $g_1(t) = +V$.
- on utilise le filtre adapté suivant $h_{opt}(t) = kg_0(T_b - t)$

On montre, après calculs que,

$$y[T_b] = +V + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(\tau) d\tau \qquad (313)$$

En résumé :

Signal envoyé	$y[T_b]$ en sortie de $kg_0(T_b - t)$
$-V$	$-V + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(\tau) d\tau$
$+V$	$+V + \frac{1}{T_b} \int_0^{T_b} n(\tau) d\tau$

Probabilité d'erreur pour un signal $g_0(t)$ IV

Le raisonnement dual sur base du filtre adapté $h_{opt}(t) = kg_1(T_b - t)$ conduit au même tableau, ce qui signifie que dans le cas présent, un seul filtre adapté suffit.
En conséquence, on peut adopter le critère de décision suivant :

Critère :

on prend un seuil λ égal à 0 et on décide que

- $-V$ a été envoyé si $y[T_b] < 0$, et
- $+V$ a été envoyé sinon.

La prochaine étape consiste à calculer la densité de probabilité de la variable aléatoire $Y = y[T_b]$!

Caractérisation de la variable aléatoire Y échantillonnée en T_b pour déterminer la probabilité d'erreur I

Nature de la variable

$Y = y[T_b]$ est une variable aléatoire *gaussienne* échantillonnée en T_b

$$y[T_b] = -V + \frac{1}{T_b}\int_0^{T_b} n(\tau)d\tau \qquad (314)$$

En effet, $\int_0^{T_b} n(\tau)d\tau$ est une somme de variables aléatoires gaussiennes, non corrélées entre elles, en raison de la nature de bruit blanc de $n(\tau)$. Dans le cas précis, cette somme est également une gaussienne.

Une densité de probabilité gaussienne est entièrement déterminée par son espérance mathématique (moyenne) et sa variance :

- Moyenne $= -V$
- Variance $= E\{(Y+V)^2\}$?

Caractérisation de la variable aléatoire Y échantillonnée en T_b pour déterminer la probabilité d'erreur II

$$
\begin{aligned}
\sigma_Y^2 &= E\left\{(Y+V)^2\right\} &(315)\\
&= \frac{1}{T_b^2} E\left\{\int_0^{T_b}\int_0^{T_b} n(t)n(u)dtdu\right\} &(316)\\
&= \frac{1}{T_b^2}\int_0^{T_b}\int_0^{T_b} E\{n(t)n(u)\}dtdu &(317)\\
&= \frac{1}{T_b^2}\int_0^{T_b}\int_0^{T_b} \Gamma_{NN}(t,u)\,dtdu &(318)
\end{aligned}
$$

Par hypothèse sur la nature de ce bruit,

$$\gamma_N(f) = \frac{N_0}{2} \tag{319}$$

Caractérisation de la variable aléatoire Y échantillonnée en T_b pour déterminer la probabilité d'erreur III

Dès lors,

$$\Gamma_{NN}(t,u) = \frac{N_0}{2}\delta(t-u) \tag{320}$$

En conséquence,

$$
\begin{aligned}
\sigma_Y^2 &= \frac{1}{T_b^2}\int_0^{T_b}\int_0^{T_b} \frac{N_0}{2}\delta(t-u)dtdu &(321)\\
&= \frac{1}{T_b^2}\int_0^{T_b}\frac{N_0}{2}du = \frac{1}{T_b^2}\frac{N_0}{2}T_b &(322)\\
&= \frac{N_0}{2T_b} &(323)
\end{aligned}
$$

Densités de probabilité I

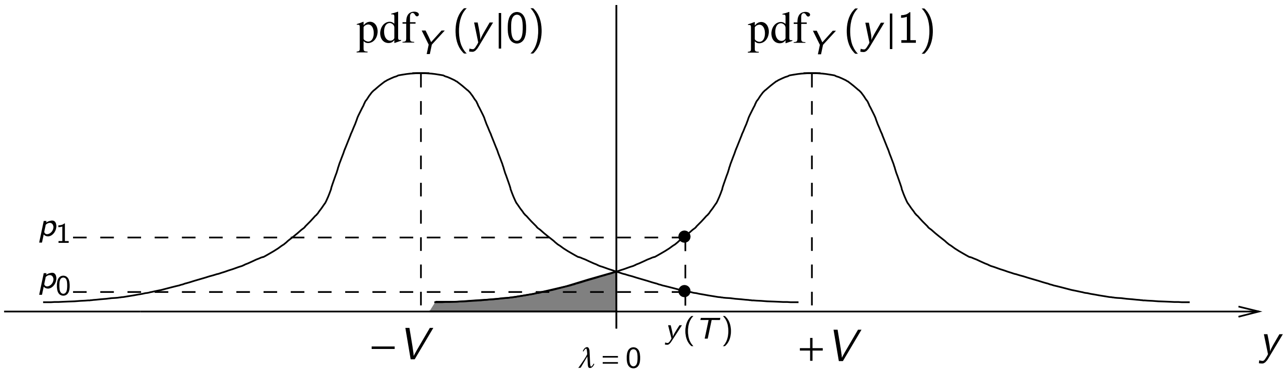


Figure – Densités de probabilité conditionnellement à l'envoi du symbole 0 ou du symbole 1.

Densités de probabilité II

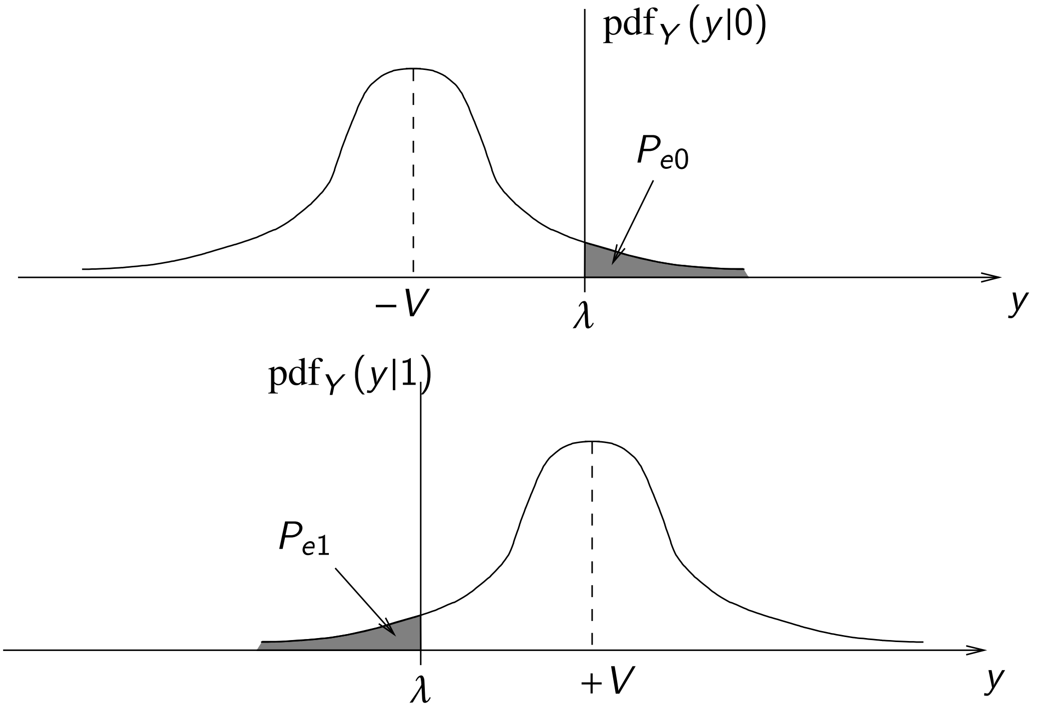


Figure – Forme des densités de probabilités $\text{pdf}_Y(y|0)$, $\text{pdf}_Y(y|1)$ et probabilités d'erreur.

Résultats I

$$\sigma_Y^2 = \frac{N_0}{2T_b} \tag{324}$$

$$\mathrm{pdf}_Y(y|0) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma_Y^2}} e^{-\frac{(y-\mu_Y)^2}{2\sigma_Y^2}} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T_b}} e^{-\frac{(y+V)^2}{N_0/T_b}} \tag{325}$$

$$P_{e0} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T_b}} \int_{\lambda}^{+\infty} e^{-\frac{(y+V)^2}{N_0/T_b}} dy \tag{326}$$

De même, par symétrie,

$$P_{e1} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T_b}} \int_{-\infty}^{\lambda} e^{-\frac{(y-V)^2}{N_0/T_b}} dy \tag{327}$$

Résultats II

Détermination de la probabilité d'erreur moyenne P_e

Composantes :

- on envoie un 0 (par un signal $-V$) $\Rightarrow$ on fait une erreur P_{e0}
- on envoie un 1 (par un signal $+V$) $\Rightarrow$ on fait une erreur P_{e1}
- dès lors,

$$P_e = P_{e0}p(0) + P_{e1}p(1) \tag{328}$$

Dans notre cas, par symétrie $P_{e0} = P_{e1}$, on a

$$P_e = P_{e0}(p(0) + p(1)) = P_{e0} = P_{e1} \tag{329}$$

Expression de P_{e0} I

$$P_{e0} = \frac{1}{\sqrt{\pi N_0/T_b}} \int_0^{+\infty} e^{-\frac{(y+V)^2}{N_0/T_b}} dy \tag{330}$$

En posant $z = \frac{y+V}{\sqrt{N_0/T_b}}$, on obtient (pour $y = 0$,
$z = \frac{V}{\sqrt{N_0/T_b}} = \frac{V\sqrt{T_b}}{\sqrt{N_0}} = \frac{\sqrt{V^2 T_b}}{\sqrt{N_0}} = \sqrt{\frac{E_b}{N_0}}$)

$$P_{e0} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_{\sqrt{E_b/N_0}}^{+\infty} e^{-z^2} dz \tag{331}$$

où E_b est l'énergie transmise par bit définie par

$$E_b = \int_0^T |g(t)|^2 dt = V^2 T_b \tag{332}$$

Expression de P_{e0} II

Il est pratique d'introduire la *fonction d'erreur complémentaire* ; elle est définie par

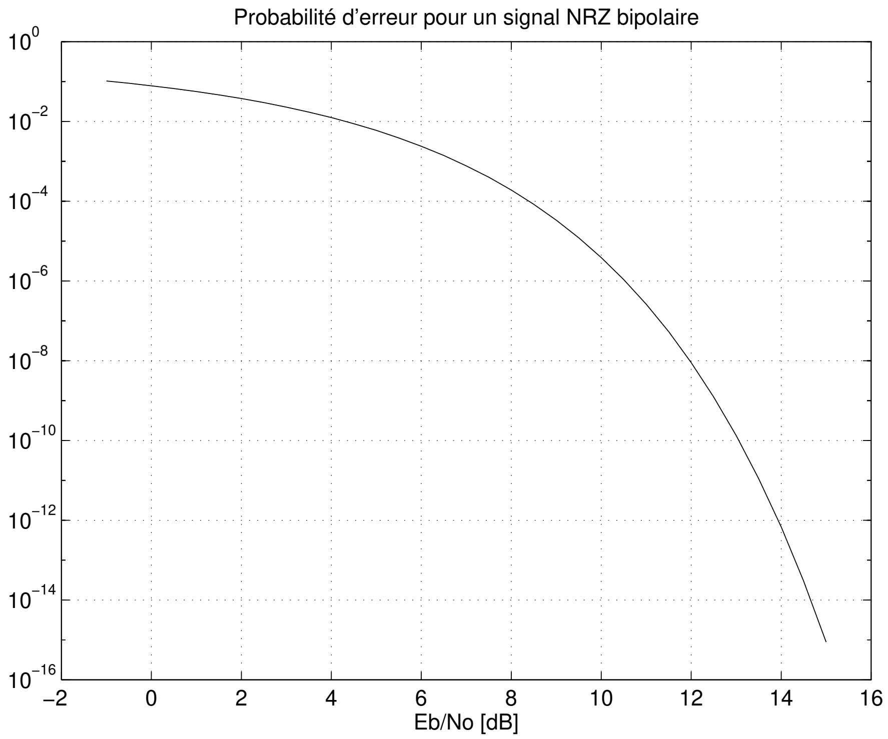
$$erfc(u) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_u^{+\infty} e^{-z^2} dz \tag{333}$$

Grâce à cette fonction, on obtient

$$\boxed{P_{e0} = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \tag{334}}$$

Probabilité d'erreur moyenne

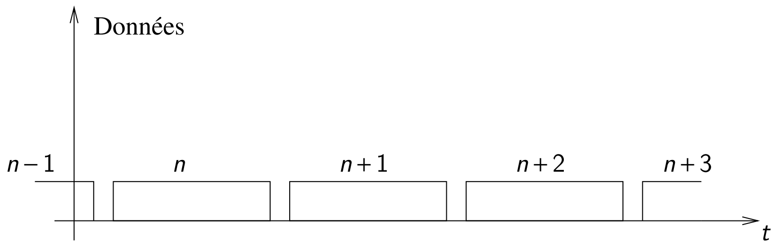
$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (335)$$



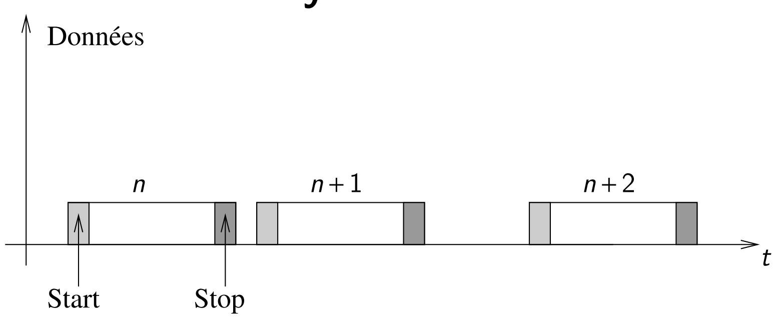
Types de transmission

Deux modes logiques :

- Transmission **synchrone**



- Transmission **asynchrone**



Deux modes physiques :

- **série**
- **parallèle**

Table des matières

Introduction à la modulation numérique

Table des matières

- Modulation et démodulation *cohérente* ou *incohérente*
- Modulation d'*amplitude* cohérente
- Modulation de *phase* numérique cohérente
- Modulation de *fréquence* numérique cohérente

Modulation cohérente ou incohérente

On peut distinguer deux grandes classes de **modulation** numérique :

- la *modulation cohérente* : la fréquence de la porteuse f_c est un multiple entier du rythme d'émission $1/T_b$,

$$f_c = \frac{n}{T_b} \tag{336}$$

- la *modulation incohérente* : la fréquence de la porteuse f_c n'est pas un multiple entier du rythme d'émission $1/T_b$

Démodulation *cohérente* ou *incohérente*

Exemples de modulation numérique

Hypothèse : $f_c = \frac{n_c}{T_b}$ (modulation cohérente)

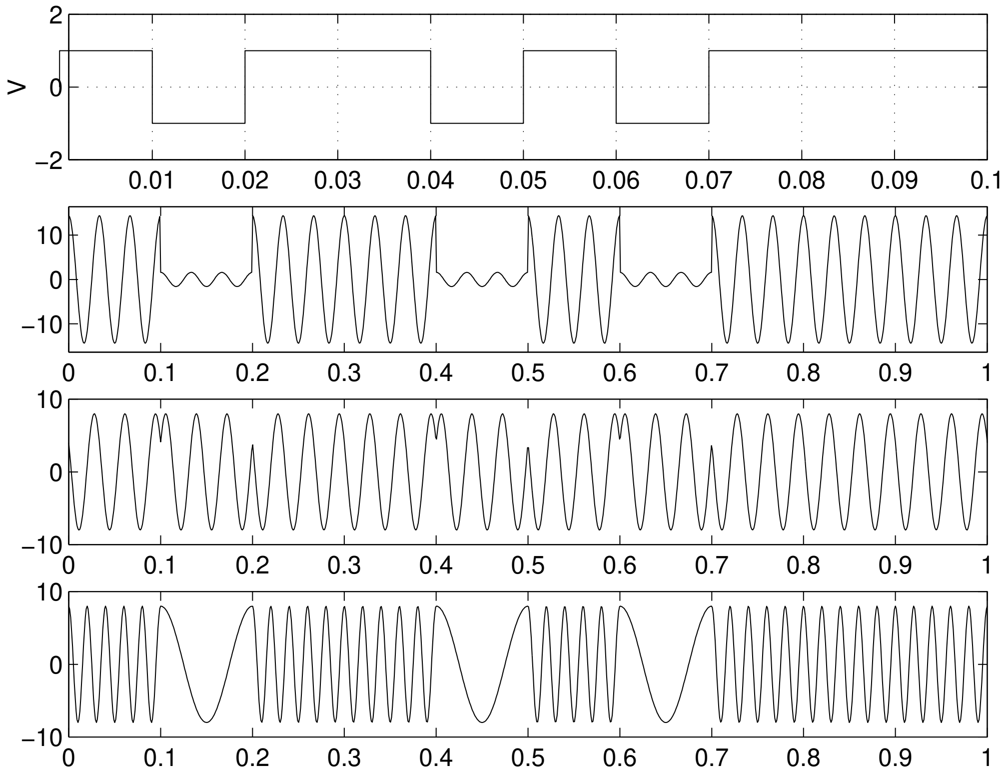


Figure – Signal modulant numérique et signaux modulés respectivement en AM, PM et FM.

Modulation d'amplitude numérique cohérente I

$$s_0(t) = \sum_{k=-\infty}^{+\infty} A_k Rect_{[0,T]}(t - kT_b) \cos(2\pi f_c t) \tag{337}$$

Occupation spectrale ?

Intuitivement : développement en série de Fourier de la forme

- Signal modulant

$$m_0(t) = \frac{A_0}{2}\left[1 + \frac{4}{\pi}\cos(2\pi(\frac{1}{2}f_b)t) - \frac{4}{3\pi}\cos(2\pi(\frac{3}{2}f_b)t) + \ldots\right] \tag{338}$$

- Signal modulé

$$\begin{aligned} s_0(t) &= \frac{A_0}{2}[\cos(2\pi f_c t) \\ &+\frac{2}{\pi}\cos(2\pi(f_c + \frac{f_b}{2})t) + \frac{2}{\pi}\cos(2\pi(f_c - \frac{f_b}{2})t) \\ &-\frac{2}{3\pi}\cos(2\pi(f_c + \frac{3f_b}{2})t) - \frac{2}{3\pi}\cos(2\pi(f_c - \frac{3f_b}{2})t) + \ldots] \end{aligned}$$

Modulation d'amplitude numérique cohérente II

Par développement théorique :

$$\begin{aligned} \gamma(f) &= \left[p_0(1-p_0)A_0^2 T_b \left(\frac{\sin(\pi f T_b)}{\pi f T_b}\right)^2 + p_0^2 A_0^2 \delta(f)\right] \otimes \frac{\delta(f-f_c)+\delta(f+f_c)}{4} \\ &= \frac{p_0(1-p_0)A_0^2 T_b}{4}\left(\frac{\sin(\pi(f-f_c)T_b)}{\pi(f-f_c)T_b}\right)^2 \\ &+ \frac{p_0(1-p_0)A_0^2 T_b}{4}\left(\frac{\sin(\pi(f+f_c)T_b)}{\pi(f+f_c)T_b}\right)^2 \\ &+ \frac{p_0^2 A_0^2}{4}\delta(f-f_c) + \frac{p_0^2 A_0^2}{4}\delta(f+f_c) \end{aligned}$$

Cette densité spectrale est celle d'un signal de type NRZ venu se loger en f_c.

Conclusion : largeur de bande et efficacité spectrale d'une modulation d'amplitude numérique à 2 états

Définition

L'*efficacité spectrale* est définie comme le flux binaire par *Hz*.

Dès lors, l'*efficacité spectrale* pour l'ASK-2 (modulation d'amplitude à deux états d'amplitude, *Amplitude Shift Keying*) est

$$\boxed{\eta_{ASK-2} = \frac{f_b}{1,2/T_b} = \frac{f_b}{1,2\,f_b} \approx 0,8 \qquad (339)}$$

Démodulation cohérente I

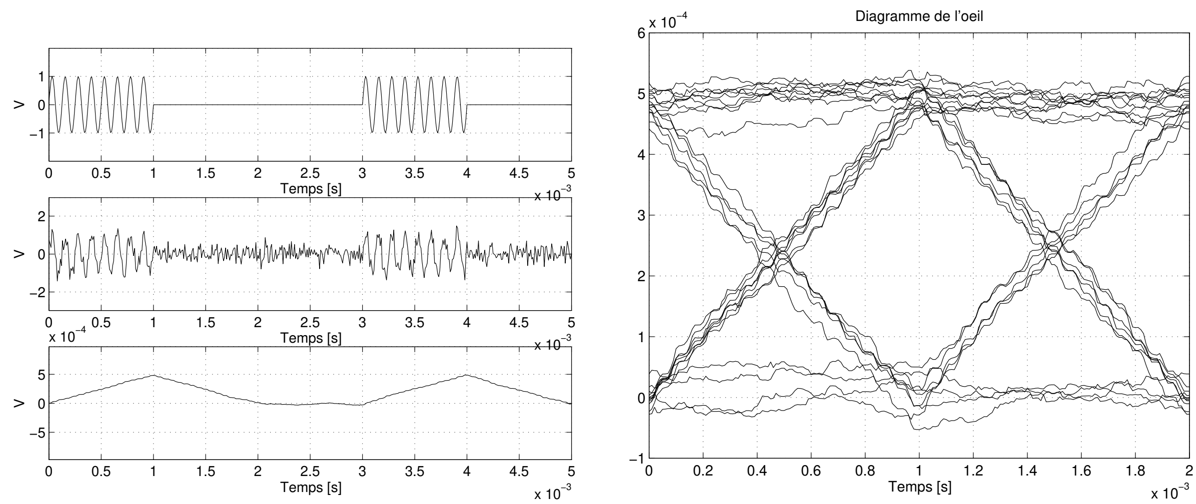


Figure – Signal ASK en présence d'un faible bruit.

Démodulation cohérente II

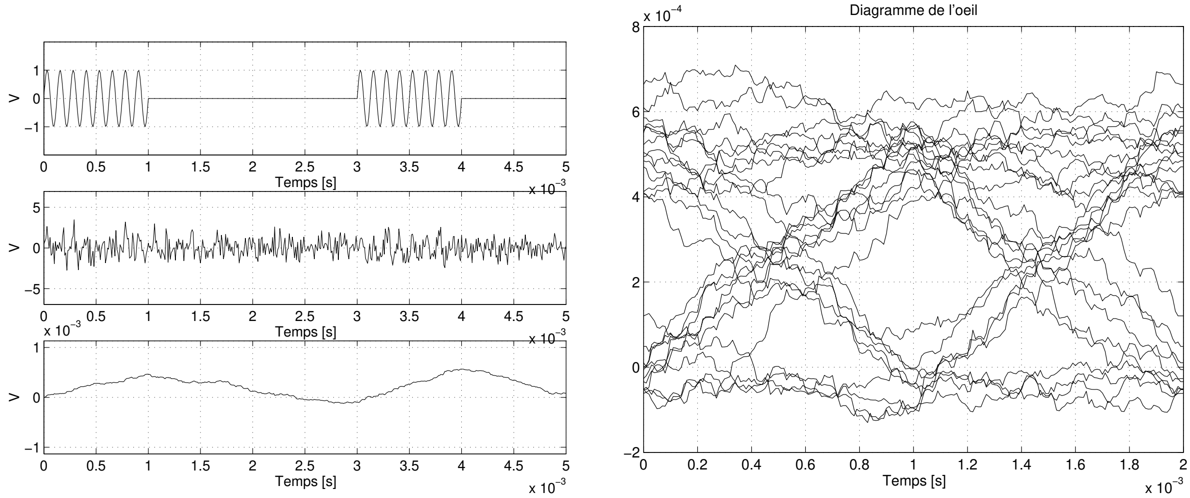


Figure – Signal ASK en présence d'un bruit important.

Modulation de phase numérique cohérente

$$s_0(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}\cos(2\pi f_c t) \quad (340)$$

$$s_1(t) = \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}\cos(2\pi f_c t + \pi) = -\sqrt{\frac{2E_b}{T_b}}\cos(2\pi f_c t) \quad (341)$$

Il s'agit donc, dans ce cas, d'une modulation équivalente à une modulation d'amplitude à deux états de valeurs opposées.

- Occupation spectrale ?
  Identique à celle d'une ASK-2.
- Probabilité d'erreur ?

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \quad (342)$$

Modulation de fréquence numérique cohérente

$$s_i(t) = \begin{cases} \sqrt{\frac{2E_b}{T_b}} \cos(2\pi f_i t), & 0 \leq t \leq T_b \\ 0, & \text{ailleurs} \end{cases} \tag{343}$$

tels que les fréquences instantanées respectent

$$f_i = \frac{n_c + i}{T_b} \tag{344}$$

n_c et i étant des entiers.

- Occupation spectrale ?
- Probabilité d'erreur ?

$$\frac{1}{2}\, erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{2N_0}}\right) \tag{345}$$

Dans le cas du **GSM** (génération 2G), on a la variante particulière de la modulation *Gaussian Minimum-Shift Keying* (**GMSK**).

Table des matières

Notions de code

Table des matières

Motivation

Fait

Les données peuvent être corrompues durant la transmission !
Et en pratique, c'est toujours le cas.
Par exemple, à cause :

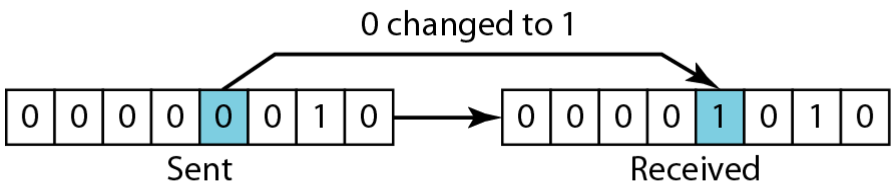
- *de l'atténuation et de la distorsion du signal,*
- *du bruit et des interférences rencontrées.*

Certaines applications demandent que ces erreurs soient détectées et/ou corrigées.

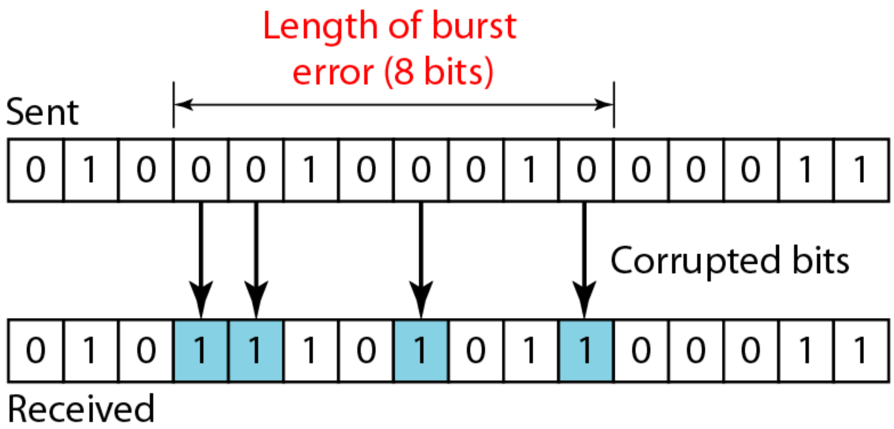
Modèles d'erreur

Deux scénarios pratiques :

1. On rencontre des erreurs aléatoires isolées (*single-bit errors*) :



2. ou des paquets d'erreurs (*error burst*) :



Modèle de canal

Nous nous intéressons essentiellement aux erreurs aléatoires isolées pour lesquelles nous considérons le **modèle de canal** suivant :

Définition

Un canal discret sans mémoire est caractérisé par un *alphabet d'entrée*, un *alphabet de sortie* et un *jeu de probabilités conditionnelles*, $p(j|i)$, où $1 \leq i \leq M$ représente l'indice du caractère d'entrée, $1 \leq j \leq Q$ représente l'indice du caractère de sortie, et $p(j|i)$ la probabilité d'avoir j en réception alors que i a été émis.

$$\begin{aligned} p(0|1) &= p(1|0) = p \\ p(1|1) &= p(0|0) = 1 - p \end{aligned} \tag{346}$$

La **probabilité d'erreur** P_e vaut

$$P_e = \frac{1}{2} erfc\left(\sqrt{\frac{E_b}{N_0}}\right) \tag{347}$$

Techniques de contrôle d'erreurs

- **Détection d'erreurs** dans un bloc de données, par exemple par demande de retransmission, appelée "*Automatic Repeat Request*" (ARQ), pour les données sensibles.
  - Utile pour les canaux de transmission à faible délai de transmission et avec une connexion retour (de contrôle).
  - Pas approprié pour la transmission de données sensible aux délais de transmission, telles que l'audio et la vidéo temps réel.
- **Correction d'erreurs** ("*Forward Error Correction*" (FEC)). Le codage est alors conçu de telle sorte que certaines erreurs puissent être détectées et corrigées au récepteur.
  - Utile pour les données sensible aux délais de transmission (diffusion TV) et/ou sans connexion retour.
  - Deux types principaux ;
    1. les codages par blocs (étudiés dans ce chapitre).
    2. les codes convolutionnels.

Techniques de contrôle d'erreurs

- **Détection d'erreurs** dans un bloc de données, par exemple par demande de retransmission, appelée "*Automatic Repeat Request*" (ARQ), pour les données sensibles.
  - Utile pour les canaux de transmission à faible délai de transmission et avec une connexion retour (de contrôle).
  - Pas approprié pour la transmission de données sensible aux délais de transmission, telles que l'audio et la vidéo temps réel.
- **Correction d'erreurs** ("*Forward Error Correction*" (FEC)). Le codage est alors conçu de telle sorte que certaines erreurs puissent être détectées et corrigées au récepteur.
  - Utile pour les données sensible aux délais de transmission (diffusion TV) et/ou sans connexion retour.
  - Deux types principaux ;
    1. les codages par blocs (étudiés dans ce chapitre).
    2. les codes convolutionnels.

Gestion d'erreur par ajout de redondance

Nous étudions le scénario suivant :

- Les **codages par blocs** de données.
- Pour détecter et/ou corriger les **erreurs aléatoires isolées**.

Pour cela, nous allons :

- Grouper les bits d'information en blocs de données.
- Et envoyer des bits (redondants) supplémentaires avec chaque bloc de données.

Sur base des bits redondants, le récepteur sera en mesure de détecter et/ou corriger certaines erreurs :

- Détection : recherche des erreurs et demande de retransmission des données dans ce cas (ARQ).
- Correction : recherche du nombre et de la position des erreurs afin de les corriger (FEC).

Gestion d'erreur par ajout de redondance

Nous étudions le scénario suivant :

- Les **codages par blocs** de données.
- Pour détecter et/ou corriger les **erreurs aléatoires isolées**.

Pour cela, nous allons :

- Grouper les bits d'information en blocs de données.
- Et envoyer des bits (redondants) supplémentaires avec chaque bloc de données.

Sur base des bits redondants, le récepteur sera en mesure de détecter et/ou corriger certaines erreurs :

- Détection : recherche des erreurs et demande de retransmission des données dans ce cas (ARQ).
- Correction : recherche du nombre et de la position des erreurs afin de les corriger (FEC).

Gestion d'erreur par ajout de redondance

Nous étudions le scénario suivant :

- Les **codages par blocs** de données.
- Pour détecter et/ou corriger les **erreurs aléatoires isolées**.

Pour cela, nous allons :

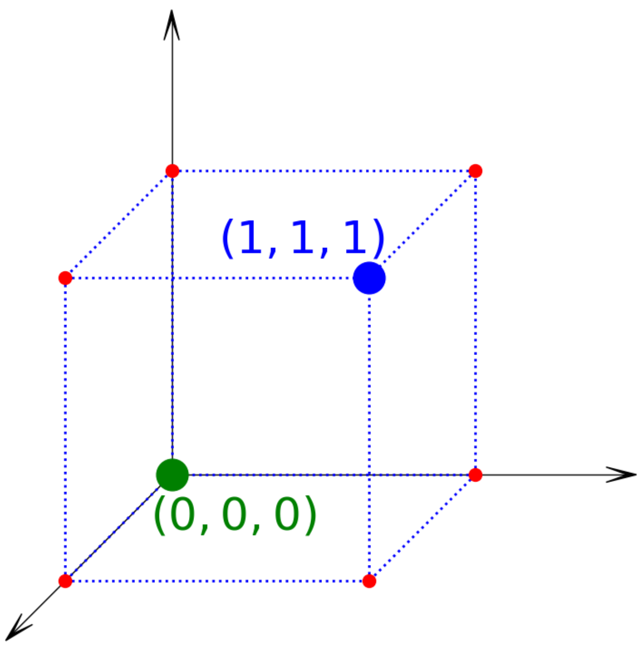
- Grouper les bits d'information en blocs de données.
- Et envoyer des bits (redondants) supplémentaires avec chaque bloc de données.

Sur base des bits redondants, le récepteur sera en mesure de détecter et/ou corriger certaines erreurs :

- Détection : recherche des erreurs et demande de retransmission des données dans ce cas (ARQ).
- Correction : recherche du nombre et de la position des erreurs afin de les corriger (FEC).

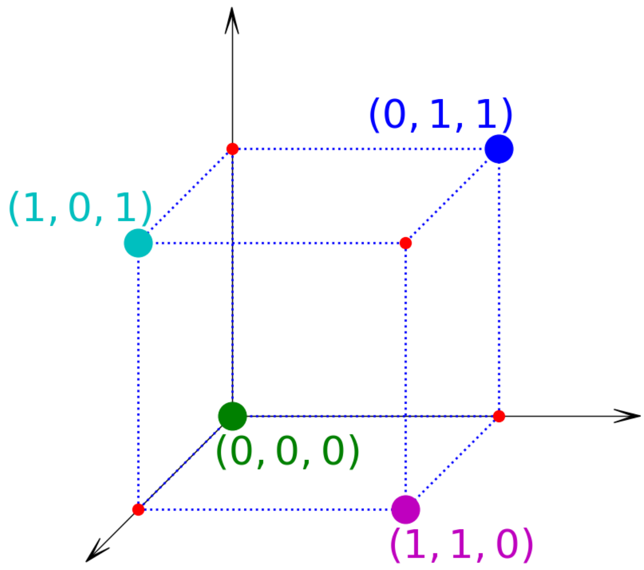
Exemple : code à répétition

	devient		préfixe
0	$\longrightarrow$	00 0	00
1	$\longrightarrow$	11 1	11
Espace 1-D		Espace 3-D	Espace 2-D



Exemple : code à parité

	devient		préfixe
00	$\longrightarrow$	0 00	0
01	$\longrightarrow$	1 01	1
10	$\longrightarrow$	1 10	1
11	$\longrightarrow$	0 11	0
Espace 2-D		Espace 3-D	Espace 1-D



Codes à parité : définition

Définition

Dans un code à parité, nous ajoutons (préfixons par exemple) chaque bloc de k bits d'un message m, avec un bit supplémentaire de parité :

- pour une parité paire, le bit additionnel vaut

$$q = \sum_{i=1}^{k} m_i \pmod 2 \tag{348}$$

- pour une parité impaire, le bit additionnel vaut $1 - q$.

Premières constatations :

- Le bit additionnel assure qu'il y aura un nombre pair (respectivement impair) de 1 dans le mot de code.
- Le récepteur *peut détecter* les erreurs simples *mais ne peut pas les corriger*, puisqu'il ne peut pas localiser les erreurs.

Codes à parité : propriétés et exemple

Propriétés :

- Un code à parité est utile si l'on pense que la probabilité d'avoir 2 erreurs est négligeable (communications série, par exemple).
- Très faible complexité, mais pas très puissant.
- Facile à implémenter avec des portes XOR.

Exemple.
Dans le cas d'un codage à parité paire pour des blocs de 3 bits, nous aurons la table de correspondance suivante :

le message	000	001	010	011	100	101	110	111
devient	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓	↓
le mot de code	0000	1001	1010	0011	1100	0101	0110	1111

Table – Exemple de code à parité pour des messages de 3 bits

Codes à parité : autre exemple

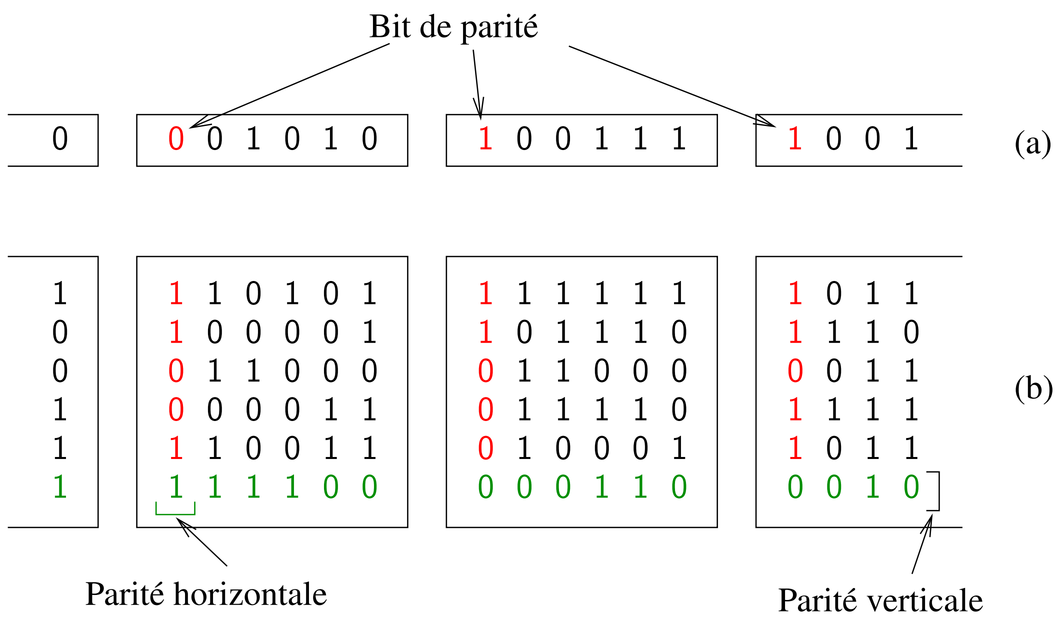


Figure – Codes de parité paire pour (a) connexion série ou (b) parallèle.

Codage par bloc (I)

- Les données binaires sont groupées en *blocs de k bits*;
  - un tel bloc est le mot de *message* ou de données ("*dataword*") représenté par le vecteur :

$$\vec{m} = (m_1, \cdots, m_k) \tag{349}$$

  - Il y aura donc 2^k messages possibles.

- Chaque mot de données est représenté par
  - un *mot de code* ("*codeword*") de *longueur n bits* (avec $n > k$) représenté par le vecteur :

$$\vec{c} = (c_1, \cdots, c_n) \tag{350}$$

  - Il y aura donc 2^n mots de codes possibles.
  - Mais seulement 2^k d'entre-eux représentent un message valide.
  - Les autres $2^n - 2^k$ mots de codes sont erronés.

Codage par bloc (I)

- Les données binaires sont groupées en *blocs de k bits*;
  - un tel bloc est le mot de *message* ou de données ("*dataword*") représenté par le vecteur :

$$\vec{m} = (m_1, \cdots, m_k) \tag{349}$$

  - Il y aura donc 2^k messages possibles.

- Chaque mot de données est représenté par
  - un *mot de code* ("*codeword*") de *longueur n bits* (avec $n > k$) représenté par le vecteur :

$$\vec{c} = (c_1, \cdots, c_n) \tag{350}$$

  - Il y aura donc 2^n mots de codes possibles.
  - Mais seulement 2^k d'entre-eux représentent un message valide.
  - Les autres $2^n - 2^k$ mots de codes sont erronés.

Codage par bloc (II)

- Le résultat de ce codage est appelé *code bloc* (n, k).

Définition

La redondance introduite par le code est mesurée par son *taux de redondance*, défini par le rapport :

$$\frac{n-k}{n} \tag{351}$$

Ce taux sera d'autant plus élevé que la redondance est importante.

Performance de détection après codage

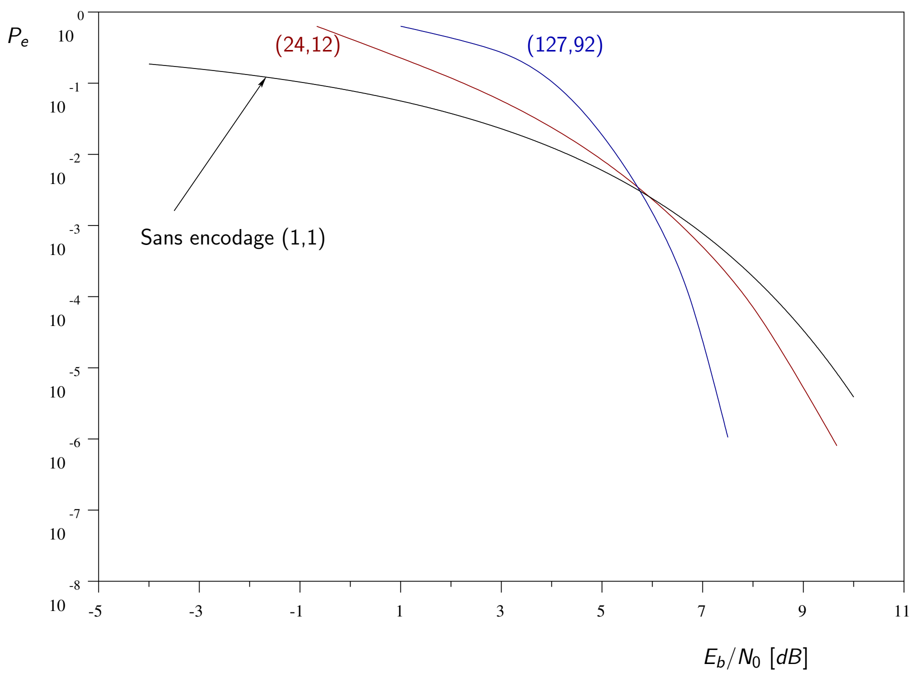


Figure – Performance typique d'un récepteur pour signal NRZ ayant subi un codage par un code bloc (n, k).

Codage par bloc : exemple du code de répétition (3,1)

Le code de répétition vu précédemment est caractérisé par :

- des blocs de données de $k=1$ bit.
  - Il y a donc $2^1=2$ messages possibles :

$$\vec{m}=(m_1) \tag{352}$$

- des mots de code de $n=3$ bits.
  - Il y aura donc $2^3=8$ mots codés possibles.
  - Mais seulement 2 d'entre-eux représentent des messages valides :

$$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3)=(m_1,m_1,m_1) \tag{353}$$

  - Les 6 autres correspondent à des erreurs de transmission.

Il s'agit d'un code (3,1) dont le taux de redondance est de

$$\frac{3-1}{3}=67\,\% \tag{354}$$

Codage par bloc : exemple du code à parité simple

Le code à parité du tableau 6 (page 307) est caractérisé par ;

- des blocs de données (messages) de $k=3$ bits :
  - Et il y a donc $2^3=8$ messages possibles :

$$\vec{m}=(m_1,m_2,m_3) \tag{355}$$

- des mots de code de $n=4$ bits :
  - Il y aura donc $2^4=16$ mots codés possibles.
  - Mais seulement 8 d'entre-eux représentent des messages valides :

$$\vec{c}=(c_1,c_2,c_3,c_4)=(q,m_1,m_2,m_3) \tag{356}$$

  - Les 8 autres correspondent à des erreurs de transmission.

Il s'agit d'un code (4,3) dont le taux de redondance est de

$$\frac{4-3}{4}=25\,\% \tag{357}$$

Quelques définitions (I) : poids de Hamming de mots binaires

Définition

Le *poids de* Hamming $w(\overrightarrow{c})$ du vecteur $\overrightarrow{c}$ est le nombre de 1 qu'il contient.

Exemple. Voici le poids de deux vecteurs

$$\begin{aligned} w(\overrightarrow{c}_1) &= w(100101101) = 5 \\ w(\overrightarrow{c}_2) &= w(011110100) = 5 \end{aligned} \tag{358}$$

Quelques définitions (II) : distance de Hamming de mots binaires

Définition

La *distance de* Hamming $d(\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2)$ de deux vecteurs binaires $\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2$ de même taille (messages ou mots de code) est le nombre de bits qui diffèrent entre ces deux vecteurs.

Exemple. La distance de Hamming entre 10011011 et 11010010 vaut 3 :

$$d(10011011, 11010010) = 3$$

Relation entre poids et distance de Hamming

Théorème

On montre que poids et distance de Hamming *sont liés par les relations*

$$\left\{ \begin{array}{r} d(\overrightarrow{c}_1, \overrightarrow{c}_2) = w(\overrightarrow{c}_1 \oplus \overrightarrow{c}_2) \\ w(\overrightarrow{c}) = d(\overrightarrow{c}, \overrightarrow{0}) \end{array} \right. \tag{359}$$

En effet, le résultat d'un XOR (noté par le symbole $\oplus$) bit à bit sur deux mots binaires est un mot binaire contenant des 0 là où les mots initiaux ont le même bit et contenant des 1 lorsque les mots initiaux sont différents.

Distance de Hamming d'un code

La capacité de contrôle d'erreurs d'un code est déterminée par la distance de Hamming de ce code :

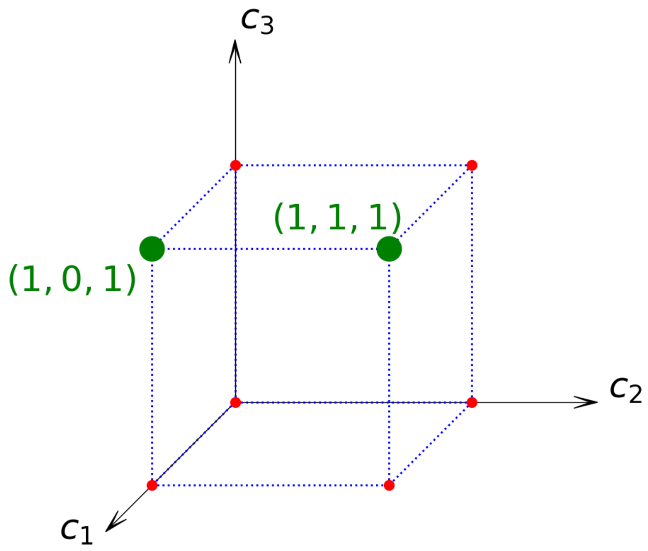
Définition

La distance de Hamming d'un code est la distance de Hamming minimum d_{min} entre deux mots de ce code.

Ainsi, deux mots de code valides ne peuvent pas être plus proche l'un de l'autre que la distance de Hamming de ce code.

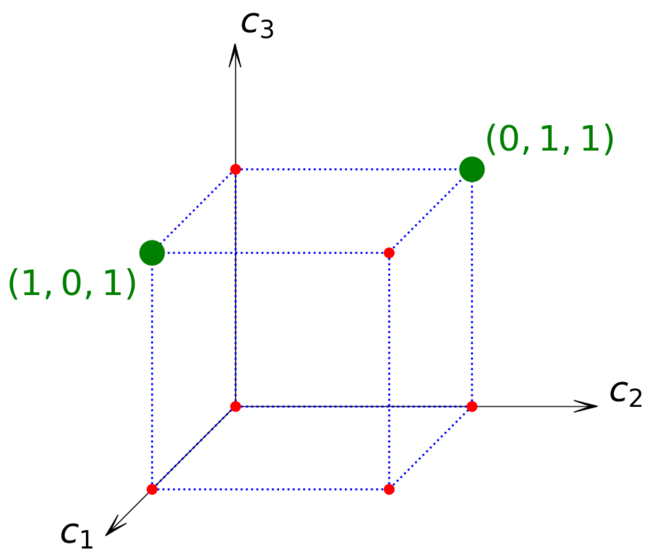
Code avec distance de Hamming égale à 1

- Aucune capacité de contrôle d'erreur.
- Une seule erreur peut conduire à un autre mot valide du code.



Code avec distance de Hamming égale à 2

- Détection d'erreurs isolées.
  - Une erreur conduit nécessairement à un mot de code invalide.
  - Mais on ne sait pas nécessairement corriger cette erreur, car plusieurs mots de code valides peuvent conduire à ce mot erroné.
- Deux erreurs pourraient conduire de nouveau à un mot de code valide.



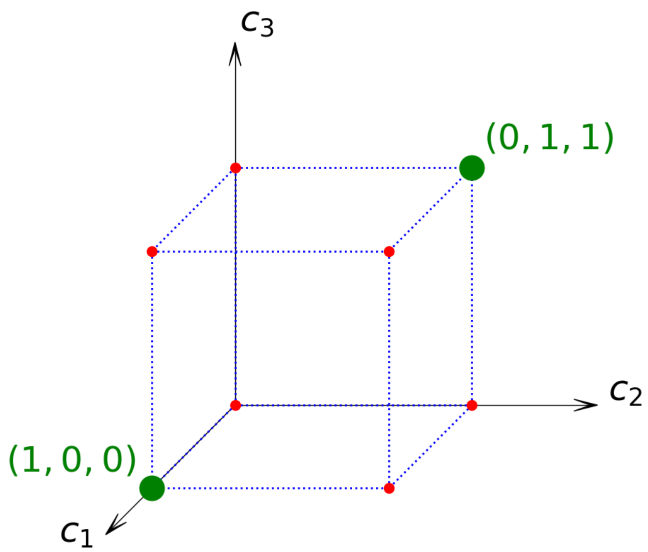
Code avec distance de Hamming égale à 3 (I)

- Détection et correction d'erreur simple.
  - Une erreur conduit à un mot de code invalide tel que

$$d_H(\text{mot erroné}, \text{mot correct}) = 1,$$

  - mais qui est plus proche du mot correct que des autres mots valides (sinon, deux mots valides seraient à une distance de moins de 3)

$$d_H(\text{mot erroné}, \text{autre mot valide}) \geq 2.$$



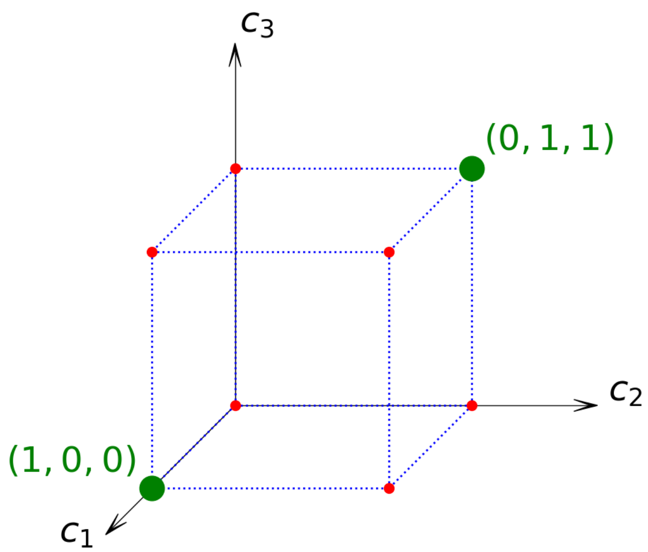
Code avec distance de Hamming égale à 3 (II)

- Détection d'erreurs doubles :
  - Deux erreurs conduisent à un mot de code invalide tel que

$$d_H(\text{mot erroné}, \text{mot correct}) = 2,$$

  - mais qui pourrait-être plus proche d'un mot valide différent de celui de départ

$$d_H(\text{mot erroné}, \text{autre mot valide}) \geq 1.$$



Capacité de détection d'un code

Définition

La *capacité de détection d'un code* (= nombre maximum de bits erronés que l'on peut détecter) est fournie par :

$$t_d = d_{\min} - 1 \qquad (360)$$

Le nombre de bit erronés détectable avec certitude doit être strictement inférieur à $d_{\min}$.
En effet, lorsque le nombre d'erreurs vaut $d_{\min}$ (ou plus) le mot erroné est peut-être de nouveau un mot de code valide.

Capacité de correction d'un code

Définition

La *capacité de correction d'un code* (= nombre maximum de bits erronés que l'on peut corriger) est fournie par :

$$t_c = \text{arrondi}_- \frac{d_{\min} - 1}{2} \qquad (361)$$

Si le nombre d'erreurs dépasse t_c, alors on est peut-être plus proche d'un autre mot de code valide que du mot initial.

Capacité de correction et distance minimale

Prémices d'un algorithme de correction

- Si on reçoit un mot de code invalide $\overrightarrow{r}$, on sait qu'il est erroné ! (c'est l'étape de détection avant correction).
- Pour le corriger, on doit choisir le mot de code valide, parmi les 2^k mots de code valides $\overrightarrow{c}_j$, qui a la plus grande probabilité d'avoir été à l'origine du mot reçu $\overrightarrow{r}$.
- On choisit le vecteur $\overrightarrow{c}_i$ qui vérifie la relation

$$\mathrm{Prob}(\overrightarrow{r}\,|\,\overrightarrow{c}_i) = \max_{\overrightarrow{c}_j}\{\mathrm{Prob}(\overrightarrow{r}\,|\,\overrightarrow{c}_j)\} \tag{362}$$

- Dans le cas le plus simple, le vecteur $\overrightarrow{c}_i$ est choisi tel que (algorithme de *distance minimale* ou *du plus proche voisin*) :

$$d(\overrightarrow{r},\overrightarrow{c}_i) = \min_{\overrightarrow{c}_j}\{d(\overrightarrow{r},\overrightarrow{c}_j)\} \tag{363}$$

Capacité de détection/correction d'un code de parité simple

Pour un code de parité simple, à parité paire ou impaire :

- La distance de Hamming est :

$$d_{\min} = 2 \tag{364}$$

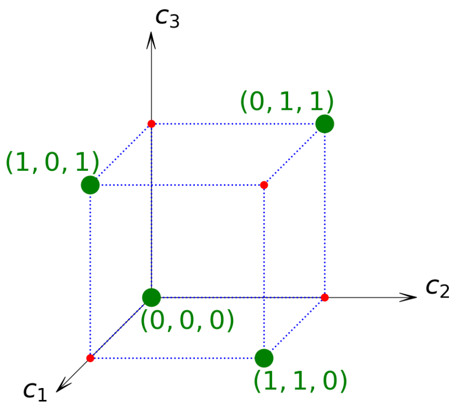
- Par conséquent, il est possible de détecter une erreur car la capacité de détection vaut :

$$t_d = d_{\min} - 1 = 1 \tag{365}$$

- Et il n'est pas possible de corriger l'erreur détectée car la capacité de correction vaut :

$$t_c = \mathrm{arrondi}_{-}\frac{d_{\min}-1}{2} = 0 \tag{366}$$

Code de parité : détection mais pas de correction



Détection des erreurs *simples*

Aucune correction d'erreurs

Capacité de détection/correction d'un code de répétition

Pour un code de répétition triple :

- La distance de Hamming vaut :

$$d_{\min} = 3 \tag{367}$$

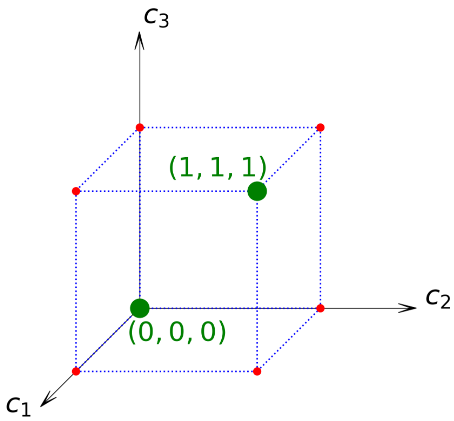
- Par conséquent, il est possible de détecter deux erreurs car la capacité de détection vaut :

$$t_d = d_{\min} - 1 = 2 \tag{368}$$

- Et il est possible de corriger une erreur car la capacité de correction vaut :

$$t_c = \text{arrondi}_{-} \frac{d_{\min} - 1}{2} = 1 \tag{369}$$

Code de répétition : correction par vote majoritaire



Correction des erreurs *simples*

Détection des erreurs *doubles*

Pas de correction pour les erreurs *doubles* ou *triples*

Exemple : signaux de télévision numérique MPEG (I)

Tension	Niveau quantifié	Équivalent binaire
-0,5 $[V]$	16	00010000
0 $[V]$	128	10000000
+0,5 $[V]$	240	11110000

Table – Liens entre 3 valeurs analogiques de chrominance et les niveaux quantifiés.

Chaque ligne active de la composante de luminance est encadrée d'un délimiteur qui comporte un octet XY tel que la partie X contient les 3 bits d'information sensible

$$X = (1, F, V, H)$$

et la partie Y contient 4 bits redondants (bits de *parité*) pour la robustesse aux erreurs de transmission

$$Y = (P_1, P_2, P_3, P_4)$$

Exemple : signaux de télévision numérique MPEG (II)

En équations :

$Y = P_1 P_2 P_3 P_4$ est défini comme suit

$$\begin{aligned} P_1 &= V \oplus F \oplus H \\ P_2 &= V \oplus F \\ P_3 &= F \oplus H \\ P_4 &= V \oplus H \end{aligned} \quad (370)$$

où le OU exclusif (XOR), noté $\oplus$, correspond à une addition modulo 2, comme indiqué dans la table ci-après :

V	H	$P_4 = V \oplus H$
0	0	0
0	1	1
1	0	1
1	1	0

Exemple : signaux de télévision numérique MPEG (III)

Terminologie

- Mot *message* $m = (F, V, H)$, de longueur $k = 3$ bits
- Mot *parité* $p = (P_1, P_2, P_3, P_4)$, de longueur $r = 4$ bits
- *Message* $+$ *parité* $=$ mot *de code par blocs* ou mot *codé par bloc* $c = (P_1, P_2, P_3, P_4 \mid F, V, H)$, de longueur $n = 7$ bits.

$$\begin{aligned} c_1 &= P_1 = F \oplus V \oplus H = (1 \times F) \oplus (1 \times V) \oplus (1 \times H) \\ c_2 &= P_2 = F \oplus V = (1 \times F) \oplus (1 \times V) \oplus (0 \times H) \\ c_3 &= P_3 = F \oplus H = (1 \times F) \oplus (0 \times V) \oplus (1 \times H) \\ c_4 &= P_4 = V \oplus H = (0 \times F) \oplus (1 \times V) \oplus (1 \times H) \\ c_5 &= F = F = (\mathbf{1} \times F) \oplus (0 \times V) \oplus (0 \times H) \\ c_6 &= V = V = (0 \times F) \oplus (\mathbf{1} \times V) \oplus (0 \times H) \\ c_7 &= H = H = (0 \times F) \oplus (0 \times V) \oplus (\mathbf{1} \times H) \end{aligned} \quad (371)$$

Exemple : signaux de télévision numérique MPEG : Codes linéaires

En introduisant les coefficients $\alpha_{ij} \in \{0, 1\}$:

$$\begin{aligned}
c_1 &= (\alpha_{11} \times m_1) \oplus (\alpha_{21} \times m_2) \oplus (\alpha_{31} \times m_3) \\
c_2 &= (\alpha_{12} \times m_1) \oplus (\alpha_{22} \times m_2) \oplus (\alpha_{32} \times m_3) \\
c_3 &= (\alpha_{13} \times m_1) \oplus (\alpha_{23} \times m_2) \oplus (\alpha_{33} \times m_3) \\
c_4 &= (\alpha_{14} \times m_1) \oplus (\alpha_{24} \times m_2) \oplus (\alpha_{34} \times m_3) \\
c_5 &= m_1 \\
c_6 &= m_2 \\
c_7 &= m_3
\end{aligned} \tag{372}$$

Notations

- Message de départ $\vec{m} = (m_1, m_2, \ldots, m_k)$
- Vecteur de parité $\vec{p} = (p_1, p_2, \ldots, p_r)$
- Mot codé $\vec{c} = (c_1, c_2, \ldots, c_n)$

Arithmétique modulo 2

- L'addition modulo 2 entre deux variables binaires ($\in \{0, 1\}$) est équivalente au XOR :

$$\left\{ \begin{array}{lllll}
0 \oplus 0 & = & 0 & = & 0 + 0 \mod 2 \\
0 \oplus 1 & = & 1 & = & 0 + 1 \mod 2 \\
1 \oplus 0 & = & 1 & = & 1 + 0 \mod 2 \\
1 \oplus 1 & = & 0 & = & 1 + 1 \mod 2
\end{array} \right. \tag{373}$$

- Par la suite, les additions (et multiplications) entre variables binaires seront considérées comme des opérations modulo 2.
- Dans le cas des signaux MPEG, nous écrirons alors :

$$\begin{pmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \\ c_4 \\ c_5 \\ c_6 \\ c_7 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha_{11} m_1 + \alpha_{21} m_2 + \alpha_{31} m_3 \\ \alpha_{12} m_1 + \alpha_{22} m_2 + \alpha_{32} m_3 \\ \alpha_{13} m_1 + \alpha_{23} m_2 + \alpha_{33} m_3 \\ \alpha_{14} m_1 + \alpha_{24} m_2 + \alpha_{34} m_3 \\ m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} \tag{374}$$

Un cadre théorique : arithmétique modulo 2, le corps fini F_2

- L'ensemble $F_2 = \{0,1\}$, muni des opérations d'addition et de multiplication modulo 2, est un corps fini.
- L'ensemble des mots binaires de longueur n est représenté par l'espace vectoriel fini $F_2^n = \{0,1\}^n$
  - Les mots de messages (de longueur k bits) appartiennent à $F_2^k = \{0,1\}^k$
  - Les mots de codes valides appartiennent à un sous-ensemble de $F_2^n = \{0,1\}^n$

Codes linéaires : définition de la matrice génératrice

Définition

Un code bloc linéaire est défini par l'équation matricielle :

$$\vec{c} = \vec{m} G \quad (375)$$

La matrice $G \in F_2^{k \times n}$ est appelée *matrice génératrice.*

Elle a pour expression générale

$$G = \begin{bmatrix} \vec{v}_1 \\ \vec{v}_2 \\ \cdots \\ \vec{v}_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} v_{11} & v_{12} & \cdots & v_{1n} \\ v_{21} & v_{22} & \cdots & v_{2n} \\ \vdots & & & \\ v_{k1} & v_{k2} & \cdots & v_{kn} \end{bmatrix} \quad (376)$$

Dans le cas code utilisé pour MPEG, la matrice génératrice est

$$G = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 1 & \mathbf{1} & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & \mathbf{1} \end{bmatrix} \quad (377)$$

Codes linéaires : sous-espace vectoriel $C \subset F_2^n$

Théorème

Les 2^k mots de code valides d'un code bloc linéaire forment un sous-espace vectoriel, noté C, de dimension k de F_2^n.

Corollaire

Toute combinaison linéaire de deux mots de code valides est un nouveau mot de code valide.

- Une combinaison linéaire de n variables binaires est simplement la somme des m variables qui sont associées à des coefficients non-nuls.
- Donc, la somme de mots de code valide est un nouveau mot de code valide :

$$\forall \vec{c}_1, \vec{c}_2 \in C, \quad \vec{c}_1 + \vec{c}_2 \in C \tag{378}$$

Capacité de correction des codes linéaires

Théorème

La distance de Hamming *d'un code linéaire est le minimum des poids des mots de code valides non identiquement nuls.*

$$d_{\min} = \min_{\vec{c}_l \in C,\ \vec{c}_l \neq \vec{0}} \{w(\vec{c}_l)\} \tag{379}$$

- La distance de Hamming d'un code linéaire est la distance minimum entre deux mots de code valides

$$d_{\min} = \min_{\vec{c}_i \neq \vec{c}_j \in C} \{d(\vec{c}_i, \vec{c}_j)\} = \min_{\vec{c}_i \neq \vec{c}_j \in C} \{w(\vec{c}_i + \vec{c}_j)\} \tag{380}$$

- Mais la somme de deux mots de code $\vec{c}_i + \vec{c}_j$ est un autre mot de code $\vec{c}_l$ (différent de $\vec{0}$ ssi $\vec{c}_i \neq \vec{c}_j$).
- Par ailleurs, tous les mots de code peuvent s'exprimer comme une somme de deux mots de code. Et le mot $\vec{0}$ ne peut s'exprimer que comme somme d'un mot non nul avec lui-même.

Capacité de correction des codes linéaires : MPEG

Dans le cas des signaux MPEG, nous avons :

m_1	m_2	m_3	c_1	c_2	c_3	c_4	c_5	c_6	c_7	w
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	1	1	0	1	1	0	0	1	4
0	1	0	1	1	0	1	0	1	0	4
0	1	1	0	1	1	0	0	1	1	4
1	0	0	1	1	1	0	1	0	0	4
1	0	1	0	1	0	1	1	0	1	4
1	1	0	0	0	1	1	1	1	0	4
1	1	1	1	0	0	0	1	1	1	4

- La distance minimale de ce code est donc $d_{\min} = 4$.
- Sa capacité de détection est donc de $t_d = d_{\min} - 1 = 3$ erreurs.
- Il est possible de corriger une seule erreur car la capacité de correction vaut $t_c = \text{arrondi}_{-} \frac{d_{\min}-1}{2} = 1$

Cas particulier de code linéaire en bloc : code systématique

Définition

Un code est dit *systématique* si une partie du mot codé coïncide avec le message :

$$\begin{aligned} G &= [P \,|\, I_k] \\ &= \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1(n-k)} & 1 & 0 & \dots & 0 \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2(n-k)} & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & 0 \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{k(n-k)} & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix} \end{aligned} \tag{381}$$

Les éléments de P sont souvent appelés les bits de parité.
Et donc

$$\vec{c} = (m_1, m_2, ..., m_k) \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & ... & p_{1(n-k)} & 1 & 0 & ... & 0 \\ p_{21} & p_{22} & ... & p_{2(n-k)} & 0 & 1 & ... & 0 \\ \vdots & & & & & & \vdots & 0 \\ p_{k1} & p_{k2} & ... & p_{k(n-k)} & 0 & 0 & ... & 1 \end{bmatrix} \tag{382}$$

Définition d'un outil pour la détection et correction d'erreurs

Matrice de contrôle de parité.
Par définition, elle construite comme suit :

$$H^T = \left[\frac{I_{n-k}}{P} \right] = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1(n-k)} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2(n-k)} \\ \vdots & & & \\ p_{k1} & p_{k2} & \dots & p_{k(n-k)} \end{bmatrix} \tag{383}$$

Détection d'erreurs

Théorème

Le produit $\vec{c}\,H^T$, pour tout mot codé $\vec{c} \in C$ au moyen de la matrice génératrice G, est le vecteur nul :

$$\vec{c}\,H^T = \vec{0} \tag{384}$$

En effet, on observe que

$$GH^T = [P \mid I_k] \left[\frac{I_{n-k}}{P} \right] = PI_{n-k} + I_k P = P + P = O. \tag{385}$$

Ainsi, un mot de code correct qui représente le message $\vec{m}$ s'écrit $\vec{c} = \vec{m}G$ et nous aurons $\vec{c}\,H^T = \vec{m}GH^T = \vec{0}$.

Si $\vec{c}\,H^T \neq \vec{0}$, alors il y a un problème $\rightarrow$ on dispose d'un *moyen de détecter une erreur* lors de la transmission.

À la réception

Vecteur à la réception :

$$\vec{r} = \vec{c} + \vec{e} \tag{386}$$

Définition

Le vecteur $\vec{s} = \vec{r}H^T$ est appelé *vecteur syndrome d'erreur* ou plus simplement *syndrome* :

$$\vec{s} = \vec{r}H^T \tag{387}$$

En développant l'expression du syndrome,

$$\begin{aligned} \vec{s} &= (\vec{c} + \vec{e})H^T \\ &= \vec{c}H^T + \vec{e}H^T \\ &= \vec{e}H^T \end{aligned} \tag{388}$$

Ceci nous montre que le syndrome ne dépend que de l'erreur et pas du mot de code initial.

Algorithme de correction d'erreur I

On construit le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc} \vec{c}_0 = \vec{e}_0 = \vec{0} & \vec{c}_1 & \dots & \vec{c}_{2^k} & \rightarrow & \vec{s}_0 = 0 \\ \vec{e}_1 & \vec{c}_1 + \vec{e}_1 & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_1 & \rightarrow & \vec{s}_1 \\ \vec{e}_2 & \vec{c}_1 + \vec{e}_2 & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_2 & \rightarrow & \vec{s}_2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vec{e}_i & \vec{c}_1 + \vec{e}_i & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_i & \rightarrow & \vec{s}_i \\ \vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\ \vec{e}_{2^{n-k}} & \vec{c}_1 + \vec{e}_{2^{n-k}} & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_{2^{n-k}} & \rightarrow & \vec{s}_{2^{n-k}} \end{array}$$

- Tous les éléments $\vec{c}_j + \vec{e}_i$ d'une ligne (la $i^{\text{ème}}$) de ce tableau possèdent le même syndrome $\vec{s}_i$ et des lignes différentes ont des syndromes différents.
- Le tableau (la partie à gauche des flèches) possède 2^k colonnes (le nombre de mots de code valides) et 2^{n-k} lignes (le nombre de syndromes) ; il s'agit de tous les mots de longueur n (tous les éléments de F_2^n).

Algorithme de correction d'erreur II

On construit le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\vec{c}_0 = \vec{e}_0 = \vec{0} & \vec{c}_1 & \dots & \vec{c}_{2^k} & \rightarrow & \vec{s}_0 = 0 \\
\vec{e}_1 & \vec{c}_1 + \vec{e}_1 & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_1 & \rightarrow & \vec{s}_1 \\
\vec{e}_2 & \vec{c}_1 + \vec{e}_2 & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_2 & \rightarrow & \vec{s}_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vec{e}_i & \vec{c}_1 + \vec{e}_i & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_i & \rightarrow & \vec{s}_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vec{e}_{2^{n-k}} & \vec{c}_1 + \vec{e}_{2^{n-k}} & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_{2^{n-k}} & \rightarrow & \vec{s}_{2^{n-k}}
\end{array}$$

- La première ligne du tableau (à gauche de la flèche) contient tous les mots de code valides, (mots de longueur n qui appartiennent à C) ; c-à-d. ceux qui sont générés par G.
- La première colonne du tableau contient tous les mots de longueur n qui sont des erreurs avec un nombre minimal de bits à 1.

Algorithme de correction d'erreur III

On construit le tableau suivant :

$$\begin{array}{ccccccc}
\vec{c}_0 = \vec{e}_0 = \vec{0} & \vec{c}_1 & \dots & \vec{c}_{2^k} & \rightarrow & \vec{s}_0 = 0 \\
\vec{e}_1 & \vec{c}_1 + \vec{e}_1 & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_1 & \rightarrow & \vec{s}_1 \\
\vec{e}_2 & \vec{c}_1 + \vec{e}_2 & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_2 & \rightarrow & \vec{s}_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vec{e}_i & \vec{c}_1 + \vec{e}_i & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_i & \rightarrow & \vec{s}_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vec{e}_{2^{n-k}} & \vec{c}_1 + \vec{e}_{2^{n-k}} & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_{2^{n-k}} & \rightarrow & \vec{s}_{2^{n-k}}
\end{array}$$

- En commençant par tous les patterns d'erreurs ne contenant qu'un seul bit à 1.
- Puis ceux ne contenant que deux bits à 1, et ainsi de suite ...
- Si un pattern d'erreur conduit à un syndrome qui est déjà dans la liste, on supprime ce pattern et on essaye le suivant.
- On s'arrête lorsque tous les 2^{n-k} syndromes ont été utilisés.

Algorithme de correction d'erreur IV

En partant du tableau ainsi construit :

$$
\begin{array}{ccccccc}
\vec{c}_0 = \vec{e}_0 = \vec{0} & \vec{c}_1 & \dots & \vec{c}_{2^k} & \rightarrow & \vec{s}_0 = 0 \\
\vec{e}_1 & \vec{c}_1 + \vec{e}_1 & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_1 & \rightarrow & \vec{s}_1 \\
\vec{e}_2 & \vec{c}_1 + \vec{e}_2 & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_2 & \rightarrow & \vec{s}_2 \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vec{e}_i & \vec{c}_1 + \vec{e}_i & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_i & \rightarrow & \vec{s}_i \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
\vec{e}_{2^{n-k}} & \vec{c}_1 + \vec{e}_{2^{n-k}} & \dots & \vec{c}_{2^k} + \vec{e}_{2^{n-k}} & \rightarrow & \vec{s}_{2^{n-k}}
\end{array}
$$

Algorithme de *correction d'erreur* suivant :

1. Calcul du syndrome $\vec{s} = \vec{r} H^T$ sur base du signal reçu.
2. Détermination du vecteur d'erreur $\vec{e}_i$ correspondant.
3. Estimation du mot codé réel au moyen de $\vec{c} = \vec{r} + \vec{e}_i$.

Codes cycliques

$\vec{c}$	$\vec{p}$				$\vec{m}$		
0	0	0	0	0	0	0	0
1	1	1	0	1	0	0	1
2	0	1	1	1	0	1	0
3	1	0	1	0	0	1	1
4	1	1	1	0	1	0	0
5	0	0	1	1	1	0	1
6	1	0	0	1	1	1	0
7	0	1	0	0	1	1	1

Table – Éléments d'un code linéaire (7,3).

Définition

D'une manière générale, on appelle *code cyclique* un code linéaire (n, k) tel que toute permutation cyclique des bits sur un mot codé génère un autre mot codé.

Codes de Hamming

Définition

Les codes de Hamming constituent un sous-ensemble des codes en blocs pour lesquels (n, k) valent

$$(n,k) = (2^r - 1, 2^r - 1 - r) \tag{389}$$

pour $r = 2, 3, \ldots$

Le nombre de bit de parité d'un code de Hamming vaut donc :

$$n - k = r \tag{390}$$

On peut montrer qu'après codage, la probabilité d'erreur devient

$$P_B \simeq p - p(1-p)^{n-1} \tag{391}$$

Autres codes

Code de Golay étendu

- Un des codes les plus utiles est le code binaire (24, 12), appelé code de Golay étendu.
- Formé en ajoutant un bit de parité sur la totalité d'un code (23, 12).
- L'ajout de ce bit fait basculer le distance minimale de 7 à 8.
- De plus, le taux de codage d'un demi est facilement réalisable.
- Le taux d'erreur est significativement plus faible que celui d'un code de Hamming.

Codes Bose-Chadhuri-Hocquenghem (BCH)

- Les codes BCH constituent une généralisation des codes de Hamming.
- Codes cycliques permettant, entre autres, la correction d'erreurs multiples.

Codes de Reed-Solomon

- Ces codes font partie des codes BCH non binaires.

Turbo-codes

- Codes, relativement récents, ayant des propriétés remarquables pour des canaux particulièrement bruités, là où les codes plus anciens ne conviennent pas.
- Ces codes combinent des bits de parité horizontaux avec des bits de parité verticaux.

Table des matières

Propagation et systèmes radio I

Table des matières

Ancienne nomenclature

Fréquences	λ [m]	Dénomination
< 3 [kHz]	> 100 [km]	ELF
$3 - 30$ [kHz]	$10 - 100$ [km]	VLF
$30 - 300$ [kHz]	$1 - 10$ [km]	LF
$300 - 3000$ [kHz]	$100 - 1000$ [m]	MF
$3 - 30$ [MHz]	$10 - 100$ [m]	HF
$30 - 300$ [MHz]	$1 - 10$ [m]	VHF
$300 - 3000$ [MHz]	$10 - 100$ [cm]	UHF
$3 - 30$ [GHz]	$1 - 10$ [cm]	SHF
$30 - 300$ [GHz]	$1 - 10$ [mm]	EHF
$300 - 3000$ [GHz]	$0,1 - 1$ [mm]	
$3 - 30$ [THz]	$10 - 100$ [μm]	
$30 - 430$ [THz]	$0,7 - 10$ [μm]	
$430 - 860$ [THz]	$0,35 - 0,7$ [μm]	

Table – Nomenclature de l'ITU-R.

Propagation des ondes électromagnétiques

Équations de Maxwell (dans le domaine *temporel* et sous *forme locale*)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \quad (392)$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \quad (393)$$

$$\nabla . \vec{D} = \rho \quad (394)$$

$$\nabla . \vec{B} = 0 \quad (395)$$

Énergie, puissance et impédance électromagnétiques

Définition (Vecteur de Poynting)

Le vecteur de Poynting $\vec{S}$ est défini comme le produit vectoriel

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \quad \left[\frac{\text{V}}{\text{m}} \times \frac{\text{A}}{\text{m}} = \frac{\text{W}}{\text{m}^2}\right] \quad (396)$$

Équations de Maxwell (dans le domaine *temporel* et sous *forme locale*)

$$\nabla \times \vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \tag{392}$$

$$\nabla \times \vec{H} = \vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \tag{393}$$

$$\nabla . \vec{D} = \rho \tag{394}$$

$$\nabla . \vec{B} = 0 \tag{395}$$

Énergie, puissance et impédance électromagnétiques

Définition (Vecteur de Poynting)

Le vecteur de Poynting $\vec{S}$ est défini comme le produit vectoriel

$$\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H} \left[\frac{\mathrm{V}}{\mathrm{m}} \times \frac{\mathrm{A}}{\mathrm{m}} = \frac{\mathrm{W}}{\mathrm{m}^2}\right] \tag{396}$$

Difficultés :

- les équations sont *locales*, exprimées en *fonction du temps* et *couplées*.
- on souhaite exprimer un résultat en termes de valeurs macroscopiques, facilement mesurables.

Solutions :

1. locale → globale par *intégration*
2. fonction du temps → on passe aux *phaseurs* (hypothèse : régime sinusoïdal permanent ! ?)
3. couplage → *changement de variables* pour découpler les équations par introduction de
   1. fonction de *potentiel*
   2. champs de *potentiel vecteur*
4. grandeur macroscopique mesurable et pratique → on intègre le vecteur de Poynting sur une surface pour obtenir une notion de *puissance*.

Analyse du flux de puissance : $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ I

Formule de l'analyse vectorielle

$$\nabla \cdot (\vec{A} \times \vec{B}) = \vec{B} \cdot (\nabla \times \vec{A}) - \vec{A} \cdot (\nabla \times \vec{B}) \qquad (397)$$

Analyse locale :
Appliqué à $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$, cela donne

$$\nabla \cdot \vec{S} = \vec{H} \cdot (\nabla \times \vec{E}) - \vec{E} \cdot (\nabla \times \vec{H}) = -\vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} - \vec{E} \cdot \left(\vec{J} + \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} \right) \qquad (398)$$

Analyse globale : par le théorème de la divergence,

$$\int_v \nabla \cdot \vec{S} \, dv = -\oint_s \vec{S} \cdot d\vec{s} \qquad (399)$$

$$-\oint_s \vec{S} \cdot d\vec{s} = \int_v \vec{E} \cdot \vec{J} \, dv + \int_v \left(\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \right) dv \qquad (400)$$

Analyse du flux de puissance : $\vec{S} = \vec{E} \times \vec{H}$ II

Deux composantes contribuent au flux entrant, $-\oint_s \vec{S} \cdot d\vec{s}$:

1. $\int_v \vec{E} \cdot \vec{J} \, dv$, la puissance dissipée,
2. le terme $\int_v (\vec{E} \cdot \frac{\partial \vec{D}}{\partial t} + \vec{H} \cdot \frac{\partial \vec{B}}{\partial t}) dv$

En résumé, en considérant $\vec{J} = \sigma \vec{E}$, $\vec{D} = \epsilon \vec{E}$ et $\vec{B} = \mu \vec{H}$,

$$-\oint_s \vec{S} \cdot d\vec{s} = \sigma \int_v \left| \vec{E} \right|^2 dv + \frac{\partial}{\partial t} \int_v \left(\frac{\epsilon \left| \vec{E} \right|^2}{2} + \frac{\mu \left| \vec{H} \right|^2}{2} \right) dv \qquad (401)$$

Notion de phaseur : rappel

On fait l'hypothèse d'un régime sinusoïdal permanent.

- Passage d'une grandeur sinusoïdale à un phaseur (*définition*) :

$$x(t) = X\cos(\omega t + \theta) \;\Rightarrow\; \widehat{X} = Xe^{j\theta} \tag{402}$$

- Passage inverse : multiplier le phaseur par $e^{j\omega t}$ et prendre la partie réelle

$$\begin{aligned} x(t) &= \mathrm{Re}\left(\widehat{X}e^{j\omega t}\right) && (403)\\ &= \mathrm{Re}\left(Xe^{j(\omega t+\theta)}\right) && (404)\\ &= X\cos(\omega t + \theta) && (405) \end{aligned}$$

Le phaseur est un concept purement mathématique, très commode pour certains calculs, comme la dérivée. En effet,

$$\frac{\partial\left(\widehat{X}e^{j\omega t}\right)}{\partial t} = j\omega\widehat{X}e^{j\omega t} \tag{406}$$

Antennes

Propriétés générales à l'émission

Équations de Maxwell en *notation phasorielle*

$$\begin{aligned} \nabla\times\widehat{E} &= -j\omega\widehat{B} && (407)\\ \nabla\times\widehat{H} &= \widehat{J} + j\omega\widehat{D} && (408)\\ \nabla\cdot\widehat{D} &= \widehat{\rho} && (409)\\ \nabla\cdot\widehat{B} &= 0 && (410) \end{aligned}$$

En espace libre, les rotationnels s'écrivent

$$\begin{aligned} \nabla\times\widehat{E} &= -j\omega\mu_0\widehat{H} && (411)\\ \nabla\times\widehat{H} &= \widehat{J}_s + j\omega\epsilon_0\widehat{E} && (412) \end{aligned}$$

Calcul des champs I

Idée : changement de variables pour trouver une solution analytique.

Formule de l'analyse vectorielle

$$\nabla \cdot \nabla \times \widehat{A} = 0 \tag{413}$$

Comme

$$\nabla \cdot \widehat{B} = 0 \tag{414}$$

on peut définir un *potentiel vecteur magnétique*

$$\widehat{B} = \nabla \times \widehat{A} \tag{415}$$

Cela fournit un premier changement de variable.

Calcul des champs II

De plus,

$$\nabla \times \widehat{E} = -j\omega\widehat{B} = -j\omega\nabla \times \widehat{A} \Rightarrow \nabla \times (\widehat{E} + j\omega\widehat{A}) = 0 \tag{416}$$

Formule de l'analyse vectorielle

$$\nabla \times \nabla\widehat{V} = 0 \tag{417}$$

On peut ainsi définir une *fonction potentiel* $\widehat{V}$, telle que

$$\widehat{E} + j\omega\widehat{A} = \nabla\widehat{V} \tag{418}$$

et donc que

$$\widehat{E} = -j\omega\widehat{A} - \nabla\widehat{V} \tag{419}$$

Si $\widehat{A}$, $\widehat{V}$ sont connus, on peut calculer $\widehat{E}$ et ensuite $\widehat{B}$.

Solution analytique

$\nabla \times \nabla \widehat{V} = 0$ introduit une indétermination. On peut donc ajouter une contrainte qui est, dans notre cas, la condition de Lorentz qui stipule que $\nabla \cdot \widehat{A} = -j\omega\mu_0\epsilon_0\widehat{V}$.

Après (de longs) calculs,

$$\nabla^2\widehat{A} + \omega^2\mu_0\epsilon_0\widehat{A} = -\mu_0\widehat{J}_s \tag{420}$$

Définissant le nombre d'onde $\beta = \frac{2\pi}{\lambda} = \omega\sqrt{\mu_0\epsilon_0}$, la solution est

$$\boxed{\widehat{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\widehat{J}_s e^{-j\beta r}}{r} dv \qquad (421)}$$

Comportement en émission ou en réception ?

Théorème (Réciprocité)

Les propriétés générales à la réception sont identiques aux propriétés générales à l'émission en vertu du ***théorème de réciprocité****.*

Antennes simples

Doublet de Hertz

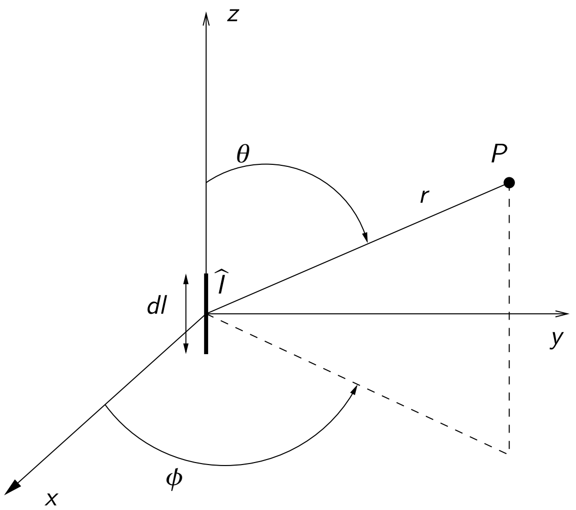


Figure – Doublet électrique.

Si le doublet est aligné sur l'axe z, le potentiel vecteur se réduit à

$$\widehat{A} = \frac{\mu_0}{4\pi}\int_v \frac{\widehat{J}_s e^{-j\beta r}}{r} dv \longrightarrow \widehat{A}_z = \frac{\mu_0}{4\pi}\widehat{I}\,dl\,\frac{e^{-j\beta r}}{r} \tag{422}$$

Champs

En coordonnées sphériques, on en déduit

$$\widehat{H}_r = 0 \quad (423)$$

$$\widehat{H}_\theta = 0 \quad (424)$$

$$\widehat{H}_\phi = \frac{\widehat{I}dl}{4\pi}\beta^2 \sin\theta \left(j\frac{1}{\beta r} + \frac{1}{\beta^2 r^2}\right) e^{-j\beta r} \quad (425)$$

Quant au champ électrique, il vaut ($\eta_0 = \sqrt{\frac{\mu_0}{\epsilon_0}} = 120\pi = 377$ [Ω])

$$\widehat{E}_r = 2\frac{\widehat{I}dl}{4\pi}\eta_0\beta^2 \cos\theta \left(\frac{1}{\beta^2 r^2} - j\frac{1}{\beta^3 r^3}\right) e^{-j\beta r} \quad (426)$$

$$\widehat{E}_\theta = \frac{\widehat{I}dl}{4\pi}\eta_0\beta^2 \sin\theta \left(j\frac{1}{\beta r} + \frac{1}{\beta^2 r^2} - j\frac{1}{\beta^3 r^3}\right) e^{-j\beta r} \quad (427)$$

$$\widehat{E}_\phi = 0 \quad (428)$$

Puissance I

Hypothèse dite *du champ éloigné* :

- $\beta r \gg 1 \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda} r \gg 1 \Leftrightarrow r \gg \frac{\lambda}{2\pi}$.
  Par exemple, à 1 [GHz], on a $r \gg \frac{0{,}3}{2\pi}$ [m] ≈ 5 [cm].
- $\frac{1}{\beta^2 r^2}$ et $\frac{1}{\beta^3 r^3}$ sont négligeables par rapport à $\frac{1}{\beta r}$.

On remplace r par R et on simplifie les équations pour obtenir

$$\widehat{H} = \frac{j\beta\widehat{I}dl}{4\pi R} \sin\theta e^{-j\beta R}\vec{a}_\phi \quad (429)$$

$$\widehat{E} = \frac{j\eta_0\beta\widehat{I}dl}{4\pi R} \sin\theta e^{-j\beta R}\vec{a}_\theta \quad (430)$$

Aussi, comme $\eta_0 = 120\pi$ (impédance du vide),

$$\boxed{\|\widehat{S}_{av}\| = \frac{\|\widehat{E}_\theta\|^2}{120\pi} \quad (431)}$$

Puissance II

La puissance rayonnée moyenne est fournie par

$$\widehat{S}_{av} = 30\pi \left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2 \|\widehat{I}\|^2 \frac{\sin^2\theta}{R^2} \vec{a}_r \tag{432}$$

$$P_{rad} = \frac{1}{2} \oint_s \widehat{S}_{av} \cdot ds = 80\pi^2 \left(\frac{dl}{\lambda}\right)^2 \frac{|I|^2}{2} \tag{433}$$

Exemple

Valeurs numériques.

Pour $dl = 1\,[cm]$ et $f = 300\,[\text{MHz}]$ ($\lambda = 1\,[\text{m}]$), la résistance équivalente vaut $79\,[m\Omega]$. Soit $1\,[\text{W}]$ pour un courant de $3{,}6\,[\text{A}]$. C'est une antenne peu efficace.

Directivité et gain I

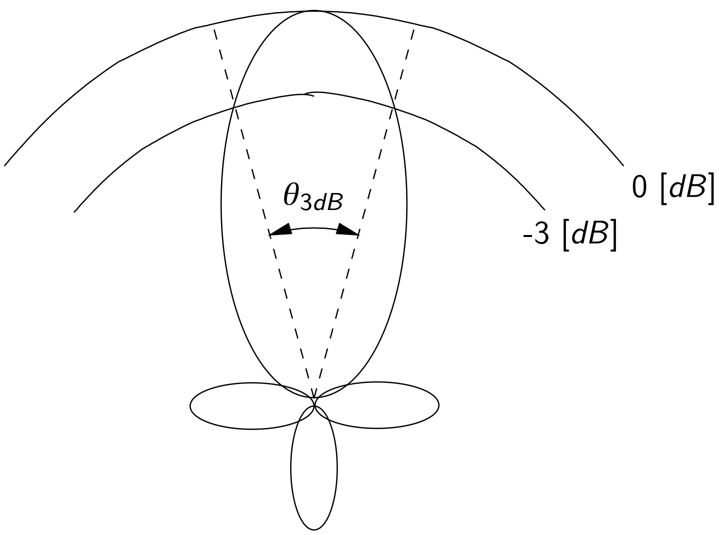


Figure – Angle d'ouverture à 3 [dB].

Directivité et gain II

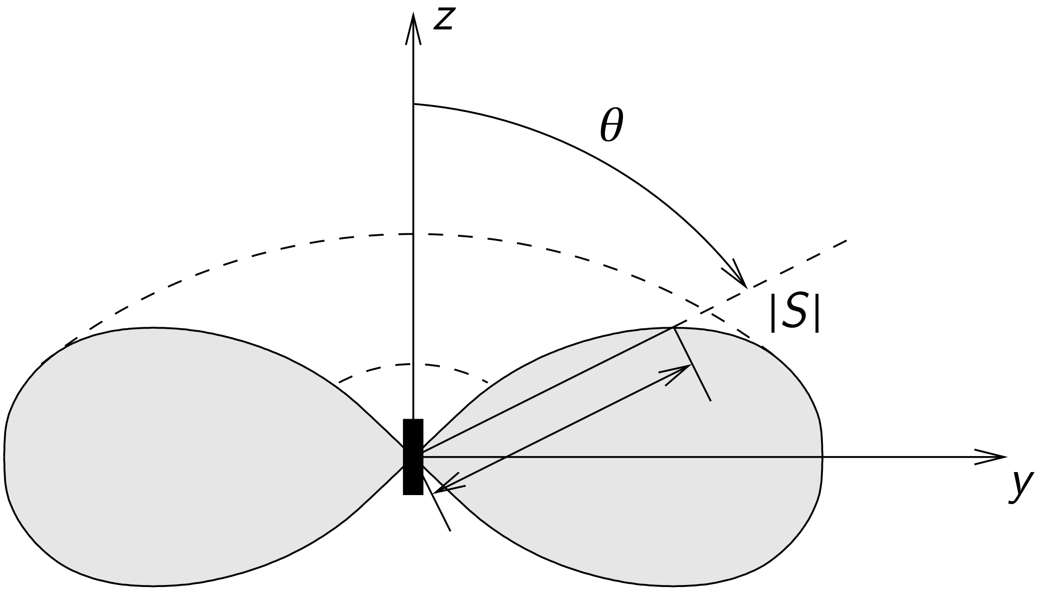
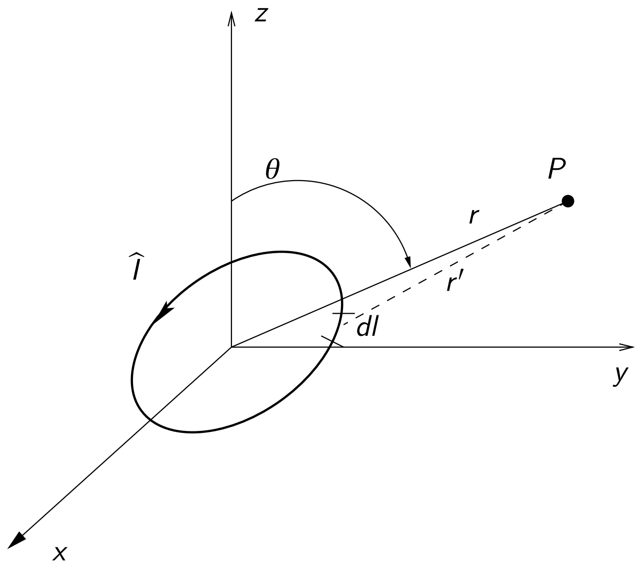


Figure – Diagramme de rayonnement d'un doublet électrique.

Doublet magnétique



Le vecteur de Poynting vaut, en champ éloigné,

$$\widehat{S}_{av} = 2 \times 1860 \left(\frac{A}{\lambda^2}\right)^2 \|\widehat{I}\|^2 \frac{\sin^2\theta}{R^2}\vec{a}_r \tag{434}$$

Il en résulte une puissance de rayonnement de

$$P_{rad} = \frac{1}{2}\oint_s \widehat{S}_{av} \cdot ds = 15{,}585\,|I|^2 \left(\frac{A}{\lambda^2}\right)^2 \tag{435}$$

Antennes longues I

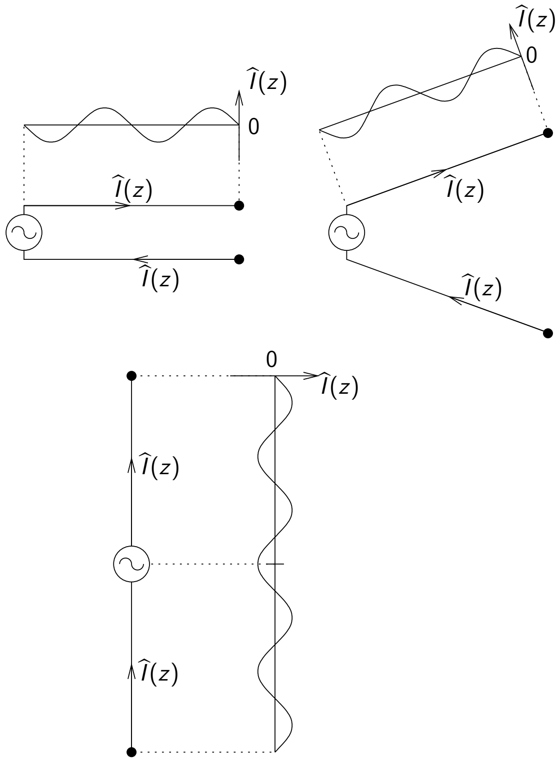


Figure – Distributions de courant le long d'une antenne longue.

Antennes longues II

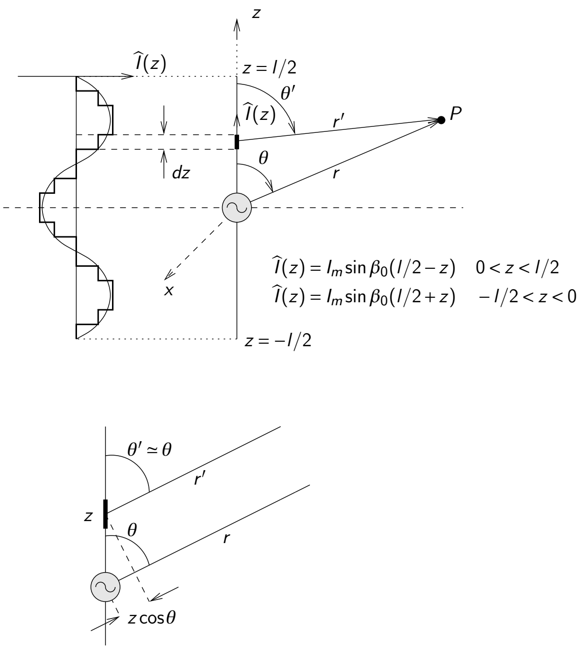
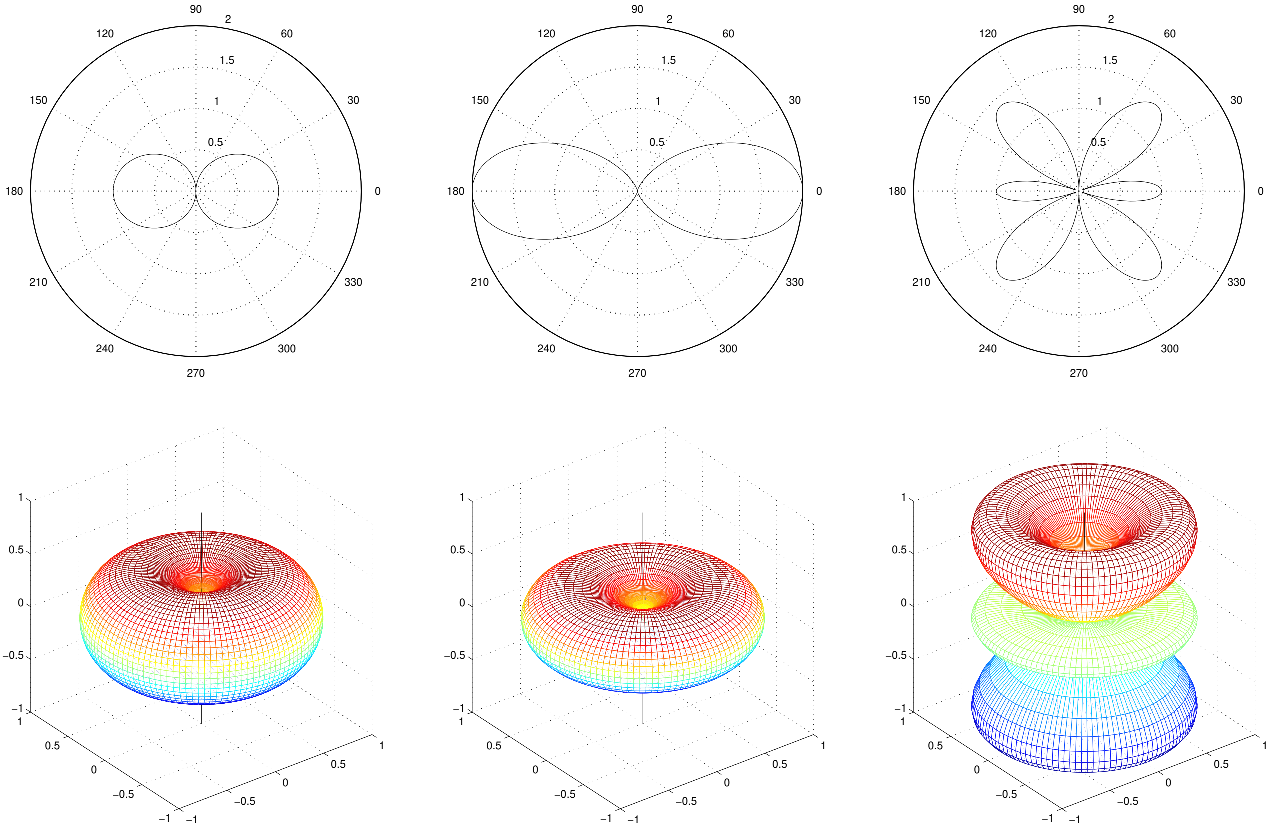


Figure – Configuration géométrique pour le dipôle allongé.

À grande distance $\widehat{E}_\theta = \dfrac{60\widehat{I}_m e^{-j\beta R}}{R} \dfrac{\cos(\pi l/\lambda \cos\theta) - \cos(\pi l/\lambda)}{\sin\theta} \vec{a}_\theta$

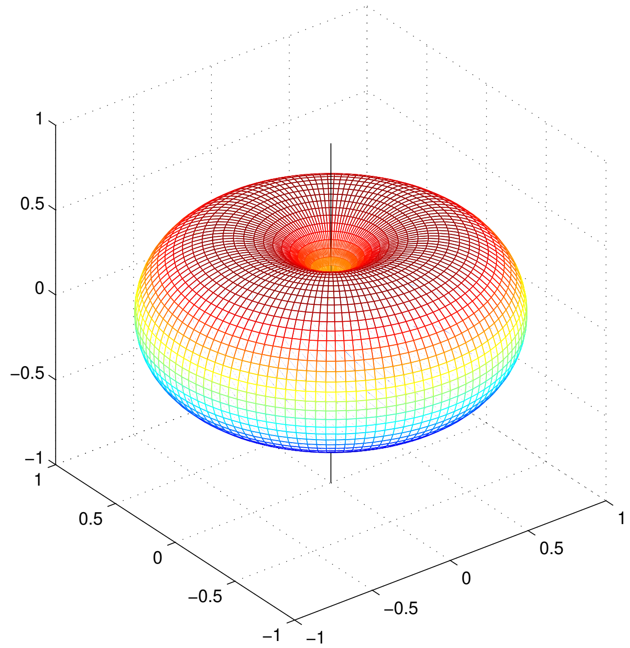
Diagrammes de rayonnement du champ électrique



$l = \frac{\lambda}{2}$ $\qquad l = \lambda$ $\qquad l = \frac{3\lambda}{2}$

Antenne demi-longueur d'onde ($l = \frac{\lambda}{2}$)

Pour $l = \frac{\lambda}{2}$, $\widehat{E}_\theta = \frac{60\widehat{I}_m e^{-j\beta R}}{R} \frac{\cos(\pi/2 \cos\theta)}{\sin\theta} \vec{a}_\theta$



Réseaux d'antennes I

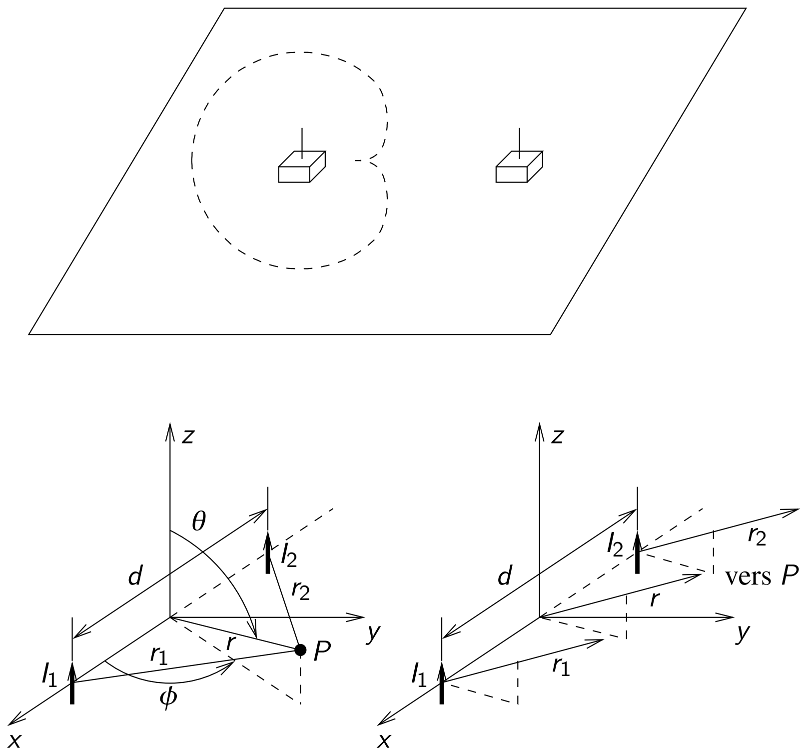


Figure – Réseau d'antennes.

Réseaux d'antennes II

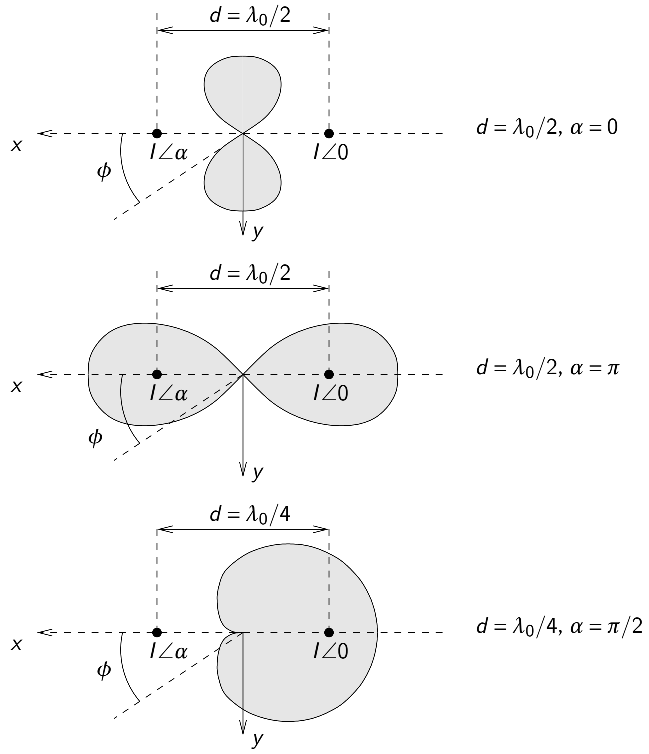


Figure – Diagrammes de rayonnement.

“Comprendre” le fonctionnement des antennes I

“Comprendre” le fonctionnement des antennes II

Règle de dimensionnement pour la détermination de la zone de couverture

Utilisation d'une antenne généralement isotrope

$$S = \frac{P_E}{4\pi d^2} \tag{436}$$

En espace libre :

$$S = \frac{E^2}{120\pi} \tag{437}$$

Au droit du récepteur, le champ électrique vaut

$$|E| = \frac{\sqrt{30 P_E}}{d} \tag{438}$$

Couverture de réception en radio-diffusion FM

En radiodiffusion FM, le seuil d'écoute en bordure de la zone de couverture est fixé par le niveau du champ électrique qui vaut 1 [mV/m], soit 60 [dBμV/m]. Si la puissance d'émission vaut 100 [W] (valeur typique), on peut déterminer la distance d.

Gain I

Définition (Gain d'antenne)

L'ITU définit le *gain d'une antenne* comme le "*ratio, généralement exprimé en décibels, entre la puissance nécessaire à l'entrée d'une antenne de référence sans perte à la puissance effective fournie à l'antenne considérée de manière à ce qu'elle fournisse le même champ électrique ou la même puissance dans une direction donnée*".

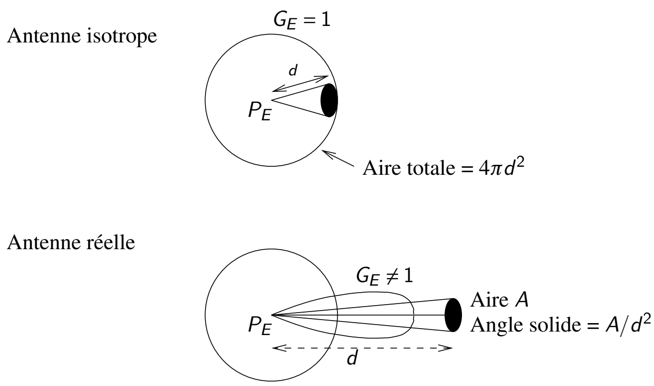


Figure – Gain d'antenne.

Gain II

Définition (PIRE)

La *Puissance Isotrope Rayonnée Équivalente* (**PIRE**) est le produit de la puissance d'émission d'une antenne par le gain dans la direction d'observation.

Exemple

Pour l'émission, $PIRE = P_E G_E$. En réception, $PIRE = P_R G_R$.

Aire effective

Définition

L'*aire effective d'une antenne* est **définie** comme le rapport entre la puissance disponible à ses bornes au vecteur de Poynting incident

$$A_{eff} = \frac{P}{S} \tag{439}$$

Résultat théorique

La surface effective d'une antenne est liée à son gain par la relation

$$A_{eff,E/R} = G_{E/R} \frac{\lambda^2}{4\pi} \tag{440}$$

Définition

L'*aire effective d'une antenne* est **définie** comme le rapport entre la puissance disponible à ses bornes au vecteur de Poynting incident

$$A_{eff} = \frac{P}{S} \quad (439)$$

Résultat théorique

La surface effective d'une antenne est liée à son gain par la relation

$$\boxed{A_{eff,E/R} = G_{E/R}\,\frac{\lambda^2}{4\pi} \quad (440)}$$

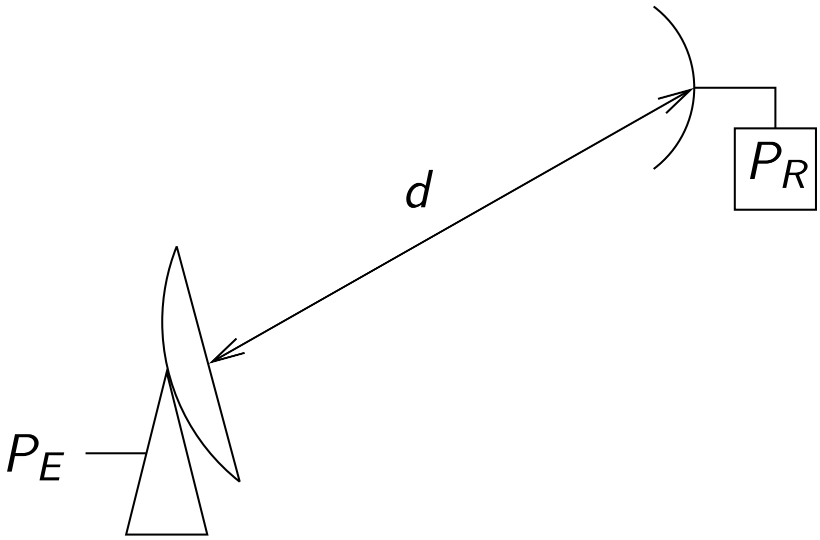


Figure – Schéma de liaison entre antennes.

Propagation en espace libre : équation de Friis II

$$P_R = S_R A_{eff,R} = \left(\frac{P_E G_E}{4\pi d^2}\right) A_{eff,R} = \left(\frac{P_E G_E}{4\pi d^2}\right)\left(\frac{\lambda^2}{4\pi}\right) G_R = P_E G_E G_R \left(\frac{\lambda}{4\pi d}\right)^2$$

$$\epsilon = \frac{P_E}{P_R} = \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{G_E G_R} \qquad (441)$$

En unités logarithmiques, relation de Friis

$$\epsilon = 32,5 + 20 \log f_{[MHz]} + 20 \log d_{[km]} - G_{E\,[dB]} - G_{R\,[dB]}$$

Les hautes fréquences sont-elles moins favorables ?

$$\epsilon = \frac{P_E}{P_R} = \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{G_E G_R} \qquad (442)$$

$$\epsilon = 32,5 + 20 \log f_{[\mathrm{MHz}]} + 20 \log d_{[\mathrm{km}]} - G_{E\,[\mathrm{dB}]} - G_{R\,[\mathrm{dB}]} \qquad (443)$$

Autre expression de la relation de Friis.
Comme

$$A_{eff} = G_E \frac{\lambda^2}{4\pi} \qquad (444)$$

$$\epsilon = \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2 \frac{1}{G_E G_R} = \left(\frac{4\pi d}{\lambda}\right)^2 \frac{\lambda^2}{4\pi A_E} \frac{\lambda^2}{4\pi A_R} \qquad (445)$$

$$= \frac{\lambda^2 d^2}{A_E A_R} = \frac{c^2 d^2}{f^2 A_E A_R} \qquad (446)$$

Modèles de propagation I

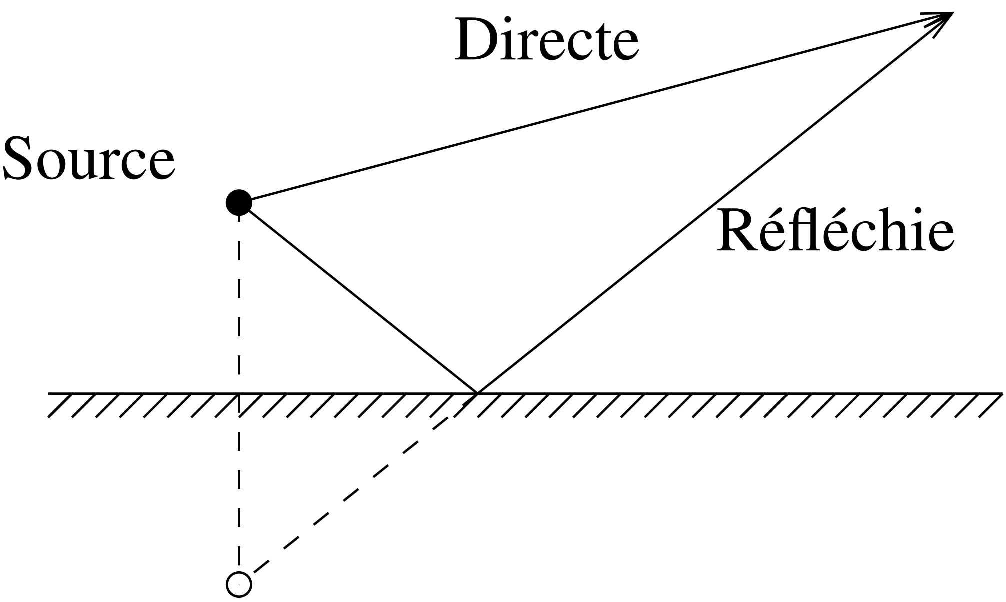


Figure – Présence du sol : onde directe et onde réfléchie.

Modèles de propagation II

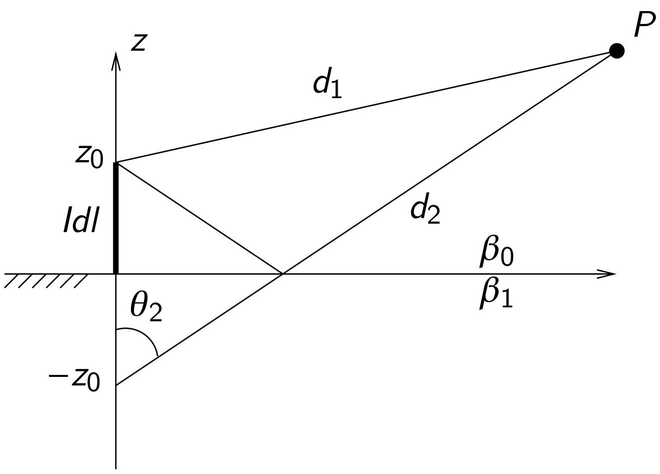


Figure – Antenne linéaire au-dessus d'un plan conducteur.

$$\widehat{A} = \frac{\mu_0 \widehat{I} dl}{4\pi} \left(\frac{e^{-j\beta_0 d_1}}{d_1} + K_v \frac{e^{-j\beta_0 d_2}}{d_2} + f(d_2, \theta_2) \frac{e^{-j\beta_0 d_2}}{d_2} \right) \tag{447}$$

Autres effets I

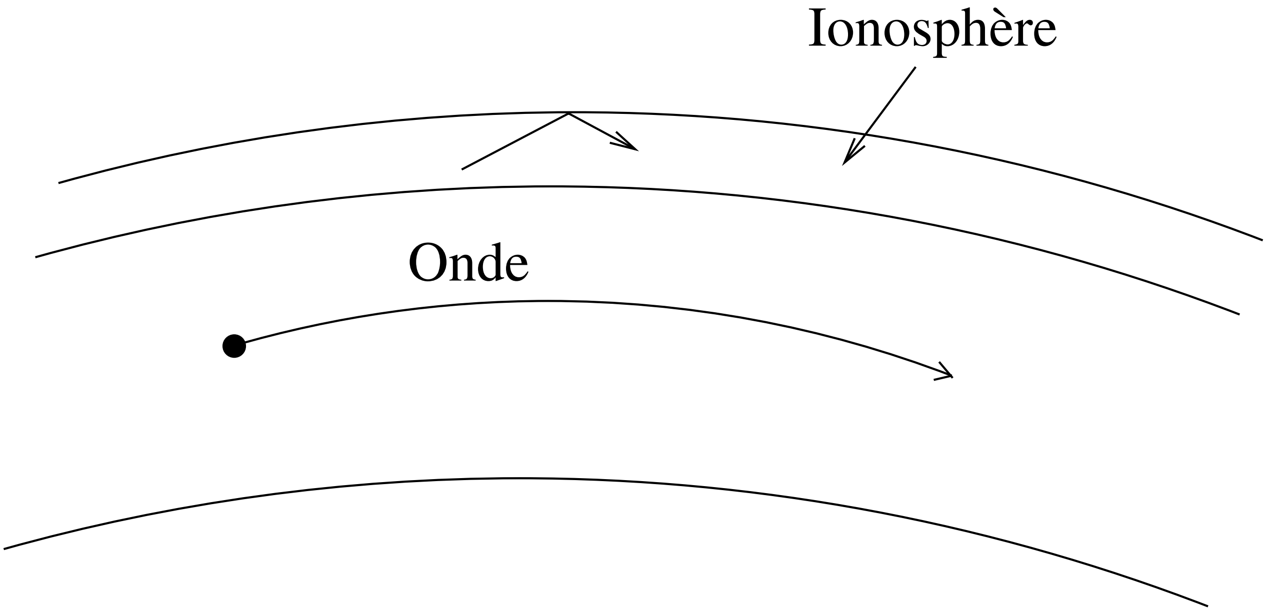


Figure – Réflexion sur l'ionosphère.

Autres effets II

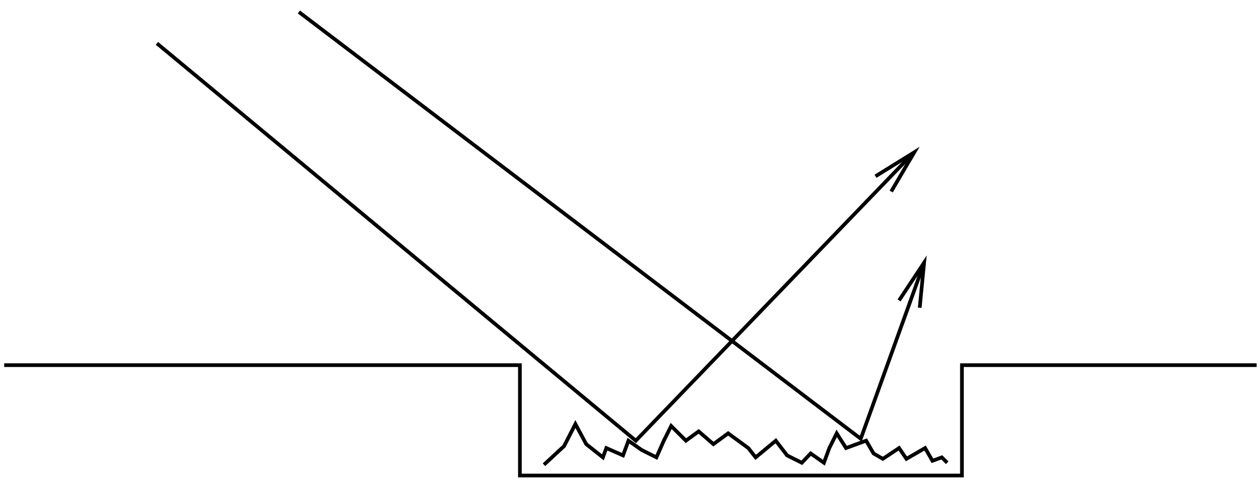


Figure – Diffusion sur une surface irrégulière.

Autres effets III

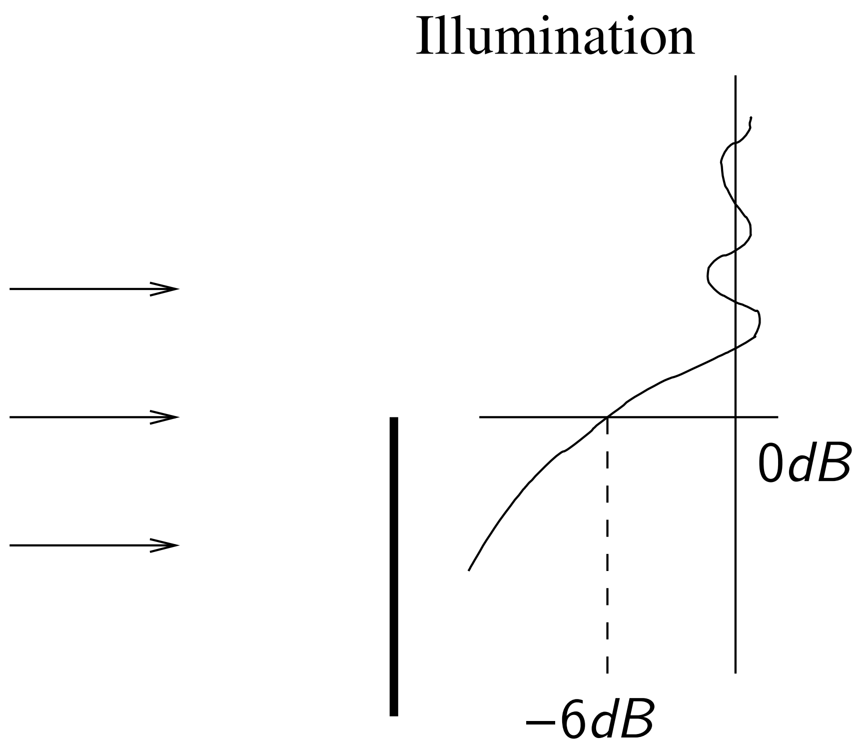


Figure – Exemple de diffraction.

Bilan de liaison en présence d'un trajet secondaire

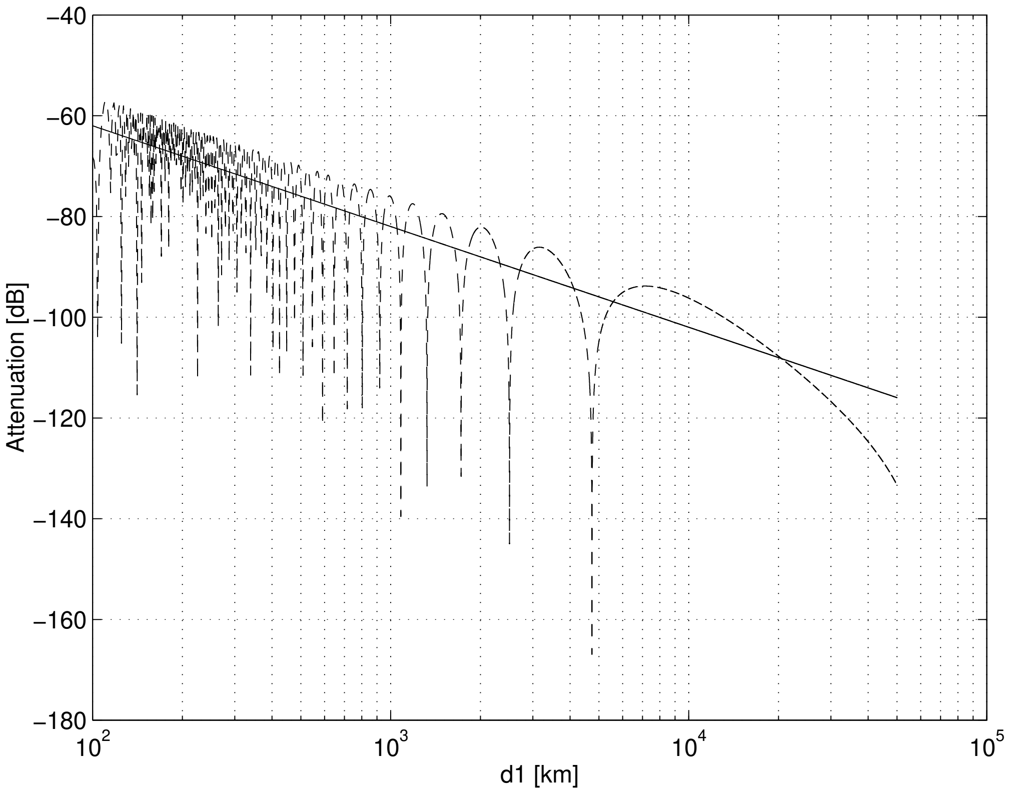


Figure – Affaiblissement de puissance ϵ en fonction de la distance : (a) en espace libre (trait continu) et (b) en présence d'une réflexion (traits interrompus).

Quid quand on n'est pas en espace libre ?

Espace libre :

relation de **Friis**

$$\epsilon = 32,5 + 20 \log f_{[\mathrm{MHz}]} + 20 \log d_{[\mathrm{km}]} - G_{E\,[\mathrm{dB}]} - G_{R\,[\mathrm{dB}]}\ [\mathrm{dB}]$$

Environnement urbain pour mobiles :

l'atténuation médiane est donnée par le modèle **COST 231-Hata**

$$\begin{aligned} L = {} & 46,33 + 33,9 \log f_{[\mathrm{MHz}]} - 13,82 \log(h_b) - a(f, h_m) \\ & + [44,9 - 6,55 \log(h_b)] \log d_{[km]} + C_m\ [\mathrm{dB}] \end{aligned}$$

où h_b et h_m représentent respectivement la hauteur de l'antenne de la station de base et celle du mobile.

Table des matières

Principes de fonctionnement du réseau GSM

GSM = Global System for Mobile communications

Table des matières

Le concept cellulaire

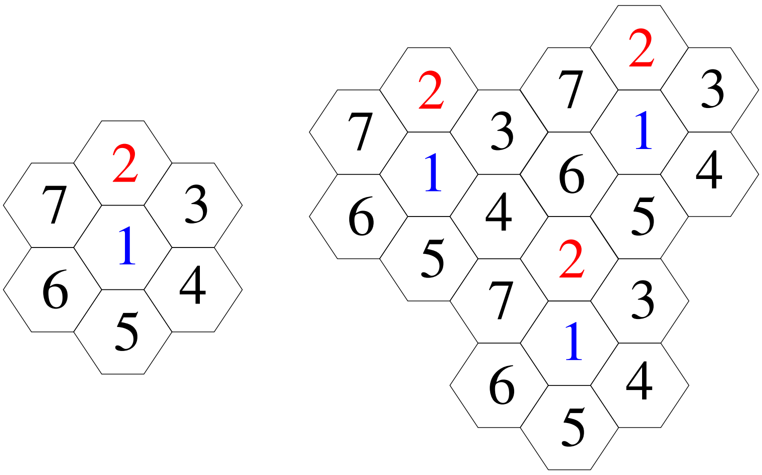


Figure – Figure représentant un motif élémentaire et un ensemble de motifs.

Un cellule se caractérise par :

- sa *puissance d'émission*,
- la *fréquence de porteuse* utilisée pour l'émission radio,
- le *réseau* auquel elle est interconnectée.

Le concept cellulaire

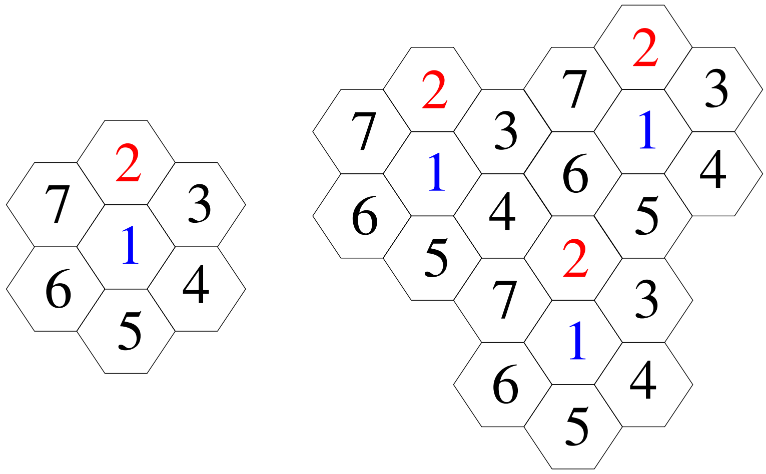


Figure – Figure représentant un motif élémentaire et un ensemble de motifs.

Un cellule se caractérise par :

- sa *puissance d'émission*,
- la *fréquence de porteuse* utilisée pour l'émission radio,
- le *réseau* auquel elle est interconnectée.

Estimation du rapport de puissance porteuse à bruit

Signaux perturbateurs :

1. Les interférences de puissance totale I qui sont dues aux signaux émis par les autres stations :
   1. Les interférences *inter-canaux (co-channel)* qui sont dues aux signaux émis par les autres stations de base utilisant la même fréquence.
   2. Les interférences de canaux adjacents dues aux signaux émis par les stations de base utilisant des fréquences voisines.
2. Le bruit, de puissance N, provenant principalement du bruit de fond du récepteur.

Dès lors, on utilise le rapport porteuse (C, *carrier*) à bruit ($N + I$) suivant pour caractériser l'environnement radio

$$\frac{C}{N+I} \tag{448}$$

Synthèse des principales caractéristiques du GSM

La norme GSM prévoit que la téléphonie mobile par GSM occupe deux bandes de fréquences aux alentours des 900 [MHz] :

1. la bande de fréquence $890,2 - 915$ [MHz] pour les communications *montantes* (du mobile vers la station de base)
2. la bande de fréquence $935,2 - 960$ [MHz] pour les communications *descendantes* (de la station de base vers le mobile).

Comparaison des normes GSM et DCS-1800

	GSM	**DCS-1800**
Bande de fréquences (↑) Bande de fréquences (↓)	$890,2 - 915$ [MHz] $935,2 - 960$ [MHz]	$1710 - 1785$ [MHz] $1805 - 1880$ [MHz]
Nombre d'intervalles de temps par trame TDMA*	8	8
Écart duplex	45 [MHz]	95 [MHzz]
Rapidité de modulation	271 [kb/s]	271 [kb/s]
Débit de la parole	13 [kb/s]	13 [kb/s]
Débit maximal de données	12 [kb/s]	12 [kb/s]
Accès multiple	Multiplexage fréquentiel et temporel	Multiplexage fréquentiel et temporel
Rayon de cellules	0,3 à 30 [km]	0,1 à 4 [km]
Puissance des terminaux	2 à 8 [W]	0,25 et 1 [W]

* TDMA = Time Division Multiple Access

Architecture du réseau I

L'architecture d'un réseau GSM peut être divisée en *trois* sous-systèmes :

1. Le *sous-système radio* contenant la station mobile, la station de base et son contrôleur.
2. Le *sous-système réseau* ou d'acheminement.
3. Le *sous-système* opérationnel ou *d'exploitation et de maintenance*.

Architecture du réseau II

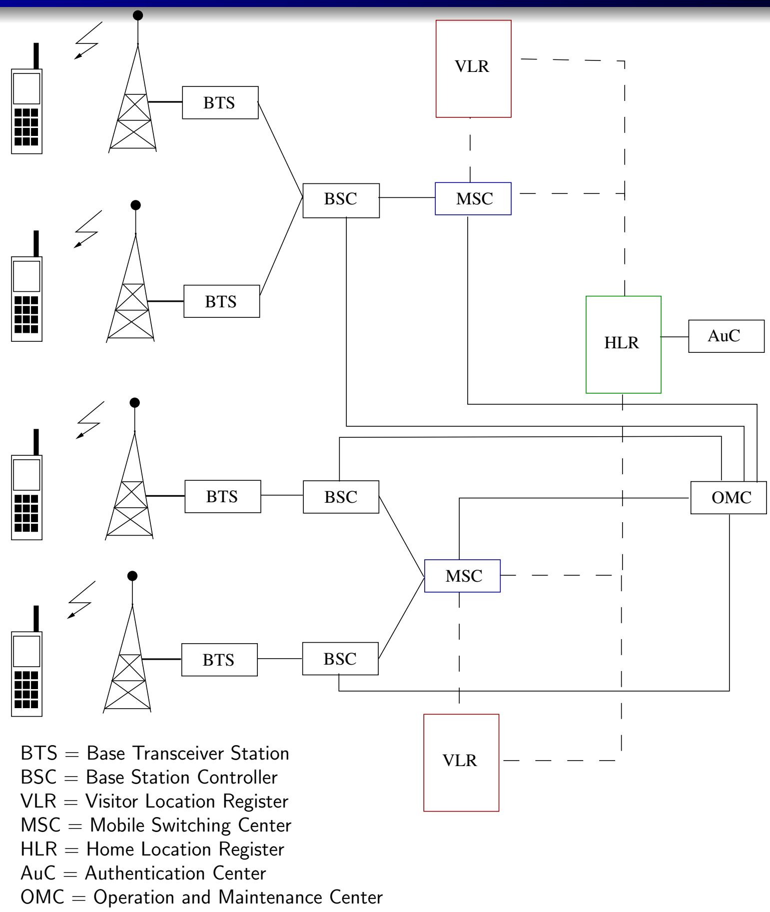


Figure – Architecture du réseau GSM.

Le sous-système radio

Le sous-système radio gère la transmission radio. Il est constitué de plusieurs entités dont

- le *mobile*,
- la *station de base* (BTS, *Base Transceiver Station*) et
- un *contrôleur de station de base* (BSC, *Base Station Controller*).

Antenne GSM (Rockhampton, Queensland, Australie)

Antenne GSM (station de métro Rogier, Bruxelles)

Le téléphone et la carte SIM (*Subscriber Identity Module*)

Paramètres	**Commentaires**
Données administratives	
PIN/PIN2	Mot de passe demandé à chaque connexion
Données liées à la sécurité	
Clé K_i	Valeur unique, connue de la seule carte SIM et du HLR
Données relatives à l'utilisateur	
IMSI	Numéro international de l'abonné
MSISDN	Numéro d'appel d'un téléphone GSM
Données de "roaming"	
TMSI	Numéro attribué temporairement par le réseau à un abonné
Données relatives au réseau	
Mobile Country Code (MCC), Mobile Network Code	Identifiants du réseau mobile de l'abonné

Le sous-système réseau, appelé *Network Switching Center* (NSS)

Le *NSS* est constitué de :

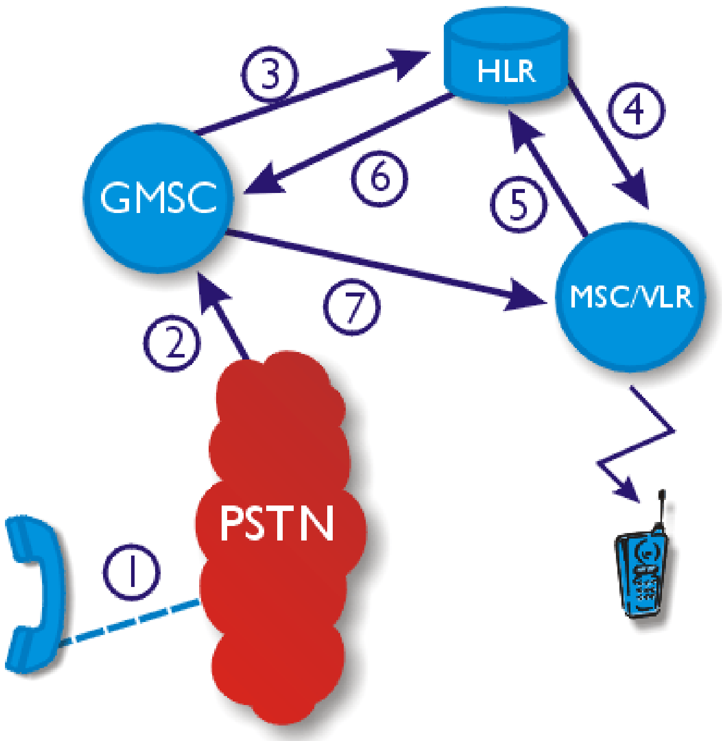
- *Mobile Switching Center* (MSC)
- *Home Location Register* (HLR) / *Authentication Center* (AuC)
- *Visitor Location Register* (VLR)
- *Equipment Identity Register* (EIR)

L'enregistreur de localisation nominale (HLR)

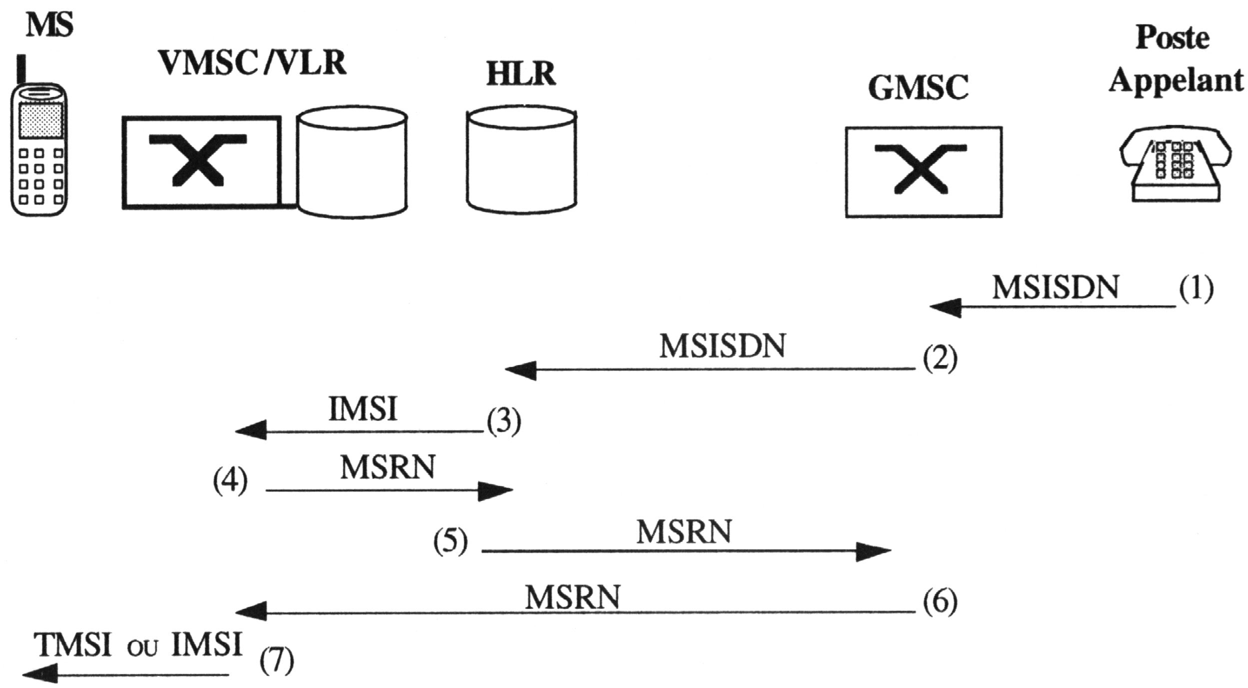
Le HLR contient à la fois

- toutes les informations relatives aux abonnés : le type d'abonnement, la clé d'authentification K_i –cette clé est connue d'un seul HLR et d'une seule carte SIM–, les services souscrits, le numéro de l'abonné (IMSI), etc.
- ainsi qu'un certain nombre de données dynamiques telles que la position de l'abonné dans le réseau –en fait, son VLR– et l'état de son terminal (allumé, éteint, en communication, libre, . . .).

Échange des informations de signalisation lors d'un appel vers un mobile



Échange des identités des données lors d'un appel



Canal physique

Combinaison d'un multiplexage *fréquentiel* (FDMA) et d'un multiplexage *temporel* (TDMA).

Multiplexage fréquentiel

Aussi, si on indique par F_u les fréquences porteuses montantes et par F_d les fréquences porteuses descendantes, les fréquence porteuse sont :

$$F_u(n) = 890,2 + 0,2 \times (n-1)\,[\text{MHz}] \qquad (449)$$

$$F_d(n) = 935,2 + 0,2 \times (n-1)\,[\text{MHz}] \qquad (450)$$

où $1 \leq n \leq 124$.

La modulation

La technique de modulation utilisée pour "véhiculer" le signal dans la bonne bade de fréquences est la modulation en fréquences appelée GMSK (*Gaussian Minimum Shift Keying*).

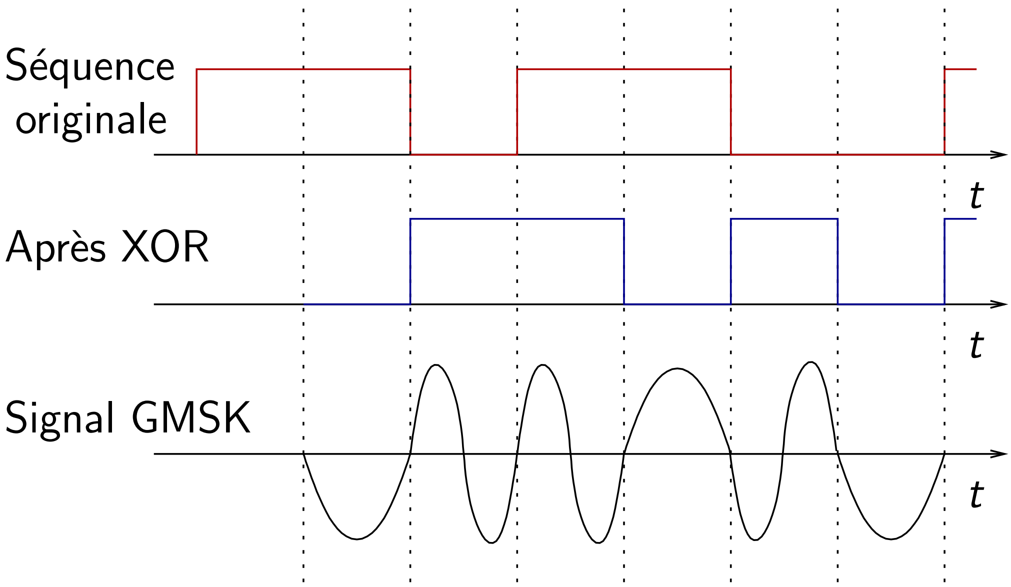


Figure – Création d'un signal modulé par GMSK au départ d'un train d'impulsions (diagramme simplifié).

Multiplexage temporel

Chaque canal de communication est divisé en 8 intervalles de temps de $0,577\,[ms]$ chacun.

Définition (Trame)

Ainsi, on définit une trame élémentaire de 8 intervalles pour une durée de $8 \times 0,577 = 4,615\,[ms]$.

Hiérarchie de trames

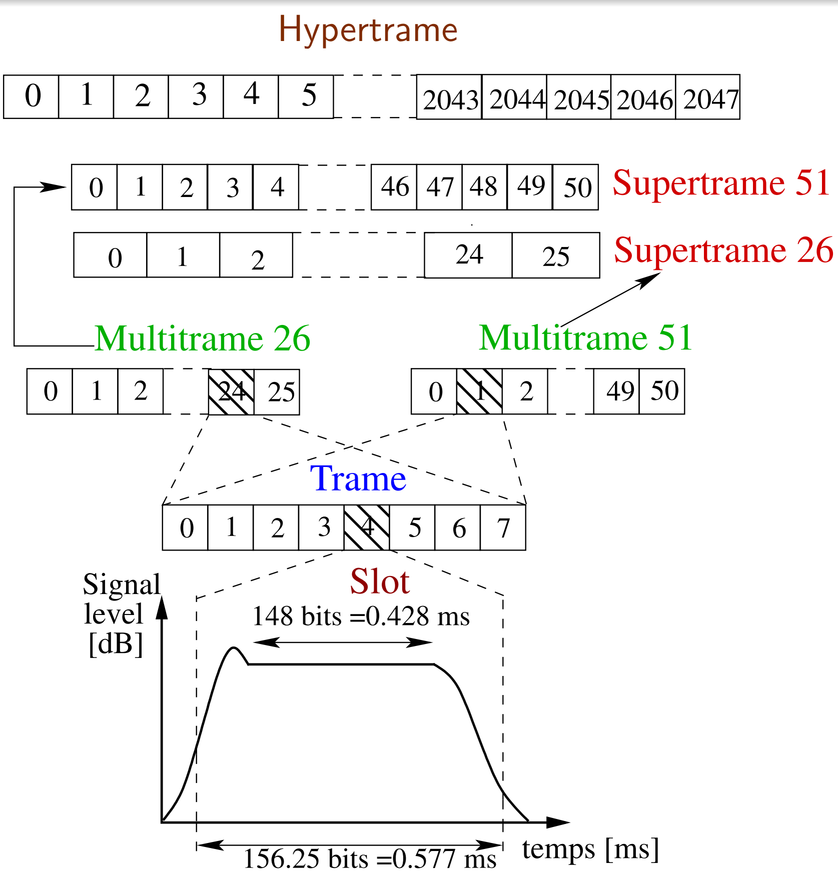


Figure – Organisation des multiples de trames.

Le saut de fréquences ou *Frequency Hopping*

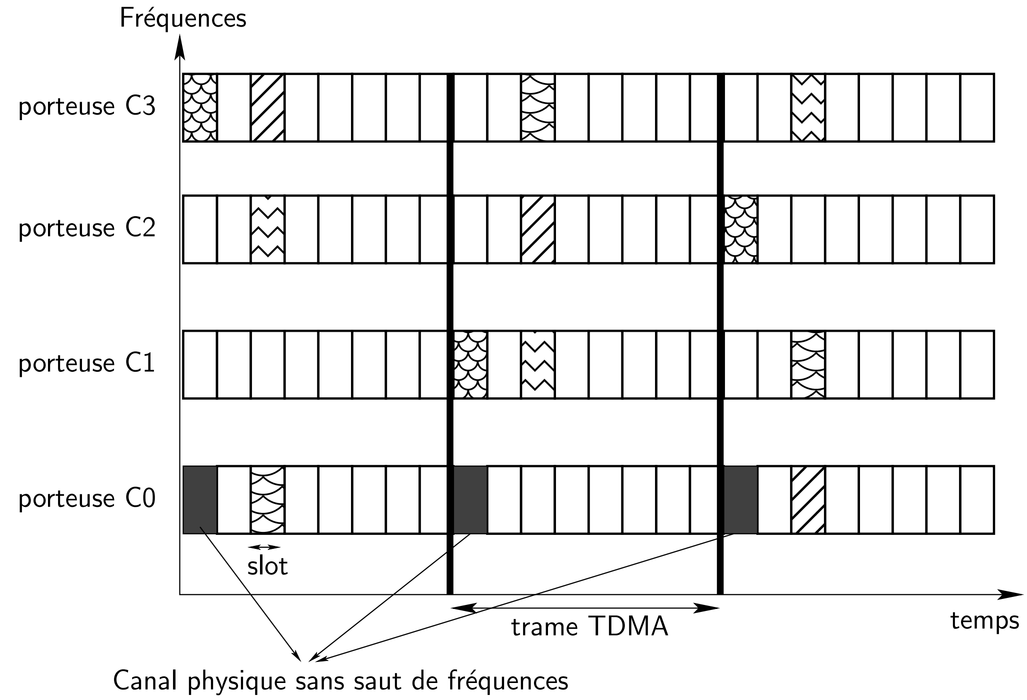


Figure – Principe du saut de fréquence.

Configuration du *Frequency Hopping*

La configuration des sauts se fait au moyen de paramètres tels que :

- le *Cell Allocation*, la liste des numéros des fréquences utilisées dans une cellule,
- le *Mobile Allocation*, la liste des numéros des fréquences disponibles pour les sauts,
- le *Hopping Sequence Number*, une valeur comprise entre 0 et 63, servant à initialiser le générateur pseudo-aléatoire,
- le *Mobile Allocation Index Offset*, une valeur comprise entre 0 et 63 qui identique quel décalage doit être utilisé. Cette valeur de décalage est convenue à l'initialisation de l'appel et elle diffère d'un mobile à l'autre.

Pile de protocoles

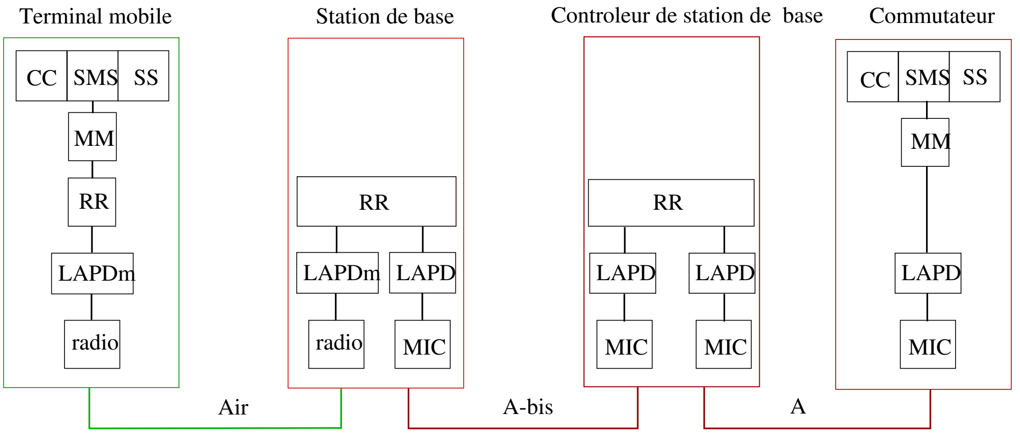


Figure – Piles de protocoles de différents sous-systèmes du réseau GSM.

Typologie des paquets (bursts)

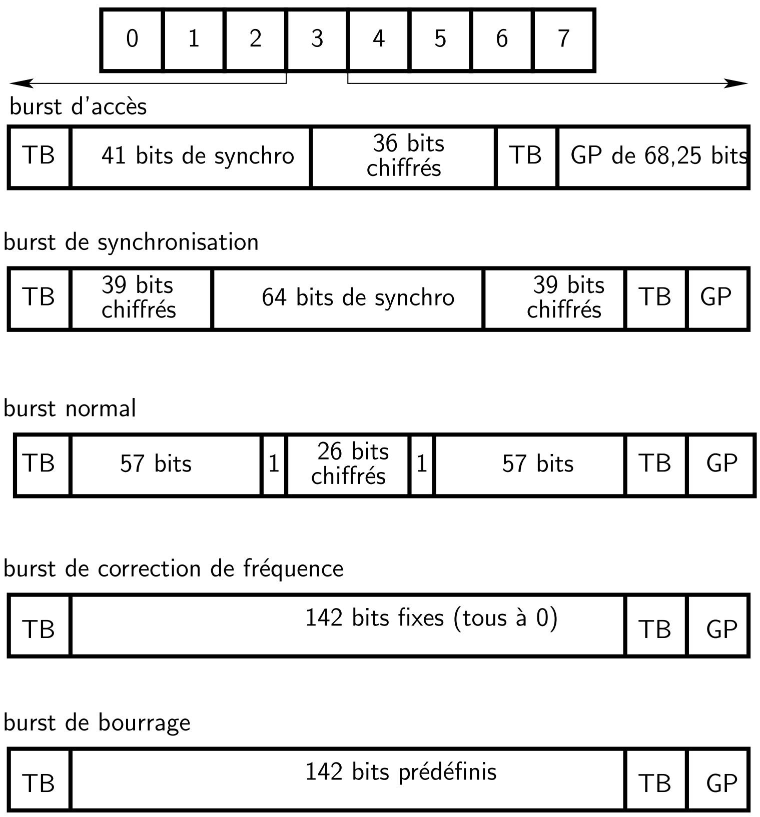
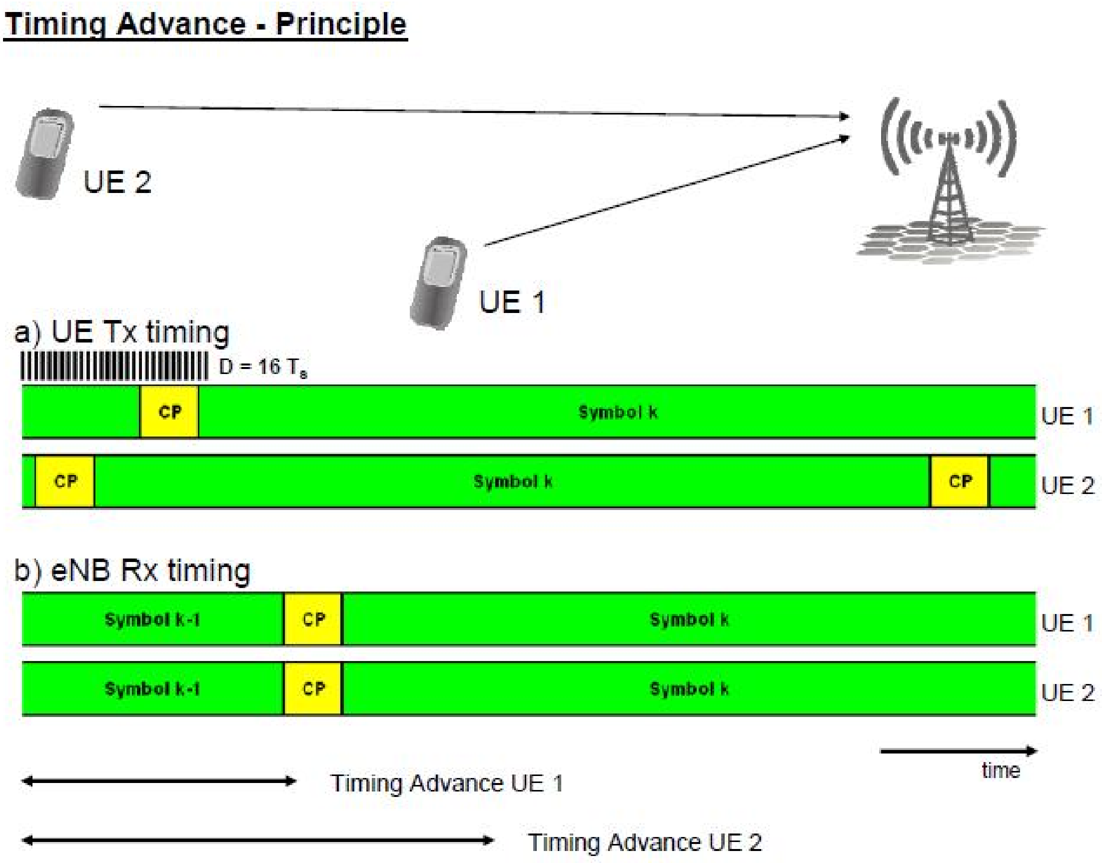


Figure – Structures des 5 types de *burst* définis par la norme GSM.

Timing Advance



Positionnement et localisation

Positionnement = l'utilisateur détermine sa position
Localisation = l'opérateur détermine la position de l'abonné

Sur quelle base peut-on localiser un utilisateur dans un réseau GSM ?

Table des matières

Principes de fonctionnement de la 4G

Table des matières

Du GSM à la 4G

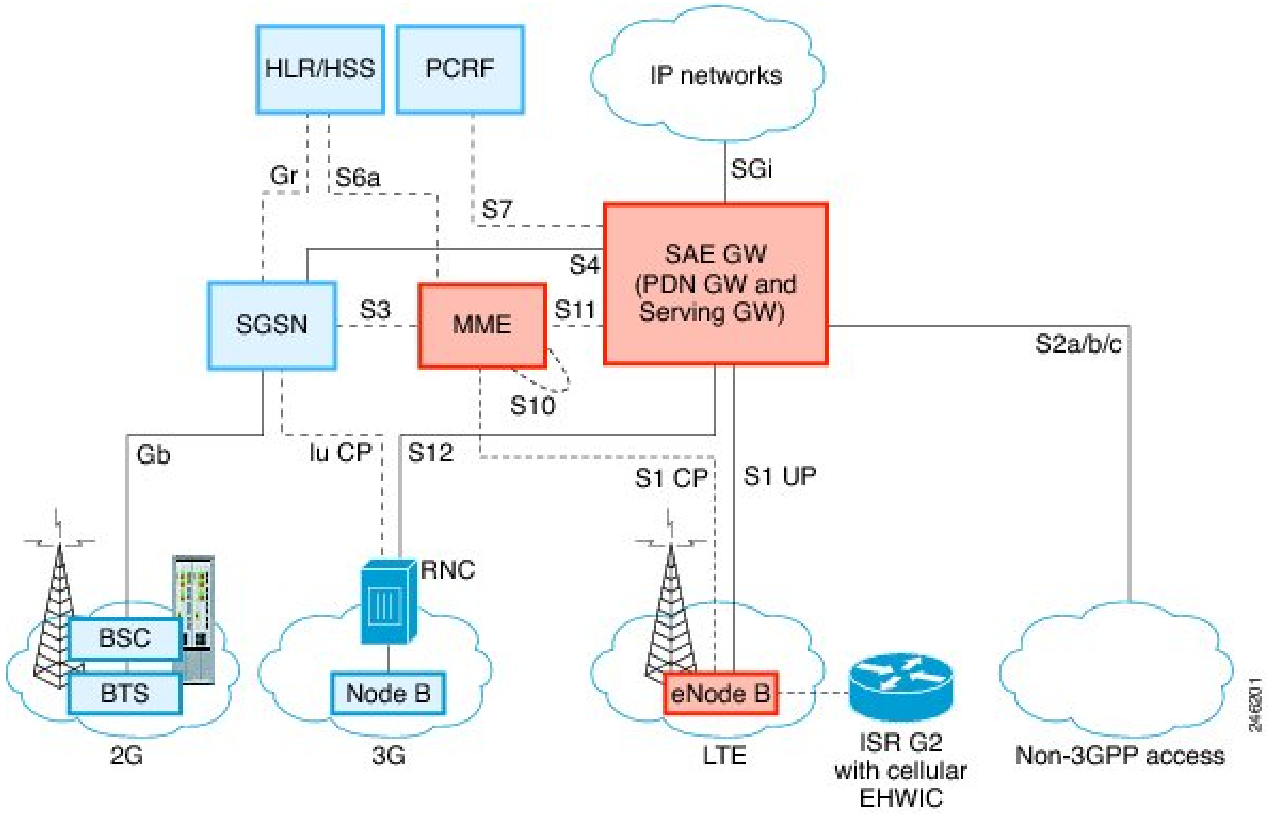
- 2G : mobilophonie cellulaire à signaux numériques, comme le GSM.
- 2.5G : systèmes comprenant un système de commutation par paquets (en plus de la commutation "circuit" utilisée pour la téléphonie)
- 3G : UMTS (norme mondiale) + 2 évolutions majeures :
  - HSPA (High Speed Packet Access) et
  - HSPA+

"4G" : LTE (Long Term Evolution)

Motivations :

1. augmenter la capacité (efficacité spectrale).
2. augmenter les débits. Sur un ou deux canaux de 5 [MHz], le HSPA+, release 8, permet les débits maximaux suivants :
   - voie descendante : 42 [Mb/s]
   - voie montante : 11,5 [Mb/s]
3. réduire la latence du plan de contrôle (UMTS : 250 [ms], HSPA : 70 [ms], HSPA+ : 30 [ms])
4. émergence de la technique de modulation Orthogonal Frequency Division Multiplexing (OFDM)

Architecture du réseau



Exemple : spécifications d'un téléphone mobile

Réseaux supportés par le Samsung Galaxy S4 :

- *2.5G GSM/GPRS/EDGE* – 850, 900, 1800, 1900 MHz
- *3G HSPA+* – 850, 900, 1900, 2100 MHz
- *4G LTE* – 700, 800, 1700, 1800, 1900, 2600 MHz or up to 6 different band sets (dependent on market) ; FDD, TDD (dual mode version)

Normalisation

Antichambre de la normalisation est effectuée par le consortium 3GPP (`http://www.3gpp.org`), créée à l'initiative de l'ETSI.

Rôle : maintenir, développer et proposer les spécifications de

- GSM/GPRS/EDGE
- UMTS
- LTE, et le réseau cœur EPC.

Il y a 4 groupes techniques (Technical Specification Groups) :

- le CT (Core Network and Terminals)
- le GERAN (GSM/EDGE Radio Access Network)
- le RAN (Radio Access Network)
- le SA (Services and System Applications)

4G - "Releases" (cf. `http://www.3gpp.org`)

Release 12 :

- IMS Network-Independent Public User Identities
- User Plane Congestion management
- ....

Release 13 :

- Study on RAN Sharing Enhancements
- Study on Application specific Congestion control for Data Communication
- Study on Usage Monitoring Control enhancement

Release 16 (juillet 2018) :

- bring IMT-2020 submission for an initial full 3GPP 5G system
- 25 studies, on a variety of topics

Release 17 (mars 2022)
Release 18 (décembre 2023) : **5G-Advanced**

Le plan de fréquences

Deux bandes sont réservées au niveau européen :

- 800 [MHz] : un duplex de 30 [MHz] pour le mode FDD
  - 791 à 821 [MHz] et 832 à 862 [MHz]
- 2,6 [GHz] : un duplex de 70 [MHz] pour le mode FDD et 50 [MHz] pour le mode TDD
  - 2500 à 2570 [MHz] et 2620 à 2690 [MHz]
  - une bande de 2570 à 2620 [MHz] pour le TDD

En Belgique

Il est aussi possible de déployer le LTE dans la bande du DCS-1800

Les enchères sont lancées pour les ondes 4G sur la bande 800 MHz

Le projet de loi du gouvernement pour une mise en vente de la bande passante 800 MHz belge a été déposé au Parlement. Les opérateurs étudient les conditions d'accès à un réseau prometteur.

FRANÇOIS BAILLY

Les opérateurs vont-ils se laisser charmer et faire grimper les enchères? Le gouvernement fédéral et son ministre de l'Économie, Johan Vande Lanotte, l'espèrent certainement. La mise en vente de la bande passante 800 MHz est entrée, jeudi, dans une phase cruciale avec le dépôt devant la chambre des représentants du projet de loi délimitant l'accès à un paquet de fréquences propices au déploiement des technologies contemporaines de la téléphonie.

360 millions €

Trois licences d'exploitation du spectre 800Mhz vont être mises aux enchères pour un prix minimal de 120 millions d'euros chacune. 80% du montant levé ira dans les poches du fédéral. Les Communautés se partageront les 20% restants.

Ressource rare

L'État a décidé de segmenter son spectre en trois licences d'exploitation. Elles seront proposées, chacune, à un prix de départ de 120 millions d'euros pour une période de 20 ans. Le gain minimal sera donc de 360 millions d'euros si les trois lots sont vendus.

«Les fréquences sont une ressource rare», explique le gouvernement dans sa proposition. Il y souligne le caractère *«proportionné»* des montants demandés, dans la fourchette des enchères qui se sont déroulées notamment *«en Italie, en Allemagne ou en France»*.

Le spectre des 800 MHz (aussi appelé dividende numérique) désigne les fréquences historiquement dévolues à la diffusion de la télévision analogique. Son usage, en Belgique et ailleurs, s'est fortement réduit avec l'avènement du «tout numérique» via le câble (Voo, par exemple) ou le réseau fibre classique (Belgacom TV).

Tout l'intérêt réside dans les spécificités qu'offrent ces fréquences, libérées, pour les acteurs de téléphonie mobile comme Proximus, Mobistar, Base ou Telenet.

Plus basses que les ondes 1.800 MHz pour l'instant utilisées pour déployer la «4G», elles «portent» aussi plus loin. Leur exploitation permettrait aux opérateurs d'étendre facilement leur couverture en services d'internet mobile ultrarapide à des zones plus retranchées sans devoir bâtir une quantité de nouvelles antennes. *«Le gain se joue aussi au niveau de la couverture 'indoor' de nombreux bâtiments imperméables, en ville, aux fréquences actuelles»*, précise Aetha Consulting.

Qui pour gonfler les prix?

Dans un récent rapport, rédigé à la demande de l'IBPT, Aetha valorisait à un milliard d'euros le profit que représenterait en Belgique, pour le secteur, une mise à disposition de la bande 800 MHz. *«Les opérateurs souffrent du déclin des marges sur les minutes d'appel et les SMS. La '4G' est un service monétisable. Ils sont assurés, avec du 800 MHz, de couvrir rapidement 99% du territoire. La mise sur pied d'une offre nationale de qualité ne peut qu'accélérer les usages»*, analyse le consultant.

Reste, évidemment, aux principaux intéressés à se laisser séduire. Belgacom, Mobistar, Base et BUCD (derrière qui se cache l'équipementier Chinois Datang) ont ensemble dépensé 77,8 millions d'euros fin 2011 pour recevoir le droit d'utiliser les ondes «4G» du 1800 MHz. Ils sont potentiellement intéressés par un réseau complémentaire. *«Nous considérons les conditions. Aucune décision n'est encore figée»*, réagit Base.

«Le 800 MHz offre des avantages en termes d'infrastructure qui font que nous sommes intéressés. A priori. Nous devons encore déterminer si la proposition qui nous est faite est raisonnable», complète Mathieu Van Overstraeten pour Mobistar.

Le câble, dont les ambitions mobiles ne cessent de grandir, ne ferme pas non plus la porte à une offre. *«Attendons que le projet se transforme en loi et nous verrons. Mais oui, nous étudions les conditions d'accès»*, expose Stefan Coenjaerts pour le compte de Telenet.

À noter que si le fédéral est compétent pour l'organisation des enchères, les Communautés, responsables en matière d'audiovisuel, recevront leur part du gâteau. Elles se répartiront 20% du montant total levé.

L'Echo
7/05/2013

Modes de duplexage

1. Mode FDD : Frequency-division duplexing
   Dans ce mode, les voies montantes et descendantes opèrent sur deux fréquences séparées par une *bande de garde*.
2. Mode TDD : Time-division duplexing
   Dans ce mode, les voies montantes et descendantes utilisent la même porteuse, le partage s'effectuant dans le temps. Un *temps de garde* est nécessaire pour permettre le basculement entre les fonctions d'émission et de réception des équipements.

Caractéristiques du TDD :

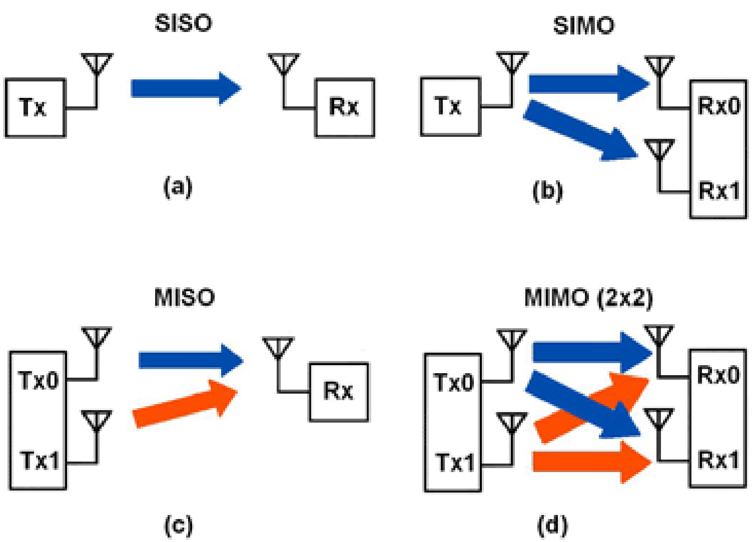
- avantages :
  - même canal dans les sens (réciprocité du canal)
  - plus de besoin de duplexeur (pour mélanger la voie montante et descendante) ; terminaux moins coûteux
  - meilleur pour gérer l'asymétrie des trafics
- inconvénients :
  - nécessité de synchroniser

Interface radio

Aspects importants :

1. Systèmes à antennes multiples

S=Single - M=Multiple - I=Input - O=Output



2. Utilisation de la polarisation (croisée ou rectiligne verticale)

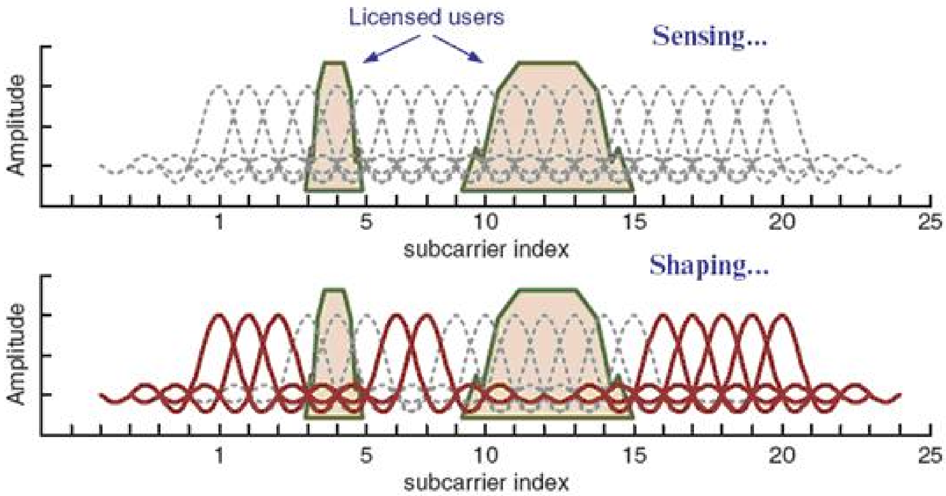
Débits

Achievable LTE Peak Data Rates

Accounts for overhead at different bandwidths & antenna configurations

	DL		UL
Bandwidth	2x2	4x4	1x2
5 MHz	37 Mbps	72 Mbps	18 Mbps
10 MHz	73 Mbps	147 Mbps	36 Mbps
20 MHz	150 Mbps	300 Mbps	75 Mbps

Orthogonal Frequency Division Multiplexing [OFDM]



Avantages :

- les canaux sont tous à bande étroite. Dans une bande étroite, le canal peut être "idéal". On peut donc estimer et compenser l'effet de canal $\Longrightarrow$ on peut utiliser des modulations d'amplitude (qui ont une meilleure efficacité spectrale)
- possibilité de "shaping" ($\#b$ par porteuse) pour optimiser le débit

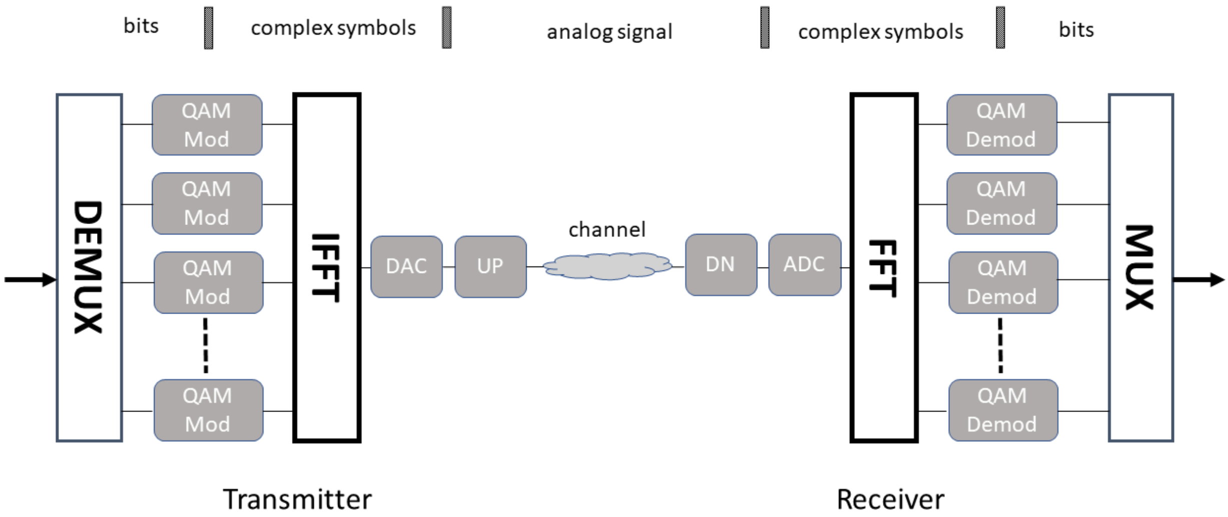


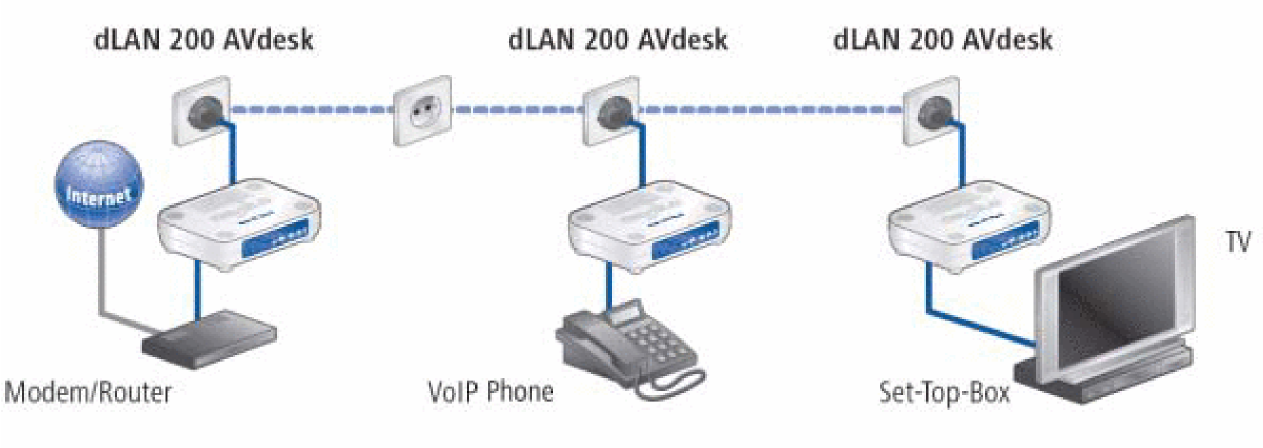
Table des matières

Transmission sur réseau d'alimentation électrique domestique par courants porteurs en ligne

Terminologie : *transmission par Courants Porteurs en Ligne* (CPL), aussi appelée PowerLine *Communications* (PLC) en anglais.

- Introduction
- Canal de transmission
- Quelques caractéristiques de produits "standardisés"
- Un exemple concret d'un dispositif industriel

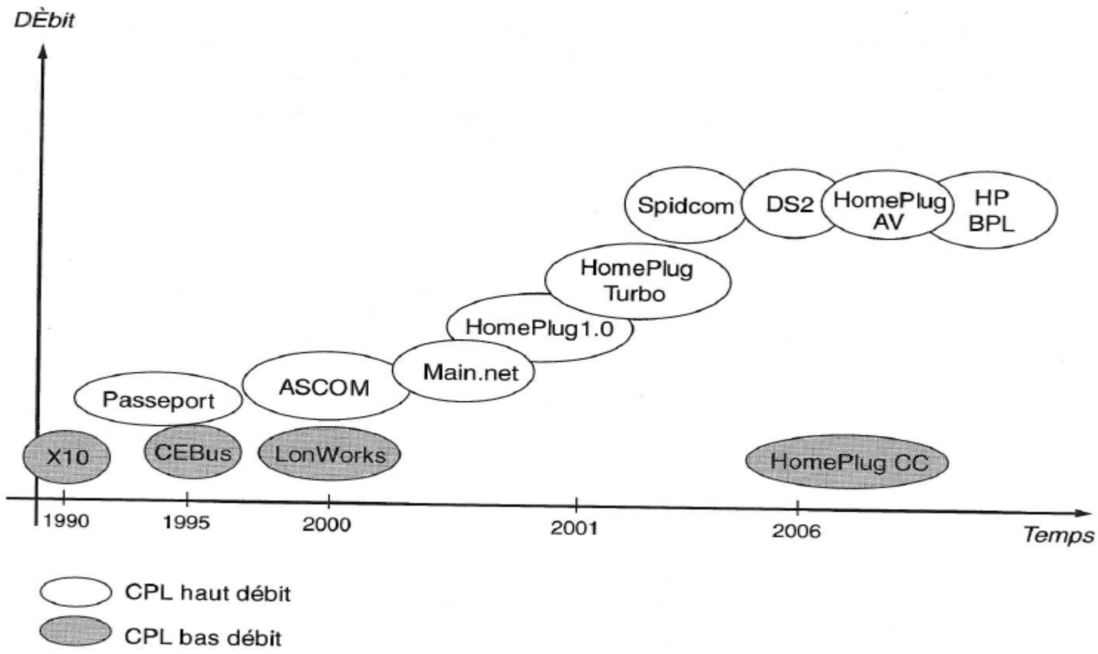
Exemple de mise en œuvre



Questions :

- Quelle est la vitesse de transmission maximale (soit la capacité de canal) ?
- De quoi dépend cette vitesse ?

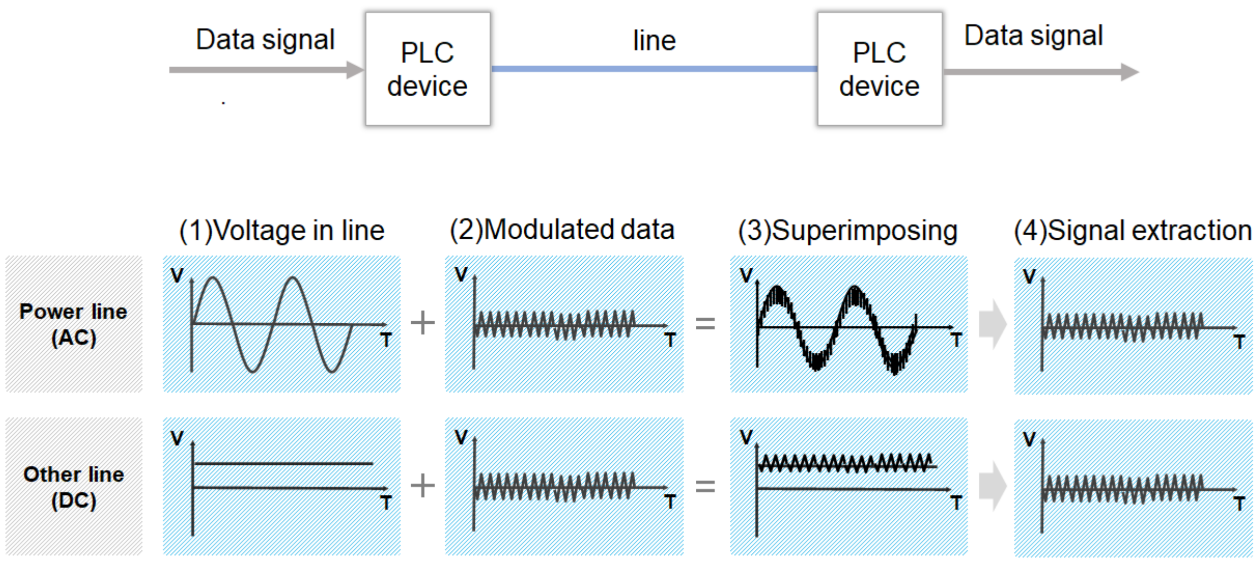
Marché



Faible normalisation. Les principaux groupes :

- IEEE P1901
- Consortium HomePlug
- PLC Forum

Principes de fonctionnement



Principales caractéristiques d'un réseau d'alimentation électrique

- Structure hiérarchique :
  - haute tension (transport à grande distance) → moyenne tension → basse tension 230 $[V]$ à 50 $[Hz]$)
  - présence de transformateurs dans le réseau de distribution électrique (les transformateurs filtrent les signaux)
  - les opérateurs transmettent des signaux sur le réseau électrique, par exemple pour le basculement des compteurs bi-horaires
  - le réseau n'est pas conçu pour la transmission de signaux
- Derrière le compteur (chez le particulier) :
  - structure en étoile
  - lignes non "terminées" (au sens de la théorie des lignes de transmission) ; impédance variable
  - la charge est variable
  - présence d'harmoniques

Mesures des harmoniques à Montefiore

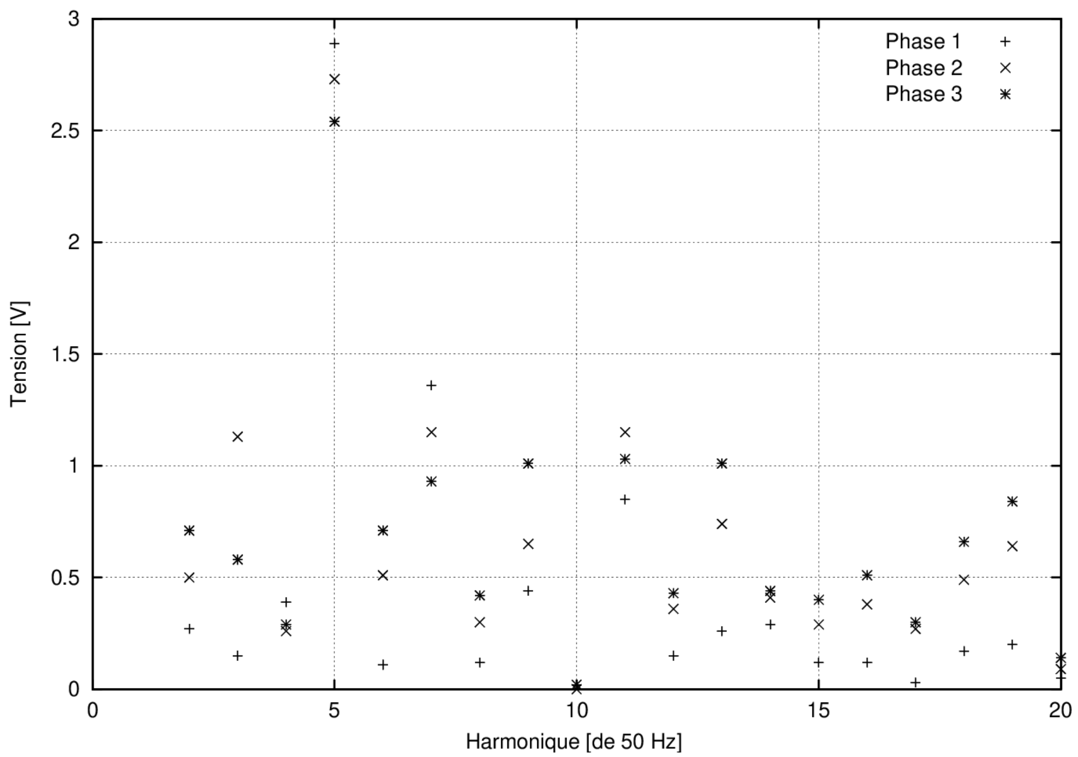


Figure – Tension (en valeur efficace) des harmoniques du 50 $[Hz]$ pour un système tri-phasé.

Canal de transmission

Difficultés propres au canal :

- problème de modélisation
- dépend de la fréquence
- varie au cours du temps
- fortement bruité : présence de bruits (colorés) et impulsionnel
- l'impédance varie
- parasites radio et pertes en émission

Principes de fonctionnement

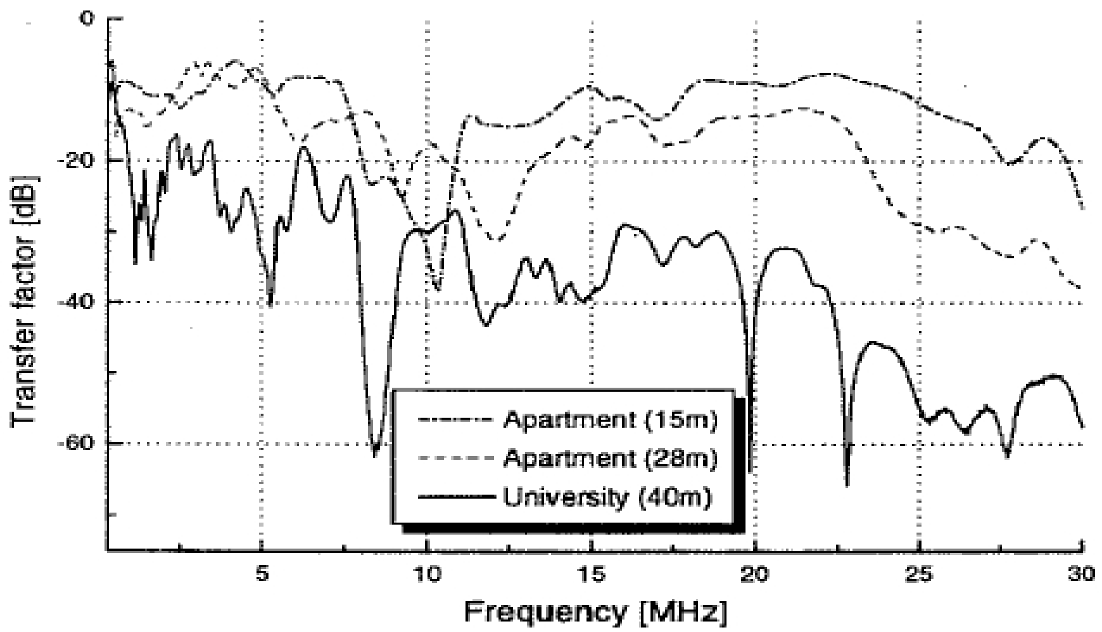
- Utilisation de *bandes de fréquence* spécifiques :
  - de 93 à 148 [KHz] en Europe, de 150 à 450 [KHz] aux États-Unis pour les bas débits
  - de 1,6 à 30 [MHz] pour les débits plus importants
- Modulations numériques de type *ASK* (amplitude), *FSK* (fréquence), *DQPSK* (différentiel en quadrature de phase), *QAM* (quadrature) avec un mécanisme à multiporteuses de type OFDM (Orthogonal Frequency Division Multiplexing)
- Mécanismes de *détection* et *correction d'erreurs*
- *Pile de protocoles* et de techniques capables de gérer un "*bus*", c'est-à-dire un bus commun en temps et en fréquence. Par exemple,
  - *CSMA/CA Carrier Sense Multiple Access/Collision Avoidance* (identique à celui du Wi-Fi)
- Problèmes de *sécurité* : *accès* au réseau et *confidentialité* du contenu des communications

Types de technologies

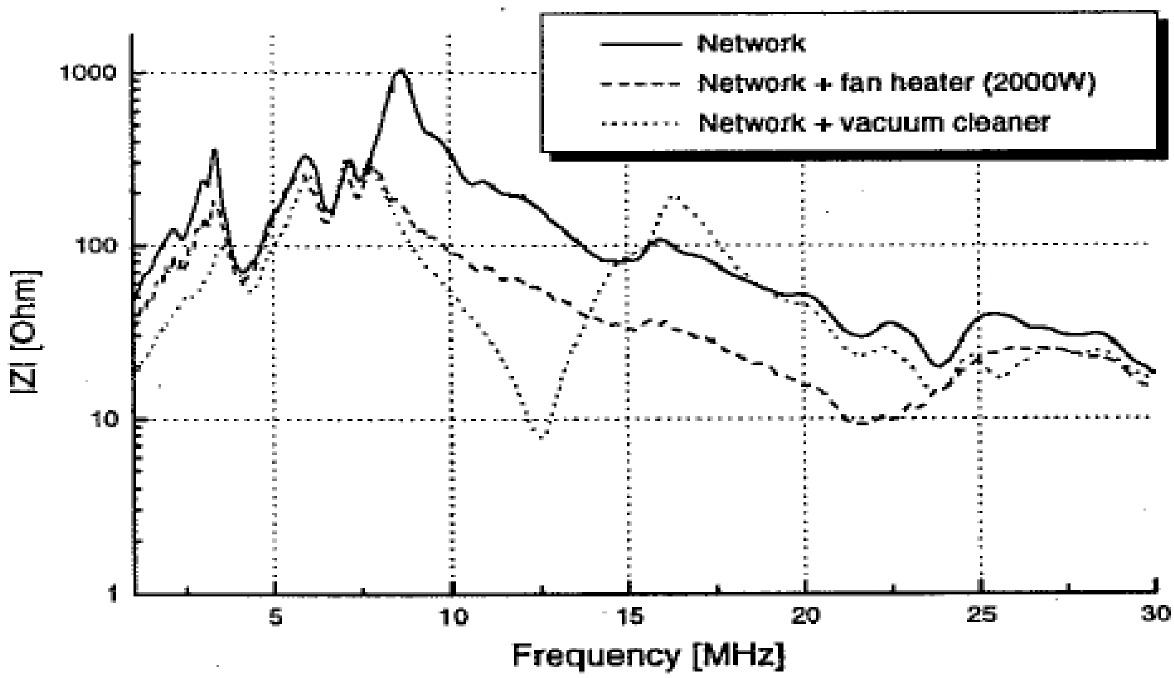
Frequency Band	Technology Name	Frequency Range	Transmission Distance	Physical Layer Speed	International Standard
Narrowband	G3-PLC	< 148.5 kHz(EU) < 490 kHz(FCC)	Long	< 280 kbps[1]	ITU-T G.9901 ITU-T G.9903 IEEE 1901.2
	Prime			< 1.0 Mbps[2]	ITU-T G.9901 ITU-T G.9904 IEEE 1901.2
Mid-band	HPLC	0.7 – 12 MHz	Middle	150 kbps to 10 Mbps[3]	IEEE 1901.1
Broadband	HD-PLC	1.8 – 100 MHz*	Middle to Short*	62.5 Mbps to 1.0 Gbps[4]	IEEE 1901 ITU-T G.9905
	HomePlug	1.8 – 50 MHz	Short	200 Mbps to 1.3 Gbps[5]	IEEE 1901
	G.hn	2.0 – 200 MHz		300 Mbps to 2.0 Gbps[6]	ITU-T G.9960 ITU-T G.9961 ITU-T G.9962 ITU-T G.9963 ITU-T G.9964

*Selectable

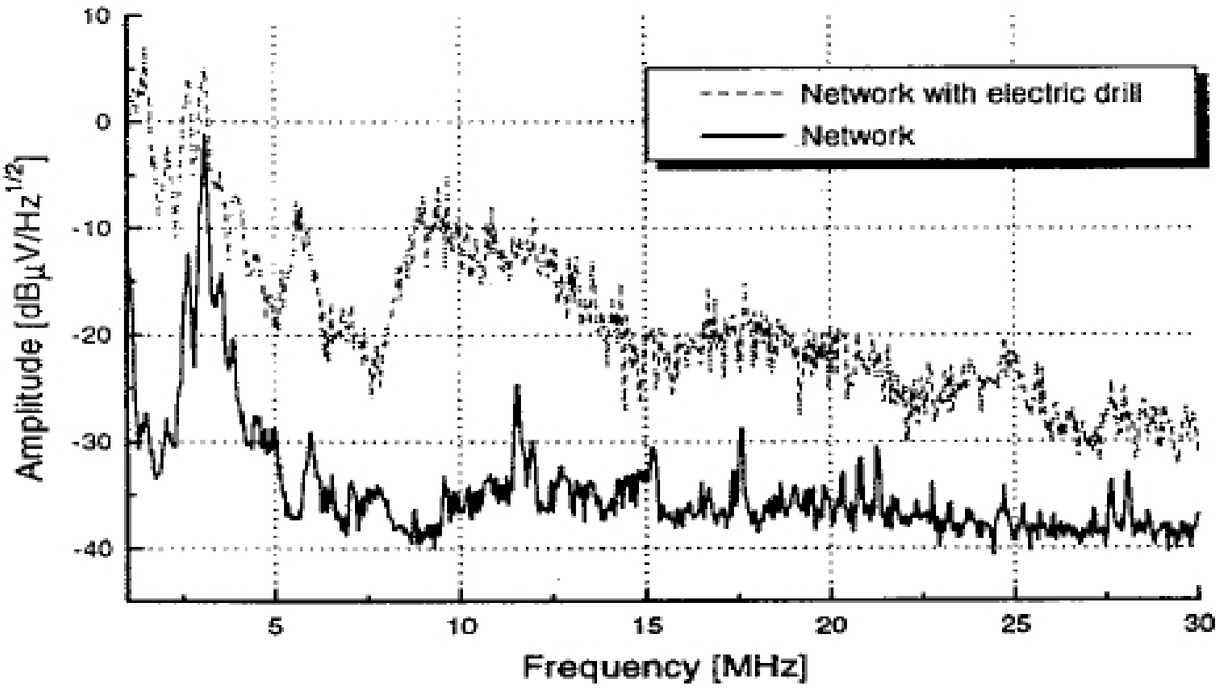
Canal de transmission : mesures expérimentales



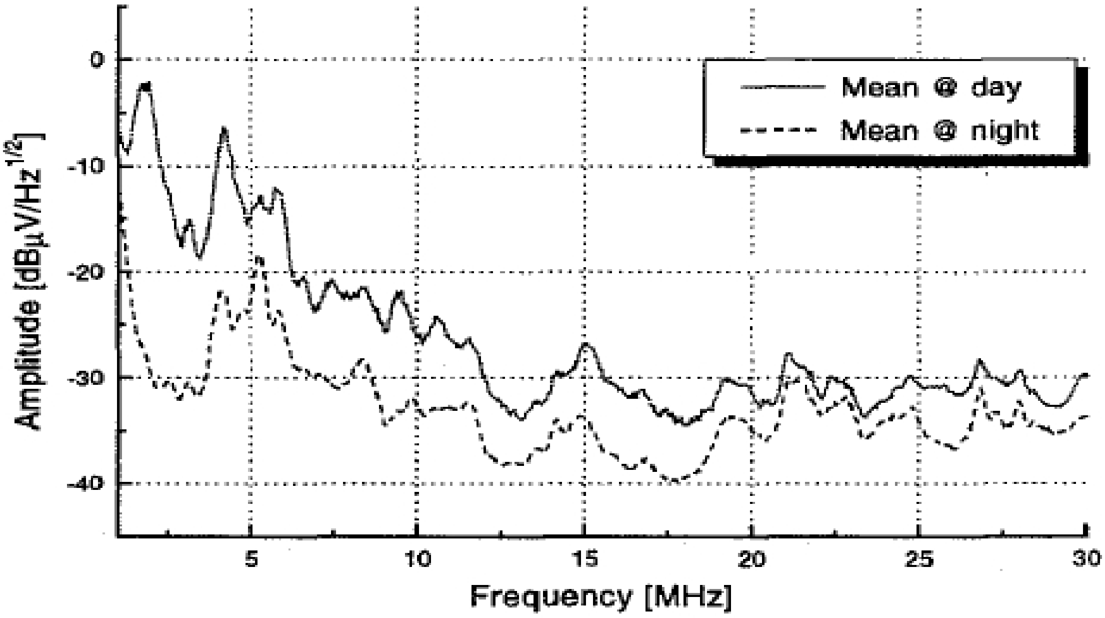
Influence sur l'impédance de la présence d'une charge perturbatrice dans le réseau



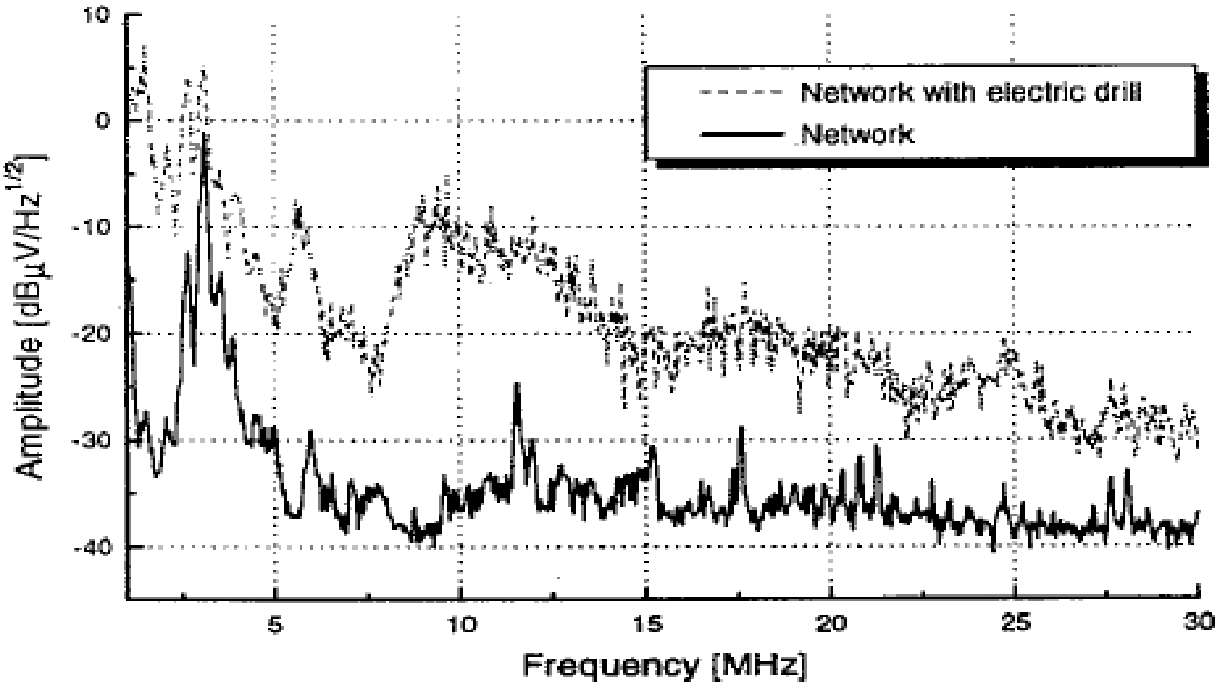
Variation du niveau de bruit due à la présence d'une charge perturbatrice dans le réseau



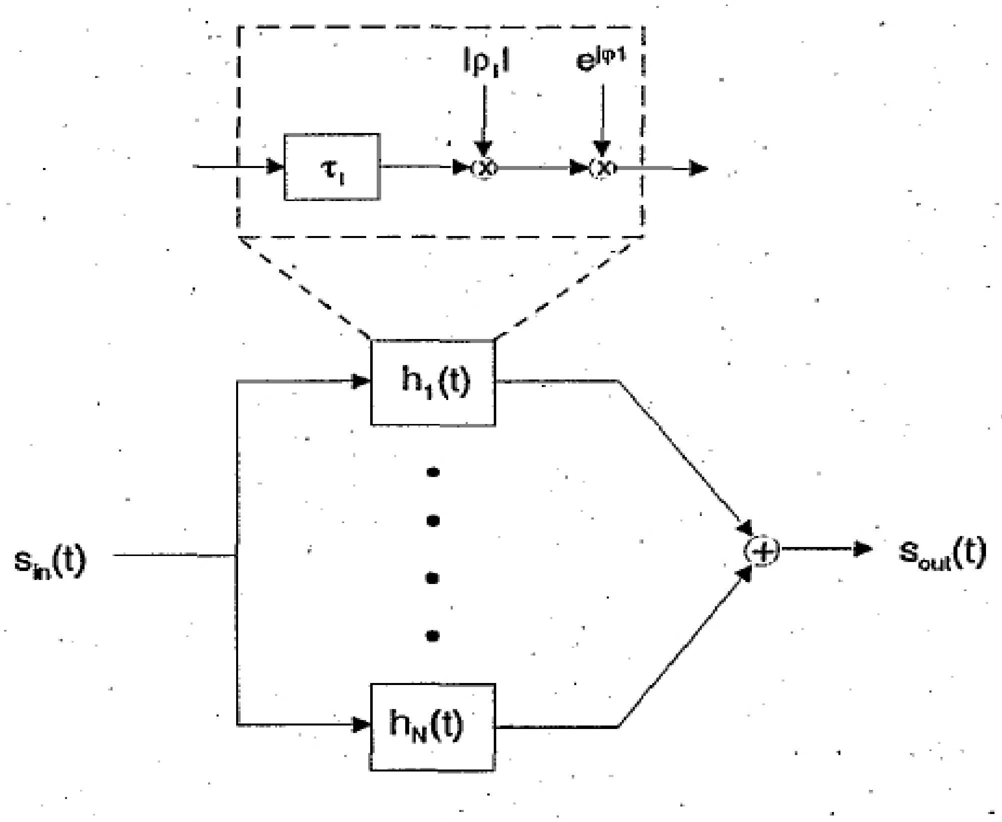
Variabilité temporelle du bruit



Bruit radio (capté par le câble)



Modèle de transmission à multitrajets



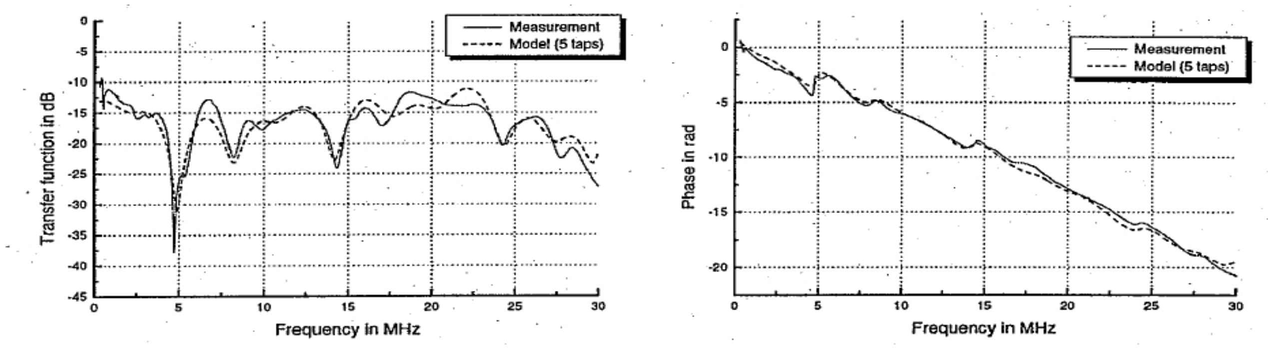
La fonction de transfert est donnée par

$$\mathcal{H}(f) = \sum_{i=1}^{N} g_i \, e^{-2\pi j f \tau_i} \, e^{-\alpha(f) d_i} \tag{451}$$

où :

- N est le nombre de multitrajets à considérer
- g_i est un paramètre complexe dépendant de la topologie du réseau
- τ_i est le délai dû au trajet i
- $\alpha(f)$ est le coefficient d'atténuation qui tient compte de l'effet de peau et des pertes diélectriques
- d_i est le distance parcourue par le signal i

Comparaison entre des mesures et le modèle

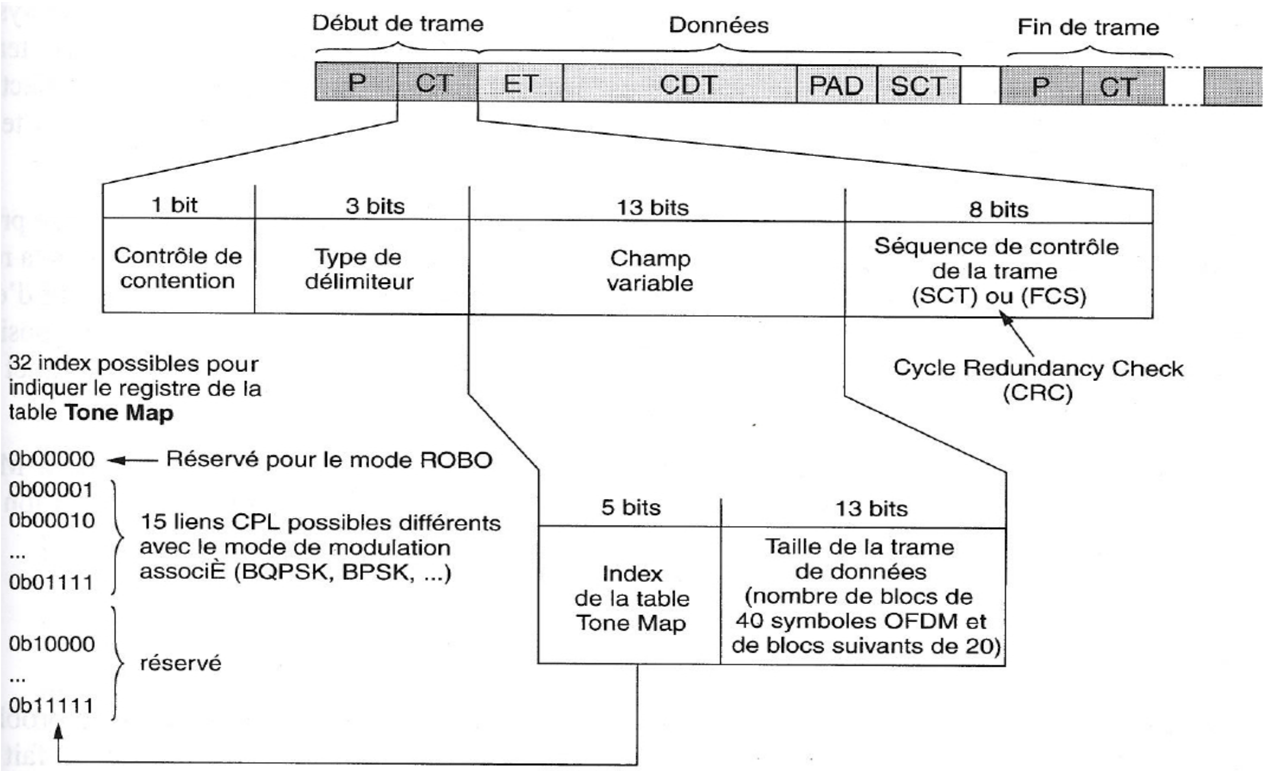


Le standard HomePlug

Caractéristiques principales :

- Transmission à multiporteuses (917 pour la variante HomePlug AV, $2-28\,[\mathrm{MHz}]$)
- La variante HomePlug AV utilise une gestion centralisée des communications par paires.
- Adaptation de la vitesse de transmission pour chaque paire (*Tone Map* dans la trame)
- Pour le haut débit, partage des ressources en fonction du temps.
  Certains slots sont utilisés en CSMA/CA pour du trafic non prioritaire.
- Mécanisme de retransmission (acquittements positifs et négatifs)

Structure d'une trame



Débits nominaux et réels des réseaux HomePlug

Standard	Débit brut	Débit réel
HomePlug 1.0	14 [Mb/s]	4,5 [Mb/s]
HomePlug Turbo	85 [Mb/s]	12 [Mb/s]
HomePlug AV	180 [Mb/s]	55 [Mb/ss]

Exemple d'application : le composant TDA5051 de Philips

Caractéristiques :

- modulateur/démodulateur (modem) d'amplitude à deux états (ASK-2).
  Plus particulièrement : modulation OOK ($0 \Rightarrow A = 0$, $1 \Rightarrow A \neq 0$,).
- bande de fréquence $95 - 150\,[kHz]$.

Couplage avec la ligne

Principes :

- *superposer* un signal de fréquence plus élevée (100 [kHz] à 30 [MHz]) et d'amplitude plus faible (quelques 100 [mV]) à un signal 230 [V] à 50 [Hz].
- deux types de *couplage* possibles :
  1. simples filtres LC pour isoler la porteuse du 50 [Hz] (qui n'est donc pas isolée de la ligne)
  2. transformateur HF accordé sur la porteuse pour sélectionner cette dernière (isolée de la ligne)
- utilisation d'une capacité pour éliminer la *composante DC*
- *circuit de protection* (diode, zener, transil, ...) des pattes d'entrée/sortie du modem.

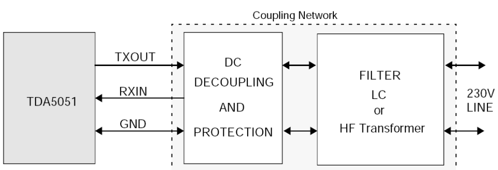


Figure – Couplage avec la ligne de puissance.

Table des matières

Principes de fonctionnement de la 5G : table des matières

Historique

Principales technologies mobiles numériques :

2G : tout a commencé avec le **GSM = Global System for Mobile communications** ; passer des appels et envoyer des SMS.

2.5G : systèmes comprenant un système de commutation par paquets (en plus de la commutation “circuit” utilisée pour la téléphonie).

3G : lancement de l’Internet mobile. UMTS (norme mondiale) + 2 évolutions majeures :
- HSPA (*High Speed Packet Access*) et
- HSPA+

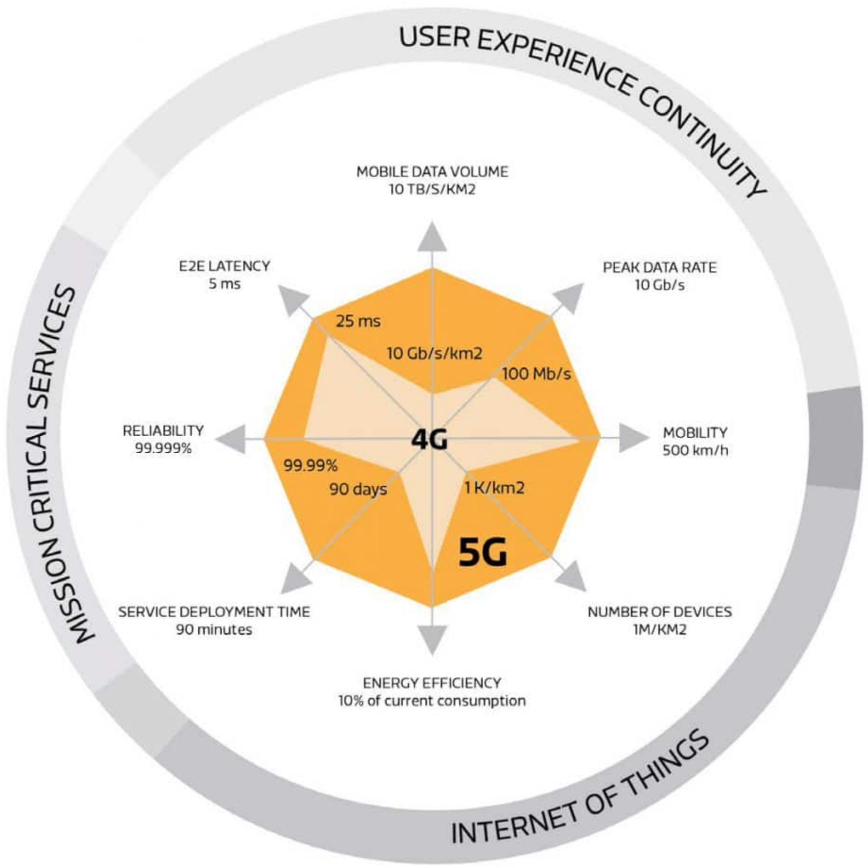
4G : pour l’Internet mobile à vitesse plus élevée et la voix sur 4G (VoLTE).

5G : débits plus importants, latence réduite, plus de fiabilité et plus d’équipements.

Design de la 5G

Figure – Objectifs techniques de la 5G.

De la 4G à la 5G : une évolution majeure



Contours de la 5G suivant l'ITU

Contours technologiques de la 5G :

1. Connexions mobiles rapides
   - Débit maximal de 10 Gb/s mais débit 100 Mb/s par utilisateur en trajet descendant.
2. Nette réduction de la latence
   - Délai de réponse réduit jusqu'à 1 ms pour des applications spécifiques.
3. Plus grand nombre d'objets connectés et de capteurs (IoT)
   - Jusqu'à 1 million d'appareils par km^2 (Bruxelles : 7.511 habitants par km^2 ...).
   - Jusqu'à 10 ans de durée de vie de la batterie pour les appareils Internet des objets à faible consommation.
4. Couverture du réseau : 100 % de couverture et 99,999 % de disponibilité (= moins de 5 min d'indisponibilité par an).

Applications visées

- En fonction des caractéristiques techniques
  - Débit :
    - Divertissement et réalité augmentée/virtuelle
    - Télétravail
  - Latence faible :
    - les jeux interactifs
  - Fiabilité, latence :
    - Conduite autonome
    - Villes intelligentes
- Internet des objets (IoT)
  - Agriculture
  - Télé-médecine
  - Réseaux électriques intelligents
  - Smart Home
  - Entreprise : une automatisation sans fil sera possible dans les chaînes d'assemblage

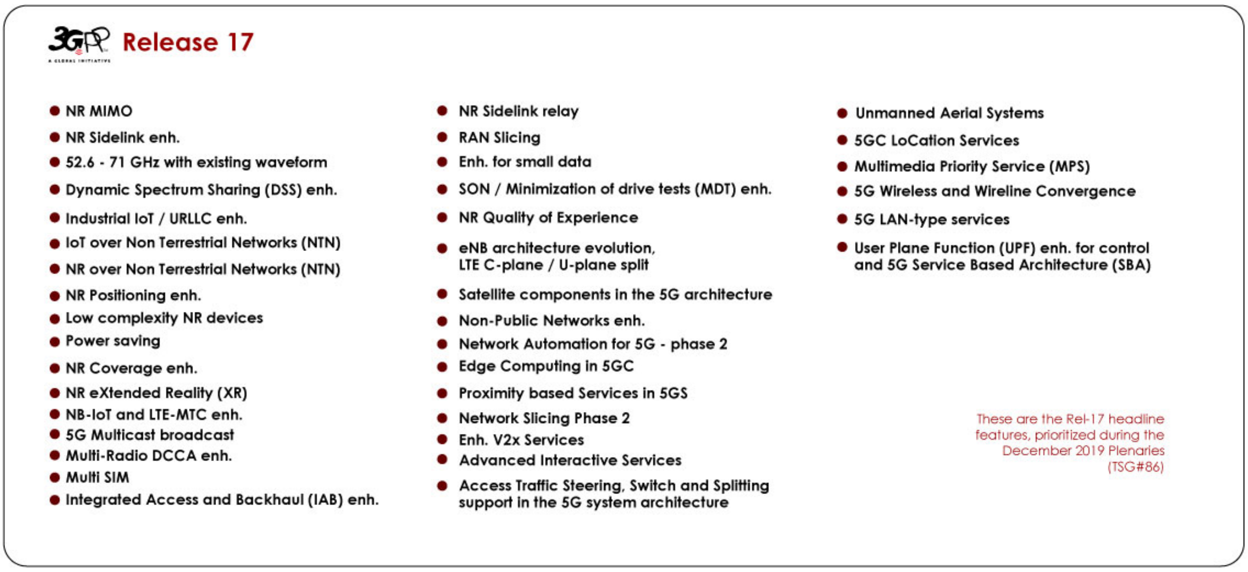
Autre classification des applications :

- Cloud computing
- Edge computing

Principes de fonctionnement de la 5G : table des matières

4G - “Releases” (cf. `http://www.3gpp.org`)

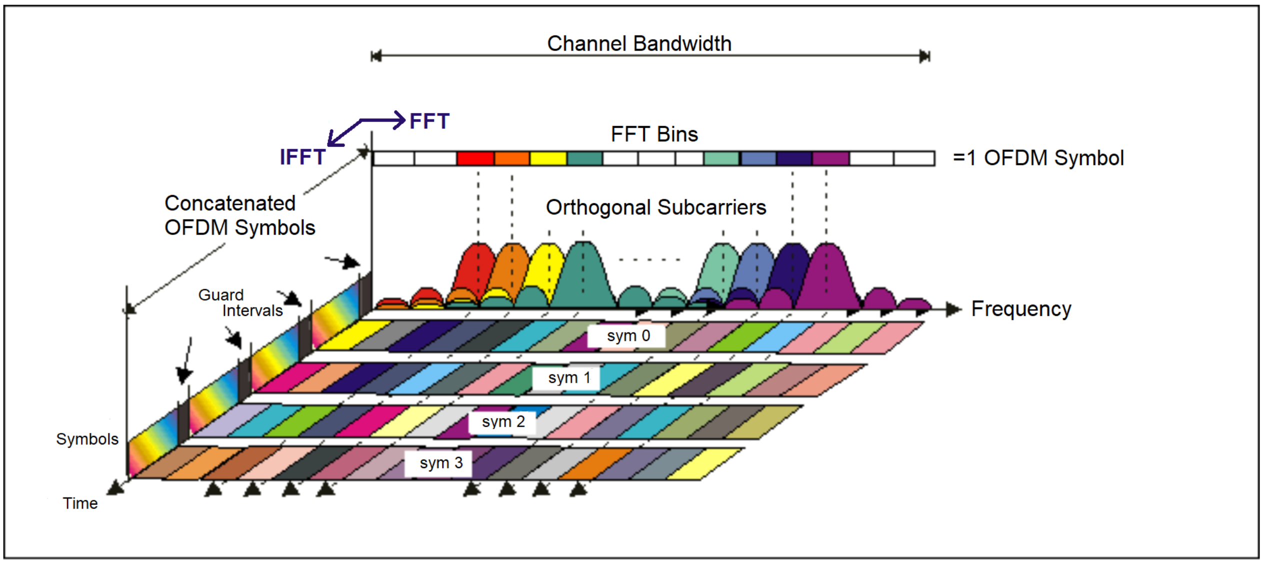
Release 17 (mars 2022)



Release 18 (décembre 2023)

Modulation OFDM

Tout comme pour la 4G et la transmission par courants porteurs !



Frequency-Time Representative of an OFDM signal

Caractéristiques de terminaux mobiles

Nouvelles catégories de terminaux 5G (3GPP rel.15)[107], ETSI F5G (rel.1.1.1)[108]										
Catégorie LTE		18	19	20	21	22	23	24	25	26
Débit crête (Mbit/s)	Descendant	1 174	1 566	1 948	1 348	2 349	2 695	2 936	3 132	3 422
	Montant	211	13 563	316	301	422	527	633	738	844
Caractéristiques fonctionnelles minimales										
Largeur de la bande de fréquence de chaque porteuse		1,4 à 20 MHz								
Nombre de porteuses radio agrégées dans le sens descendant		2, 4, 8			2, 4	2, 4, 8				
Nombre de porteuses radio agrégées dans le sens montant		2, 3 ou +								
Modulations sur chaque sous-porteuse	Descendante	64QAM, 256QAM		64QAM, 256QAM, 1024QAM	64QAM, 256QAM	64QAM, 256QAM, 1024QAM				
	Montante	64QAM, 256QAM			64QAM	64QAM, 256QAM				
Types d'antenne sur la liaison descendante										
MIMO 2x2		Oui								
MIMO 4x4		Oui								
MIMO 8x8		Oui			Non	Oui				

Figure – Catégories de terminaux 5G.

Codage LDPC

Utilisation des codes de type “Low-density parity-check codes” (LDPC codes).

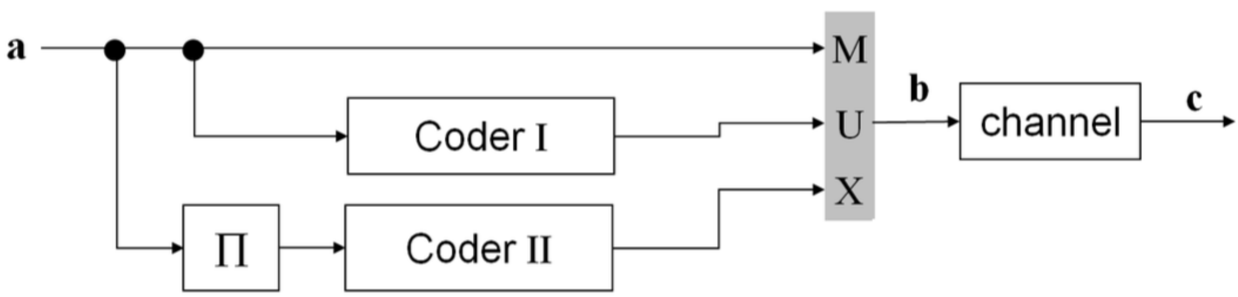


Figure – Schéma de principe. L’encodeur II encode les bits après permutation. Le mot de code **b** est obtenu après entrelacement des données.

Technologie 5G NR : massive MIMO et radio access technology (RAT)

5G NR (New Radio) est une nouvelle technologie d'accès radio (RAT, radio access technology) pour les réseaux mobiles 5G.

Les deux évolutions principales pour la 5G des objets connectés au niveau du réseau d'accès Radio Access Network (RAN)

1. Usage massif des antennes MIMO.
2. L'autre point porte sur la *virtualisation* du réseau d'accès appelé Radio Access Technology (RAT). Il permet de créer un RAN "multi-technologique". Il supporte plusieurs fonctions génériques dont
   - gestion de réseau,
   - les *enablers* pour objets connectés de type capteurs,
   - fonctions pour les applications associées aux véhicules autonomes.

Le principe du Network Function Virtualization (NFV)

L'infrastructure 5G NR est virtuelle et repose sur un cloud de *ressources physiques virtualisées et orchestrées par le* Network Function Virtualisation Infrastructure (NFV).

Grâce au Network Function Virtualization (NFV) :

- plus besoin d'hardware dédié : les fonctions réseaux sont gérées par plusieurs réseaux virtuels ; permet des économies pour les fournisseurs d'accès.
- capacité de traitement en temps réel des applications 5G-IoT en optimisant la vitesse, la capacité, la couverture dans les réseaux.

Le NFV s'accompagne du *Software-Defined Networking* (SDN).

Le Software Defined Network (SDN)

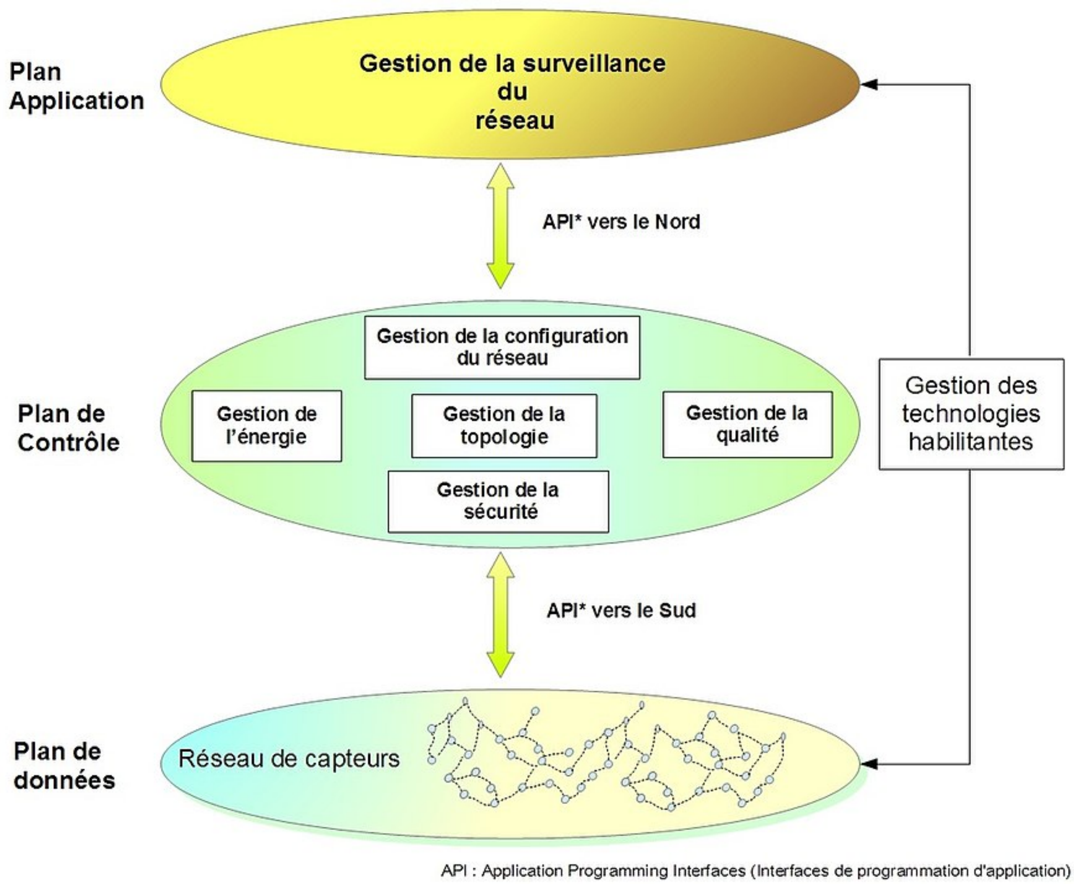
Les fonctions logicielles du réseau sont assurées par le Software-Defined Network (SDN). L'objectif est de *rendre possible la gestion des réseaux hétérogènes induits par la diversité des objets connectés.*
Le Software-Defined Network (SDN) est basé sur la séparation

- du plan de contrôle
- du plan usager.

Il est complémentaire au Network function virtualization (NFV). Le SDN apporte de profonds changements dans une dizaine de domaines pour les objets connectés :

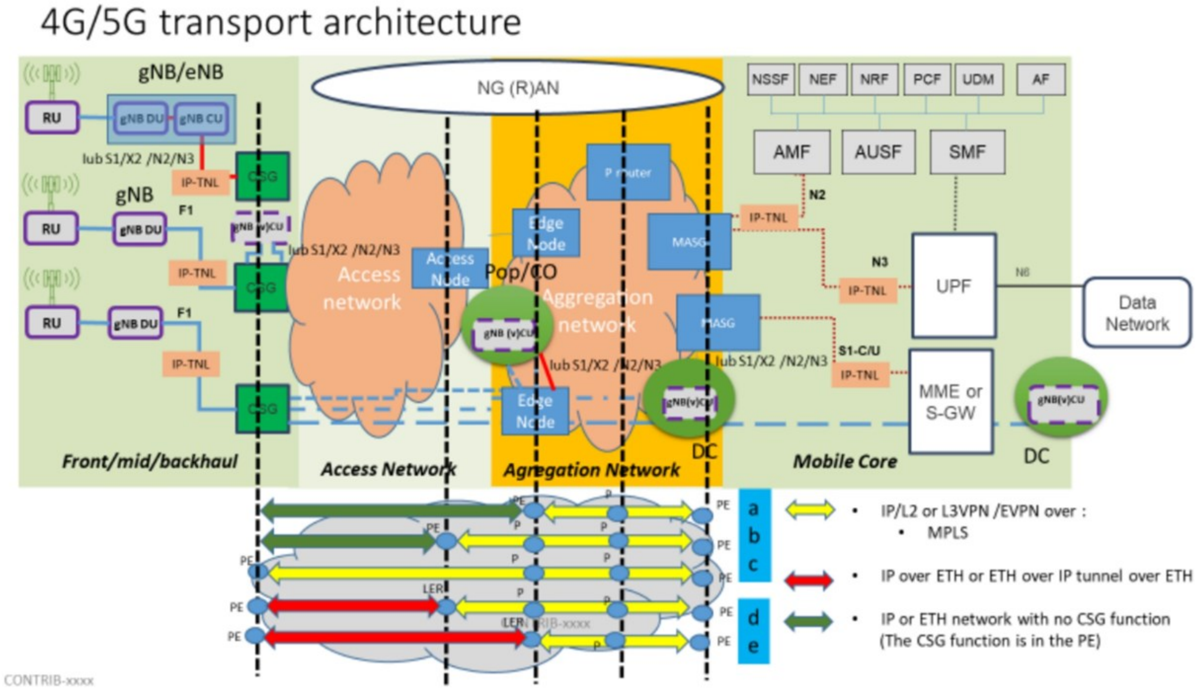
- un réseau sans fil défini par logiciel, la virtualisation des fonctions réseau, le spectre des ondes millimétrique redistribué dynamiquement, le MIMO massif, l'ultra-densification du réseau, le cloud, le big data, l'Internet des objets évolutifs, la connectivité entre appareils avec haute mobilité, etc.

Le Software Defined networking for Wireless Sensor Networks (SDWSN)



Architecture 4G/5G

4G/5G transport architecture



Principes de fonctionnement de la 5G : table des matières

Un réseau composé de cellules de différentes tailles

Cell types		Deployment environment	Max. number of users	Output power (mW)	Max. distance from base station
5G NR FR2	Femtocell	Homes, businesses	Home: 4–8 Businesses: 16–32	indoors: 10–100 outdoors: 200–1,000	tens of meters
	Pico cell	Public areas like shopping malls, airports, train stations, skyscrapers	64 to 128	indoors: 100–250 outdoors: 1,000–5,000	tens of meters
	Micro cell	Urban areas to fill coverage gaps	128 to 256	outdoors: 5,000–10,000	few hundreds of meters
	Metro cell	Urban areas to provide additional capacity	more than 250	outdoors: 10,000–20,000	hundreds of meters
Wi-Fi (for comparison)		Homes, businesses	fewer than 50	indoors: 20–100 outdoors: 200–1,000	few tens of meters

Figure – Types de cellules 5G.

Les bandes de fréquence de la 5G

La 5G pourra à terme être utilisée dans les mêmes bandes de fréquences que celles utilisées pour les réseaux 3G et 4G existants.

Conformément au principe de **neutralité technologique** (imposé par les directives européennes), les opérateurs qui ont reçu des droits d'utilisation dans une bande de fréquences donnée sont libres de décider quelle technologie (2G, 3G, 4G ou 5G) ils utilisent dans la bande concernée.

L'Europe a définit 3 "bandes pionnières" pour la 5G :

- La bande 700 MHz : grande couverture, convient pour l'Internet des objets, débits faibles.
- La bande 3600 MHz : la largeur de bande disponible bien plus importante que la bande 700 MHz.
- La bande 26 GHz : les vitesses les plus élevées, mais peu d'intérêt en Belgique.

En plus, la bande 1400 MHz est également proposée pour la 5G. Cette bande offre plus de capacité descendante (SDL).

Licences pour les droits d'utilisation de la 5G I

Belgique : la mise aux enchères de 2022 dans le détail

Trois procédures autonomes d'attribution de droits d'utilisation organisées par l'IBPT en 2022.

1. La première procédure concerne l'attribution :
   - du spectre 2G et 3G existant, soit 35 MHz duplex dans la bande 900 MHz, 75 MHz duplex dans la bande 1800 MHz et 60 MHz duplex dans la bande 2100 MHz, pour une période de 20 ans à l'issue de la période de validité des autorisations 2G et 3G existantes
   - de 30 MHz duplex dans la bande 700 MHz pour une période de 20 ans.
2. La deuxième porte sur l'attribution de 390 MHz dans la bande 3600 MHz pour la période jusqu'au 6 mai 2040.
3. La troisième organise l'attribution de 90 MHz dans la bande 1400 MHz pour une période de 20 ans.

Licences pour les droits d'utilisation de la 5G II

Résultats des enchères :

Bande	Proximus	Orange	Telenet	Citymesh
5G				
700 MHz (30)	2×10 MHz	2×10 MHz	2×5 MHz	2×5 MHz
3600 MHz (390)	1×100 MHz	1×100 MHz	1×100 MHz	1×50 MHz
1400 MHz (90*)	1×45 MHz	1×30 MHz	1×15 MHz	
2G/3G/4G				
900 MHz (35)	2×10 MHz	2×10 MHz	2×10 MHz	2×5 MHz
1800 MHz (75)	2×25 MHz	2×15 MHz	2×20 MHz	2×15 MHz
2100 MHz (60)	2×25 MHz	2×15 MHz	2×15 MHz	2×5 MHz

(*) *La bande de fréquences radioélectriques 1400 MHz permet d'obtenir une capacité supplémentaire en voie descendante (uniquement).*

Network Research a aussi obtenu 1×20 MHz dans la bande des 3600 MHz.

Tableau récapitulatif des futures technologies 5G

Génération	Acronyme	Normes 3GPP - ETSI	Fréquences	Débit indicatif (download) en bit/s (théorique/pratique/usuel)
5G	IMT-2020	ETSI TS V15.6.0 (3GPP rel.15)[107] octobre 2019 ETSI F5G (rel.1.1.1)[108] décembre 2020	Plusieurs bandes de fréquences deux segments : • 5G *sub-6 GHz* 700 MHz, 2,1 GHz, 3,5 GHz • 5G *mmWave* de 24 GHz, (Génération 5G), jusqu'à 100 GHz.	Référence 1-10 Gbit/s 50 Gbit/s[110] (débit théorique annoncé en 2013)

Figure – Les futures générations de réseaux mobile 5G.

Normes de rayonnement

Etude de l'IBPT à la demande de la région Bruxelles-Capitale :

- "La suppression progressive attendue des technologies 2G et 3G à partir de 2020 ne permettra pas de fournir une solution pour le déploiement de la 5G dans la Région de Bruxelles-Capitale sans une adaptation des normes de rayonnement actuelles."
- "Sans l'adaptation des normes, l'augmentation attendue du trafic de données ne sera pas possible, ..."

Recommandation de l'IBPT

- Spécifiquement pour la Région de Bruxelles-Capitale, l'IBPT déconseille vivement une limite cumulative inférieure à 14,5 V/m pour une fréquence de 900 MHz, ...
  C'est pourquoi l'IBPT propose d'adopter la norme supérieure à 14,5 V/m et jusqu'à 41,5 V/m. "Cela nous permettra de faire partie de la tête du peloton européen en matière de déploiement de réseaux 5G".

Interférences

Météorologie En avril et novembre 2019, deux articles de la revue Nature émettent l'hypothèse que certaines fréquences utilisées en 5G pourraient entrer en conflit dans la bande millimétrique des 26 GHz avec l'observation de la vapeur d'eau et réduire la précision des relevés météorologiques.

Aviation. Préoccupations aux Etats-Unis : nombreux problèmes avec les radars altimétriques pour la bande des 26 GHz (nombre d'incidents en forte diminution cependant)

Principes de fonctionnement de la 5G : table des matières

L'Internet des objets (IoT)

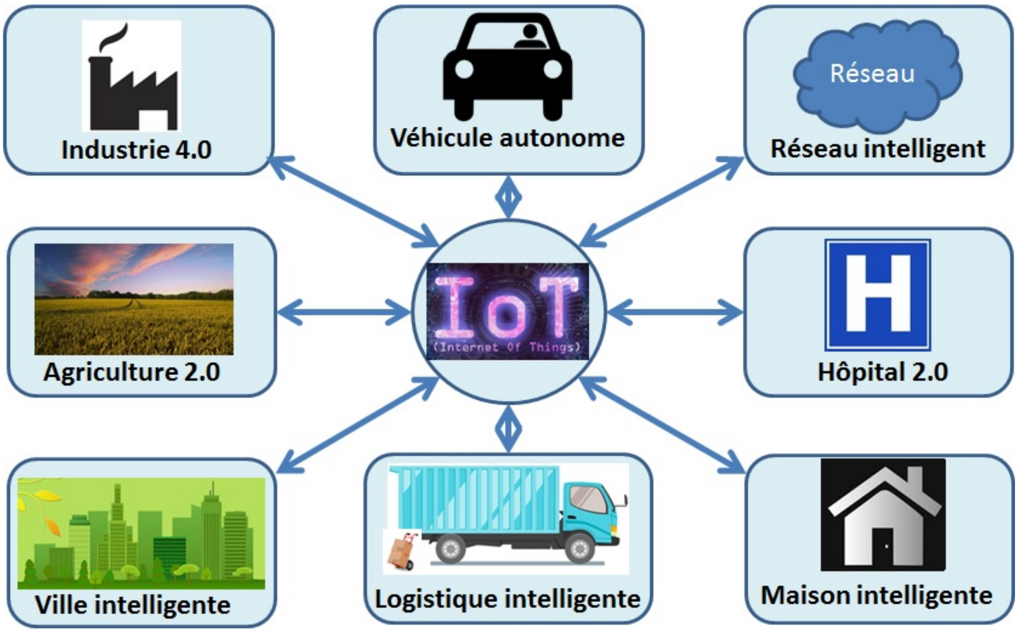


Figure – Diversité de l'IoT, grâce à la *virtualisation* du réseau.

Défis de l'IoT

- la capacité du réseau à supporter le nombre croissant d'objets connectés qui pourrait atteindre 100 milliards en 2030.
- la sécurité du réseau.
- la disponibilité et la qualité du réseau
- la couverture ou l'étendue du réseau
- l'autonomie des batteries des objets connectés

Normes

Les acteurs principaux sont :

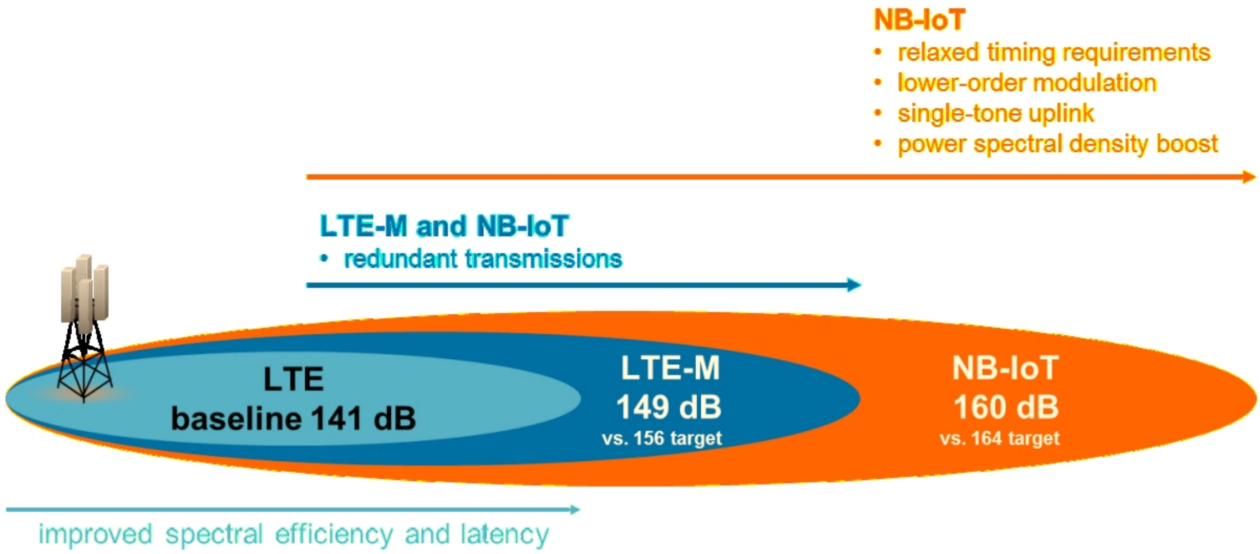
- l'Institute of Electrical and Electronics Engineers (IEEE)
- le 3rd Generation Partnership Project (3GPP)
- l'Union internationale des télécommunications (UIT)
- l'Internet Engineering Task Force (IETF)

Nouvelles technologies pour l'IoT : LTE-M ou NB-IoT

Avec l'arrivée de la 5G, LTE-M et Narrowband IoT (NB-IoT) s'ajoutent à l'offre existante. Les opérateurs de télécommunications sont partagés :

- La technologie LTE-M est compatible avec les réseaux de téléphonie mobile existants et ne nécessite pas l'achat de nouveaux modems compatibles comme pour le NB-IoT. LTE-M propose un taux de transfert de données plus rapide que NB-IoT (384 kb/s contre 100 kb/s). Ce critère est important pour les solutions devant transporter de la vidéo (vidéosurveillance). LTE-M, contrairement à NB-IoT, propose les échanges voix et sait gérer la mobilité des objets.
  Applications : véhicules autonomes, télé-travail, et plus généralement pour les objets connectés en mouvement.
- NB-IoT requiert une bande passante de seulement 180 kHz et peut donc utiliser un canal GSM (200 kHz). Une intégration dans un canal LTE est également possible. Elle est adaptée pour des parcs de capteurs fixes n'utilisant qu'un faible volume de données.
  Applications : la télémétrie pour les compteurs d'eau ou électriques connectés ainsi que l'agriculture 2.0.

Deep indoor : atténuation maximale



Sécurité et confidentialité

Evaluation des risques :

- Les *objets connectés sont placés dans des lieux publics ou isolés* et sont donc vulnérables car ils sont facilement accessibles physiquement, l'un des risques étant une intrusion et usurpation d'identité, une écoute passive ou active sur le réseau des objets.
- Il y a aussi un risque de disponibilité. En effet les capteurs utilisent des réseaux sans fil pour véhiculer les données collectées. Il convient donc de se prémunir d'attaques éventuelles.
- 35 types de cyberattaques ont été identifiés comme des menaces majeures à la vie privée dans le réseau 5G.
- Des services de sécurité tels que la confidentialité, l'authentification et la distribution de clés sont à implémenter, surtout pour des solutions "tout software" (*cartes SIM dématérialisées* par exemple).

Problème

Comme la 5G repose sur l'IP, le réseau est vulnérable à toute forme d'attaque IP.

Difficultés techniques pour l'IoT par la 5G

- Gestion de la configuration du système (auto-configuration, s'adapter à une reconfiguration du réseau)
- Surveillance du système (gérer en temps réel les caractéristiques des capteurs [état, position], connaître la topologie, gérer les alarmes)
- Maintenance des objets connectés (détection des défaillances, mise à jour)
- Performance des objets connectés (monitoring)
- Efficacité énergétique (gestion de la consommation, durée de vie)
- Sécuriser les accès et la vie privée (authentification, éviter les fuites, confidentialité)

Principes de fonctionnement de la 5G : table des matières

Aspects environnementaux et énergie

- Equipement *réseau* 5G :
  - l'équipement utilisé par le réseau 5G consomme jusqu'à 90 % d'énergie en moins par bit envoyé que les appareils actuels du réseau 4G.
- Equipement *abonnés* 5G :
  - Déchets électroniques :
    - les terminaux utilisateurs (ordinateurs portables, téléphones, écrans, téléviseurs, imprimantes, etc.) sont ceux qui ont le plus d'impact, entre 54% et 90% (recours à des ressources naturelles souvent peu renouvelables ou peu recyclées).
  - Consommation des données accrue :
    - On s'attend ainsi à ce que plus de 12 milliards d'appareils mobiles soient connectés à l'Internet des Objets d'ici 2025. Selon une étude commandée par l'IBPT, la consommation de données en Belgique va augmenter d'un facteur 40 d'ici 2040.

Vie privée et sécurité

Les institutions

Le 29 janvier 2020, la Commission européenne et la présidence du Conseil de l'Union européenne ont présenté une approche européenne concertée sur la sécurité des réseaux de télécommunications 5G européens.

- Réponse des institutions : une boîte à outils 5G a été adoptée au niveau européen. Celle-ci couvre tous les risques identifiés à la suite d'une évaluation coordonnée au niveau de l'UE et comprend des mesures techniques et stratégiques ainsi que des actions associées pour garantir la sécurité.

Pour l'informaticien(ne)/ingénieur(e) :

- nombreuses difficultés suite à la flexibilité des réseaux et la présence d'objets IoT à faible consommation.

Principales préoccupations

- Réchauffement climatique
- Vie privée et sécurité (localisation aisée grâce au *timing advance* et antennes *MIMO*)
- Aspects sanitaires (effets sur la santé) :
  - Exposition accrue
  - Utilisation de fréquences plus élevées
  - Concentration des ondes
- Absence de contrôle démocratique quant à son déploiement et à ses objectifs
  - vers des opérateurs omnipotents ?
  - vers une surveillance à très grande échelle ?