3. GENERALITES

Analyse globale
élastique
au premier ordre.

=> Principe de superposition.

$$M(P_1,P_2) = M(P_1) + M(P_2)$$
$$N(P_1,P_2) = N(P_1) + N(P_2)$$
$$V(P_1,P_2) = V(P_1) + V(P_2)$$

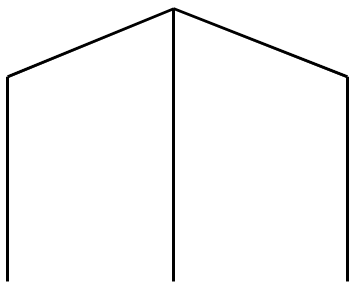
$$u(P_1,P_2) = u(P_1) + u(P_2)$$
$$v(P_1,P_2) = v(P_1) + v(P_2)$$
$$\varphi(P_1,P_2) = \varphi(P_1) + \varphi(P_2)$$

$$E\left(P_1,\dots,P_N\right)=\sum_{i=1}^{N} E\left(P_i\right)$$

1

3. GENERALITES

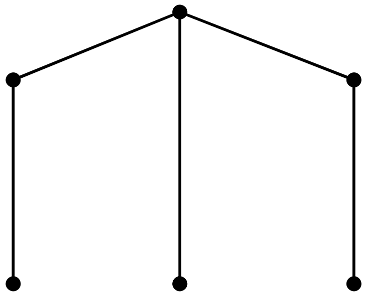
Nœud: point de rencontre géométrique des axes des barres.



2

3. GENERALITES

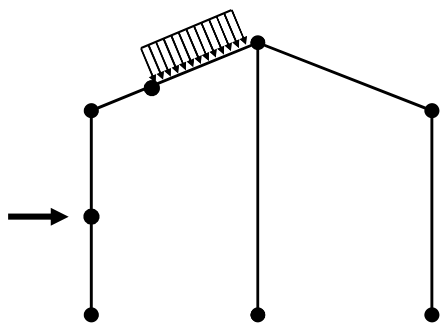
Nœud: point de rencontre géométrique des axes des barres.



3

3. GENERALITES

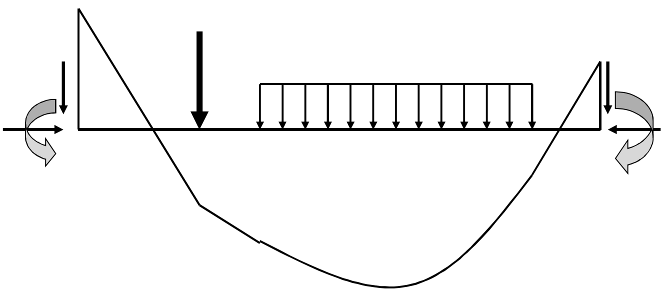
Nœud: point de rencontre géométrique des axes des barres.
On peut en ajouter.



4

3. GENERALITES

On calcule les résultats (forces ou déplacements) aux nœuds.
On sera ensuite capable de calculer les efforts et les déplacements à l'intérieur de chaque barre par les relations force-déplacement dans une barre, en tenant compte des forces appliquées le long de la barre.



5

4. METHODE DES FORCES

Si structure isostatique,
équilibre d'ensemble => réactions d'appuis
+ charges extérieures => M,N,V.

Si structure hyperstatique,
N équations d'équilibre ⇔ *N*+*h* inconnues

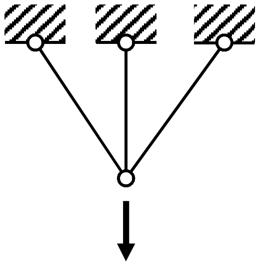
=> *h* inconnues hyperstatiques

6

4. METHODE DES FORCES

h inconnues hyperstatiques

On pourrait rendre la structure isostatique
en effectuant *h* coupures,
chaque coupure libérant une inconnue.

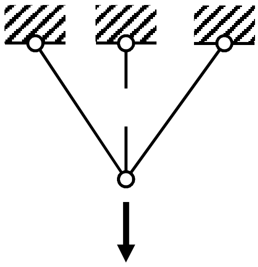


7

4. METHODE DES FORCES

h inconnues hyperstatiques

On pourrait rendre la structure isostatique
en effectuant *h* coupures,
chaque coupure libérant une inconnue.

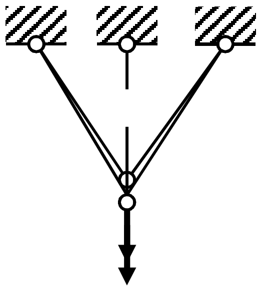


8

4. METHODE DES FORCES

On pourrait rendre la structure isostatique
en effectuant *h* coupures,
chaque coupure libérant une inconnue.

mais on n'a plus le même comportement.

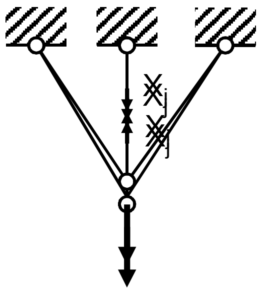


9

4. METHODE DES FORCES

On peut retrouver le même comportement
en appliquant des efforts X_j
qui referment la coupure.

Mais on ne connaît pas la grandeur de X_j.

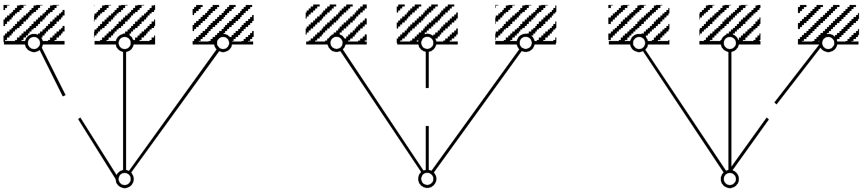


10

4. METHODE DES FORCES

Structure rendue isostatique = structure de référence, S_0

Il y a plusieurs manières possibles de couper.



Il faut que S_0 soit un système stable !!!

11

4. METHODE DES FORCES
4.1 Détermination du degré d'hyperstaticité *h*

On peut faire des coupures
soit aux liaisons avec le monde extérieur (appuis).

Appui à rouleau: 1 force inconnue ⊥ à la fondation

12

4. METHODE DES FORCES
4.1 Détermination du degré d'hyperstaticité *h*

On peut faire des coupures
soit aux liaisons avec le monde extérieur (appuis).

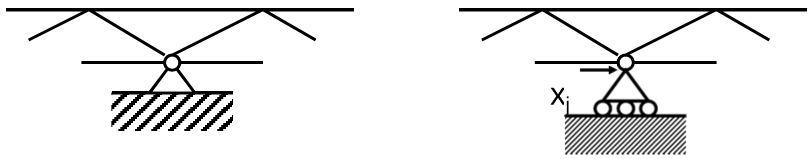
Appui à rotule: 2 forces inconnues (de direction quelconques).

13

4. METHODE DES FORCES
4.1 Détermination du degré d'hyperstaticité *h*

On peut faire des coupures
soit aux liaisons avec le monde extérieur (appuis).

Appui à rotule remplacé par un rouleau:
1 force inconnue.

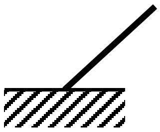


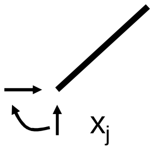
14

4. METHODE DES FORCES
4.1 Détermination du degré d'hyperstaticité *h*

On peut faire des coupures
soit aux liaisons avec le monde extérieur (appuis).

Encastrement: 2 forces inconnues de direction quelconque
+ 1 moment = 3 inconnues.



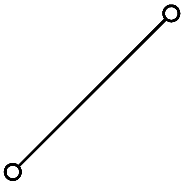


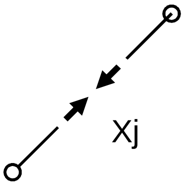
15

4. METHODE DES FORCES
4.1 Détermination du degré d'hyperstaticité *h*

On peut faire des coupures
soit aux liaisons avec le monde extérieur (appuis)
soit à l'intérieur de la structure.

Barre de treillis: 1 paire de forces inconnue.



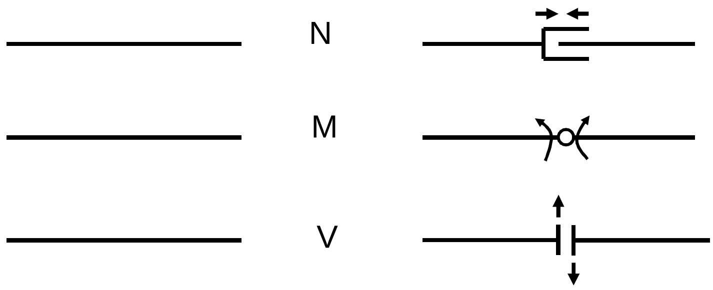


16

4. METHODE DES FORCES
4.1 Détermination du degré d’hyperstaticité *h*

On peut faire des coupures
soit aux liaisons avec le monde extérieur (appuis)
soit à l’intérieur de la structure.

Barre de type poutre: 1 paire de forces inconnue si coupure sur une seule sollicitation.



17

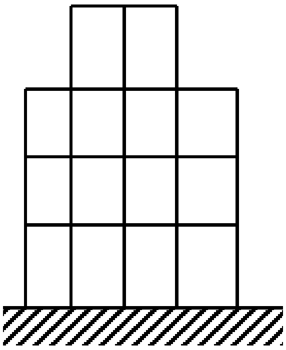
4. METHODE DES FORCES
4.1 Détermination du degré d’hyperstaticité *h*

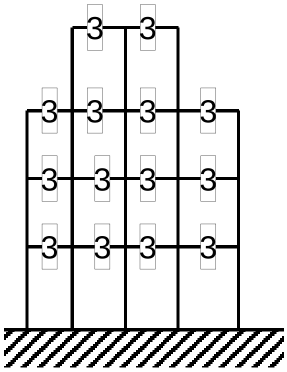
On peut faire des coupures
soit aux liaisons avec le monde extérieur (appuis)
soit à l’intérieur de la structure.

Barre de type poutre: 3 paires d’inconnue si coupure totale.

18

4. METHODE DES FORCES
4.1 Détermination du degré d'hyperstaticité *h*



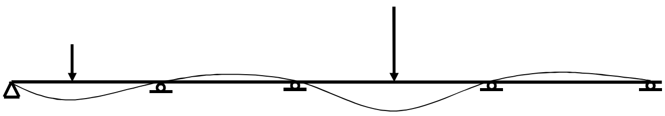


h = 14 x 3 = 42

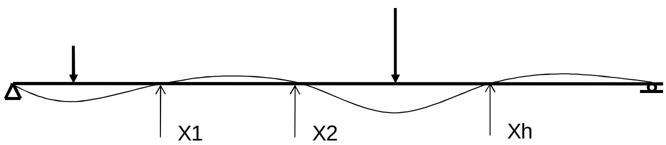
19

4. METHODE DES FORCES
4.2 Equation générale

Soit une structure S, *h* fois hyperstatique, soumise à l'action de forces extérieures P.



Elle a le même comportement qu'une structure *S0* isostatique, soumise à l'action des forces extérieures P,
et de forces (ou paires de forces) de coupure X1, X2, …, Xh dont l'amplitude est telle que les déplacements aux coupures d1, d2, … dh, soient nuls.



20

Dans *S0*,

$d1 = 0$
$d2 = 0$
….
$dh = 0$

Par le principe de superposition, dans *S0*;

$d1(X1) + d1(X2) + \ldots + d1(Xh) + d1(P) = 0$
$d2(X1) + d2(X2) + \ldots + d2(Xh) + d2(P) = 0$
….
$dh(X1) + dh(X2) + \ldots + dh(Xh) + dh(P) = 0$

Par le principe de superposition, dans *S0*,

$d1(X1{=}1)\ X1 + d1(X2{=}1)\ X2 + \ldots + d1(Xh{=}1)\ Xh + d1(P) = 0$
$d2(X1{=}1)\ X1 + d2(X2{=}1)\ X2 + \ldots + d2(Xh{=}1)\ Xh + d2(P) = 0$
….
$dh(X1{=}1)\ X1 + dh(X2{=}1)\ X2 + \ldots + dh(Xh{=}1)\ Xh + dh(P) = 0$

21

Par le principe de superposition, dans *S0*,

$d1(X1{=}1)\ X1 + d1(X2{=}1)\ X2 + \ldots + d1(Xh{=}1)\ Xh + d1(P) = 0$
$d2(X1{=}1)\ X1 + d2(X2{=}1)\ X2 + \ldots + d2(Xh{=}1)\ Xh + d2(P) = 0$
….
$dh(X1{=}1)\ X1 + dh(X2{=}1)\ X2 + \ldots + dh(Xh{=}1)\ Xh + dh(P) = 0$

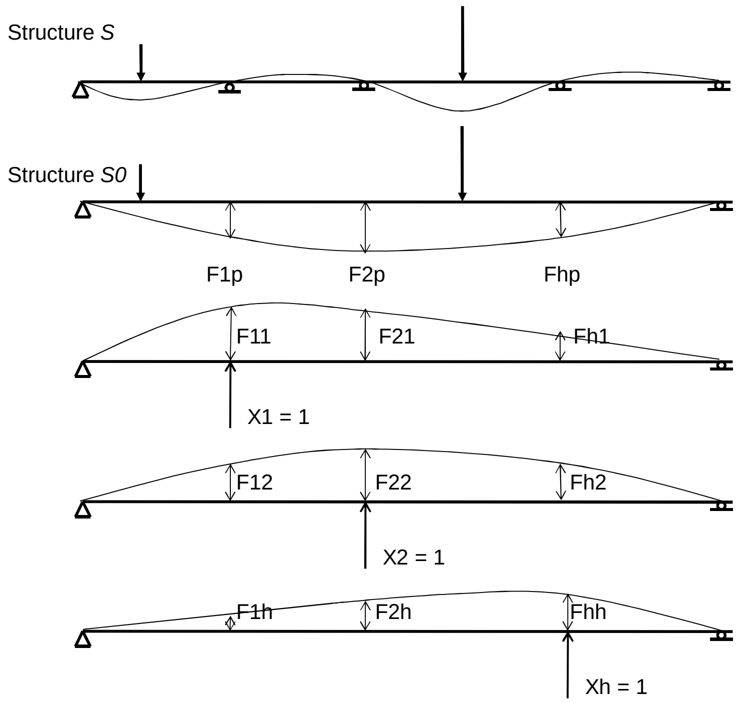
Si on note di(Xj=1) par Fij, et di(P) par Fip, on peut écrire:

Dans *S0*,

$F11\ X1 + F12\ X2 + \ldots + F1h\ Xh + F1p = 0$
$F21\ X1 + F22\ X2 + \ldots + F2h\ Xh + F2p = 0$
….
$Fh1\ X1 + Fh2\ X2 + \ldots + Fhh\ Xh + FhP = 0$

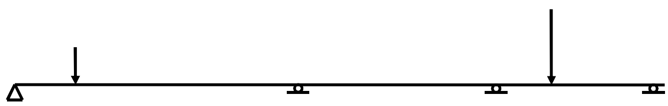
Si on est capable de calculer les Fij et Fip, on pourra résoudre le système et trouver les Xj

22

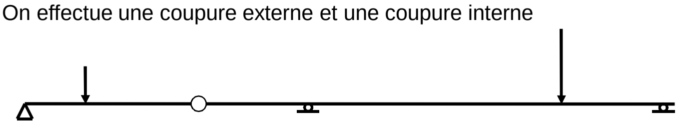


23

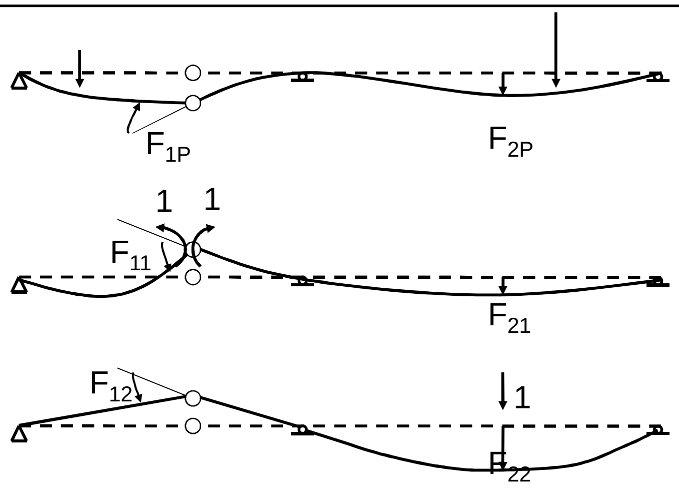
Autre exemple.



La structure est 2 fois hyperstatique.
On effectue une coupure externe et une coupure interne



24



$u_1 = F_{11} X_1 + F_{12} X_2 + F_{1P} = 0$
$u_2 = F_{21} X_1 + F_{22} X_2 + F_{2P} = 0$

$$\boxed{\sum_{j=1}^{h} F_{ij} X_j + F_{ip} = 0}$$

$$\boxed{[F]\{X\} = -\{F_p\}}$$

25

4. METHODE DES FORCES
4.3 Détermination des coefficients de flexibilité F_{ij} et des F_{ip}

F_{ij} et F_{ip} = déplacements (ou déplacements relatifs des lèvres de la coupure) en un point
=> Théorème de la force unité appliqué **dans S_0**.

Soit une structure avec une distribution d'efforts intérieurs (M, N, V) sous l'action de forces appliquées.

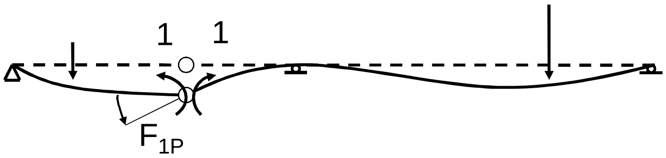
On peut trouver le déplacement d sous l'état de sollicitation vraie

par un champ de forces virtuelles:
unitaire en d et dans la direction d,
nulles ailleurs.

$$1\,d = \int_0^S \left(\frac{N N_1}{EA} + \frac{M M_1}{EI} + \frac{V V_1}{GA_v} \right) ds$$

26

4. METHODE DES FORCES
4.3 Détermination des coefficients de flexibilité F_{ij} et des F_{ip}



Soit une structure avec une distribution d’efforts intérieurs (M, N, V) sous l’action de forces appliquées.

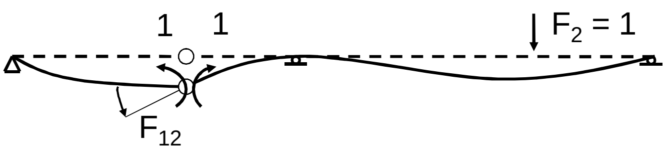
On peut trouver le déplacement d sous l’état de sollicitation vraie

par un champ de forces virtuelles:
- unitaire en d et dans la direction d,
- nulles ailleurs.

$$1\,d = \int_0^S \left(\frac{N N_1}{EA} + \frac{M M_1}{EI} + \frac{V V_1}{GA_v} \right) ds$$

$$F_{1p} = \int \frac{N_p N_1}{EA} + \frac{M_p M_1}{EI} + \frac{V_p V_1}{GA_v}$$

4. METHODE DES FORCES
4.3 Détermination des coefficients de flexibilité F_{ij} et des F_{ip}



Soit une structure avec une distribution d’efforts intérieurs (M, N, V) sous l’action de forces appliquées.

On peut trouver le déplacement d sous l’état de sollicitation vraie

par un champ de forces virtuelles:
- unitaire en d et dans la direction d,
- nulles ailleurs.

$$1\,d = \int_0^S \left(\frac{N N_1}{EA} + \frac{M M_1}{EI} + \frac{V V_1}{GA_v} \right) ds$$

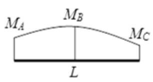
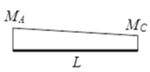
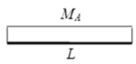
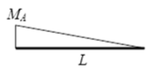
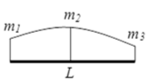
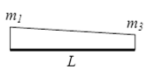
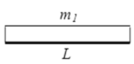
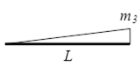
$$F_{12} = \int \frac{N_2 N_1}{EA} + \frac{M_2 M_1}{EI} + \frac{V_2 V_1}{GA_v}$$

$$F_{ip} = \int \frac{N_p N_i}{EA} + \frac{M_p M_i}{EI} + \frac{V_p V_i}{GA_v}$$

$$F_{ij} = \int \frac{N_i N_j}{EA} + \frac{M_i M_j}{EI} + \frac{V_i V_j}{GA_v}$$

4. METHODE DES FORCES

4.4 Tables pour les coefficients de flexibilité F_{ij} et des F_{ip}

$\int M_x m_i dx$	 M_A, M_B, M_C, L	 M_A, M_C, L	 M_A, L	 M_A, L
 m_1, m_2, m_3, L	$\frac{L}{30}\begin{bmatrix} M_A(4m_1+2m_2-m_3) \\ +2M_B(m_1+8m_2+m_3) \\ +M_C(-m_1+2m_2+4m_3) \end{bmatrix}$	$\frac{L}{6}\begin{bmatrix} M_A m_1 \\ +2(M_A+M_C)m_2 \\ +M_C m_3 \end{bmatrix}$	$\frac{L}{6}M_A[m_1+4m_2+m_3]$	$\frac{L}{6}M_A(m_1+2m_2)$
 m_1, m_3, L	$\frac{L}{6}\begin{bmatrix} M_A m_1 \\ +2M_B(m_1+m_3) \\ +M_C m_3 \end{bmatrix}$	$\frac{L}{6}\begin{bmatrix} M_A(2m_1+m_3) \\ +M_C(m_1+2m_3) \end{bmatrix}$	$\frac{L}{2}M_A(m_1+m_3)$	$\frac{L}{6}M_A(2m_1+m_3)$
 m_1, L	$\frac{L}{6}(M_A+4M_B+M_C)m_1$	$\frac{L}{2}(M_A+M_C)m_1$	$LM_A m_1$	$\frac{L}{2}M_A m_1$
 m_3, L	$\frac{L}{6}(2M_B+M_C)m_3$	$\frac{L}{6}(M_A+2M_C)m_3$	$\frac{L}{2}M_A m_3$	$\frac{L}{6}M_A m_3$

4. METHODE DES FORCES
4.5 Distribution des efforts intérieurs

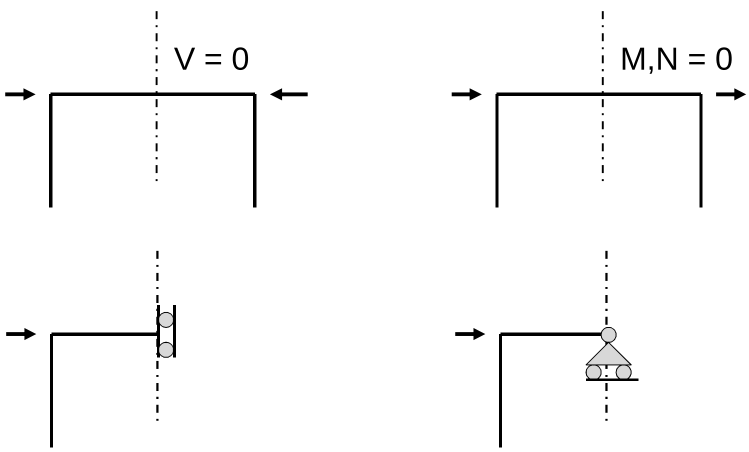
$u_1 = F_{11} X_1 + F_{12} X_2 + F_{1P} = 0$
$u_2 = F_{12} X_1 + F_{22} X_2 + F_{2P} = 0$

$M(x) = M_1(x) X_1 + M_2(x) X_2 + M_P(x)$
$N(x) = N_1(x) X_1 + N_2(x) X_2 + N_P(x)$
$V(x) = V_1(x) X_1 + V_2(x) X_2 + V_P(x)$

dans S dans S_0

31

4. METHODE DES FORCES
4.6 Symétries



32