

UNIVERSITE de LIEGE  
L T A S  
DYNAMIQUE DES CONSTRUCTIONS MECANIQUES  
Rue Ernest Solvay, 21  
4000 LIEGE  
(Belgique)

Rapport VF-72

Consistance de l'étude linéarisée  
des structures précontraintes

J.F. DEBONGNIE

Avril 1991

UNIVERSITÉ DE LIÈGE  
FACULTÉ DES SCIENCES APPLIQUÉES  
U.D. CH. HANOCQ  
Rue E. Solvay, 21 - B-4000 LIÈGE



## 1. STRUCTURES PRECONTRAINTES

Nous appelons structure *précontrainte* une structure dont l'état de référence n'est pas relaxé. L'état de contrainte existant dans cet état sera appelé *précontrainte*.

Selon l'origine de la précontrainte, il y a lieu de distinguer :

- les structures *extérieurement précontraintes* dans lesquelles la précontrainte résulte de charges mortes inamovibles, comme la pesanteur.
- les structures *intérieurement précontraintes* dans lesquelles la précontrainte résulte du processus de mise à forme ou de l'assemblage. Il s'agit alors d'un système de contraintes auto-équilibrées, que l'on peut encore appeler *contraintes résiduelles*. Outre les structures précontraintes par forgeage, on peut citer l'arc tendu par sa corde, le tambour précontraint par la tension de sa membrane, la raquette de tennis dont le cordage est fortement tendu, et enfin, les poutres en béton précontraint du génie civil.

Il va de soi que la distinction dépend du choix du système considéré. Ainsi, une toile de tableau tendue sur son cadre est extérieurement précontrainte ; par contre, si l'on considère le système (toile + cadre), il est intérieurement précontraint. Il s'agit cependant d'une distinction essentielle car dans les mouvements de corps rigide, les contraintes résiduelles ne peuvent jouer aucun rôle, puisqu'il s'agit de forces *intérieures*.

La formulation de l'étude linéarisée des structures précontraintes est loin d'être neuve. Mais son application pratique a mené à tant de déconvenues, notamment en ce qui concerne leur comportement dans le cas de modes rigides, qu'il nous a paru utile d'essayer de faire le point à ce sujet. C'est l'objet du présent rapport où, après avoir rappelé les principes de la formulation, on porte l'attention sur l'influence des nombreuses simplifications que l'on fait généralement, soit par habitude, soit par nécessité. Nous nous sommes efforcé d'étayer cette étude par un certain nombre d'exemples qui, nous l'espérons, aideront à la compréhension physique du problème.

## 2. EQUILIBRE DE LA PRECONTRAINTE

Le champ de précontrainte  $\sigma_{ij}$  est naturellement en équilibre avec la sollicitation qui l'induit, à savoir, les forces de précontrainte volumiques  $\bar{f}_i dV$  et surfaciques  $\bar{t}_i dS$  (rappelons que dans le cas d'une précontrainte *intérieure*,  $\bar{f}_i = 0$  et  $\bar{t}_i = 0$ ). Nous exprimerons cette condition à l'aide des travaux virtuels :

$$\int_V \sigma_{ij} D_j \delta u_i dV = \int_V \bar{f}_i \delta u_i dV + \int_S \bar{t}_i \delta u_i dS \quad (1)$$

quel que soit le champ de déplacement virtuel  $\delta u_i$ . Notons deux cas particuliers :

a) Pour un mode rigide de translation,  $\delta u_i = \delta a_i = c^{ste}$ , on obtient

$$\delta a_i R_i = 0 \text{ soit } R_i = 0 \quad (2)$$

où  $R$  est la résultante des forces de précontrainte :

$$R_i = \int_V \bar{f}_i dV + \int_S \bar{t}_i dS \quad (3)$$

b) Pour un mode rigide de rotation,

$$\delta u_i = \delta \omega_{ij} x_j \quad \delta \omega_{ji} = -\delta \omega_{ij}$$

et

$$\int_V \sigma_{ij} D_j \delta u_i dV = \int_V \sigma_{ij} \delta \omega_{ji} dV = 0$$

Il en découle les conditions :

$$\delta \omega_{ij} M_{ij} = 0 \text{ soit } M_{ij} = M_{ji} \quad (4)$$

avec

$$M_{ij} = \int_V \bar{f}_j x_i dV + \int_S \bar{t}_j x_i dS \quad (5)$$

Il s'agit de l'équilibre des moments exprimé, certes, d'une manière un peu inhabituelle. Nous retrouverons ces grandeurs  $M_{ij}$  plus loin.

## 3. LINEARISATION DE L'ENERGIE DE DEFORMATION DANS LE CAS D'UNE STRUCTURE PRECONTRAINTTE

La densité d'énergie de déformation est une fonction des déformations de Green

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2}(D_i u_j + D_j u_i + D_i u_m D_j u_m)$$

Tant que ces déformations restent petites, on peut l'identifier à son développement taylorien limité au second ordre :

$$W(\gamma) = W_0 + \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}}\right)_0 \gamma_{ij} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}}\right)_0 \gamma_{ij} \gamma_{kl} + O(\gamma^3)$$

Le terme  $W_0$  peut être fixé arbitrairement à zéro, car seules importent les *variations* d'énergie. Les contraintes sont les dérivées de  $W$  par rapport aux déformations. A partir du développement ci-dessus, on trouve

$$\frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}} = \left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}}\right)_0 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}}\right)_0 \gamma_{kl}$$

ce qui permet d'interpréter  $\left(\frac{\partial W}{\partial \gamma_{ij}}\right)_0$  comme la précontrainte  $\sigma_{ij}$  et  $\left(\frac{\partial^2 W}{\partial \gamma_{ij} \partial \gamma_{kl}}\right)_0$  comme les modules d'élasticité  $C_{ijkl}$ . Il vient en définitive

$$W = \sigma_{ij} \gamma_{ij} + \frac{1}{2} C_{ijkl} \gamma_{ij} \gamma_{kl} \quad (6)$$

La *linéarisation géométrique* revient à admettre que tous les gradients  $D_i u_j$  sont petits et à ne garder dans l'expression (6) que les termes contenant au plus du second ordre en  $D_i u_j$ . Notant

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (D_i u_j + D_j u_i) \quad (7)$$

on obtient alors

$$W = W_1 + W_e + W_g + O(D_i u_j^3) \quad (8)$$

avec

$$\begin{cases} W_1 = \sigma_{ij} \epsilon_{ij} \\ W_e = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \\ W_g = \frac{1}{2} \sigma_{ij} D_i u_m D_j u_m \end{cases} \quad (9)$$

L'énergie de la structure est alors

$$U = U_1 + U_e + U_g \quad (10)$$

où apparaissent

$$\begin{aligned} U_1 &= \int_V W_1 dV && \text{(terme linéaire d'énergie)} \\ U_e &= \int_V W_e dV && \text{(énergie élastique)} \\ U_g &= \int_V W_g dV && \text{(énergie de précontrainte)} \end{aligned} \quad (11)$$

Supposons que l'on soumette la structure à des forces supplémentaires  $\Delta f_i dV$  et  $\Delta t_i dS$ . Son équilibre sera régi par le principe de variation des déplacements :

$$\delta(U + P) = 0$$

où l'énergie potentielle des charges  $P$  se décompose en

$$P = P_0 + P_1 \quad (12)$$

$P_0$  étant relatif à la précontrainte

$$P_0 = - \int_V \bar{f}_i u_i dV - \int_S \bar{t}_i u_i dS \quad (13)$$

tandis que  $P_1$  représente la contribution des charges supplémentaires :

$$P_1 = - \int_V \Delta f_i u_i dV - \int_S \Delta t_i u_i dS \quad (14)$$

Mais il résulte de l'équilibre de la précontrainte que

$$\delta U_1 = \int_V \sigma_{ij} \frac{1}{2} (D_i \delta u_j + D_j \delta u_i) dV = \int_V \sigma_{ij} D_j \delta u_i dV = -\delta P_0$$

Bien plus, en choisissant  $\delta u_i = u_i$ , on obtiendrait

$$U_1 + P_0 = 0$$

Il en résulte que l'énergie totale se réduit à

$$U + P = U_e + U_g + P_1 \quad (15)$$

En conclusion, le calcul d'une structure précontrainte se fait en deux étapes :

- a) On détermine l'état de précontrainte  $\sigma_{ij}$
- b) On calcule l'équilibre final en ajoutant le terme  $U_g$  à l'énergie de déformation élastique; par contre, il ne faut plus appliquer que les charges supplémentaires.

De la même façon, les études dynamiques de structures précontraintes se font à l'aide du principe de Hamilton :

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} (T - U_e - U_g) dt + \int_{t_1}^{t_2} \delta \tau dt = 0 \quad (16)$$

où  $\delta \tau$  est le travail virtuel des forces appliquées.

#### 4. LE PENDULE

Un exemple simple de structure extérieurement précontrainte est donné par le pendule (fig. 1). Au repos, le pendule est soumis à la pesanteur, ce qui induit des contraintes  $\sigma = \frac{mg}{S}$ ,  $S$  étant la section du fil. Pour un déplacement latéral de la forme  $v(x) = \frac{v}{l}$ , on obtient une énergie de précontrainte

$$U_g = \frac{1}{2} \int_V \sigma \left( \frac{dv}{dx} \right)^2 dV = \frac{1}{2} \sigma S l \left( \frac{v}{l} \right)^2 = \frac{1}{2} \frac{mg}{l} v^2$$

Comme il s'agit en l'occurrence d'un mouvement de corps rigide, l'énergie élastique  $U_e$  est nulle et  $U = U_g$ .

Cherchons à déterminer la période du pendule.

L'énergie cinétique vaut :

$$T = \frac{1}{2} m \dot{v}^2$$

ce qui permet d'écrire l'équation de Lagrange

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial T}{\partial \dot{v}} \right) + \frac{\partial U_g}{\partial v} = 0$$

sous la forme

$$m \ddot{v} + \frac{mg}{l} v = 0$$

On obtient immédiatement la solution :

$$v = A \cos\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right) + B \sin\left(\sqrt{\frac{g}{l}} t\right)$$

qui est de pulsation

$$\Omega = \sqrt{\frac{g}{l}}$$

soit de période

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = 2\pi \sqrt{\frac{l}{g}}$$

C'est bien le résultat classique. Mais on notera le fait suivant : dans notre approche linéarisée, le mouvement de la masse est horizontal et non pas circulaire. On peut donc s'étonner de voir apparaître une énergie potentielle. C'est que la force pesante  $mg$  en se déplaçant latéralement de  $v$ , acquiert un moment autour du point de suspension égal à

$$M = -mgv$$

L'énergie de ce moment a pour variation

$$\delta U = -M \delta \theta = -M \frac{\delta v}{l} = mgv \frac{\delta v}{l}$$

ce qui conduit bien à

$$U = \frac{1}{2} mg \frac{v^2}{l}$$

## 5. MODES RIGIDES DES STRUCTURES PRECONTRAINTES

L'étude du pendule en tant que structure précontrainte donne donc satisfaction. Mais il subsiste une question fondamentale : physiquement, dans le cas d'une structure *intérieurement* précontrainte, un mode rigide ne peut produire de l'énergie, car les forces intérieures ne travaillent pas. Cette propriété est-elle respectée dans notre formulation linéarisée ?

Il suffit bien sûr d'examiner le comportement de l'énergie de précontrainte  $U_g$  car, par définition, un mode rigide est solution de  $U_e = 0$ . L'expression générale d'un mode rigide est

$$u_i = a_i + \omega_{ji}x_j \quad (17)$$

avec

$$a_i = c^{ste} \quad \omega_{ij} = c^{ste} \quad \omega_{ij} = -\omega_{ji} \quad (18)$$

On a donc

$$U_g = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} \omega_{im} \omega_{jm} dV \quad (19)$$

Il est plus parlant d'utiliser le pseudo-vecteur rotation  $\omega_i$  défini par

$$\omega_{ij} = e_{ijk} \omega_k \quad (20)$$

$e_{ijk}$  étant le symbole alternateur. On a alors

$$\begin{aligned} \omega_{im} \omega_{jm} &= e_{imk} e_{jml} \omega_k \omega_l \\ &= (\delta_{ij} \delta_{kl} - \delta_{il} \delta_{kj}) \omega_k \omega_l \\ &= \omega_k \omega_k \delta_{ij} - \omega_i \omega_j \end{aligned} \quad (21)$$

ce qui permet d'écrire

$$U_g = \frac{1}{2} \int_V \sigma_{ij} [\omega_k \omega_k \delta_{ij} - \omega_i \omega_j] dV \quad (22)$$

Or cette expression est de la forme

$$U_g = \int_V \sigma_{ij} D_j \delta u_i dV$$

à condition de poser

$$\delta u_i = \frac{1}{2} (\omega_k \omega_k x_i - \omega_i \omega_j x_j) \quad (23)$$

on peut donc appliquer le théorème des travaux virtuels (1), ce qui donne la *forme extérieure de l'énergie de précontrainte pour un mode rigide* :

$$U_g = \frac{1}{2} \omega_k \omega_k \left[ \int_V \bar{f}_i x_i dV + \int_S \bar{t}_i x_i dS \right] - \frac{1}{2} \omega_i \omega_j \left[ \int_V \bar{f}_i x_j dV + \int_S \bar{t}_i x_j dS \right]$$

soit en termes des moments définis en (5),

$$U_g = \frac{1}{2} [M_{ii} \omega_k \omega_k - M_{ij} \omega_i \omega_j] \quad (24)$$

En particulier, si la précontrainte est *intérieure*, les moments  $M_{ij}$  sont tous nuls, et l'énergie de précontrainte est *nulle pour un mode rigide*, en bon accord avec la physique du problème. Rappelons du reste que l'équilibre de rotation exige la symétrie des  $M_{ij}$ .



## 6. INTERPRETATION

L'équation (24) s'écrit explicitement :

$$2U_g = M_{11}(\omega_2^2 + \omega_3^2) + M_{22}(\omega_1^2 + \omega_3^2) + M_{33}(\omega_1^2 + \omega_2^2) - 2M_{12}\omega_1\omega_2 - 2M_{13}\omega_1\omega_3 - 2M_{23}\omega_2\omega_3 \quad (25)$$

On notera d'ailleurs que les moments  $M_{ij}$  ont une valeur indépendante de la position de l'origine des axes, car

$$\int_V (x_i + a_i) \bar{f}_j dV + \int_S (x_i + a_i) \bar{t}_j dS = M_{ij} + a_i R_j$$

et l'équilibre de translation exige  $R_j = 0$ . Les termes directs en  $M_{11}$ ,  $M_{22}$  et  $M_{33}$  s'interprètent comme des énergies pendulaires ; ainsi lors d'une rotation  $\omega_3$ , la force  $F_1$  située à une abscisse  $x_1$  acquiert un moment

$$M_3 = -x_1 F_1 \omega_3 = -M_{11} \omega_3$$

Un accroissement  $\delta\omega_3$  mène donc à une variation d'énergie

$$\delta U = -M_3 \delta\omega_3 = M_{11} \omega_3 \delta\omega_3 = M_{11} \delta\left(\frac{\omega_3^2}{2}\right)$$

Pour les termes croisés, notons d'abord qu'une force  $F_2$  appliquée en  $x_1$  doit toujours être associée à une force  $F_1$  appliquée en  $x_2$ , de telle sorte que (fig. 4)

$$x_1 F_2 = M_{12} = M_{21} = x_2 F_1$$

Cela étant, la force  $F_2$  acquiert, lors d'une rotation  $\omega_2$  (fig. 5), un moment

$$M_1 = \omega_2 x_1 F_2 = M_{12} \omega_2$$

auquel correspond une variation d'énergie

$$\delta U = -M_1 \delta\omega_1 = -M_{12} \omega_2 \delta\omega_1 \quad (26)$$

De son côté, la force  $F_1$  acquiert, lors d'une rotation  $\omega_1$  (fig. 6), un moment

$$M_2 = \omega_1 x_2 F_1 = \omega_1 M_{21}$$

qui fournit, pour un  $\delta\omega_2$ , une énergie

$$\delta U = -M_2 \delta\omega_2 = -M_{21} \omega_1 \delta\omega_2 \quad (27)$$

Sommant les résultats (26) et (27), on obtient, puisque  $M_{12} = M_{21}$ ,

$$\delta U = -M_{12}(\omega_1 \delta\omega_2 + \omega_2 \delta\omega_1) = -M_{12} \delta(\omega_1 \omega_2)$$

## 7. CADRE CIRCULAIRE TENDANT UNE MEMBRANE

La forme intérieure (22) de l'énergie de précontrainte s'écrit explicitement

$$2U_g = \int_V [\sigma_{11}(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \sigma_{22}(\omega_1^2 + \omega_3^2) + \sigma_{33}(\omega_1^2 + \omega_2^2) - 2\sigma_{12}\omega_1\omega_2 - 2\sigma_{13}\omega_1\omega_3 - 2\sigma_{23}\omega_2\omega_3] dV \quad (28)$$

En coordonnées cylindriques, elle se transforme en

$$2U_g = \int_V [\sigma_{rr}(\omega_\theta^2 + \omega_z^2) + \sigma_{\theta\theta}(\omega_r^2 + \omega_z^2) + \sigma_{zz}(\omega_r^2 + \omega_\theta^2) - 2\sigma_{r\theta}\omega_r\omega_\theta - 2\sigma_{rz}\omega_r\omega_z - 2\sigma_{\theta z}\omega_\theta\omega_z] dV \quad (29)$$

Considérons (fig. 7) un cadre circulaire de section  $\Omega$  sur lequel une membrane est tendue d'une contrainte uniforme  $\sigma_x = \sigma_y = \sigma$ . Il s'agit d'un cas de précontrainte intérieure.

La contrainte circonférentielle dans le cadre s'obtient par des considérations de statique élémentaire; la figure 8 montre en effet que

$$2\sigma_c\Omega + 2R\sigma t = 0$$

soit

$$\sigma_c = -\frac{\sigma t R}{\Omega} \quad (30)$$

L'énergie de précontrainte de la membrane vaut, pour un mode rigide,

$$\begin{aligned} U_{gm} &= \frac{1}{2} \int_V [\sigma_x(\omega_y^2 + \omega_z^2) + \sigma_y(\omega_x^2 + \omega_z^2)] dV \\ &= \frac{1}{2} \sigma(\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\omega_z^2) \pi R^2 t \end{aligned} \quad (31)$$

Quant à celle du cadre, elle est donnée par

$$U_{gc} = \frac{1}{2} \int_V \sigma_c(\omega_r^2 + \omega_z^2) dV = \frac{1}{2} \Omega R \sigma_c \int_0^{2\pi} (\omega_r^2 + \omega_z^2) d\theta$$

Notant que (fig. 9)  $\omega_r = \omega_x \cos\theta + \omega_y \sin\theta$

il vient

$$U_{gc} = \frac{1}{2} \Omega R \sigma_c \pi (\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\omega_z^2)$$

Soit en tenant compte de (30),

$$U_{gc} = -\frac{1}{2} \pi \sigma R^2 t (\omega_x^2 + \omega_y^2 + 2\omega_z^2) \quad (32)$$

On s'aperçoit que l'on a bien

$$U_g = U_{gm} + U_{gc} = 0$$

Par contre, il est clair que si l'on avait étudié le cadre seul ou la membrane seule en tenant compte de la précontrainte, celle-ci serait devenue extérieure, et on aurait obtenu  $U_g \neq 0$ .

## 8. APPROXIMATIONS CONSISTANTES DE L'ENERGIE DE PRECONTRAINTTE

Les conclusions qui précèdent, et qui sont parfaitement rassurantes sur le plan physique, sont remises en cause par un certain nombre d'approximations que l'on fait dans les calculs pratiques :

- a) Tout d'abord, il est rare que l'on connaisse précisément le champ de précontraintes. Le plus souvent, sa connaissance procède elle-même d'une étude par éléments finis.
- b) Bien plus, il est d'usage courant de faire le calcul de l'énergie de précontrainte avec la précontrainte *moyenne* dans chaque élément.

- c) On se sert souvent d'expressions simplifiées de  $U_g$ . Ainsi, pour une plaque de surface  $S$ , on ne tient compte que des précontraintes membranaires, et on écrit avec BRYAN [4]

$$U_g = \frac{1}{2} \int_S [N_{11}(D_1 u_3)^2 + N_{22}(D_2 u_3)^2 + 2N_{12}D_1 u_3 D_2 u_3] dS \quad (33)$$

- d) Il y a enfin des approximations géométriques, parfois implicites. A titre d'exemple, la figure 10 illustre l'approximation implicitement admise sur la géométrie d'un croisement de poutres : on ne peut parler de continuité de la matière au voisinage du point A.

- e) On utilise parfois des éléments non conformes

Le critère minimal que l'on puisse adopter est que, dans le cas d'une précontrainte intérieure, l'énergie s'annule pour un mode rigide. Nous dirons donc qu'une *approximation de l'énergie de précontrainte est consistante si elle fournit la valeur exacte de  $U_g$  pour un mode rigide*. C'est dans ce cadre que nous étudierons les diverses approximations courantes.

## 9. UNE APPROXIMATION CONSISTANTE D'USAGE GENERAL

Remarquons tout d'abord que dans l'expression générale développée

$$\begin{aligned} 2U_g = \int_V \{ & \sigma_{11}[(D_1 u_1)^2 + (D_1 u_2)^2 + (D_1 u_3)^2] + \sigma_{22}[(D_2 u_1)^2 + (D_2 u_2)^2 + (D_2 u_3)^2] \\ & + \sigma_{33}[(D_3 u_1)^2 + (D_3 u_2)^2 + (D_3 u_3)^2] + 2\sigma_{12}[D_1 u_1 D_2 u_1 + D_1 u_2 D_2 u_2 + D_1 u_3 D_2 u_3] \\ & + 2\sigma_{13}[D_1 u_1 D_3 u_1 + D_1 u_2 D_3 u_2 + D_1 u_3 D_3 u_3] + 2\sigma_{23}[D_2 u_1 D_3 u_1 + D_2 u_2 D_3 u_2 + D_2 u_3 D_3 u_3] \} dV \end{aligned}$$

on peut, sans nuire à la consistance, omettre tous les termes contenant les déformations  $D_1 u_1$ ,  $D_2 u_2$ ,  $D_3 u_3$  qui s'annulent lors d'un mode rigide. Ceci mène à l'expression simplifiée :

$$\begin{aligned} 2U_g = \int_V \{ & \sigma_{11}[(D_1 u_2)^2 + (D_1 u_3)^2] + \sigma_{22}[(D_2 u_1)^2 + (D_2 u_3)^2] + \sigma_{33}[(D_3 u_1)^2 + (D_3 u_2)^2] \\ & + 2\sigma_{12}D_1 u_3 D_2 u_3 + 2\sigma_{13}D_1 u_2 D_3 u_2 + 2\sigma_{23}D_2 u_1 D_3 u_1 \} dV \end{aligned} \quad (34)$$

qui nous servira constamment de référence.

## 10. APPROXIMATION DU CHAMP DE PRECONTRAINTE

Lorsque le champ de précontrainte a lui-même été calculé par éléments finis, que se passe-t-il ? Nous supposons que, lors du calcul de la précontrainte, le maillage utilisé est *identique* au maillage de l'analyse finale. Dans ce cas, les contraintes calculées  $\bar{\sigma}_{ij}$  vérifient le théorème des travaux virtuels pour tout champ de déplacement  $\delta u_i$  contenu dans le modèle. En se reportant à la démonstration du paragraphe 5, on constate qu'elle utilise seulement le fait que, parmi les champs du modèle, se trouve le champ particulier

$$\delta u_i = \frac{1}{2}(\omega_k \omega_k x_i - \omega_i \omega_j x_j)$$

Or, cette condition est vérifiée pour *tous les éléments finis représentant les modes de déformation constante*. Même les éléments non conformes habituels contiennent ces déplacements, sans discontinuité. On peut donc affirmer que, *généralement*, lors d'un mode rigide,  $\bar{U}_g = U_g$ , c'est à dire que *l'utilisation des contraintes calculées par éléments finis ne nuit pas à la consistance*.

## 11. UTILISATION DE CONTRAINTES MOYENNES D'ÉLÉMENTS

Très souvent, on pousse l'approximation plus loin en remplaçant les contraintes locales par des contraintes moyennes d'éléments, c'est à dire que l'on pose

$$2\bar{U}_g = \sum_e \left( \frac{1}{V_e} \int_{V_e} \sigma_{ij} dV \right) \int_{V_e} D_i u_m D_j u_m dV \quad (35)$$

Lors d'un mode rigide, on a, par l'expression exacte,

$$2U_g = \int_V \sigma_{ij} \omega_{im} \omega_{jm} dV = \omega_{im} \omega_{jm} \int_V \sigma_{ij} dV = \omega_{im} \omega_{jm} \sum_e \int_{V_e} \sigma_{ij} dV$$

et par (35)

$$2\bar{U}_g = \sum_e \left( \frac{1}{V_e} \int_{V_e} \sigma_{ij} dV \right) V_e \omega_{im} \omega_{jm} = \omega_{im} \omega_{jm} \sum_e \int_{V_e} \sigma_{ij} dV$$

Ces deux expressions étant identiques, on peut affirmer que l'utilisation, dans chaque élément, des moyennes volumiques de contrainte ne nuit pas à la consistance†.

## 12. ENERGIE DE PRECONTRAINTÉ D'UNE PLAQUE

Les plaques et les poutres nécessitent une étude spéciale, en raison des hypothèses particulières qui régissent leurs contraintes et déplacements.

Commençons par analyser une plaque avec effet des efforts tranchants (théorie de HENCKY-REISSNER), en nous limitant au cas d'une vraie plaque. Nous excluons donc les assemblages tridimensionnels, pour lesquels se pose un problème supplémentaire de non-conformité géométrique (fig. 10).

Suivant l'usage, l'axe  $e_3$  sera pris perpendiculaire au plan de la plaque. Les déplacements ont alors la forme

$$\begin{cases} u_\alpha(x_1, x_2, x_3) = v_\alpha(x_1, x_2) + x_3 \varphi_\alpha(x_1, x_2) & \alpha = 1, 2 \\ u_3(x_1, x_2, x_3) = w(x_1, x_2) \end{cases} \quad (36)$$

En outre, la contrainte  $\sigma_{33}$  est supposée nulle partout. Les déformations linéaires étant

$$\begin{aligned} \epsilon_{\alpha\beta} &= \frac{1}{2} [(D_\alpha v_\beta + D_\beta v_\alpha) + x_3 (D_\alpha \varphi_\beta + D_\beta \varphi_\alpha)] \\ \epsilon_{\alpha 3} &= \frac{1}{2} (\varphi_\alpha + D_\alpha w) \\ \epsilon_{33} &= 0 \end{aligned}$$

le principe des travaux virtuels s'écrit ici :

$$\int_S [M_{\alpha\beta} D_\beta \delta \varphi_\alpha + Q_\alpha (\delta \varphi_\alpha + D_\alpha \delta w) + N_{\alpha\beta} D_\beta \delta v_\alpha] dS = \tau(\delta u) \quad (37)$$

---

† On prendra garde au fait que dans certains éléments axisymétriques de SAMCEF, on calcule, pour des raisons de facilité d'interprétation, non pas les moyennes volumiques, mais les moyennes sur le plan méridien:[1,2,3]

où

$$\begin{aligned} M_{\alpha\beta} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} x_3 \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \\ N_{\alpha\beta} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{\alpha\beta} dx_3 \\ Q_{\alpha} &= \int_{-\frac{1}{2}}^{\frac{1}{2}} \sigma_{\alpha 3} dx_3 \end{aligned} \quad (38)$$

et  $\tau(\delta u)$  représente le travail des forces extérieures pour le déplacement virtuel  $\delta u$ .

L'expression exacte de l'énergie de précontrainte est

$$2U_g = \int_V [\sigma_{\alpha\beta} (D_{\alpha} u_{\gamma} D_{\beta} u_{\gamma} + D_{\alpha} u_3 D_{\beta} u_3) + 2\sigma_{\alpha 3} (D_{\alpha} u_{\beta} D_3 u_{\beta} + D_{\alpha} u_3 D_3 u_3)] dV$$

soit, en tenant compte de la structure (36) des déplacements,

$$\begin{aligned} 2U_g = \int_V \{ &\sigma_{\alpha\beta} [(D_{\alpha} v_{\gamma} D_{\beta} v_{\gamma} + D_{\alpha} w D_{\beta} w) + x_3 (D_{\alpha} v_{\gamma} D_{\beta} \varphi_{\gamma} + D_{\alpha} \varphi_{\gamma} D_{\beta} v_{\gamma}) + x_3^2 D_{\alpha} \varphi_{\gamma} D_{\beta} \varphi_{\gamma}] \\ &+ 2\sigma_{\alpha 3} (\varphi_{\beta} D_{\alpha} v_{\beta} + x_3 \varphi_{\beta} D_{\alpha} \varphi_{\beta}) \} dV \end{aligned} \quad (39)$$

Un mode rigide est de la forme

$$\begin{aligned} u_{\alpha} &= a_{\alpha} + \omega_{\beta\alpha} x_{\beta} + \omega_{3\alpha} x_3 \\ u_3 &= a_3 + \omega_{\alpha 3} x_{\alpha} \end{aligned}$$

soit

$$\begin{aligned} v_{\alpha} &= a_{\alpha} + \omega_{\beta\alpha} x_{\beta} \\ \varphi_{\alpha} &= \omega_{3\alpha} \\ w &= a_3 + \omega_{\alpha 3} x_{\alpha} \end{aligned}$$

Il en découle en particulier  $D_{\alpha} \varphi_{\beta} = 0$ , ce qui permet de se limiter à l'expression :

$$2U_g = \int_S [N_{\alpha\beta} (D_{\alpha} v_{\gamma} D_{\beta} v_{\gamma} + D_{\alpha} w D_{\beta} w) + 2Q_{\alpha} \varphi_{\beta} D_{\alpha} v_{\beta}] dS$$

où n'apparaissent que les efforts membranaires et les efforts tranchants. Lors d'un mode rigide, il vient

$$U_g = \frac{1}{2} \int_S [N_{\alpha\beta} (\omega_{\alpha\gamma} \omega_{\beta\gamma} + \omega_{\alpha 3} \omega_{\beta 3}) + 2Q_{\alpha} \omega_{3\beta} \omega_{\alpha\beta}] dS$$

qui se ramène au premier membre de (37) en posant

$$\begin{aligned} \delta v_{\alpha} &= \frac{1}{2} (\omega_{\alpha\gamma} \omega_{\beta\gamma} + \omega_{\alpha 3} \omega_{\beta 3}) x_{\beta} \\ \delta \varphi_{\alpha} &= \omega_{3\beta} \omega_{\alpha\beta} \\ \delta w &= 0 \end{aligned} \quad (40)$$

On a donc, dans ce cas,

$$U_g = \tau(\delta u) \quad \delta u = (40)$$

ce qui signifie que le critère de consistence est respecté. Une dernière simplification consistante peut être obtenue en notant que, dans l'expression développée,

$$\begin{aligned} 2U_g = \int_S \{ &N_{11} [(D_1 v_1)^2 + (D_1 v_2)^2 + (D_1 w)^2] + N_{22} [(D_2 v_1)^2 + (D_2 v_2)^2 + (D_2 w)^2] \\ &+ 2N_{12} [D_1 v_1 D_2 v_1 + D_1 v_2 D_2 v_2 + D_1 w D_2 w] \\ &+ 2Q_1 [\varphi_1 D_1 v_1 + \varphi_2 D_1 v_2] + 2Q_2 [\varphi_1 D_2 v_1 + \varphi_2 D_2 v_2] \} dS \end{aligned}$$

on peut omettre tous les termes contenant les déformations membranaires  $D_1v_1$  et  $D_2v_2$ . Il vient ainsi

$$2U_g = \int_S \{N_{11}[(D_1v_2)^2 + (D_1w)^2] + N_{22}[(D_2v_1)^2 + (D_2w)^2] + 2N_{12}D_1wD_2w \\ + 2Q_1\varphi_2D_1v_2 + 2Q_2\varphi_1D_2v_1\}dS \quad (41)$$

Cette approximation est plus complète que l'expression classique (32) de BRYAN, qui n'est consistante que si l'on pose  $v_1 = v_2 = 0$ , comme c'est le cas dans les problèmes les plus simples de voilement.

Le même raisonnement vaut pour une plaque de Kirchhoff. En effet, une telle plaque est également justiciable des conditions d'équilibre (37), à condition de considérer les efforts tranchants  $Q_\alpha$  comme les multiplicateurs de Lagrange associés aux conditions de Kirchhoff :

$$\varphi_\alpha + D_\alpha w = 0 \quad (42)$$

ce qui revient à les définir par les conditions d'équilibre  $Q_\alpha = D_\beta M_{\beta\alpha}$ . L'introduction des conditions (42) permet alors de donner à  $U_g$  la forme suivante :

$$2U_g = \int_S \{N_{11}[(D_1v_2)^2 + (D_1w)^2] + N_{22}[(D_2v_1)^2 + (D_2w)^2] + 2N_{12}D_1wD_2w \\ - 2Q_1D_2wD_1v_2 - 2Q_2D_1wD_2v_1\}dS \quad (43)$$

### 13. ENERGIE DE PRECONTRAINTE D'UNE POUTRE

Ici encore, nous nous limitons au cas d'une poutre simple, en excluant provisoirement les treillis de poutres. Nous prendrons pour axe des  $z$ , la fibre moyenne de la poutre. La section sera décrite par les axes  $x$  et  $y$ . Il est généralement suffisant de donner aux déplacements la structure qui suit :

$$\begin{cases} u_z = w(z) + x\alpha(z) + y\beta(z) + \theta'(z)\psi(x, y) & (\prime = \frac{d}{dz}) \\ u_x = u(z) - \theta(z)(y - y_T) \\ u_y = v(z) + \theta(z)(x - x_T) \end{cases} \quad (44)$$

où  $\alpha$  et  $\beta$  sont les rotations de la section,  $\theta$  l'angle de rotation autour de l'axe  $z$ ,  $x_T$  et  $y_T$ , les coordonnées du centre de torsion et  $\psi$ , le gauchissement de torsion. Les contraintes  $\sigma_{xx}, \sigma_{xy}, \sigma_{yy}$  sont supposées nulles. La condition d'équilibre est ici

$$\int_0^l [N\delta w' + M_x\delta\alpha' + M_y\delta\beta' + B\delta\theta'' + Q_x\delta(\alpha + u') + Q_y\delta(\beta + v') + M_t\delta\theta']dz = \tau(\delta u) \quad (45)$$

en définissant les résultantes de poutre suivantes :

- l'effort normal :  $N = \int_\Omega \sigma_{zz}d\Omega$

- les moments de flexion :

$$M_x = \int_\Omega x\sigma_{zz}d\Omega$$

$$M_y = \int_\Omega y\sigma_{zz}d\Omega$$

- les efforts tranchants :

$$Q_x = \int_\Omega \sigma_{xz}d\Omega$$

$$Q_y = \int_\Omega \sigma_{yz}d\Omega$$

- le moment de torsion :  $M_t = \int_{\Omega} (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz})d\Omega$

- le bimoment de VLASOV :  $B = \int_{\Omega} \sigma_{zz}\psi d\Omega$

En partant de (34), on obtient

$$2U_g = \int_V \{ \sigma_{zz}[(D_x u_x)^2 + (D_x u_y)^2] + 2\sigma_{xz}D_x u_y D_x u_x + 2\sigma_{yz}D_y u_x D_x u_x \} dV$$

soit, en tenant compte de la structure (44),

$$2U_g = \int_V \{ \sigma_{zz}[(u'^2 + v'^2) + \theta'^2((x - x_T)^2 + (y - y_T)^2)] + 2\sigma_{xz}[\theta v' + \theta\theta'(x - x_T)] - 2\sigma_{yz}[\theta u' - \theta\theta'(y - y_T)] - 2\sigma_{xz}u'\theta'(y - y_T) + 2\sigma_{zz}v'\theta'(x - x_T) \} dV \quad (46)$$

On peut apporter des simplifications en notant qu'un mode rigide est de la forme :

$$\begin{aligned} u_x &= a_x + \omega_{xz}x + \omega_{yz}y \\ u_y &= a_y + \omega_{yx}y + \omega_{xz}z \\ u_z &= a_z + \omega_{xy}x + \omega_{yz}z \end{aligned}$$

ce qui implique visiblement  $\theta = -\omega_{yx} = \omega_{xy} = C^{ste}$

On préserve donc la consistance en négligeant les termes en  $\theta'$ , ce qui donne

$$2U_g = \int_0^1 [N(u'^2 + v'^2) + 2Q_x\theta v' - 2Q_y\theta u'] dz \quad (47)$$

Pour un mode rigide, on a

$$u' = \omega_{xz} = \omega_y \quad , \quad v' = \omega_{zy} = -\omega_x \quad , \quad \theta = \omega_{xy} = \omega_z$$

et, par conséquent,

$$2U_g = \int_0^1 [N(\omega_x^2 + \omega_y^2) - 2Q_x\omega_x\omega_z - 2Q_y\omega_y\omega_z] dz$$

Or, cette expression est de la forme du premier membre de (45), avec

$$\begin{cases} \delta w &= \frac{1}{2}(\omega_x^2 + \omega_y^2)z \\ \delta \alpha &= -\omega_x\omega_z \\ \delta \beta &= -\omega_y\omega_z \\ \delta u &= \delta v = \delta \theta = 0 \end{cases} \quad (48)$$

On a donc, pour un mode rigide,

$$U_g = \tau(\delta u) \quad \delta(u) = (48)$$

ce qui prouve la consistance.

## 14. POTENCE PRECONTRAINTE

Le cas des treillis de poutres se présente moins bien, ainsi que le montre l'exemple suivant. Il s'agit (fig. 11) d'une potence précontrainte par un tendeur ayant une tension  $F$  (effort). Soient  $\Omega_x$ ,  $\Omega_y$  et  $\Omega_z$  les trois composantes de la rotation dans un système structural  $(x,y,z)$ . Le bilan des énergies de précontrainte s'établit comme suit :

a) Fil (Fig. 12)

$$\begin{cases} N = F & Q_x = 0 & Q_y = 0 \\ \omega_x = \frac{\Omega_x - \Omega_z}{\sqrt{2}} & \omega_y = \Omega_y & \omega_z = 0 \\ \text{longueur : } l\sqrt{2} \end{cases}$$

$$U_{gAC} = \frac{Fl}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2}(\Omega_x^2 + \Omega_z^2) - \Omega_x\Omega_z + \Omega_y^2 \right]$$

b) Poutre AB (Fig. 13)

$$\begin{cases} N = -\frac{F}{\sqrt{2}} & Q_x = -\frac{F}{\sqrt{2}} & Q_y = 0 \\ \omega_x = \Omega_x & \omega_y = \Omega_y & \omega_z = \Omega_z \\ \text{longueur : } l \end{cases}$$

$$U_{gAB} = \frac{Fl}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{1}{2}(\Omega_x^2 + \Omega_y^2) + \Omega_x\Omega_z \right]$$

c) Poutre BC (Fig. 14)

$$\begin{cases} N = -\frac{F}{\sqrt{2}} & Q_x = \frac{F}{\sqrt{2}} & Q_y = 0 \\ \omega_x = -\Omega_x & \omega_y = \Omega_y & \omega_z = \Omega_x \\ \text{longueur : } l \end{cases}$$

$$U_{gBC} = \frac{Fl}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{1}{2}(\Omega_x^2 + \Omega_y^2) + \Omega_x\Omega_z \right]$$

d) Bilan

$$U_g = U_{gAC} + U_{gAB} + U_{gBC} = \frac{Fl}{\sqrt{2}} \Omega_x\Omega_z \neq 0$$

On constate que le bilan n'est pas nul. L'approximation n'est donc pas consistante.

## 15. DES RAISONS DE L'INCONSISTANCE DU CALCUL CI-DESSUS

Nous allons montrer que l'inconsistance du calcul ci-dessus résulte de l'approximation consentie sur l'assemblage des poutres. A cette fin, partons de l'expression (24) de l'énergie de précontrainte en mode rigide, et appliquons la à deux sous-structures (fig. 15).

Nous affecterons :

- de l'indice I, les forces appliquées à la sous structure I
- de l'indice II/I, les forces appliquées par la sous-structure II à la sous structure I
- de l'indice I/II, les forces appliquées par la sous-structure I à la sous structure II
- de l'indice II, les forces appliquées à la sous structure II



On a alors, pour un mode rigide,

$$U_{gI} = \frac{1}{2}(M_{ijI} + M_{ijII/I})(\omega_k \omega_k \delta_{ij} - \omega_i \omega_j)$$

$$U_{gII} = \frac{1}{2}(M_{ijII} + M_{ijI/II})(\omega_k \omega_k \delta_{ij} - \omega_i \omega_j)$$

soit, en notant  $M_{ij} = M_{ijI} + M_{ijII}$ ,

$$U_g = \frac{1}{2}(M_{ij} + M_{ijII/I} + M_{ijI/II})(\omega_k \omega_k \delta_{ij} - \omega_i \omega_j)$$

Ce résultat ne sera correct que si

$$M_{ijII/I} + M_{ijI/II} = 0$$

soit

$$\int_{S_{II/I}} x_i t_{jII/I} dS + \int_{S_{I/II}} x_i t_{jI/II} dS = 0$$

Ceci est réalisé s'il existe une interface géométrique commune  $S^* = S_{II/I} = S_{I/II}$  auquel cas comme  $t_{jII/I} + t_{jI/II} = 0$ , il vient bien

$$\int_{S^*} x_i (t_{jII/I} + t_{jI/II}) dS = 0$$

Mais dans le cas d'un assemblage de poutres, rien de semblable. En se repérant à la fig. 16, avec l'origine des axes au point de concours des feuillet moyens, on a

$$\begin{aligned} M_{12II/I} &= -M & M_{21II/I} &= 0 \\ M_{12I/II} &= 0 & M_{21I/II} &= -M \end{aligned}$$

On constate qu'il n'y a pas annulation séparée de  $M_{12}$  et  $M_{21}$ . Ceci est dû à la discontinuité géométrique. En fait, l'idéalisation classique suppose implicitement qu'il existe entre les deux poutres un intermédiaire que nous appellerons *noeud* qui transforme les moments  $M_{12}$  en moment  $M_{21}$ . Dans la configuration de la figure 17, le noeud est soumis à

$$M_{12} = \int x_1 t_2 dS = M$$

$$M_{21} = \int x_2 t_1 dS = M$$

ce qui lui donne une énergie de précontrainte

$$U_g = -M_{12} \omega_1 \omega_2 = -M \omega_1 \omega_2 \quad (49)$$

Réexaminons le problème de la section 14 dans cette optique.

a) Poutre AB (Fig. 18)

$$M_{11} = 0 \quad M_{22} = -\frac{Fl}{\sqrt{2}} \quad M_{12} = -\frac{Fl}{\sqrt{2}} \quad M_{21} = -\frac{Fl}{\sqrt{2}}$$

$$U_{gAB} = \frac{Fl}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_3^2) + \omega_1 \omega_2 \right]$$

b) Poutre BC (Fig. 19)

$$M_{11} = -\frac{Fl}{\sqrt{2}} \quad M_{22} = 0 \quad M_{12} = -\frac{Fl}{\sqrt{2}} \quad M_{21} = -\frac{Fl}{\sqrt{2}}$$

$$U_{gBC} = \frac{Fl}{\sqrt{2}} \left[ -\frac{1}{2}(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \omega_1 \omega_2 \right]$$

c) Noeud B (Fig. 20)

$$M_{11} = 0 \quad M_{22} = 0 \quad M_{12} = \frac{Fl}{\sqrt{2}} \quad M_{21} = \frac{Fl}{\sqrt{2}}$$

$$U_{gB} = -\frac{Fl}{\sqrt{2}}\omega_1\omega_2$$

d) Tendeur AC (Fig. 21)

$$M_{11} = \frac{Fl}{\sqrt{2}} \quad M_{22} = \frac{Fl}{\sqrt{2}} \quad M_{12} = \frac{Fl}{\sqrt{2}} \quad M_{21} = \frac{Fl}{\sqrt{2}}$$

$$U_{gAC} = \frac{Fl}{\sqrt{2}} \left[ \frac{1}{2}(\omega_2^2 + \omega_3^2) + \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_3^2) - \omega_1\omega_2 \right]$$

On constate qu'en comptant l'énergie du noeud, on a bien

---


$$U_g = U_{gAB} + U_{gBC} + U_{gB} + U_{gAC} = 0$$

Cette propriété liée à la discontinuité géométrique d'un assemblage de poutres rend ce type d'idéalisations inconsistantes pour l'étude de la précontrainte. Le même problème se pose pour les assemblages spatiaux de plaques. La seule parade consiste à placer systématiquement un objet assurant la continuité de la structure (fig. 22). Il va de soi, d'autre part, que cette difficulté n'apparaît pas dans une idéalisation par éléments tridimensionnels.

## 16. STRUCTURE A GEOMETRIE DE REVOLUTION

Pour la plus grande simplicité, nous travaillerons avec les composantes dites *physiques*. Le procédé qui suit peut s'appliquer à tout système de coordonnées curvilignes orthogonales.

Soient  $\xi_1, \xi_2, \xi_3$  les trois coordonnées. La variation du vecteur position  $s$  a la forme

$$ds = \sum_i h_i e_i d\xi_i$$

où  $e_i$  est un vecteur unitaire. On a donc

$$ds^2 = \sum_i h_i^2 d\xi_i^2$$

Le vecteur déplacement étant  $u$ , on définit alors les composantes physiques du tenseur de Green par

$$d(s+u) \cdot d(s+u) = \sum_{ij} (\delta_{ij} + 2\gamma_{ij}) h_i d\xi_i h_j d\xi_j \quad (50)$$

Développant le premier membre, on obtient

$$\sum_{ij} 2\gamma_{ij} h_i d\xi_i h_j d\xi_j = ds \cdot du + du \cdot ds + du \cdot du \quad (51)$$

Or, on peut écrire, avec  $D_i = \frac{\partial}{\partial \xi_i}$

$$du = \sum_i \left( \frac{1}{h_i} D_i u \right) h_i d\xi_i$$

Il en découle

$$ds \cdot du = \sum_{ij} \left( \frac{1}{h_i} D_i u \right) \cdot e_j h_j d\xi_i h_j d\xi_j = du \cdot ds$$

$$du \cdot du = \sum_{ij} \left( \frac{1}{h_i} D_i u \right) \cdot \left( \frac{1}{h_j} D_j u \right) h_i d\xi_i h_j d\xi_j$$

Introduisons les dérivées physiques

$$u_{j|i} = e_j \cdot \left( \frac{1}{h_i} D_i u \right) \quad (52)$$

On a donc

$$\left( \frac{1}{h_i} D_i u \right) = \sum_k u_{k|i} e_k$$

ce qui permet d'écrire

$$ds \cdot du = \sum_{ij} u_{j|i} h_i d\xi_i h_j d\xi_j$$

$$du \cdot du = \sum_{ij} u_{k|i} u_{k|j} h_i d\xi_i h_j d\xi_j$$

résultat qui introduit dans (51), donne

$$\gamma_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i|j} + u_{j|i} + u_{k|i} u_{k|j}) \quad (53)$$

On déduit

$$W_e = \frac{1}{2} C_{ijkl} \epsilon_{ij} \epsilon_{kl} \quad (54)$$

avec

$$\epsilon_{ij} = \frac{1}{2} (u_{i|j} + u_{j|i}) \quad (55)$$

et

$$W_g = \frac{1}{2} \sigma_{ij} u_{k|i} u_{k|j} \quad (56)$$

Les dérivées physiques (50) se calculent à partir du développement  $u = \sum_k u_k e_k$  en se rappelant que  $D_i e_k \neq 0$

Les structures à géométrie de révolution se calculent à l'aide des coordonnées cylindriques  $(r, \theta, z)$ .

On a

$$ds = dr e_r + r d\theta e_\theta + dz e_z$$

soit

$$h_r = 1, \quad h_\theta = r, \quad h_z = 1$$

Par ailleurs, on vérifie aisément (fig. 23) que

$$\begin{cases} D_r e_r = 0 & D_r e_\theta = 0 & D_r e_z = 0 \\ D_\theta e_r = e_\theta & D_\theta e_\theta = -e_r & D_\theta e_z = 0 \\ D_z e_r = 0 & D_z e_\theta = 0 & D_z e_z = 0 \end{cases}$$

Par conséquent,

$$\begin{cases} D_r u = D_r (u_r e_r + u_\theta e_\theta + u_z e_z) = D_r u_r e_r + D_r u_\theta e_\theta + D_r u_z e_z \\ \frac{1}{r} D_\theta u = \frac{1}{r} D_\theta (u_r e_r + u_\theta e_\theta + u_z e_z) = \left( \frac{1}{r} D_\theta u_r - \frac{u_r}{r} \right) e_r + \left( \frac{1}{r} D_\theta u_\theta + \frac{u_\theta}{r} \right) e_\theta + \frac{1}{r} D_\theta u_z e_z \\ D_z u = D_z (u_r e_r + u_\theta e_\theta + u_z e_z) = D_z u_r e_r + D_z u_\theta e_\theta + D_z u_z e_z \end{cases}$$

ce qui revient à dire

$$\begin{aligned} u_{r|r} &= D_r u_r & u_{r|\theta} &= \frac{1}{r} D_\theta u_r - \frac{u_r}{r} & u_{r|z} &= D_z u_r \\ u_{\theta|r} &= D_r u_\theta & u_{\theta|\theta} &= \frac{1}{r} D_\theta u_\theta + \frac{u_\theta}{r} & u_{\theta|z} &= D_z u_\theta \\ u_{z|r} &= D_r u_z & u_{z|\theta} &= \frac{1}{r} D_\theta u_z & u_{z|z} &= D_z u_z \end{aligned} \quad (57)$$

les déformations sont donc

$$\begin{aligned}
\epsilon_{rr} &= u_{r|r} = D_r u_r \\
\epsilon_{\theta\theta} &= u_{\theta|\theta} = \frac{1}{r} D_\theta u_\theta + \frac{u_r}{r} \\
\epsilon_{zz} &= u_{z|z} = D_z u_z \\
2\epsilon_{rz} &= u_{r|z} + u_{z|r} = D_r u_z + D_z u_r \\
2\epsilon_{r\theta} &= u_{r|\theta} + u_{\theta|r} = \frac{1}{r} D_\theta u_r - \frac{u_\theta}{r} + D_r u_\theta \\
2\epsilon_{\theta z} &= u_{\theta|z} + u_{z|\theta} = D_z u_\theta + D_\theta u_z \frac{1}{r}
\end{aligned} \tag{58}$$

Nous nous limiterons au cas d'une précontrainte axisymétrique, caractérisée par

$$\begin{cases} \sigma_{rr}, \sigma_{\theta\theta}, \sigma_{zz}, \sigma_{rz} \neq 0 \\ \sigma_{r\theta}, \sigma_{\theta z} = 0 \\ D_\theta \sigma_{rr} = D_\theta \sigma_{\theta\theta} = D_\theta \sigma_{zz} = D_\theta \sigma_{rz} = 0 \end{cases} \tag{59}$$

L'énergie de précontrainte est alors

$$\begin{aligned}
U_g &= \frac{1}{2} \int_V \{ \sigma_{rr} [u_{r|r}^2 + u_{\theta|r}^2 + u_{z|r}^2] + \sigma_{\theta\theta} [u_{r|\theta}^2 + u_{\theta|\theta}^2 + u_{z|\theta}^2] \\
&\quad + \sigma_{zz} [u_{r|z}^2 + u_{\theta|z}^2 + u_{z|z}^2] + 2\sigma_{rz} [u_{r|r} u_{r|z} + u_{\theta|r} u_{\theta|z} + u_{z|r} u_{z|z}] \} dV
\end{aligned}$$

On peut évidemment omettre tous les termes contenant une des déformations  $u_{r|r}, u_{\theta|\theta}, u_{z|z}$ , ce qui donne

$$U_g = \frac{1}{2} \int_V \{ \sigma_{rr} [u_{\theta|r}^2 + u_{z|r}^2] + \sigma_{\theta\theta} [u_{r|\theta}^2 + u_{z|\theta}^2] + \sigma_{zz} [u_{r|z}^2 + u_{\theta|z}^2] + 2\sigma_{rz} u_{\theta|r} u_{\theta|z} \} dV \tag{60}$$

soit explicitement :

$$\begin{aligned}
U_g &= \frac{1}{2} \int_V \{ \sigma_{rr} [(D_r u_\theta)^2 + (D_r u_z)^2] + \sigma_{\theta\theta} [(\frac{1}{r} D_\theta u_r - \frac{u_\theta}{r})^2 + (\frac{1}{r} D_\theta u_z)^2] \\
&\quad + \sigma_{zz} [(D_z u_r)^2 + (D_z u_\theta)^2] + 2\sigma_{rz} D_r u_\theta D_z u_\theta \} dV
\end{aligned} \tag{61}$$

Examinons dans quelles conditions l'énergie de précontrainte sera nulle pour une précontrainte intérieure. Le théorème des travaux virtuels s'écrit ici, pour la précontrainte, ( $\delta u_\theta = 0$ )

$$\begin{aligned}
\int_V [\sigma_{rr} D_r \delta u_r + \sigma_{\theta\theta} \frac{\delta u_r}{r} + \sigma_{zz} D_z \delta u_z + \sigma_{rz} (D_r \delta u_z + D_z \delta u_r)] dV \\
= \int_V (\bar{f}_r \delta u_r + \bar{f}_z \delta u_z) dV + \int_S (\bar{t}_r \delta u_r + \bar{t}_z \delta u_z) dS
\end{aligned} \tag{62}$$

Appelons  $A$  la section méridienne de la structure. On a alors

$$dV = 2\pi r dA$$

et, en notant  $\partial A$  la frontière de  $A$ ,

$$\begin{aligned}
2\pi \int_A [r\sigma_{rr} D_r \delta u_r + \sigma_{\theta\theta} \delta u_r + r\sigma_{zz} D_z \delta u_z + r\sigma_{rz} (D_r \delta u_z + D_z \delta u_r)] dA \\
= 2\pi \int_A (r\bar{f}_r \delta u_r + r\bar{f}_z \delta u_z) dA + 2\pi \int_{\partial A} (r\bar{t}_r \delta u_r + r\bar{t}_z \delta u_z) d\theta A
\end{aligned} \tag{63}$$

Par ailleurs, un mode rigide a la forme générale

$$\begin{aligned}
u_1 &= a_1 - \omega_3 x_2 + \omega_2 x_3 = a_1 - \omega_3 r \sin \theta + \omega_2 z \\
u_2 &= a_2 + \omega_3 x_1 - \omega_1 x_3 = a_2 + \omega_3 r \cos \theta - \omega_1 z \\
u_3 &= a_3 - \omega_2 x_2 + \omega_1 x_3 = a_3 - \omega_2 r \cos \theta + \omega_1 r \sin \theta
\end{aligned}$$

et comme (fig. 24)

$$u_r = u_1 \cos \theta + u_2 \sin \theta \quad u_\theta = -u_1 \sin \theta + u_2 \cos \theta$$

on obtient

$$\begin{aligned} u_r &= a_1 \cos \theta + a_2 \sin \theta + z(\omega_2 \cos \theta - \omega_1 \sin \theta) \\ u_\theta &= -a_1 \sin \theta + a_2 \cos \theta + \omega_3 r - z(\omega_2 \sin \theta + \omega_1 \cos \theta) \\ u_z &= a_3 - r(\omega_2 \cos \theta - \omega_1 \sin \theta) \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} u_{\theta|r} &= D_r u_\theta = \omega_3 & u_{z|r} &= D_r u_z = \omega_1 \sin \theta - \omega_2 \cos \theta \\ u_{r|\theta} &= \frac{1}{r} D_\theta u_r - \frac{u_z}{r} = -\omega_3 & u_{z|\theta} &= \frac{1}{r} D_\theta u_z = \omega_2 \sin \theta + \omega_1 \cos \theta \\ u_{r|z} &= D_z u_r = -\omega_1 \sin \theta + \omega_2 \cos \theta & u_{\theta|z} &= D_z u_\theta = -\omega_2 \sin \theta - \omega_1 \cos \theta \end{aligned}$$

On obtient donc

$$\begin{aligned} U_g &= \frac{1}{2} \int_V \{ \sigma_{rr}(\omega_3^2 + \omega_1^2 \sin^2 \theta + \omega_2^2 \cos^2 \theta - 2\omega_1 \omega_2 \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + \sigma_{\theta\theta}(\omega_3^2 + \omega_2^2 \sin^2 \theta + \omega_1^2 \cos^2 \theta + 2\omega_1 \omega_2 \sin \theta \cos \theta) \\ &\quad + \sigma_{zz}(\omega_1^2 + \omega_2^2) + 2\sigma_{rz}\omega_3(-\omega_2 \sin \theta - \omega_1 \cos \theta) \} dV \end{aligned}$$

soit encore, après intégration par rapport à  $\theta$ ,

$$U_g = \frac{\pi}{2} \int_A [r\sigma_{rr}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2) + r\sigma_{\theta\theta}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2) + 2r\sigma_{zz}(\omega_1^2 + \omega_2^2)] dA$$

Cette expression peut se mettre sous la forme du premier membre de (63) à condition de poser

$$\begin{aligned} \delta u_r &= \frac{1}{4}(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2)r \\ \delta u_z &= \frac{1}{2}(\omega_1^2 + \omega_2^2)z \end{aligned} \quad (64)$$

Il vient donc, pour un mode rigide,

$$\begin{aligned} U_g &= \frac{\pi}{2} \int_A [(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2)r^2 \bar{f}_r + 2(\omega_1^2 + \omega_2^2)zr \bar{f}_z] dA \\ &\quad + \frac{\pi}{2} \int_{\partial A} [(\omega_1^2 + \omega_2^2 + 2\omega_3^2)r^2 \bar{t}_r + 2(\omega_1^2 + \omega_2^2)r \bar{t}_z z] d\theta A \end{aligned}$$

ce qui signifie que le modèle est consistant pourvu que les éléments finis utilisés représentent les déplacements linéaires  $\delta u_r = k_1 r$ ,  $\delta u_z = k_2 z$ .

On vérifie d'ailleurs que les contraintes moyennes à prendre en compte sont les moyennes volumiques du type

$$\frac{1}{V} \int_A 2\pi r \sigma_{ij} dA$$

et non les moyennes sur le plan méridien

$$\frac{1}{A} \int_A \sigma_{ij} dA$$

que l'on utilise souvent pour leur plus grande simplicité d'interprétation.

## 17. CONCLUSIONS

Il ressort de notre analyse que la formulation linéarisée des structures précontraintes est fondamentalement saine, en ce sens qu'elle permet, d'une part, de tenir compte de l'effet pendulaire et que, d'autre part, elle préserve en principe cette propriété fondamentale que, pour une structure intérieurement précontrainte, les modes rigides sont dépourvus d'énergie.

Les diverses simplifications habituelles ont été subdivisées en approximations consistantes ou non, selon le comportement qu'elles induisent lors de modes rigides. En particulier, nous avons montré qu'il est parfaitement licite d'utiliser des contraintes calculées par éléments finis et même d'en prendre les moyennes d'éléments. Cependant, on néglige souvent les termes relatifs aux efforts tranchants, ce qui n'est pas consistant.

Malheureusement, il ressort de notre analyse qu'aucune approximation géométrique ne peut être admise, sous peine d'inconsistance. C'est là la limitation la plus sévère, car elle interdit en pratique tous les assemblages pratiques de poutres et de plaques, où l'on transmet des moments de nature différente.

## BIBLIOGRAPHIE

- [1] J.F. Debongnie , " modélisation de problèmes hydroélastiques par éléments finis - application aux lanceurs aérospatiaux " , Thèse de doctorat en sciences appliquées, Liège , 1978
- [2] J. F. Debongnie , " Etude des structures anisotropes pouvant être incompressibles et application à un élément fini de tore triangulaire" , Rapport LTAS SF-32 .
- [3] J. F. Debongnie , " Analyse dynamique des structures pouvant être incompressibles à l'aide d'un élément fini de tore triangulaire" , Rapport LTAS VF-28
- [4] S. Timoshenko, J. Gere , " Theory of elastic stability" , 2d ed. , MC Graw Hill, New York, Toronto, London , 1961

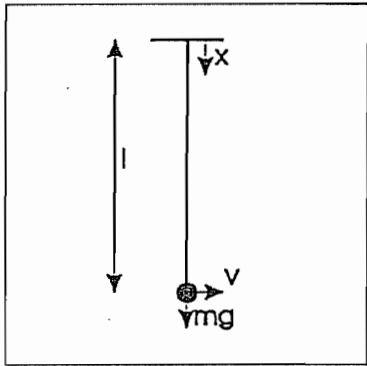


Figure 1

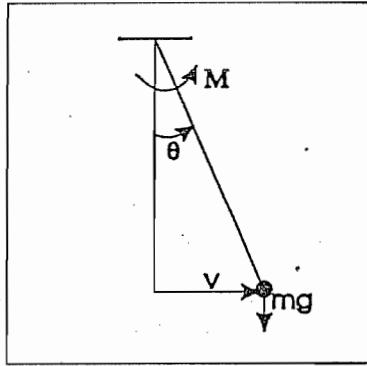


Figure 2

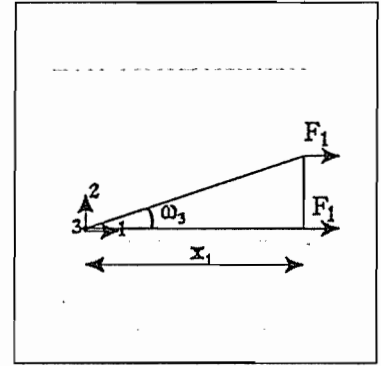


Figure 3

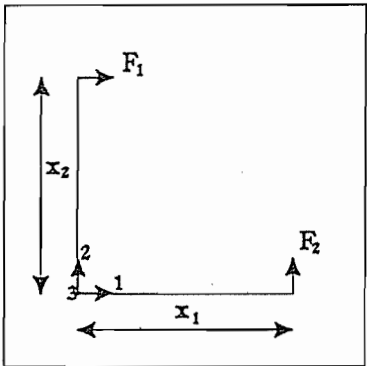


Figure 4

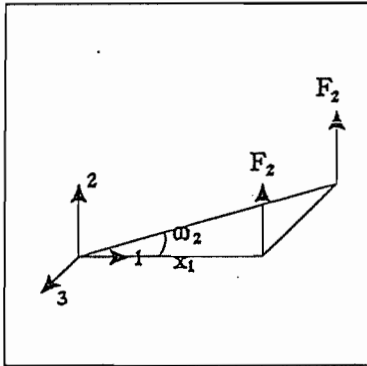


Figure 5

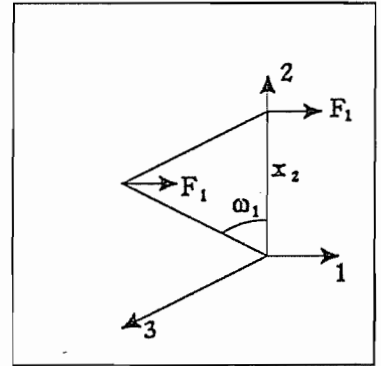


Figure 6

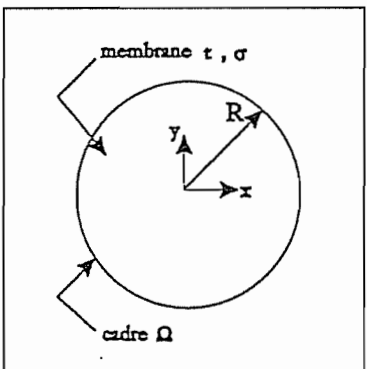


Figure 7

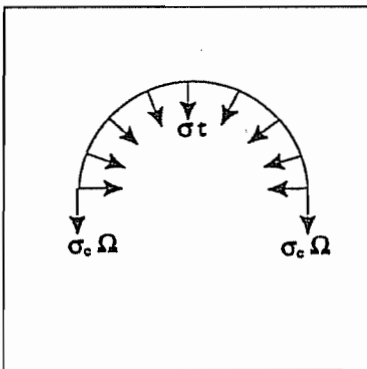


Figure 8

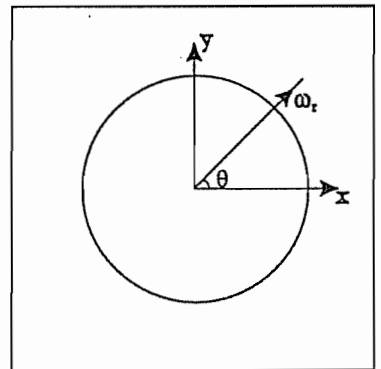


Figure 9



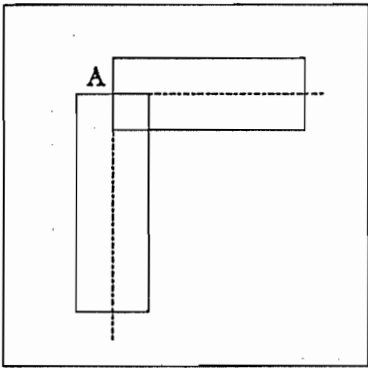


Figure 10

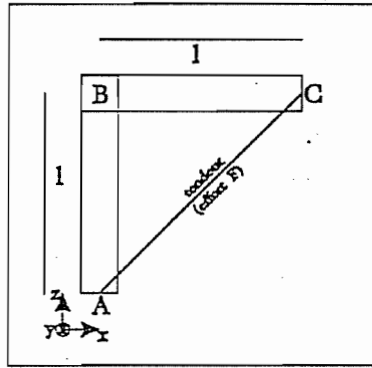


Figure 11

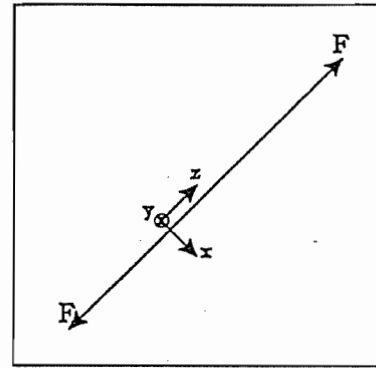


Figure 12

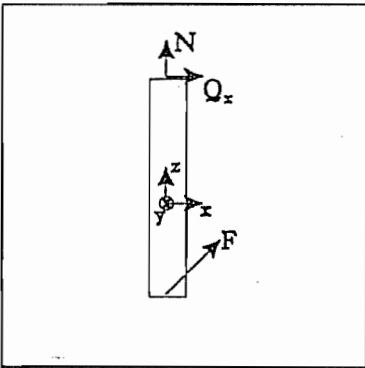


Figure 13

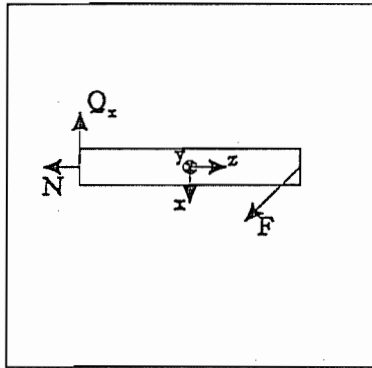


Figure 14

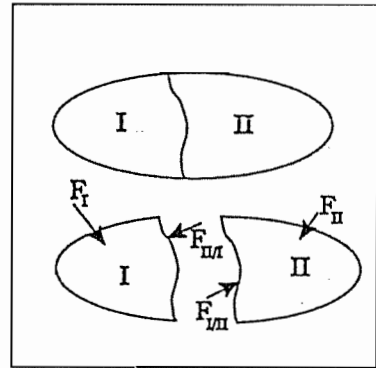


Figure 15

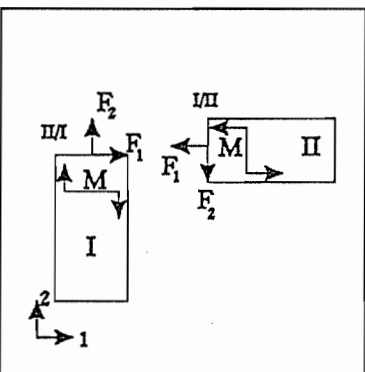


Figure 16

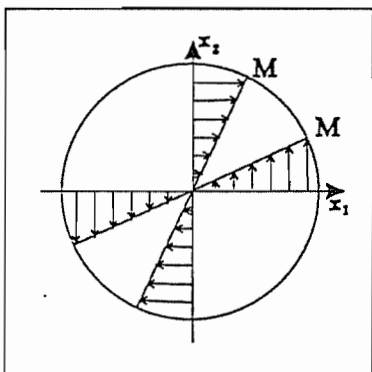


Figure 17

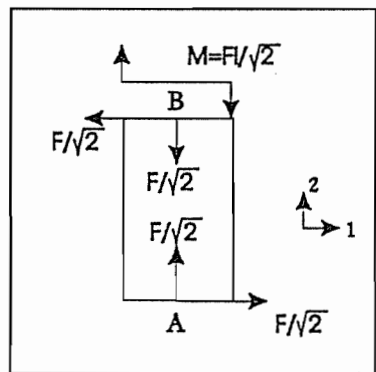


Figure 18

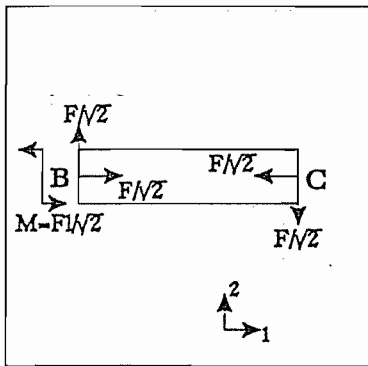


Figure 19

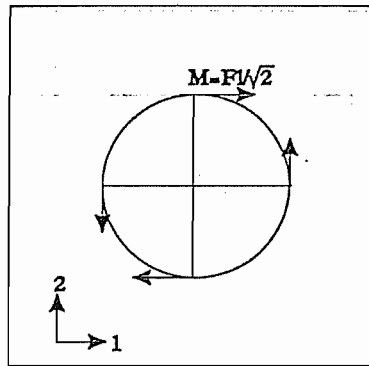


Figure 20

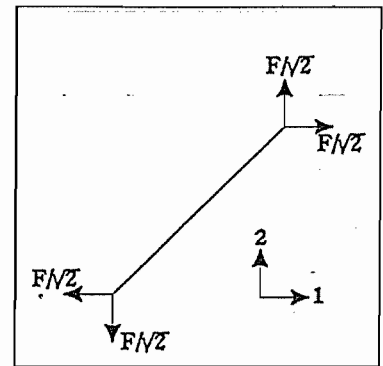


Figure 21

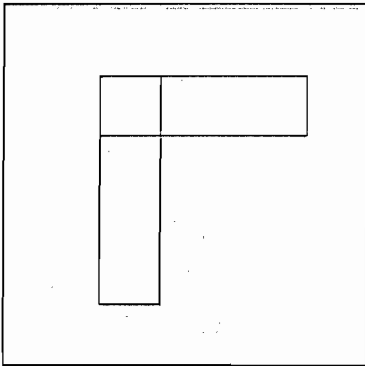


Figure 22

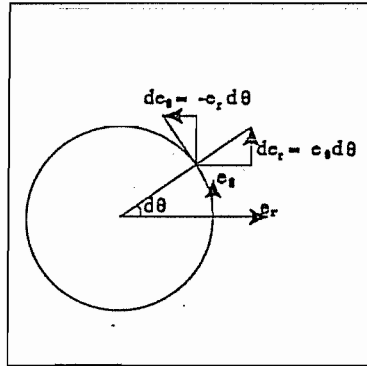


Figure 23

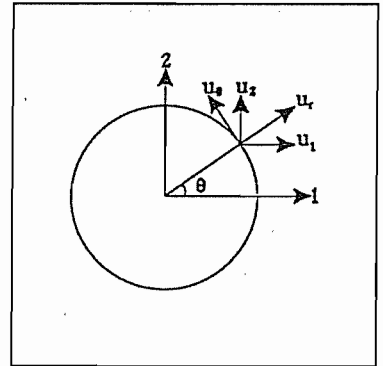


Figure 24